Math

التفوق

في الرياضيات

للمرحلة الثانوية الفرع (الأدبي)

إعداد

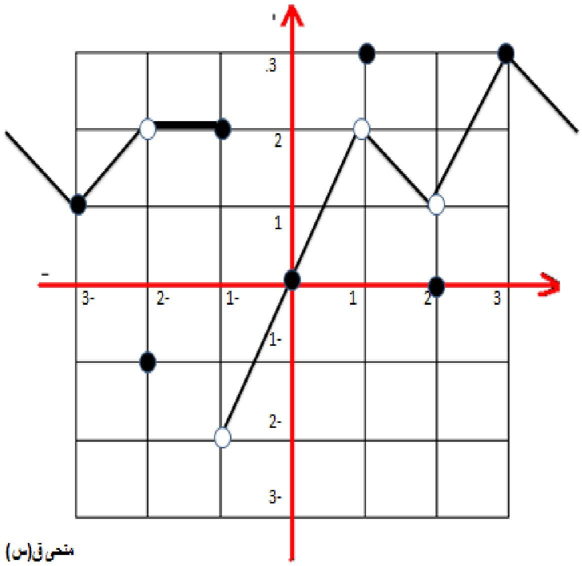
أ . بشار أبو العمّاش

٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

قل ربي زدني علما

الدرس الأول (نهاية الاقتران عند نقطة)

١- بناءا على الشكل التالي أجب عن الاسئلة



منحنى ق(س)

1- نها ق(س)   س ← -2-

2- نها ق(س)   س ← -2

3- نها ق(س)   س ← +2

4- نها ق(س)   س ← -3

5- نها ق(س)   س ← صفر+

6- نها ق(س)   س ← صفر-

7- نها ق(س)   س ← 1

8- نها ق(س)   س ← 1+

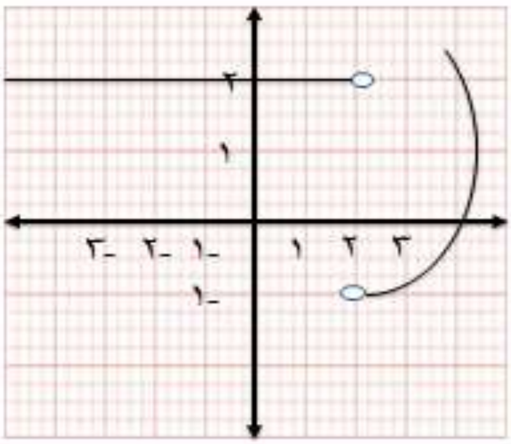
9- نها ق(س)   س ← 1-

10- ق(1)

11- ق(2)

12- ق(3)

- اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحى الاقتران ق(س) جد ما يلي :



نهـــا ق(س) =   س ← ٢+

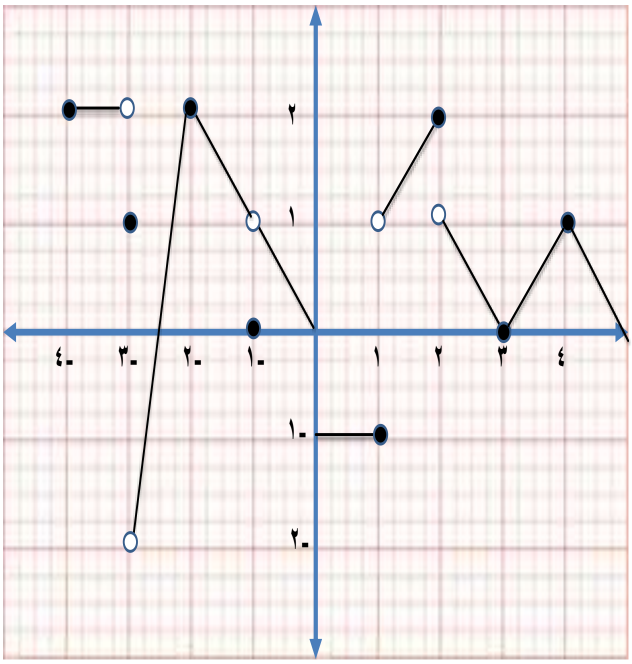
نهـــا $\sqrt{٤\ ق(س)} + \frac{١}{٤}$ س .   س ← -٢

٤- بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم ق(س)

عند س ← ٢ فإن نهــــا ق(س) =
س ← ٢-

س	٢,٠٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩٩	١,٩٨
ق(س)	٥,٠١	٥,٠٠١		٠,٩٩	٠,٩٨

٥- بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)، أجب على الاسئلة التالية:



نهــــا ق(س) =
س ← ١

نهــــا ق(س) =
س ← ٣

نهــــا ق(س) =
س ← ٠+

نهــــا ق(س) =
س ← -٣

نهــــا ق(س) =
س ← -٤

٦- بالاعتماد على شكل منحنى الاقتران في سؤال رقم (٥) جد قيم / قيمة المتغيرات في كلا من ..

نهــــا ق(س) = غير موجودة
س ← أ

نهــــا ق(س) = -١
س ← ب+

نهــــا ق(س) = -٢
س ← ج+

نهــــا ق(س) = صفر
س ← هـ-

اذا كان ق(س) = { ٢س + ٥ ، س < ٢
٣س − ١ ، س > ٢

فكون جدولا لإيجاد قيمة نهــــا ق(س)
س ← ٢

الدرس الثاني (نظريات على النهايات)

جد النهايات التالية

$$\underset{\text{س} \to \text{-١}}{\text{نهـا}} \left(\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٤} \right)$$

$$\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \sqrt[\text{٣}]{\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٧}}$$

$$\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} + \text{٥}} \times \left(\text{س} - \text{٥} \right)$$

اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{٦}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \text{٤}$ ؛ اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{٦}}{\text{نهـا}} \text{٢هـ(س)} = \text{٦}$ فجد

$\underset{\text{س} \to \text{٦}}{\text{نهـا}} \left(\text{س ق(س)} - \text{هـ(س)} + \text{٤} \right)$.

الأسباب العشرة لفقد الحماس للدراسة

١ـ غياب تحديد الهدف من الدراسة.
٢ـ تربية الابناء على الاتكالية والكسل.
٣ـ الصداقات السيئة و رفقاء السوء.
٤ـ الدراسة غير المنظمة .
٥ـ القلق الزائد و المشاكل الاسرية.
٦ـ السلبية وعدم الثقة بالنفس .
٧ـ الأنشطة الخارجية غير الهادفة.
٨ـ فقدان القدوة والدعم الاسري.
٩ـ المرض سواء كان جسميا او نفسيا.
١٠ـ البرامج المدرسية غير المشوّقة والمدرسون المملّون .

اذا كانت $\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{٢س} + \text{٤} & \text{؛ س} \le \text{٣} \\ \text{٦س} + \text{١٦} & \text{؛ س} > \text{٣} \end{cases}$ فجد ما يلي :

$\underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \text{ق (س)}$

اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}} \text{ق (س)} = \text{٤}$ فجد

$\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}} \left(\text{س ق(س)} - \text{٣} \right)$.

اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}} \text{٤س} + \text{٣م} = \text{م} + \text{١}$ فجد قيمة (م)

أ- جد النهايات التالية :

١- نهـا ٣ .

٢- $\lim_{س \to ٣}$ (٣س) .

٣- $\lim_{س \to ٢}$ ($س^{٢}$ + ٢س − ٢) .

٤- $\lim_{س \to -١}$ (س + ٣) .

٥- $\lim_{س \to ٥}$ $س^{٢}$ + س - ٣

ب- اذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ ٢س + أ = ٢٠ . فما قيمة (أ) .

ت- اذا كانت $\lim_{س \to ٣}$(٢ق(س) − ٣س +٧ = ٨ ، فجد

قيمة $\lim_{س \to ٣}$ $ق^{٢}$(س) .

ت- اذا كانت ق(س) :

$$ق(س) = \begin{cases} س - م ، & س < 3 \\ 2 + س^{2} ، & س > 3 \end{cases}$$

فجد قيمة (م) اذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة .

ج- اذا كانت $\lim_{س \to أ}$ (٢$س^{٢}$ -٦س + ١٢ = ٣٢) فجد

قيمة المتغير (أ) .

ح – اذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ق(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) =١

$\lim_{س \to ٢}$ ع(س) = ٣ ، فجد كلا من :

١- $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + ٢هـ(س) + س .

٢- $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)^{٢} + ٢هـ(س)}{ع(س)}$

الدرس الرابع : الجذر النوني.

تذكر عزيزي الطالب

$\sqrt{\text{عدد موجب}}$ ← موجود : مثل $\sqrt{5}$

$\sqrt{\text{عدد سالب}}$ ← غير موجود (قيمة غير معرفة)

- جد ما يلي:

اذا كانت $ق(س) = \sqrt[3]{7س + 1}$ ؛ $هـ(س) = \sqrt{س^2 + 7}$

فجد ما يلي :

- $\underset{س \to 1}{\text{نهــا}}\ ق(س)$

- $\underset{س \to -2}{\text{نهــا}}\ ق(س) + \underset{س \to 3}{\text{نهــا}}\ ق(س)$

- $\dfrac{\underset{س \to 1}{\text{نهــا}}\ (\ ق(س) + 3س + 1\ )}{4}$

تذكر عزيز الطالب عند طلب النهاية لرقم ما ندرس نهايته من اليمن واليسار

عزيزي الطالب عند طلب نهاية لرقم تحت جذر فإننا نقوم بما يلي:

١- نجد نهاية الرقم من اليمين وذلك بأخذ أي رقم أكبرمن الرقم المعطى تحت الجذرفإذا كان الناتج موجب كانت النهاية من جهة اليمين موجودة واذا كان سالب فإن النهاية غير موجودة

١- نجد نهاية الرقم من اليسار وذلك بأخذ أي رقم أصغرمن الرقم المعطى تحت الجذرفإذا كان الناتج موجب كانت النهاية من جهة اليسار موجودة واذا كان سالب فإن النهاية غير موجودة

٣- نقارن ما بين النهايتي (اليمين واليسار) فإذا كانت موجودة كانت نهاية الرقم الذي تحت الجذر موجودة والعكس صحيح

مثال : اذا كانت $ق(س) = \sqrt{س - 2}$ ، $هـ(س) = \sqrt{2 - س}$

جد النهايات التالية :

$\underset{س \to 2}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ $\qquad$ $\underset{س \to -2}{\text{نهــا}}\ هـ(س)$

الحل :

$\underset{س \to 2}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ (نلاحظ انه لم يحدد اتجاه الرقم (٢) ما تحت الجذر لذا يجب ان تأخذ نهايته من اليمين واليسار)

$\underset{س \to 2^+}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ (نأخذ أي رقم أكبر من ٢ وليكن ٣) $= \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1}$

نلاحظ ان حاصل ما تحت الجذر كان موجبا اذا $\underset{س \to 2^+}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ موجودة

$\underset{س \to 2^-}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ (نأخذ أي رقم أصغر من ٢ وليكن ١) $= \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1}$

نلاحظ ان حاصل ما تحت الجذر كان سالبا اذا $\underset{س \to 2^-}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ غير موجودة

نلاحظ ان $\underset{س \to 2^+}{\text{نهــا}}\ ق(س) \neq \underset{س \to 2^-}{\text{نهــا}}\ ق(س)$

ومنه $\underset{س \to 2}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ غير موجودة

أكمل الفرع الثاني من السؤال

ملخص طرق ايجاد النهاية من خلال الجذور

- اذا كان دليل الجذر عدد فردي دائما النهاية موجوده
  - مثل: $\lim_{\text{س} \to } \sqrt[٥]{٦ - ٧\text{س}}$ (تعويض مباشر)
    - الناتج (١-)
    - دليل الجذر
- اذا كان دليل الجذر عدد زوجي تعوض مباشره
  - $\sqrt{\text{ما تحت الجذر } (+)}$ ← النهاية موجوده
  - $\sqrt{\text{ما تحت الجذر } (+)}$ ← النهاية غ . م
  - $\sqrt{\text{ما تحت الجذر (صفر)}}$ ← ندرس الاشاره حول(س)

جد النهايات التالية:

$$\lim_{\text{س} \to -١} \sqrt[٣]{٧ - \text{س}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \sqrt{٤\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٤} \sqrt[٤]{٦ - ٢\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \sqrt[٥]{٦ - ٢\text{س}}$$

اذا كان ناتج التعويض المباشر صفرا

$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \sqrt{\text{س}}$ لاحظ ان التعويض المباشر = صفرا

ندرس الإشارة حول صفر كالتالي

- - - - - - - - صفر + + + + + + +

الجواب + لاننا أخذنا رقم أكبر من صفر فمثلا (١) فيكون ما تحت الجذر (+) اذا النهاية من جهة اليمين موجوده

الجواب (-) لاننا أخذنا رقم أكبر من صفر فمثلا (١-) فيكون ما تحت الجذر (-) اذا النهاية من جهة اليسار غير موجودة

$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \sqrt{\text{س}}$ غير موجودة

جد النهايات التالية :

$$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \sqrt{- \text{س}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٤^{+}} \sqrt{\text{س} - ٤}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \sqrt{٢\text{س} - ٤}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{صفر}} \sqrt{(\text{س})^{٢}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \sqrt[٥]{-٣٢}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٤} \sqrt{-٦٤}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٩}$$

الدرس الثالث: نهاية خارج قسمة اقترانين

تذكر :
أن الاقتران النسبي هو الاقتران الذي يكون على صورة بسط ومقام

عند إيجاد نهاية الاقتران النسبي

↓

تعويض مباشر

↓

- الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ ← الناتج كما هو
- الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ ← الناتج صفر
- الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ← نستخدم
  - تحليل / اختصار
  - ضرب مرافق
  - توحيد مقامات

جد النهايات التالية :

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} + ٢}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{٢\text{س} - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow -٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ٦} - ٣}{\text{س} - ٣}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{(\text{س} + ٤)^٢ - ٤٩}{\text{س}^٢ - ٩}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{٧\text{س} - ١٤}{(٢\text{س} + ١)^٢ - ٢٥}$$

الناجحون يسألون أسئلة أفضل ولذلك
يحصلوا على إجابات أفضل

جد النهايات التالية :

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢ + ٦\text{س}}{\text{س} - ٤}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow -٢} \frac{٢\text{س} + ٤}{\text{س} + ٢}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow -٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١٢} - ٣}{\text{س} + ٣}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow \text{صفر}} \frac{٨}{\text{س}^٢} \div \frac{٦}{٣\text{س}^٢ + \text{س}^٣}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٥} \frac{(\text{س} - ١)^٢ - ١٦}{\text{س} - ٥}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{س}^٢}{\sqrt{\text{س}^٢ + ٤} - ٢}$$

ضع قدمك على أول
خطوة لطريقك للنجاح
وعينك على آخره

$\sqrt{س - أ} - ب$ مرافقه $\sqrt{س - أ} + ب$ وحاصل ضربهما $(س - أ) - ب^2$

$\sqrt{س - أ} + ب$ مرافقه $\sqrt{س - أ} - ب$ وحاصل ضربهما $(س - أ) - ب^2$

٨- $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{1 - س}$

٩- $\lim_{س \to 9} \frac{\sqrt{س} - 3}{س^2 - 81}$

١٠- $\lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{\sqrt{5س - 4} - \sqrt{س}}$

١١- $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س + 1} - 2}{س - 3}$

تذكر ...

$\sqrt{س} - 3$ مرافق له $\sqrt{س} + 3$

والناتج = $(س - 9)$

تذكر ...

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{جـ}{د} = \frac{(أ \times د) \pm (جـ \times ب)}{ب \times د}$$

١٢- $\lim_{س \to 3} \frac{\frac{1}{س + 2} - \frac{1}{5}}{س - 3}$

١٣- $\lim_{س \to 2} \frac{\frac{1}{س} - \frac{1}{2}}{2 - س}$

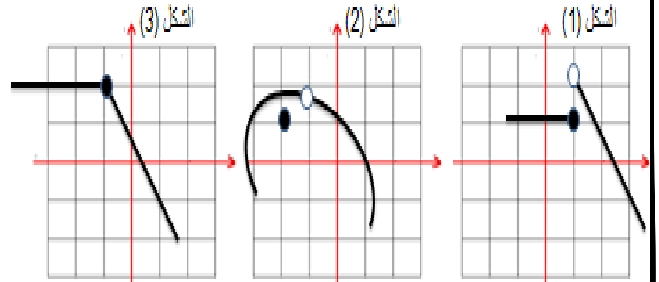
١٤- $\lim_{س \to 3} \frac{\frac{1}{س + 3} + \frac{1}{2س}}{3 - س}$

١٥- $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س + ٢} \quad \frac{١}{٥}}{٢س - ٦}$

الدرس الرابع : الاتصال .

يكون الاقتران ق(س) متصل اذا كانت نهـــا ق(س) = ق(س)

يكون ق(س) متصل عند النقطة (أ) من خلال الرسم ، اذا لم يكن هناك انقطاع في منحنى الاقتران كما في الشكل (1).
أو عدم وجود فجوة في المنحنى كما في الشكل (2)



غير متصل لوجود انقطاع، النهاية غير موجودة .

غير متصل لوجود فجوة . نهـــا ق(س) ≠ ق(س)

الاقتران ق(س) متصل . نهـــا ق(س) = ق(س)

الاقتران كثير الحدود مثل (س^2 + ٢س – ٣) متصل لجميع الاعداد الحقيقية .

الاقترانات النسبية مثل : $\frac{2س}{2س^2+س}$ متصل على (ح) ، باستثناء أصفار المقام .

هناك (٦) أشياء يمكن السؤال عنها في موضوع الاتصال وهي:

١ -من خلال الرسم والسؤال عن اتصال الاقتران عند نقطة معينة

٢ -إعطاء اقتران متشعب وطلب البحث في اتصاله عند نقطة وهنا نبحث الشروط الثلاثة الواردة في الملاحظة

٢- إعطاء اقتران متشعب يحتوي على قيمة مجهولة مثل (م) وطلب قيمتها التي تجعله متصلاً عند نقطة التشعب تماماً مثل النهاية.

٤ -إعطاء اقتران نسبي وطلب نقاط عدم الاتصال(هنا نبحث عن النقاط التي تجعل المقام صفراً)

٥ -إعطاء اقترانين قد يكون أحدهما متشعب أو كليهما وطلب البحث في اتصال مجموعهما أو الفرق بينهما ... عندها الأفضل إجراء العملية المطلوبة أولاً ثم البحث في اتصال الاقتران الناتج كما في الملاحظة(٢)

٦ -إعطاء اقتران متشعب وطلب البحث في اتصاله على فترة مغلقة) في هذه الحالة هناك ٣ مراحل :

- الاتصال على الفترة المفتوحة .
- الاتصال على حد الفترة الأصغر وبحث النهاية من اليمين فقط .
- الاتصال على حد الفترة الأكبر وبحث النهاية من اليسار فقط .

-١ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 3\text{س} + 5 \text{ ، } \text{س} < 2 \\ 6\text{س} - 1 \text{ ، } \text{س} \geq 2 \end{cases}$

فأبحث في اتصال ق(س) عند س = 2

-٢ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - 4 \text{ ، } \text{س} \leq 2 \\ 2\text{س} - 2 \text{ ، } \text{س} > 2 \end{cases}$

فأبحث في اتصال ق(س) عند س = 2

-٣ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{أ} \text{ ، } \text{س} \leq 3 \\ \text{أس} + 1 \text{ ، } \text{س} > 3 \end{cases}$

فجد قيم (أ) التي تجعل الاقتران متصل عند س = 3

-٤ اذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س} + 3\text{س}^2}{\text{س}^2 + 3\text{س} - 4}$

فجد نقاط عدم الاتصال للاقتران ق(س) .

-٥ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - 1 \text{ ، } 2 \leq \text{س} < 4 \\ 9 \text{ ، } \text{س} = 4 \end{cases}$

فأبحث في اتصال ق(س) خلال الفترة (2 ، 4)

-٦ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 3\text{س} - 2\text{س} \text{ ، } 1 \leq \text{س} < 3 \\ \dfrac{\text{س} + 6}{\text{س} - 4} \text{ ، } 3 \leq \text{س} < 6 \end{cases}$

فأبحث في اتصال ق(س) خلال الفترة (1 ، 6)

ضع دائما صورتك التي تريد أن تكون عليها في عقالك و مخيلتك ، و ستتجه تدريجيا نحوها ... إذا لم تهزم نفسك ، ستهزمك نفسك ... سلم النجاه لا يعاني من الازدحام في اعلاه

٧- اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 2\text{س} + 1 & \text{، س} < 5 \\ \text{س} + 6 & \text{، س} \geq 5 \end{cases}$ ، وكان هـ(س) = 3س .

فأبحث في إتصال ق(س) × هـ(س) ، عند س = 5 .

٨- اذا كان ق(س) = $\begin{cases} 4\text{س} + 1 & \text{، س} < 2 \\ \text{س}^2 + 5 & \text{، س} \geq 2 \end{cases}$ ، وكان هـ(س) = 2س + 1 .

فأبحث في إتصال ق(س) + هـ(س) ، عند س = 2 .

٩- اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - ٣٦ & \text{، س} \neq ٦ \\ \text{ب} & \text{، س} = ٦ \end{cases}$

جد قيمة (ب) التي تجعل ق (س) متصلا عند س = ٦

١٠- اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + 7 & \text{، س} \geq 1 \\ 3\text{س}^3 + 5 & \text{، س} < 1 \end{cases}$ ، وكان هـ(س) = 4 س^3 .

فأبحث في إتصال ق(س) × هـ(س) ، عند س = 1 .

اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - ٣\text{س} - ٤ & \text{، س} \neq ٤ \\ \text{أ} & \text{، س} = ٤ \end{cases}$

جد قيمة (أ) التي تجعل ق (س) متصلا عند س = ٤

الوحدة الثانية

التفاضل

اسباب النسيان في الامتحان

1- عدم الثقة بذاكرتك و الاعتقاد الراسخ بأنها ضعيفة.
2- عدم اختيارك الوقت المناسب للمذاكرة.
3- عدم تخصيصك الوقت الكافي للاستذكار و الاستيعاب.
4- المقارنة بالآخرين والتذكير بالفشل.
5- الخوف والتوتر.
6- اعتمادك على الحفظ و عدم التركيز على الفهم .
7- عدم ترديد و تكرار المعلومات.
8- عدم ربط المعلومات بالمحسوسات(مثل :عدم تثبيت المعلومات بالكتابة).
9- عدم تلخيص الموضوعات و استخدام الرسوم و الالوان.
10- السهر و قلّة النوم قبل يوم الامتحان.
11- عدم عمل بروفة للامتحان(التسميع الكتابي او الشفهي).
12- وجود مشكلات عاطفية.
13- انعدام الأمن والقلق المستمر .
14- سوء التغذية (عدم الإنتظام بالأكل ووجبات الغذاء).

الدرس الاول : معدل التغير

تذكر عزيزي الطالب أن...

- (ص$_{١}$) هي ق (س$_{١}$).
- (ص$_{٢}$) هي ق (س$_{٢}$).

- اذا كانت ق (س) = ٣س - ٤ ، وتغيرت س من (٢) الى (٥) ، فجد Δس

- ما مقدار التغير في (ص) للاقتران ق(س)=٣- س^{٢} عندما تتغير س من ٣ الى ١.

اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ٦ & ، س < ٢ \\ س^{٢} - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

فجد متوسط التغير للاقتران ق (س)

- اذا كان متوسط التغير للاقتران (ق) خلال الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ ، وكان الاقتران هــ(س)= ق(س)- س ، فجد متوسط التغير للاقتران هــ(س) في الفترة [١ ، ٣].

- يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن)= ن + ٣ ، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالامتار،فجد السرعة المتوسطة للجسيم خلال الفترة من [١ ، ٣].

- اذا كان ق(س) = ٨س فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠ ، ق(٠)) (٣ ، ق(٣)) .

أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

ما مقدر التغير في (س) اذا تغيرت (س) من :

أ- $\text{س}_{١} = ٥$ الى $\text{س}_{٢} = ٧$.

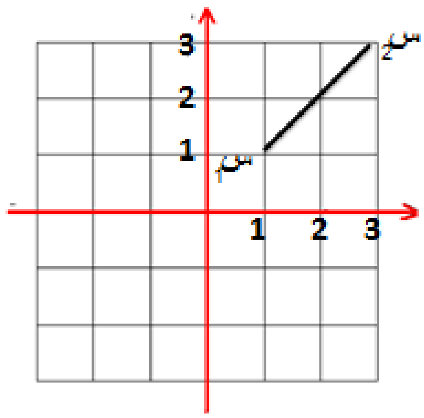
ب- $\text{س}_{١}$ = صفر الى $\text{س}_{٢} = ٣$.

ت- $\text{س}_{١} = ٣$ الى $\text{س}_{٢} = ٦$.

اذا كان ص = ق(س) = $\text{س}^{٢}$ ؛ وتغيرت (س) من ٥ الى ٨ ، جد فما مقدار التغير في (س) ؟.

اذا كان ق(س) = س – ٣س ؛ وتغيرت (س) من ٣ الى ٥ ، فما مقدار التغير في (س) ؟.

من خلال الشكل المجاور ، جد مقدار(△ س)



تذكر عزيزي الطالب أن :

$\text{ص}_{١}$ = ق($\text{س}_{١}$) ؛ $\text{ص}_{٢}$ = ق($\text{س}_{٢}$) ....

ومنه فإن مقدار التغير في (ص) :

(△ ص) = $\text{ص}_{٢}$ – $\text{ص}_{١}$ = ق($\text{س}_{٢}$) - ق($\text{س}_{١}$)

اذا كانت ق(س) = $٢\text{س}^{٢} + ٤$ ، وتغيرت (س) من ٤ الى ٢ ، فجد مقدار التغير في (ص) .

اذا كانت ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س} - ٢ & ، ١ > \text{س} \geq ٣ \\ ٢\text{س} + ١ & ، ٣ > \text{س} \geq ٥ \end{cases}$$

فجد متوسط التغير للاقتران ق(س) خلال الفترة [٢ ، ٤]

١١- اذا علمت ان ق(س) = س^{٢} ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (-٤،٢) ؛ (١،١) .

١٢- يتحرك جسيم بخط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٢} + ٢ ، فجد متوسط سرعة هذا الجسيم خلال الفترة الزمنية (١ ، ٣) .

١٣- اذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في اثناء سقوطه تعطي بالعلاقة ف(ن)=٣٠ن – ٥ن^{٢} ؛ فحسب سرعة هذا الجسيم في الفترة الزمنية (١ ،٣)

١٤- اذا كان متوسط التغير للاقتران (ق) في الفترة (١ ، ٣) ، يساوي (٤) وكان الاقتران هـ (س) = ق(س) – س ، فجد متوسط التغير للاقتران هـ في الفترة (١ ، ٣) .

١٥- اذا كان متوسط التغير للاقتران (ق) خلال الفترة (٠ ، ٢) ، يساوي ٦ ، وكان هـ (س) = ق(س)-٢س ؛ فجد متوسط التغير للاقتران (هـ) خلال الفترة (٠ ، ٢) .

((قواعد الاشتقاق))

١-القاعدة الأولى ...

مشتقة الثابت = صفر

٢-القاعدة الثانية ...

مشتقة س ^{ن} = ن س $^{ن-١}$

٣- القاعدة الثالثة ...

مشتقة أس ^{ن} = ن × أ س $^{ن-١}$

مشتقة ثابت × اقتران = الثابت × مشتقة الاقتران

٤- القاعدة الرابعة ...

مشتقة ق(س) ± هـ(س) = مشتقة ق(س) ± مشتقة هـ(س)

أي نشتق كل اقتران على حدى

٥ـ القاعدة الخامسة ...

مشتقة ق(س) × هـ(س) = (ق(س) × هـَ (س)) + (قَ(س) × هـ(س))

مشتقة (اقتران × اقتران) = (الاول × مشتقة الثاني) + (الثاني × مشتقة الأول)

٦ـ القاعدة السادسة ...

$$\text{مشتقة } \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{(\text{هـ(س)} \times \text{قَ (س)}) - \text{هـَ (س)} \times \text{ق(س)}}{(\text{هـ(س)})^{2}}$$

$$\text{أي مشتقة قسمة اقترانيين} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{المقام تربيع}}$$

٧ـ القاعدة السابعة ...

$$\text{مشتقة } \frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} = \frac{-\text{ ثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{ اقتران })^{2}}$$

٨- القاعدة الثامنة ...

مشتقة الاقترانات الدائرية ...

- **مشتقة (جا(س)) = جتا س .**
- **مشتقة (جتا(س)) = - جا س .**
- **مشتقة (ظا(س)) = قا^{٢} س .**

وبشكل عام ...

مشتقة الاقترانات الدائرية ...

- **مشتقة (جا(الزاوية)) = مشتقة الزاوية × جتا الزاوية .**

مثال .. ق َ(س) = جا٣س^{٢} = ٦س × جتا ٣س^{٢}

- **مشتقة (جتا(الزاوية)) = - (مشتقة الزاوية) × جا الزاوية .**

مثال .. ق َ(س) = جتا٣س^{٢} = - ٦س × جا ٣س^{٢}

- **مشتقة (ظا(الزاوية)) = مشتقة الزاوية × قا^{٢} الزاوية .**

مثال .. ق َ(س) = ظا٣س^{٢} = ٦س × قا^{٢} ٣س^{٢}

أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

٩ ـ القاعدة التاسعة ...

مشتقة الاقتران الأسي ...

اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ **فإن** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

وبشكل عام ...

اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$ **فإن** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'\text{(س)} \times \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$

مثال...

اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٣س}^{\text{٤}}\text{+٥}}$ **، جد** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ **. الحل ....**

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'\text{(س)} \times \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$

$= \text{١٢ س}^{\text{٣}} \times \text{هـ}^{\text{٣س}^{\text{٤}}\text{+٥}}$

١٠- القاعدة العاشرة ...

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي ...

اذا كانت ص = لو$_{هـ}$س ، فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

وبشكل عام ...

اذا كانت ص = لو ق(س) ، فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم}}{\text{ما بداخل اللوغاريتم}}$

مثال ...

اذا كانت ص = لو$_{هـ}$(٢س^{٢} + ٤س – ٥) فإن $\frac{دص}{دس}$:

$$= \frac{\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم}}{\text{ما بداخل اللوغاريتم}} = \frac{4س + 4}{2س^2 + 4س - 5}$$

١١- القاعدة الحادية عشرة ...

مشتقة الاقتران المركب ... وهو الاقتران الذي يكون على صورة(ق(س))^{ن}

(ق(س))^{ن}َ = ن × ق(س)$^{ن-١}$ × قَ(س) .

أي عند اشتقاق اقتران مركب (أس الاقتران×(الاقتران)$^{الأس -١}$ × مشتقة الاقتران

مثال ...

اذا كانت ص = (٢س^{٣} + ٥)^{٣} ، جد $\frac{دص}{دس}$. نلاحظ ان (٢س^{٣} + ٥)^{٣} هو اقتران مركب

الحل ... = (ق(س))^{ن}َ = ن × ق(س)$^{ن-١}$ × قَ(س) .

= ٣ (٢س^{٣} + ٥)^{٢} × ٦ س .

١٢- القاعدة الثانية عشر ...

مشتقة الجذر التربيعي ...

اذا كانت ص = $\sqrt{هـ(س)}$ حيث هـ (س) > صفر . ... لماذا ؟

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ'(س)}{2 \times \sqrt{هـ(س)}}$ أي $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$

مثال ...

اذا كانت ص = $\sqrt{3س^2 - 7س + 5}$ فجد $\frac{دص}{دس}$

الحل ... $\frac{دص}{دس} = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}} = \frac{6س - 7}{2 \times \sqrt{3س^2 - 7س + 5}}$

مما قرأتُ وأعجبني

لا تَتَرَدَّدْ في العَوْدَةِ إلى الله..
مَهْمَا لَوَّثَتْكَ الخطايا والذُّنُوب..

فالذِي سَتَرَكَ وأنتَ تَحْتَ سَقْفِ المعصِيَة.
لَنْ يَفْضَحْكَ تَحْتَ جَنَاحِ التَّوْبَة

١٢ – قاعدة السلسلة ....

خطوات حل قاعدة السلسلة ...

١- نشتق كل معادلة لوحدها .

٢- نطبق قانون السلسلة ($\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$)

٣- نستبدل رمز الوسيط وهو (ع) في القانون .

مثال ...

اذا كانت $ص = ع^{٢} - ٣ع$ ؛ $ع = ٣س^{٢} - ٢$. جد $\frac{دص}{دس}$

الحل ...

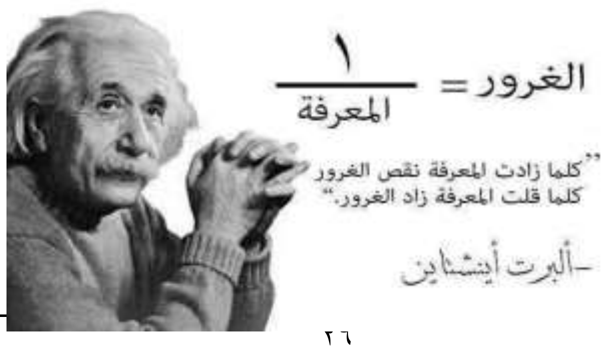
$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ (لاحظ اننا نشتق (ص) لوحدها ، (ع) لوحدها)

$= \frac{دص}{دع} = ٢ع - ٣$ ؛ $\frac{دع}{دس} = ٦س$. (لاحظ ان الوسيط (ع) = $٣س^{٢} - ٢$)

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٢ع - ٣) \times (٦س)$ ....توزيع الضرب .

$= ١٢ س ع - ١٨س$ ...... نستبدل قيمة (ع)

$= ١٢ س (٣س^{٢} - ٢) - ١٨س$.



أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

تدريبات على قواعد الاشتقاق

تذكر أن ..

(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

مثال ... (س + ٣)^{٢} = (س^{٢} + ٦ س + ٩)

١- باستخدام التعريف العام جد :

أ- ق(س) = ٣س − ٥ .

ب- ق(س) = ٥س + ٤ .

ج- ق(س) = - ٦س .

تذكر أن - (٣ + ٤س) = -٣ − ٤س

٢- جد (ق) لكل من الاقترانات التالية باستخدام التعريف العام للمشتقة .

* س^{٢} + ٣ .
* ٢س^{٢} − ٥ .
* ٤س
* س^{٢} .
* س^{٣} + ٢س
* $\frac{2}{س}$ حيث س ≠ صفر
* $\sqrt{2س}$
* $\sqrt{س - 1}$ حيث س ≥ 1
* ٢س^{٢} + ٦س

جد (ق/) لكل من الاقترانات التالية .

✓ ق(س) = ٣ .

✓ ق(س) = ٢ .

✓ ق (س) = π .

✓ ق(س) = س .

✓ ق(س) = $س^٣$. ثم جد ق/(٣)

✓ ق(س) = $٢س^٤$.

✓ ق(س) = $س^٣$. ثم جد ق/(٣)

✓ ق(س) = $\frac{1}{س^2}$

✓ ق(س)= $٢س^٢$ + ٦س – ٥ ثم جد ق/(٢)

✓ ق(س)= $\sqrt[3]{س^2}$

✓ ق(س)= $\frac{2}{س^2}$ + 2س - 9 ثم جد ق/(٢)

- ق(س) = $٤س^٢$ (٢س + ٢) .

- ق(س) = (٢س – ١) ($س^٢$ + ١) .

- ق(س) = $\frac{س^2}{2س + 3}$

- ق(س) = $\frac{2س - 3}{س + 3}$

- ق(س) = $\frac{8}{3س^2 - 5}$

$\frac{2}{6} - 1 = \frac{-4}{6}$

القاعدة .. $\frac{\text{البسط - المقام}}{\text{المقام}}$

١- اذا كانت ص = ع^{٢} – ٣ع ؛ ع = ٣س^{٢} – ٢

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

٢- اذا كانت ص = ٢ع^{٣} – ٣ ؛ ع = ٥س – ٢

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

٣- اذا كانت ص = ٣ع + ع ؛ ع = س^{٢} + ٧

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

٤- اذا كانت ص= ع^{٢} – ٣ ؛ ع = س^{٢}

فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ٢

٥- اذا كانت ص = ع^{٣} + ٣ع^{٢} + ٤ ؛ ع = ٥- ٣س^{٢}

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ١-

أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

المشتقات العليا.

- عند إيجاد المشتقة العليا لأي اقتران كل ما عليك فعله هو ان تشتق المشتقة الاولى لهذا الاقتران ثم تشتق المشتقة الاولى له ويرمز للمشتقة العليا بـــ قً

مثال : جد المشتقة الثانية (قً) للاقتران

ق(س) = س^{٥} – ٢س^{٢}

الحل : لايجاد المشتقة الثانية يجب ان نجد المشتة الاولى للاقتران ق(س).

قَ (س) = ٥ س^{٤} – ٤س (ثم نرجع ونشتق المشتقة الاولى مرة أخرى)

قً (س) = ٢٠ س^{٣} – ٤

جد قً (س) لكل من الاقترانات التالية :

ص= س^{٢} جا ٥س

ص= $\frac{\text{٨}}{\text{٢س - ٣}}$ - جا(٢س)

ص= (ظا (٥س))^{٢} + $\sqrt{\text{س}^{٣} + \text{٢س}}$

ص= جا ٣س^{٢}

- اذا كان ق (٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢ ،

قَ (٢) =-١ ، هـَ (٢) = -٢ ، فجد ...

(ق × هـ)َ (٢) .

($\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$)َ (٢) .

(هـ × ق)َ (٢) .

($\frac{\text{هـ}}{\text{ق}}$)َ (٢) .

($\frac{\text{٤}}{\text{هـ}}$)َ (٢) .

(ق + هـ)َ (٢) .

(هـ + ق)َ (٢) .

جد قيمة (أ) التي تجعل قً (أ) = صفرا للاقتران

ق (س) = $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{٣}}$ + $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢}}$ - ٢ س + ٧

أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

اذا كان ق س(س) = ٩ س – أ س – ٥ ،
وكان ق″(٢) = ١٠٢ فجد قيمة (أ).

اذا كان ق س(س) = (٢ – س)^{٤} وكان ق′(ب) = ٤
فجد قيمة (ب)

اذا كان ق (س) = ٥ س^{٣} – ب س^{٢} – ٣

وكان ق″(١) = ٢٢ فجد قيمة (ب)

اذا كان ق (س) = أ س^{٣} – ب س^{٢} + ٧

وكان ق′(-١) = ١٢ ؛ وكان ق″(١) = ٦ فجد قيمة [أ ؛ ب)

اذا كان ق (س) = أ س^{٣} – ب س^{٢} + ٨

وكان ق′(٢) = ٤ ؛ وكان ق″(٠) = -١٤ فجد قيمة [أ ؛ ب]

اذا كانت ق (س) = (٣س – ٢)^{٣} وكانت ق‴ (أ) = ١٠٨ ،

فجد قيمة أ

اذا كانت ق (س) = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ - ٢س + ٧

فجد أصفار المشتقة الأولى وأصفار المشتقة الثانية

اذا كانت ق (س) = ب^{٢}س^{٣} – ١٢ س^{٢}

فجد قيمة / قيم أ التي تجعل ق″(١) = صفرا

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

ضع دائما صورتك التي تريد أن تكون عليها في عقللك و مخيلتك ، و ستتجه تدريجيا نحوها ... إذا لم تهزم نفسك ، ستهزمك نفسك ... سلم النجاه لا يعاني من الازدحام في اعلاه

أولا : التفسير الهندسي للمشتقة .

١- اذا كان ص = ق(س) = ٣س^{٣} – ٤س^{٢} + ٩ ، فجد :

أ- ميل المماس لمنحى الاقتران عند س = ١

ب- معادلة المماس لمنحى الاقنران عند النقطة (١ ، ٨) .

تذكر عزيزي الطالب :

١- ان ميل المماس (م) لمنحى الاقنران ق(س) عند نقطة (أ) يساوي قَ(أ) .كما في التمرين السابق لايجاد الميل نجد قَ(١) فيكون الناتج هو الميل للاقتران .

٢- معادلة المماس لمنحى الاقتران عند (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي:

(ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$) .

٢- جد معادلة المماس للاقتران :

ق(س) = ٣س^{٢}+٢س-٤ ؛ عند س = ١ .

٣- جد ميل المماس للاقتران ق(س) = ٢س ، عند س=٦ .

٤- جد معادلة المماس لمنحى الاقتران :

ق(س) = س + $\sqrt{\text{س}}$ ، عند س = ١ .

٥- جد ميل المماس لمنحى الاقتران

ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٢} . عند س = ١ .

أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

جد معادلة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س)= س^{٣} + ١ عند تقاطع ق(س) مع محور السينات.

اذا كانت ق(س) = ٢س^{٢} – ٧س + ٥ فجد قيمة / قيم (س) بحيث يكون ميل المماس عندها = ٥.

اذا علمت ان ق(س) = س^{٣} – ٥س ؛ فجد جميع النقاط على منحنى ق(س) والتي يكون ميل المماس عندها = ٧ .

جد معادلة ميل المماس ق(س) = س (١ – ٣س)^{٢} عند س = ١

اذا كان ق(س) = س^{٣} – ٢٧س فجد قيمة / قيم (س) عندما يكون ميل المماس موازيا لمحور السينات.

تذكر أنه :

عندما يوازي المماس محور السينات يكون الميل = صفرا

اذا علمت ان ق(س) = أس^{٢} – ٧س + ٦ وكان ميل المماس عند س = ٢ يساوي ١٣ ، فجد قيمة (أ)

جد معادلة ميل المماس لـ ق(س) = $\sqrt{٣س^{٢}\quad ٦}$ ؛ عند س = ١

ثانيا : التفسير الفيزيائي للمشتقة

مثال توضيحي لايجاد السرعة والتسارع

يتحرك جسيم وفقا للعلاقة فـ(ن) = ٢ ن^{٣} - ٦ ن^{٢} + ١٠ ن – ١

احسب سرعته عندما ينعدم التسارع

الحل

أولا نجد المشتقة الاولى للاقتران فـ$'$(ن) = ٦ ن^{٢} – ١٢ ن + ١٠

ثانيا نجد المشتقة الثانية للاقتران فـ$''$(ن) = ١٢ ن – ١٢

ثالثا : نجد قيمة (ن) من خلال التسارع « لاحظ انه يريد السرعة والتسارع معدوم اي انه يساوي صفرا »

فـ// = صفر

١٢ ن – ١٢ = صفر ———— ومنه ن = ١

رابعا : نعوض قيمة (ن) = ١ في المشتقة الاولى لايجاد السرعة

ع(١) = فـ/ (١) = ٤ ———— **اذا السرعة = ٤ م/ث وهو المطلوب**

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقا للعلاقة :
ف (ن) = ٢ن^{٣} + ن ، جد :

أ- سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثواني من الحركة

ب- تسارع الجسيم بعد مرور ٣ ثواني من الحركة

يتحرك جسيم وفقا للعلاقة فـ(ن)= ن^{٣}- ن^{٢}+٥

حيث (ف) المسافة بالامتار ، (ن) الزمن بالثواني ،

جد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢}

تذكر ان

السرعة = (ع(ن) = المشتقة الأولى (فـ/(ن))

التسارع= ت(ن) = المشتقة الثانية (فـ//(ن))

يتحرك جسيم وفق العلاقة :

ف(ن) = $ن^{٣}$ – ٣ن + ١٥ ، حيث ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني ، جد تسارع هذا الجسيم عندما تكون سرعته ٩ م/ث .

يتحرك جسيم وفقا للعلاقة :

ف(ن) = ٢$ن^{٣}$ – ٦ ن – ٧ ؛ جد تسارعه عندما تكون سرعته ١٨ م/ث

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = $\frac{١}{٣}$ $ن^{٣}$ - ٣ $ن^{٢}$ + ٥ ن + ٨

أحسب تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته.

يتحرك جسيم وفقا للعلاقة ف(ن)= $ن^{٢}$ + ٣ن + ٢

فاذا كانت السرعة المتوسطة له خلال الفترة[١، أ]

تساوي السرعة اللحظية عند ن = ٥ ، فجد قيمة أ

تذكر أن
السرعة اللحظية ع = المشتقة الاولى
التسارع اللحظي ت = المشتقة الثانية

يتحرك جسيم وفقا للعلاقة ف(ن)= $ن^{٣}$ + ٤ن

احسب السرعة المتوسطة له في الفترة [١،٣]

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = $\sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}$

أحسب سرعته عندما ن = ٣

يسير جسيم وفقا للعلاقة ف(ن) = م (ن – ٢ $)^{٢}$ فإذا كانت السرعة بعد ٤ ثواني تساوي ٢٠ فجد (م) .

ثانيا : التزايد والتناقص والقيمة القصوى والصغرى

مثال توضيحي

اذا كان ق(س) = س^{٢} – ٨ س – ٢ فجد

أ- النقطة / النقاط الحرجة للاقتران

ب- فترات التزايد والتناقص

ت- القيمة /القيم الصغرى والعظمى للاقتران

الحل

أولا : نجد المشتقة الأولى للاقتران .. قَ (س)=٢س – ٨

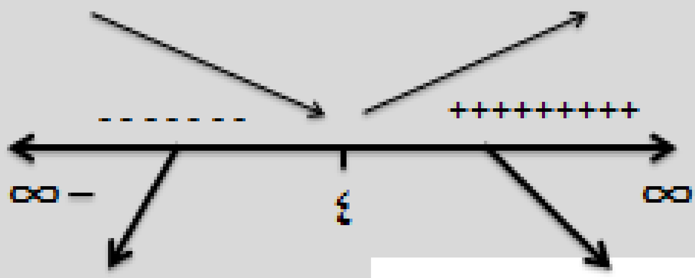
ثانيا : نساوي قَ (س) بالصفر لايجاد قيمة (س) كالتالي

٢س – ٨ = صفر ومنه س = ٤

ثالثا : قيمة (س) تكون هي القيمة / القيم الحرجة المطلوبة

فتكون القيمة الحرجة في هذا السؤال = ٤

رابعا : لايجاد فترات التزايد والتناقص نضع القيمة الحرجة (٤) على خط الاعداد وندرس الاشارة فوقها (بأخذ عدد أكبر من ٤ وتحتها بأخذ عدد أصغر من اربعة ونعوضه في المشتقة) كالتالي



أخذنا رقم أكبر من (٤) وعوضناه في المشتقة فكان الناتج عدد موجب ..... قَ/ (٥) = ٢ x ٥ – ٨ = ١٠

أخذنا رقم أقل من (٤) وعوضناه في المشتقة فكان الناتج عدد سالب..... قَ/ (٣) = ٢ x ٣ – ٨ = -٢

ومنه الاقتران ق(س) متناقص خلال الفترة (- ∞ ، ٤] ، ومتزايد خلال الفترة (٤ ، ∞]

ومنه للاقتران قيمة صغرى عند س = ٤ = ق(٤) = - ١٠

اذا كان ق(س) = س٢ – ٤س + ١ فجد

- ✓ قيم (س) الحرجة للاقتران ق(س) .
- ✓ فترات التزايد للاقتران ق(س) .
- ✓ فترات التناقص للاقتران ق(س) .
- ✓ القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س)

اذا كان ق(س) = س^{٣} – ٦س^{٢} – ٩س + ١ فجد

- ✓ قيم (س) الحرجة للاقتران ق(س) .
- ✓ فترات التزايد للاقتران ق(س) .
- ✓ فترات التناقص للاقتران ق(س) .
- ✓ القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س)

اذا كانت ق(س) = س^{٣} – ٣س + ١ . فجد

- ✓ قيم (س) الحرجة للاقتران ق (س) .
- ✓ فترات التزايد للاقتران ق(س) .
- ✓ فترات التناقص للاقتران ق(س) .
- ✓ القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س)

اذا كان ق(س) = (س + ٣)^{٣} . فجد .

- ✓ قيم (س) الحرجة للاقتران ق .
- ✓ فترات التزايد للاقتران ق(س) .
- ✓ فترات التناقص للاقتران ق(س) .
- ✓ القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س)

- اذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٣} – ٦س^{٢} + ٧ ، نقطة حرجة عند س = ٢ ، فجد قيمة (أ) .

٤- اذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٢} +٦س ، نقطة حرجة عند س = ١ ، فجد قيمة (أ) .

اذا كان للاقتران ق(س) = س^{٢} – أس + ١ ، نقطة حرجة عند س = ٢ ، فجد قيمة (أ) .

اذا كانت ق(س) = س٣ – ٣س٢ – ٩س فجد

- ✓ القيمة / القيم الحرجة للاقتران ق(س)
- ✓ فترات التزايد والتناقص
- ✓ القيمة / القيم القصوى او الصغرى للاقتران

اذا كان ق(س) = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س ؛ فجد

أ- قيم (س) الحرجة للاقتران ق .

ب- فترات التزايد للاقتران ق(س) .

ت- فترات التناقص للاقتران ق(س) .

ث- القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س)

- اذا كان ق(س) = ٣ – ٦س^{٢} – ٢س ؛ فجد

أ- قيم (س) الحرجة للاقتران ق .

ب- فترات التزايد للاقتران ق(س) .

ت- فترات التناقص للاقتران ق(س) .

ث- القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س)

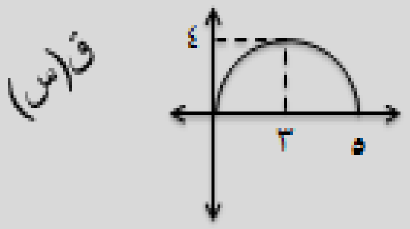
أثبت أن ق(س) = س^{٣} + س متزايد على جميع الاعداد الحقيقة.

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = ٤س + ٣

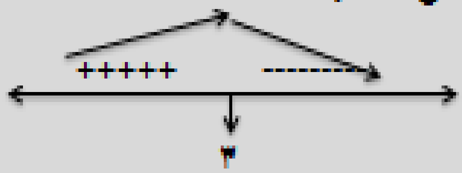
ايجاد فترات التزايد والتناقص من الرسم

ملاحظة مهمة :

- اذا كانت الرسمة المعطى تمثل ق (س) تكون النقاط الحرجة قمة او قاع الرسمة مثل



نلاحظ من الرسمة انها تمثل ق(س)
اذا النقطة الحرجة هي ٣ ويمكن رسمها بصورة أخرى كالتالي ...

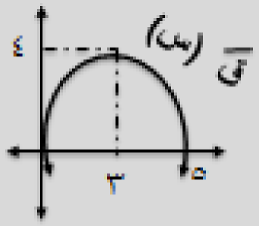


ومنها نلاحظ ان

الاقتران متزايد من (-∞ ، ٣] و متناقص خلال الفترة [٣ ، ∞)

للاقتران قيمة عظمى عند س = ٣ وقيمتها ٤

- اذا كانت الرسمة المعطى تمثل ق′(س) ، تكون النقاط الحرجة نقاط التقاطع مع محور السينات ، مع ملاحظة اذا كانت الرسمة فوق محور السينات تكون (+) وتحت محور السينات تكون (-) مثل ...

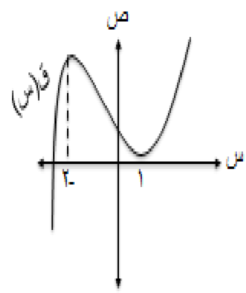


ومنه فإن النقاط الحرجة لـ ق (س) هي (٠ ، ٥)

ويمكن تمثيل الرسمة على خط الاعداد كالتالي...

ومنه نلاحظ ان فترات التزايد [٠ ، ٥] ومتناقص خلال الفترة (-∞ ، ٠] ، [٥ ، ∞)

من خلال الشكل التالي الذي يمثل ق(س) جد

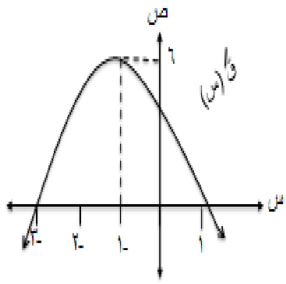


١- القيمة / القيم الحرجة لـ س

٢- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٣- القيم القصوى أو العظمى للاقتران ق(س)

من خلال الشكل التالي الذي يمثل قَ(س) جد



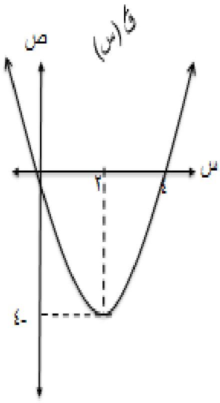
١- القيمة / القيم الحرجة لـ س

٢- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٣- القيم القصوى أو العظمى للاقتران ق(س)

٤- $\lim\limits_{س \to -1} \frac{ق(-1+هـ) - ق(-1)}{هـ}$

من خلال الشكل التالي الذي يمثل قَ(س) جد



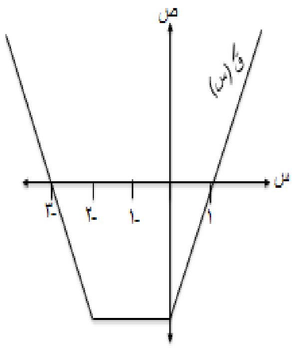
١- القيمة / القيم الحرجة لـ س

٢- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٣- القيم القصوى أو العظمى للاقتران ق(س)

٤- $\lim\limits_{س \to 2} \frac{ق(2+هـ) - ق(2)}{هـ}$

من خلال الشكل التالي الذي يمثل قَ(س) جد

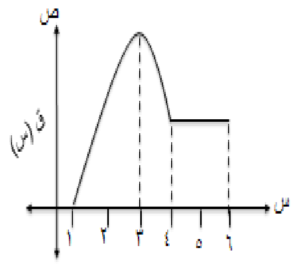


١- القيمة / القيم الحرجة لـ س

٢- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٣- القيم القصوى أو العظمى للاقتران ق(س)

من خلال الشكل التالي الذي يمثل ق (س) جد



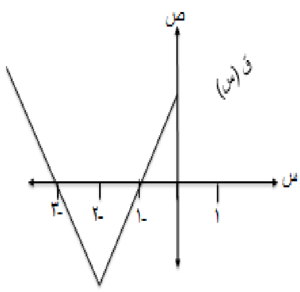
١- القيمة / القيم الحرجة لـ س

٢- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٣- القيم القصوى أو العظمى للاقتران ق(س)

٤- الفترة التي يكون فيها قَ(س) = صفر

من خلال الشكل التالي الذي يمثل ق (س) جد



١- القيمة / القيم الحرجة لـ س

٢- فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٣- القيم القصوى أو العظمى للاقتران ق(س)

اللهمّ لا سهل إلّا ما جعلته سهلا
و أنت تجعل الحزن إذا شئت سهلا
يا أرحم الرّاحمين يا الله

اختبار المشتقة الثانية

خطوات ايجاد القيم القصوى او الصغرى باستخدام اختبار المشتقة الثانية

أولا : نشتق الاقتران ونجد قيمة / قيم الحرجة لـ (س)

ثانيا : نجد المشتقة الثانية له .

ثالثا : نعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية فإذا كان الناتج سالب يكون عظمى واذا كان الناتج موجب تكون صغرى

مثال : باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى او الصغرى للاقتران

ق(س) = ٢٤س - ٢س + ٢

الحل

ق/(س) = ٢٤ – ٦س^{٢} ومنه فإن القيم الحرجة لـ س = ٢ ، - ٢

نجد المشتقة الثانية ...

ق//(س) = - ١٢ س ...... نعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية

ق//(٢) = - ١٢ × ٢ = -٢٤ نلاحظ ان الناتج < صفر ومنه تكون صغرى

ق//(-٢) = -١٢ × -٢ = ٢٤ نلاحظ ان الناتج > صفر ومنه تكون عظمى

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – ٤ س^{٣}

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} – ٢٤س + ٢

باستخدام اختبار المشتقة ق(س) = ٢٧س – س^{٣} جد القيم العظمى والصغرى للاقتران قق(س).

اذا علمت ان ق (٢) =٥ ، ق/(٢) = ٠ ، ق//(٢) = -٣ ، فجد القيمة العظمى للاقتران ق(س).

اذا علمت ان ق(س) = أ س^{٢} + ٤س – ٥ وكان للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س =٢ فجد (أ)

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى والعظمى للاقتران ق(س)= س^{٣} – ٣ س + ٧

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى والعظمى للاقتران ق(س)= ٣س^{٢} – س^{٣}

خطوات إيجاد تطبيقات القيم القصوى

مثال : ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان حاصل جمعهما ٨ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

الحل : ألا نقوم بتقسيم السؤال الى ثلاث اقسام وهي :

حاصل جمعهما ٨،   حاصل ضربهما ،   أكبر ما يمكن

نبدأ بالقسم الأول من السؤال (حاصل جمعهما)...

نفرض ان العدد الاول س والعدد الثاني ص اذا (س + ص = ٦٤)

ثم نجعل ص موضوع القانون (ص = ٦٤ – س)

نرجع الآن الى القسم الثاني من السؤال (حاصل ضربهما)

ومنه (س × ص = ح) (نعوض قيمة ص مكانها (ص = ٨ – س)

اذا س × (٨ – س) = ح .... (ندخل س على القوس فينتج)

٨س – س = ح

الآن نشتق ونساوي بالصفر ... (٨ – ٢س = صفر) ثم نجد قيمة (س)

اذا س = ٤ (الرقم الاول) نجد الآن قيمة ص من خلال قانون ص = ٨ – س

ومنه ص = ٤ (الرقم الثاني)

في النهاية نرجع الى القسم الآخير من السؤال (أكبر ما يمكن) وهنا نستخدم

اختبار المشتقة الثانية للمشتقة (٨ – ٢س) ـــ ق -٢ < صفر اذا أكبر ما يمكن

✓ ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان حاصل ضربهما ٦٤ ومجموعهما أقل ما يمكن .

✓ جد العددين اللذين مجموعهما ٦٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

✓ جد العددين اللذين مجموعهما ٤٠ ومجموع مربعيهماأقل ما يمكن .

✓ عددين مجموعهما ٨٠ ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن، باستخدام تطبيقات التفاضل ما هما الرقمين؟.

✓ قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨م^{٢} يُراد عمل مسبح داخلها مع ترك ممرات على الجوانب الأربعة فاذا كان عرض الممر من جانبيين متوازيين ٢ م ومن الجانبيين المتوازيين الآخريين ١ م جد بعدا المساحة لتكون مساحة المسبحة أكبر ما يمكن.

✓ مثلث قائم الزاوية مجموع ضلعي القائمة فيه ٤٠ سم جد أكبر مساحة له باستخدام تطبيقات التفاضل.

✓ ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما ٤٨ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

قطعة ارض موازية لنهر فاذا علمت ان هذه القطعة على شكل مستطيل مساحته ٨٠٠م^{2} ، فاذا أراد صاحبها تشيكها بسياج ، ما بعدا القطعة ليكون السياج أقل ما يمكن ؟

اذا كان مجموع ضلعي مثلي قائم الزاوية ٢٠ سم ، جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث ؟ .

صندوق مفتوح من اعلى ، عُمل من قطعة كرتون مستطيلة الشكل ابعادها ١٦ سم و ٣٠ سم ، وذلك بقطع اربع مربعات متساوية من الزوايا الاربعة وثني الاجزاء المتبقية ، ما أبعاد الصندوق الذي يجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

اذا كان مجموع ضعلي قائم الزاوية في مثلث قائم الزاوية = ٤٠سم فجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث.

قطعة أرض مستطيلة الشكل فاذا علمت ان ثمن المتر الواحد من جانبين متوازيين ٣ دنانير ومن الجانبين الآخرين دينارين جد أكبر مساحة يمكن تسيجها بمبلغ ٦٠٠ دينار.

قطعة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٩٦م^{2} يُراد طباعة إعلان عليها ، اذا كان كل من الهامشين في رأس وأسفل الورقة ٣ سم ، وفي الجانبين ٢سم ، ما بعدي الورقة لتكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن .

سلك طوله ٤٠ سم ، ثُني على شكل مستطيل ، ما أبعاده حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن .

قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٣٧٥٠م^{2} يُراد إحاطتها بسياج فإذا كان المتر الواحد من الجانبين ٣ دنانير ومن الجانب الاخر ديناري ، جد أبعاد الأرض لتحقيق أقل تكلفه .

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

تذكر أن :

- ✓ ك (س) = اقتران التكلفة الكلية
- ✓ د (س) = اقتران الايراد الكلي
- ✓ ك (س) = التكلفة الحدية (اي اشتقاق التكلفة الكلية = التكلفة الحدية)
- ✓ د (س) = اقتران الايراد الحدي (اي اشتقاق الايراد الكلي = الايراد الحدي)
- ✓ اقتران الربح (ر (س)) = د (س) –ك (س) .
- ✓ اقتران الربح الحدي (ر (س)) = د (س) –ك (س)

مثال توضيحي :

وجد مصنع ان التكلفة الكلية للانتاج اليومي لمنتج ما يعطي بالاقتران ك(س)= ٤س – ٢٥٠س +٢٠٠ فاذا علمت ان بيع المنتج الواحد من الانتاج بسعر ١٥٠دينار فجد ما يلي :

١- اقتران الايراد الكلي .

٢- التكلفة الحدية

٣- الايراد الحدي

٤- اقتران الربح الكلي

٥- اقتران الربح الحدي

٦- عدد القطع التي يجب انتاجها لتعطي أكبر ربح .

الحل

١- اقتران الايراد الكلي : من المعطى بالسؤال ان سعر المنتج الوحد = ١٥٠ ومنه الايراد الكلي = ١٥٠ س

٢- التكلفة الحدية = مشتقة التكلفة الكلية

ك َ(س) = ٤س^{٢} – ٢٥٠س + ٢٠٠ = ٨ س - ٢٥٠

٣- الايراد الحدي = مشتقة الايراد الكلي

د َ(س) = ١٥٠ س = ١٥٠

٤- اقتران الربح الكلي = د (س) – ك (س)

= ١٥٠ س – (٤س^{٢} – ٢٥٠س + ٢٠٠)

= ١٥٠س – ٤س^{٢} + ٢٥٠س – ٢٠٠

= - ٤س^{٢} + ٤٠٠س - ٢٠٠

٥- اقتران الربح الحدي = د (س) – ك (س)

= ١٥٠ – (٨س – ٢٥٠)

= ٤٠٠ – ٨س

٦- عدد القطع التي يجب انتاجها لتعطي أكبر ربح ...

هنا ما عليك سوى ان تضع الربح الحدي = صفر وتجد قيمة (س) كالتالي

ر َ(س) = د َ(س) – ك َ(س)

= ١٥٠ – (٨س – ٢٥٠)

= ٤٠٠ – ٨س

تذكر ان :

- (س + أ) = - س – أ

ر َ (س) = صفر

٤٠٠ – ٨س = صفر ومنه س = ٥٠

وللتاكد نجد ق ً(س) = - ٨ < صفر اذا الربح أكبر ما يمكن عند س =٥٠

✓ ينتج مصنع للهواتف الذكية (س) جهازا اسبوعيا فاذا علمت ان تكلفة الانتاج الكلي لهذا المصنع ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠ س^{٢} وثمن جهاز الهاتف الذكي الواحد ٢٥٠ دينار فجد :

١- اقتران الايراد الكلي .
٢- اقتران الربح الحدي
٣- عدد الاجهزة اللازم انتاجها ليحقق أكبر ربح ممكن .

✓ اذا علمت ان الايراد الكلي لمنتج ما يساوي د(س) = ١٦س – س^{٢} – ٢٠ ؛ وأن التكلفة الكلية لهذا المنتج تساوي ك(س) = ٢س^{٢} -٨س + ١٥ فجد ما يلي :

١- أكبر ايراد ممكن .
٢- أقل تكاليف ممكنة .
٣- اقتران الربح .
٤- قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

✓ اذا كان اقتران الايراد الكلي لبيع منتج ما هو د(س)= ٨٠س – س^{٢} ، وكان اقتران التكلفة الكلية لهذا المنتج هو ك(س)= ٦٠ + ٤س فجد:

١- أكبر ايراد ممكن .
٢- اقل تكاليف ممكنة.
٣- عدد القطع اللازم انتاجها لتحقيق اكبر ربح.

✓ اذا كان اقتران التكلفة الكلية لمنتج ما هو ك(س) = ١٠ +٢س + س^{٢} وكان ثمن القطعة الواحدة من هذا المنتج ٣٠ دينار، فجد عدد القطع اللازم انتاجها لجعل الربح اكبر ما يمكن.

تذكر ان :

- عند ايجاد أكبر ايراد ممكن نساوي د\َ(س) بالصفر ونجد قيمة س
- عند إيجاد أقل تكاليف ممكنة نساوي كَ (س) بالصفر ونجد قيمة س
- عند ايجاد اكبر ربح ممكن نساوي رَ (س) بالصفر ونجد قيمة س

أ . بشّار أبو العمّاش ٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

سَائلينَ المولى سُبحانه أن نكونَ دائمًا
عَلى مستوى تطلّعاتكُم وعِندَ
حُسنِ ظَنكم بنا..