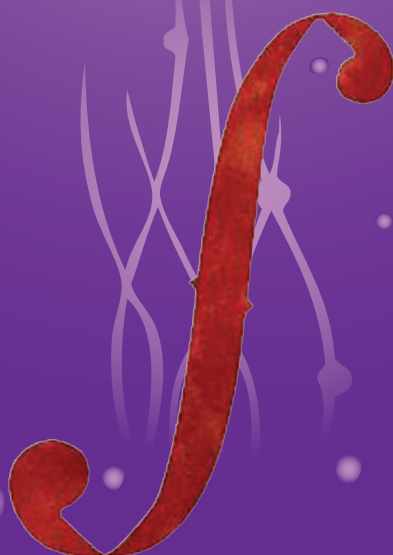


السليم

في الرياضيات

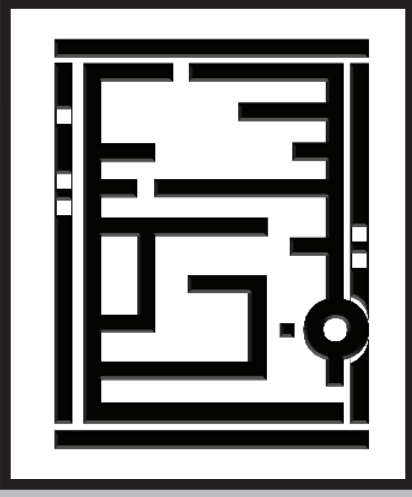
MATHS

التكامل وتطبيقات التكامل



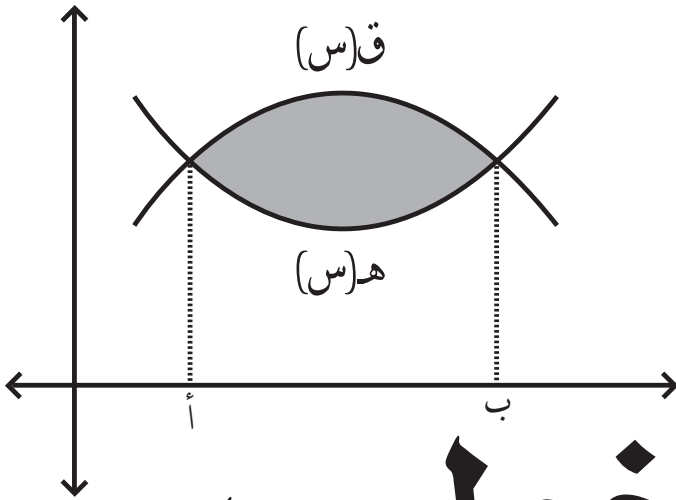
إعداد الأستاذ :

سليم الخطيب



# INTEGRATION AND APPLICATION

## النكامل ونطبيقات النكامل



إمّا ق(س) - هـ(س) دس.

## سليم الخطيب

المراكز الرئيسية

أكاديمية سليم الخطيب (مركز زهرة النظم) / الوحدات - شارع مادبا / ٠٦ ٤٧٧٣٣٥٥ / ٠٧٨٧٨٠٠٨٥٢

مركز الهادفون العلمي ماركا - دخلة العبدلات فوق مجمع مسك / ٠٧٩٥٠٢٤١٤٣

أكاديمية وسام التمييز (كفر عانه) / الأشرفية أول ش. سميه / ٠٧٩٩٩٨٨٣٥٤

مركز المسار الثقافي / أبو علندا - دوار المستدة / مقابل مطعم الهنيني / ٠٧٩٨٣٧٦٧٧٦

مركز الشورى الثقافي / ام نواراة ٤ - بجانب مدرسة ام نواراة الثانوية للبنات / ٠٧٩٠٦٨١٥٢٠

إستنتاج الاقتزان اللوغاريتمي:

$$ق(س) = لوم(س)$$

$$ق(س) = م(س) = \frac{م(س)}{م(س)}$$

$$ق(س) = لوم(ماداخل اللو) \leftarrow ق(س) = م \cdot ماداخل اللو \text{ ما داخل اللو}$$

أمثلة :

$$١) ق(س) = لوس \leftarrow ق(س) = \frac{١}{س}$$

$$٢) ق(س) = لوم(س+٢+١) \leftarrow ق(س) = \frac{٢+س٢}{١+س٢+٢س}$$

$$٣) ق(س) = لوم(س+٥-٤س-٣) \leftarrow ق(س) = \frac{٤+٤س٥}{س٣+٤س-٣}$$

$$٤) ص = لوم(س+١٠) \text{ جد } \frac{ص}{س} \text{ عند ما } س = ٢$$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = \frac{س٢}{١٠+٢س}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤-}{١٤} = \frac{٢-}{٧}$$

إستنتاج الاقتزان الأسّي:

$$ق(س) = ل(س) \leftarrow ق(س) = نفسه \cdot م \cdot الأس$$

$$\leftarrow ق(س) = ل(س) \cdot ل(س)$$

أمثلة :

$$١) ق(س) = هـ \leftarrow ق(س) = هـ \cdot ١$$

$$٢) ق(س) = هـ٢ \leftarrow ق(س) = هـ٢ \cdot ٢س$$

$$٣) ق(س) = هـ٣+٢س٣ \leftarrow ق(س) = هـ٣+٢س٣ \cdot (٤+س٦)$$

$$٤) ق(س) = هـ٧+٢س٧ \leftarrow ق(س) = هـ٧+٢س٧ \cdot \frac{٢}{١+س٢٧ \cdot ٢}$$

$$٥) ق(س) = هـ٣ \leftarrow ق(س) = هـ٣ \cdot جتا س$$

أسئلة :

جد المشتقة الاولى لكل من الاقترانات التالية:

$$١) ص = لوم(س-٢) - هـ٣-١+٣$$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤-٢س}{س٤-٢س} - \frac{٣س١+٣س١}{٢س٣ \times هـ٣}$$

$$٢) ص = ظا٥س + لوس٢$$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = \frac{٣(ظا٥س) + ٢(قا٥س)}{س٢} + ٥ \times \frac{٢}{س}$$

$$٣) ق(س) = لوس + (ظا٤س)٢$$

الحل :

$$ق(س) = \frac{١}{س} + ٣(ظا٤س)٢ + قا٤س \times ٤$$

$$٤) ق(س) = هـ٣ + لوم(جاس) + ٤س٥$$

الحل :

$$ق(س) = هـ٣ \times ٣ + \frac{جاس١}{جاس} + ٢٠س٥$$

$$٥) ق(س) = س٢ \times هـ٣ + جتا(٤س+٥)$$

الحل :

$$ق(س) = س٢ \times هـ٣ + ٢ \times س٢ + هـ٣ \times ٣ - جا(٤س+٥) \times ٢س٥$$

$$٦) ق(س) = جتا٣س + لوم(س-٢+٢س+٤)$$

الحل :

$$ق(س) = ٣(جتاس) - جا٣س + ١ \times \frac{٢-س٢}{٤+س٢-٢س}$$

$$٧) ق(س) = لوم(ظا٤س) + جتا(١+٢س)$$

الحل :

$$ق(س) = \frac{قا٤س \times ٤}{ظا٤س} - جا(١+٢س) \times هـ٣ + ٢س١$$

$$٨) ق(س) = ٦س٤ + لوس٣ - هـ٣، جد ق(١)$$

الحل :

$$ق(س) = ٢٤س٣ + \frac{١}{س} - هـ٣$$

$$ق(١) = ٢٤ - ١ + ٢٤ - هـ٣ - ٢٥ = هـ٣$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

٩) ق(س) = ٢ه<sup>٢</sup> + لو(٢س + ١)، جد ق(٠)  
الـدـلـ:

$$ق(س) = ٢ه<sup>٢</sup> + لو(٢س + ١)$$

$$ق(٠) = ٢ه<sup>٢</sup> + لو(٠ + ١) = ٢ + ٠ = ٢$$

١٠) ق(س) = لو(س)، جد ق(٢)  
الـدـلـ:

$$ق(س) = لو(س) \leftarrow ق(٢) = لو(٢) = \frac{١}{٤}$$

١١) ق(س) = ه<sup>٢</sup>، جد ق(س)  
الـدـلـ:

$$ق(س) = ه<sup>٢} = ٢ \times ه<sup>٢} = ٢ه<sup>٢}</sup></sup></sup>$$

$$\leftarrow ق(٢) = ٢ \times ه<sup>٢} = ٢ه<sup>٢}</sup></sup>$$

١٢) ق(س) = س<sup>٢} ه<sup>٢}</sup>  
الـدـلـ:</sup>

$$ق(س) = س<sup>٢} ه<sup>٢} = ٢ \times ه<sup>٢} \times س<sup>٢} = ٢ه<sup>٢} س<sup>٢}</sup></sup></sup></sup></sup></sup>$$

$$ق(٢) = ٢(س<sup>٢} ه<sup>٢} \times ٢ + ٢ \times ه<sup>٢} \times س<sup>٢} + ٢ \times ه<sup>٢} \times س<sup>٢} = ٢(٤ه<sup>٢} س<sup>٢} + ٢ه<sup>٢} س<sup>٢} + ٢ه<sup>٢} س<sup>٢} = ٢(٨ه<sup>٢} س<sup>٢} = ١٦ه<sup>٢} س<sup>٢}</sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup></sup>$$

قواعد النكامل

١)  $\text{ا} . \text{ا} = \text{دس} + \text{ج}$

٢)  $\text{ا} \text{ س} \text{ ن} . \text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ا} + \text{ن}} + \text{ج}$   $\text{ن} \neq \text{ا}$

٣)  $\text{ا} (\text{ا} + \text{ب}) \text{ ن} . \text{دس} = \frac{\text{ا} (\text{ا} + \text{ب})^{\text{ن}}}{\text{ا} (\text{ا} + \text{ن})} + \text{ج}$   $\text{ن} \neq \text{ا}$

٤)  $\text{ا} \text{ ح} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب}) . \text{دس} = \frac{\text{ح} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب})}{\text{ا}} + \text{ج}$

٥)  $\text{ا} \text{ ح} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب}) . \text{دس} = \frac{\text{ج} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب})}{\text{ا}} + \text{ج}$

٦)  $\text{ا} \text{ ق} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب}) . \text{دس} = \frac{\text{ظ} \text{ا} (\text{ا} + \text{ب})}{\text{ا}} + \text{ج}$

٧)  $\frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{ب}} . \text{دس} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

٨)  $\text{ا} \text{ ه} . \text{دس} = \frac{\text{ا} \text{ ه}}{\text{ا}} + \text{ج}$

اسئلة: جد كل من التكمالات التالية:

١)  $\text{ا} . \text{ا} = \text{دس} + \text{ج}$

٢)  $\frac{\text{ا}}{\text{ا}} . \text{دس} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

٣)  $\text{ا} - \text{ا} . \text{دس} = \text{ا} - \text{ا} + \text{ج}$

٤)  $\text{ا} . \text{ا} = \text{دس} + \text{ج}$

٥)  $\text{ا} . \text{ا} = \text{دس} + \frac{\text{ا}}{\text{ا}}$

٦)  $\text{ا} \text{ س} \text{ س} . \text{دس} = \text{ا} \text{ س} + \text{ج}$

٧)  $\text{ا} . \text{ا} = \text{د} \text{ا} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

٨)  $\text{ا} \text{ ص} \text{ ص} . \text{دص} = \text{ا} \text{ ص} + \text{ج}$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

النكامل غير المحدود:

النكامل: هي العملية العكسية للتفاضل  
«عكس المشتقة»

مثال: إذا كان  $ق(س) = ٣س + ٢$   
فجد قاعدة الإقتران  $ق(س)$ .

الحل: نخمن إقتران وهو:

$ق(س) = ٣س + ١$

أو  $ق(س) = ٣س + ٦$

\* بالتخمين لا يمكن تحديد قيمة الثابت لذلك

يعبر عنه بـ «ج» ويسمى

ثابت النكامل غير المحدود.

قاعدة:

$\text{ا} \text{ ق} \text{ا} (س) . \text{دس} = \text{ق} (س) + \text{ج}$

← إشارة النكامل

← الحرف الذي يكامل له «س»

وباقي الحروف تعتبر ثوابت

\* هنالك أسئلة يصعب تخمين قواعد الاقترانات

والحل هو إيجاد قواعد سمية بقواعد النكامل

\* النكامل لا يكامل الا الاشكال المذكورة داخل قواعد

النكامل فقط.

خواص النكامل غير المحدود

١)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  دس = أماق (س) . دس

٢)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = أماق (س) . دس  
 \* يوزع النكامل على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة

أسئلة :

١)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

٢)  $\int (3x^2 - 6x + 1) dx = x^3 - 3x^2 + x + C$  دس = س٣ - ٣س٢ + س + ج

٣)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = ٢ جتا (س٣ + ٤) + ج

٤)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

٥)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

٦)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

٧)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

٨)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

٩)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١٠)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١١)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١٢)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١٣)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١٤)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١٥)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

١٦)  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$  دس = س٢ + س٣ + س٤ + ج

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٩)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٠)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١١)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٢)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٣)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٤)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٥)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٦)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٧)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٨)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١١٩)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٠)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢١)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٢)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٣)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٤)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٥)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٦)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

١٢٧)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  دس = س٢ + ج

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٤) ما ن (٨س + ٣) دس .  
الحل:

$$= 8س^٢ + ٣س^٢ دس$$

$$= ٢س^٢ + ٢س^٢ + ج$$

١٥) ما (٣س + ٢) (س - ١) دس .  
الحل:

$$= 3س^٢ - ٢س^٢ + ٣س - ٢ دس$$

$$= ٢س^٢ - ٢س - ٢ دس$$

$$= ٢س - \frac{٢س}{٢} - ٢س + ج$$

١٦) ما (٤س - ٢س + ١) دس .

$$= 4س^٢ - ٢س^٢ + ٢س دس$$

$$= ٢س - \frac{٢س}{٣} + ٢س + ج$$

١٧) ما (١ - ٢) دس .

$$= ١س (١ - ٢) دس$$

$$= ١س^٢ - ٢س^٢ + ٢س دس$$

$$= ١س - \frac{١س}{٣} + ٢س + ج$$

١٨) ما (١ - ٧س) (٢ + ٥س) دس .  
الحل:

$$= ١س (١ - ٧س) (٢ + ٥س) دس$$

$$= ١س^٢ - ٧س^٢ + ٢س - ٣٥س^٢ دس$$

$$= ٢س - \frac{٢س}{٣} - \frac{٣٥س^٢}{٣} - ٣٥س^٢ + ج$$

$$= ٢س - \frac{٢س}{٣} - \frac{٣٥س^٢}{٣} - ٣٥س^٢ + ج$$

١٩) ما (١ + ٧س) (١ + ٧س) دس .  
الحل:

$$= ١س (١ + ٧س) (١ + ٧س) دس$$

$$= ١س^٢ + ٧س^٢ + ٧س + ٧س دس$$

$$= ٧س + ٧س + ج$$

$$= ٧س + ٧س + ج$$

١٠) ما (٣س - ٢س) دس .  
الحل:

$$= ٣س^٢ - ٢س^٢ دس$$

$$= ٣س^٢ - ٢س^٢ دس$$

$$= ٣س^٢ - ٢س^٢ دس$$

$$= ٣س - ٢س + ج$$

\* اذا كان الشكل المعطى في السؤال لا نعرفه فإننا نحتاج الى ترتيب ما داخل النكامل

### خطوات الترتيب:

١) تحويل الجذور الى قوى كسرية ←  $\sqrt[٢]{١س} = ١س^{\frac{١}{٢}}$

٢) التخلص من الاقواس .

٣) التخلص من المقام: ←  $\frac{١}{٢س} = \frac{١}{٢س}$

ترفع المقام بتحويل القوة الى قوة سالبة مع مراعاة:

أ) عدم ظهور القوة (-١)

ب) نرفع جتا س =  $\frac{١}{٢س}$  ، قاس =  $\frac{١}{٢س}$  جتا س

وتحول طاس الى  $\frac{١}{٢س}$  جتا س

٤) نوزع البسط على المقام اذا احتوى على جمع وطرح .

٥) اذا كان المقام والبسط يخلل فاننا:-

نخلل ← نختصر ← نكامل .

\* قانون فك القوس التريبيعي

$$(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$$

### أسئلة:

١) ما  $\sqrt[٢]{١س} + \frac{٧}{٢س}$  دس .

الحل:

$$= ١س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٧}{٢س} دس$$

$$= \frac{١س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٧}{٢س}}{١} دس$$

$$= \frac{١س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٧}{٢س}}{١} دس$$

٢) ما  $\sqrt[٢]{١س} + \sqrt[٢]{١س} - ١$  دس .  
الحل:

$$= ١س^{\frac{١}{٢}} + ١س^{\frac{١}{٢}} - ١ دس$$

$$= \frac{١س^{\frac{١}{٢}} + ١س^{\frac{١}{٢}} - ١}{١} دس$$

$$= \frac{١س^{\frac{١}{٢}} + ١س^{\frac{١}{٢}} - ١}{١} دس$$

٣) ما  $\sqrt[٢]{١س} + \sqrt[٢]{١س}$  دس .  
الحل:

$$= ١س^{\frac{١}{٢}} + ١س^{\frac{١}{٢}} دس$$

$$= \frac{١س^{\frac{١}{٢}} + ١س^{\frac{١}{٢}}}{١} دس$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

(١١)  $\frac{1+s}{\sqrt{s}}$  دس  
الـحل:

$$\frac{1+s}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{s}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s}$$

$$\int \left( \frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} \right) ds = \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds + \int \sqrt{s} ds$$

$$= 2\sqrt{s} + \frac{2}{3}s^{3/2} + C$$

(١٢)  $\frac{s-5}{\sqrt{s}}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s-5}{\sqrt{s}} = \frac{s}{\sqrt{s}} - \frac{5}{\sqrt{s}} = \sqrt{s} - \frac{5}{\sqrt{s}}$$

$$\int \left( \sqrt{s} - \frac{5}{\sqrt{s}} \right) ds = \int \sqrt{s} ds - \int \frac{5}{\sqrt{s}} ds$$

$$= \frac{2}{3}s^{3/2} - 10\sqrt{s} + C$$

(١٣)  $\frac{2-}{\sqrt{(3+2s)^3}}$  دس  
الـحل:

$$\frac{2-}{\sqrt{(3+2s)^3}} = \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}}$$

$$\int \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}} ds = \int \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 ds = \frac{1}{2} \int \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}} \cdot 2 ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}} \cdot 2 ds = \frac{1}{2} \int \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}} \cdot 2 ds = \frac{1}{2} \int \frac{2-}{(3+2s)^{3/2}} \cdot 2 ds$$

(١٤)  $\frac{\sqrt{s}-s}{s}$  دس  
الـحل:

$$\frac{\sqrt{s}-s}{s} = \frac{\sqrt{s}}{s} - \frac{s}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} - 1$$

$$\int \left( \frac{1}{\sqrt{s}} - 1 \right) ds = \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds - \int 1 ds$$

$$= 2\sqrt{s} - s + C$$

(١٥)  $\frac{s-\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s-\sqrt{s}}{\sqrt{s}} = \frac{s}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}} = \sqrt{s} - 1$$

$$\int \left( \sqrt{s} - 1 \right) ds = \int \sqrt{s} ds - \int 1 ds$$

$$= \frac{2}{3}s^{3/2} - s + C$$

(١٦)  $\frac{s-s^2+3}{s}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s-s^2+3}{s} = \frac{s}{s} - \frac{s^2}{s} + \frac{3}{s} = 1 - s + \frac{3}{s}$$

$$\int \left( 1 - s + \frac{3}{s} \right) ds = \int 1 ds - \int s ds + \int \frac{3}{s} ds$$

$$= s - \frac{1}{2}s^2 + 3\ln|s| + C$$

(١٧)  $\frac{s^2-4}{s-2}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s^2-4}{s-2} = \frac{(s-2)(s+2)}{s-2} = s+2$$

$$\int (s+2) ds = \frac{1}{2}s^2 + 2s + C$$

(١٨)  $\frac{s^2-2s+1}{s-1}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s^2-2s+1}{s-1} = \frac{(s-1)^2}{s-1} = s-1$$

$$\int (s-1) ds = \frac{1}{2}s^2 - s + C$$

(١٩)  $\frac{s^2+2s+3}{s+2}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s^2+2s+3}{s+2} = \frac{(s+2)(s+1)+1}{s+2} = s+1 + \frac{1}{s+2}$$

$$\int \left( s+1 + \frac{1}{s+2} \right) ds = \frac{1}{2}s^2 + s + \ln|s+2| + C$$

(٢٠)  $\frac{s^3-8}{s-2}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s^3-8}{s-2} = \frac{(s-2)(s^2+2s+4)}{s-2} = s^2+2s+4$$

$$\int (s^2+2s+4) ds = \frac{1}{3}s^3 + s^2 + 4s + C$$

(٢١)  $\frac{1}{s^2+4}$  دس  
الـحل:

$$\int \frac{1}{s^2+4} ds = \int \frac{1}{s^2+2^2} ds = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{s}{2}\right) + C$$

(٢٢)  $\frac{3}{s^2} + \frac{6}{s} + \sqrt{s}$  دس  
الـحل:

$$\int \left( \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s} + \sqrt{s} \right) ds = \int \frac{3}{s^2} ds + \int \frac{6}{s} ds + \int \sqrt{s} ds$$

$$= -\frac{3}{s} + 6\ln|s| + \frac{2}{3}s^{3/2} + C$$

(٢٣)  $\frac{2}{s(s+2)}$  دس  
الـحل:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

$$\int \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) ds = \ln|s| - \ln|s+2| + C$$

(٢٤)  $\frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+4}$  دس  
الـحل:

$$\frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+4} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+2)^2} = \frac{s+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

$$\int \left( 1 - \frac{1}{s+2} \right) ds = s - \ln|s+2| + C$$

(٢٥)  $\frac{1}{s^2+5s+6}$  دس  
الـحل:

$$\frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$\int \left( \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right) ds = \ln|s+2| - \ln|s+3| + C$$



التكامل المحدود

\* التكامل المحدود الاقتران ق(س) في الفترة [أ. ب] هو:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

أ: هو الحد السفلي للتكامل

ب: هو الحد العلوي للتكامل

\* نقوم بإيجاد التكامل بصورة عامة ثم نعوض (الحد العلوي) - (الحد السفلي) ولا نضيف ثابت التكامل (ج)

أسئلة:

١)  $\int_8^8 dx = 8 - 8 = 0$

$16 = 1 \times 8 - 3 \times 8 = -16$

٢)  $\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

$16 = (2 - 2) - (2 - 2) = 0$

٣)  $\int_5^{25} dx = 25 - 5 = 20$

$28 = (1 + 1) - (5 + 25) = -23$

٤)  $\int_8^{16} dx = 16 - 8 = 8$

$24 = (2 + 2) - (8 + 16) = -12$

٥)  $\int_1^1 dx = 1 - 1 = 0$

$\frac{1}{3} = (1 - 1) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

٦)  $\int_5^5 dx = 5 - 5 = 0$

$\int_2^5 dx = 5 - 2 = 3$

ملاحظة:

تذكر ان (١) لو هـ = ١  
(٢) لو ١ = صفر

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

٧)  $\int_1^2 dx = 2 - 1 = 1$

$\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

٨)  $\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

٩)  $\int_7^7 dx = 7 - 7 = 0$

$\int_7^7 dx = 7 - 7 = 0$

١٠)  $\int_1^1 dx = 1 - 1 = 0$

$\int_1^1 dx = 1 - 1 = 0$

$\int_1^1 dx = 1 - 1 = 0$

١١)  $\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

١٢)  $\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

$\int_3^3 dx = 3 - 3 = 0$

١٣)  $\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

$\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

$\int_2^2 dx = 2 - 2 = 0$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٧ إذا كان ل (س) = ٢س + ١ هي مشتقة الاقتران

ل (س) ومعرف على الفترة [١، ٢] د

فجد قيمة ل (٢) - ل (١)

الحل:

ل (٢) - ل (١) = ل (١) = ٢س + ١ = دس

= ٢س + ١ = ٢(٢) + ١ = ٥

١٨ إذا كان ما ل (س) دس = ٣س + ج

فجد قيمة ما ل (س) دس

الحل:

ما ل (س) دس = ٣س + ج

= ٣س + ج = ٣(١) + ج = ٣ + ج

١٩ إذا كان ما ق (س) دس = ٣س + ٢س + ج

فجد قيمة ما ق (س) دس

الحل:

ما ق (س) دس = ٣س + ٢س + ج

= (٣ + ٢)س + ج = ٥س + ج

= ٥(١) + ج = ٥ + ج

١٤ جد ما ل (س) دس = ١/٢س

الحل:

ما ل (س) دس = ١/٢س = ١٢س [١]

= (١/٢) × (١٢) - (١/٢) × (٤) = ٦ - ٢ = ٤

١٥ ما ل (س) دس = ٧ - ١/٢س

الحل:

ما ل (س) دس = (٧ - ١/٢س) = ٧ + ١/٢س دس

= (٧ × ١) - (١/٢) × (١) = ٧ - ١/٢ = ١٣ ١/٢

= ١٣ ١/٢

١٦ إذا كان ق (٣) = ١٥، ق (١) = ٢

فجد قيمة ما ق (س) دس

الحل:

ما ق (س) دس = ق (س) = ١٥ - ٢ = ١٣

= ١٣ - ١٥ = -٢

١٧ إذا كان ق (٢) = ٤، ق (٠) = ١

فجد قيمة ما ق (س) دس

الحل:

ما ق (س) دس = ق (س) = ٤ - ١ = ٣

= ٣ - ٤ = -١

١٨ إذا كانت هـ (س) = ٦س هي مشتقة الاقتران

هـ (س) والمعرف على الفترة [٢، ٣] د

فجد قيمة هـ (٣) - هـ (٢)

الحل:

هـ (٣) - هـ (٢) = ٦(٣) - ٦(٢) = ١٨ - ١٢ = ٦

١٩ ما ل (س) دس = ٣س = ٢٧ - ١٢ = ١٥

إيجاد الثوابت

\* إذا أعطانا السؤال تكامل وطلب منا إيجاد قيمة الثابت فإننا نكامل ثم نجد الثابت عن طريق حل المعادلة

قاعدة سريعة :-

بـ جـ دس = جـ (ب - أ) جـ = عدد ثابت

أسئلة :

(١) إذا كان  $\int \frac{1}{x^2} dx = 24$  جد قيمة جـ

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 24$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 24$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 24$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 24$

(٢) إذا كان  $\int \frac{1}{x^2} dx = 16$  دس = ١٦

جد قيمة الثابت (جـ)

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 16$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 16$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 16$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 16$

(٣) إذا كان  $\int \frac{1}{x^2} dx = 18$  دس = ١٨

جد قيمة الثابت (أ)

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 18$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 18$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 18$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 18$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 18$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 18$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 18$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 18$

(٤) إذا كان  $\int \frac{1}{x^2} dx = 9$  دس = ٩

جد قيمة الثابت (جـ)

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 9$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 9$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 9$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 9$

S  
A  
L  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

(٥) إذا كان  $\int \frac{1}{x^2} dx = 21$  دس = ٢١

فجد قيمة الثابت (جـ)

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 21$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 21$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 21$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 21$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 21$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 21$

(٦) ما  $\int \frac{1}{x^2} dx = 15$  دس = ١٥

فجد قيمة الثابت (ب)

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 15$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 15$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 15$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 15$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 15$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 15$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 15$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 15$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 15$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 15$

(٧) إذا كان  $\int \frac{1}{x^2} dx = 6$  دس = ٦

فجد قيمة الثابت (هـ)

الحل :

$\int \frac{1}{x^2} dx = 6$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 6$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 6$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 6$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 6$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 6$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 6$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 6$

$\int \frac{1}{x^2} dx = 6$  دس =  $\int \frac{1}{x^2} dx = 6$

خطوات حل المعادلة التربيعية:

(١) نجعل المعادلة تساوي صفر

(٢) نجعل معامل التربيع = ١ وذلك بالقسمة على المعامل

(إن أمكن)

(٣) نبدأ بالتحليل

(٤) نساوي كل قوس بالصفر

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١١) إذا كان ج عدد ثابتاً وكان ق (ج) = ١٢،  
ق (٠) = ٨، ما ق (س) - هـ. دس = صفر  
فجد قيمة الثابت (هـ)

الـحل:

$$\begin{aligned} & \text{ما} \text{ ق (س) - هـ. دس = ق (س) - هـ. دس} \\ & \leftarrow \text{ق (ج) - هـ. دس} - \text{ق (٠) - هـ. دس} \\ & \leftarrow (١٢ - ٨) - (٠ - ٨) \\ & ١٢ - ٨ - ٧ - ٥ = \text{صفر} \\ & \text{هـ} = ٥ \end{aligned}$$

١٢) إذا كان ق (س) إقتران وكان ق (٣) = ١٠،  
ق (٢) = ١٠، ما ٤هـ + ٢ق (س). دس = ١٢  
أثبت، جد قيمة أبدلالة هـ

الـحل:

$$\begin{aligned} & \text{ما} \text{ ٤هـ} + \text{٢ق (س). دس} = \text{٤هـ} + \text{٢ق (س). دس} \\ & = (٤هـ + ٢ق (٣)) - (٤هـ + ٢ق (٢)) \\ & = ٤هـ + ٦ - ٤هـ - ٤ = ١٢ \\ & ٤هـ + ٦ - ٤هـ - ٤ = ١٢ \\ & \frac{٤}{٤} = \frac{١٦}{٤} - \frac{٤}{٤} \\ & \text{أ} = ٤ - ٤ \end{aligned}$$

١٨) إذا كان ما (٤س - ١). دس = -٣ ج  
فجد قيم الثابت (ج)  
الـحل:

$$\begin{aligned} & \text{ما} \text{ ٤س} - ١ - \text{دس} = ٢س - ٢س - ١ \\ & \leftarrow (٢ - ٨) - (٢ - ٢) = -٣ - ٢ \\ & \leftarrow ٦ - ٢ + ٢ - ٢ = ٣ - ٢ \\ & ٢ - ٢ - ٢ - ٢ = ٦ - ٢ = \text{صفر} \\ & ٢ - ٢ - ٢ - ٢ = ٣ - ٢ = \text{صفر} \\ & (ج - ٣) (١ + ج) = \text{صفر} \end{aligned}$$

$$\boxed{ج = ٣، ١}$$

١٩) إذا كان ق (٢) = ٥، ق (١) = ٣  
فجد قيمة الثابت (أ)

التي تجعل ما أق (س). دس = ١٢  
الـحل:

$$\begin{aligned} & \text{ما} \text{ أق (س). دس} = \text{أق (س). دس} \\ & \text{أق (٢) - أق (١)} = ١٢ - ٣ \\ & ١٥ - ١٣ = ١٢ - ٣ \\ & \text{أ} = ٦ \end{aligned}$$

١٠) إذا كان ق إقتراناً متصلاً، وكان ق (١) = ٣،  
ق (ج) = ٨، ما ق (س) - ٢س. دس = ج  
فجد قيمة (قيم) الثابت ج

الـحل:

$$\begin{aligned} & \text{ما} \text{ ق (س) - ٢س. دس} = \text{ق (س) - ٢س. دس} \\ & = \text{ق (ج) - ٢ج} - \text{ق (١) - ٢} \\ & ٨ - ٢ - (٣ - ٢) \neq ج \\ & ٦ + ٢ - ٦ = ج - ٦ = ٠ \\ & (ج + ٢) (ج - ٢) = ٠ \end{aligned}$$

$$\boxed{ج = ٢} \quad \boxed{ج = ٣}$$

إستنتاج النكامل

قاعدة :-

١) إذا كان ص = ما ق (س) . دس .  
فإن ص = ق (س)

٢) إذا كان ص = ما ق (س) . دس .  
فإن ص = صفر

أسئلة :

١) ص = ما أس + حاس . دس جد  $\frac{ص}{ص}$

الحل :

$\frac{ص}{ص} = ص٢ + حاس$

٢) ق (س) = ما<sup>٢</sup> ص<sup>٢</sup> + ٥ . دس جد ق (٢)

الحل :

ق (س) = صفر ق (٢) = صفر

٣) ق (س) = ما س (١ - س) . دس جد ق (٢)

الحل :

ق (س) = س (١ - س) ← ق (١) = ٦

٤) إذا كان ص = ما جتا س - قا (١ + س) + هـ س . دس

فجد  $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = جتا س - قا (١ + س) + هـ س$

٥) إذا كان ق س = ما<sup>٢</sup> ص<sup>٢</sup> + ٥ . دس + ما<sup>٣</sup> هـ س + ٢

فجد ق (س)

الحل :

ق (س) = صفر

٦) إذا كان ما ق (س) . دس = س - ٤س + ٧ فجد ق (٢)

الحل : نشق الطرفين

(ما ق (س) . دس) = (س - ٤س + ٧)

ق (س) = س<sup>٣</sup> - ٤ ← ق (٢) = ٨ - ٤ - ١٢ = -٨

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٧) إذا كان ما ق (س) . دس = س<sup>٢</sup> - ٥س

جد ق (٢)

الحل : نشق الطرفين

(ما ق (س) . دس) = (س<sup>٢</sup> - ٥س)

ق (س) = س<sup>٦</sup> - ٥

ق (٢) = ١٩

١٨) إذا كان ما ق (س) . دس = س<sup>٣</sup> + ١ - س

جد ق (١)

الحل : نشق الطرفين

(ما ق (س) . دس) = (س<sup>٣</sup> + ١ - س)

ق (س) = س<sup>٢</sup> + ٣

ق (١) = ٥ = ٣ + ٢

١٩) إذا كان ما ق (س) (س<sup>٣</sup> + ١) . دس = س<sup>٢</sup> + أس + ١

وكان ق (١) = ٦

فجد قيمة الثابت أ

الحل :

(ما ق (س) (س<sup>٣</sup> + ١) . دس) = (س<sup>٢</sup> + أس + ١)

ق (س) = س<sup>٣</sup> + ٢س<sup>٢</sup> + أس

ق (١) = ٣ + ٢ + أ

٣ + ٦ ← ٣ + ٢ + أ = ٣

١٠) إذا كان ما ق (س) . دس = هـ س<sup>٢</sup> + ٤هـ ،

وكان ق (أ) = -١٢ ، أ ≠ صفر

فجد قيمة (قيم) الثابت أ

الحل :

(ما ق (س) . دس) = (هـ س<sup>٢</sup> + ٤هـ)

ق (س) = هـ س<sup>٢</sup> × (٢ - س) + صفر

ق (أ) = هـ س<sup>٢</sup> ×  $\frac{٢ - أ}{٢ - أ}$

١ = هـ س<sup>٢</sup>

هـ س<sup>٢</sup> = ١ ← ١ - أ = صفر

١ = أ<sup>٢</sup>      أ = ١ ±

خواص التكامل المحدود :-

(١) الخواص الخطية :

- أ)  $\int (X \pm Y) dx = \int X dx \pm \int Y dx$  دس. دس.  
 ب)  $\int (X \pm Y) dx = \int X dx \pm \int Y dx$  دس. دس.

(٢) خاصية القلب :

$\int (X \pm Y) dx = \int X dx \pm \int Y dx$  دس.

(٣) خاصية الإضافة :

$\int (X \pm Y) dx = \int X dx \pm \int Y dx$  دس.



\* ملاحظة :

نعلم أن السؤال على خواص التكامل إذا كان لدينا  
 إسم إقتران مثل ق(س)، ه(س) . . . .  
 داخل تكامل محدود  
 يجب علينا ترتيب المعطيات:  
 نجعل ق لوحدها داخل التكامل

خطوات الحل :

- (١) يوزع التكامل على الجمع والطرح.  
 (٢) يطرد الرقم الذي يسبق إسم الإقتران.  
 (٣) نجعل الحدود مرتبة عن طريق خاصية القلب.

أسئلة :

(١) إذا كان  $\int (س) dx = ٦$

فجد قيمة  $\int (٢س) dx$  دس.

الحل :

$\int (س) dx = ٦$  دس.  $\int (٢س) dx = ١٢$

(٢) إذا كان  $\int (س) dx = ١٠$

فجد قيمة  $\int (٢س + ٣) dx$  دس.

الحل :

$\int (س) dx = ١٠$  دس.

$\int (٢س + ٣) dx = ١٩$  دس.

$\int (٢س + ٣) dx = ١٩$  دس.

(٣) إذا علمت ان  $\int (س + ٥) dx = ١٦$

فجد  $\int (س) dx$  دس.

الحل : نرتب المعطيات

$\int (س + ٥) dx = ١٦$  دس.

$\int (س) dx + ٥ = ١٦$  دس.

$\int (س) dx = ١٦ - ٥ = ١١$  دس.

$\int (س) dx = ١١$  دس.

(٤) إذا علمت ان  $\int (٢س + ٣) dx = ١٠$

فجد  $\int (٣س + ٢) dx$  دس.

الحل : نرتب المعطيات

$\int (٢س + ٣) dx = ١٠$  دس.

$\int (٢س) dx + ٣ = ١٠$  دس.

$\int (٢س) dx = ١٠ - ٣ = ٧$  دس.

$\int (٣س + ٢) dx = ١١$  دس.

$\int (٣س + ٢) dx = ١١$  دس.

المطلوب  $\int (٣س + ٢) dx = ١١$  دس.

$\int (٣س + ٢) dx = ١١$  دس.

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٩) إذا كان  $\frac{1}{2}x - 3 = 3$  دس = ٣  
فجد قيمة  $\frac{1}{2}x + 5$  دس.  
**الحل:** نرتب المعطيات  
 $\frac{1}{2}x - 3 = 3$  دس.  $\frac{1}{2}x = 6$  دس.  $x = 12$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{2}x + 5 = 6 + 5 = 11$  دس.  
 $1 - 5 - 0 + 6 = 2$  دس.

١٠) إذا كان  $\frac{1}{2}x = 8$  دس = ٨  
فجد قيمة  $\frac{1}{2}x + 6$  دس.  
**الحل:**  
 $\frac{1}{2}x = 8$  دس.  $x = 16$  دس.  
 $16 - 8 = 8$  دس.

١١) إذا كان  $\frac{1}{2}x = 5$  دس = ٥  
فجد قيمة كل من ما يلي :-

أ)  $\frac{1}{2}x + 4 = 5 + 4 = 9$  دس.  
ب)  $\frac{1}{2}x - 2 = 5 - 2 = 3$  دس.  
**الحل:** نرتب المعطيات  
 $\frac{1}{2}x = 5$  دس.  $x = 10$  دس.  
المطلوب

أ)  $\frac{1}{2}x + 4 = 5 + 4 = 9$  دس.  
ب)  $\frac{1}{2}x - 2 = 5 - 2 = 3$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{2}x + 6 = 5 + 6 = 11$  دس.  
 $2 = 10 \times 3 - 10 = 20 - 10 = 10$  دس.  
 $24 = 8 + 10 \times 3 = 8 + 30 = 38$  دس.

٥) إذا كان  $\frac{1}{3}x = 6$  دس = ٦  
فجد قيمة  $\frac{1}{3}x + 3$  دس.  
**الحل:** نرتب المعطيات  
 $\frac{1}{3}x = 6$  دس.  $x = 18$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{3}x + 3 = 6 + 3 = 9$  دس.  
 $\frac{1}{3}x = 6$  دس.  $x = 18$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{3}x + 3 = 6 + 3 = 9$  دس.  
 $44 = 12 \times 3 + 0 - 8 = 36 - 8 = 28$  دس.

١٦) إذا كان  $\frac{1}{2}x = 5$  دس = ٥  
فجد قيمة  $\frac{1}{2}x + 6$  دس.  
**الحل:** نرتب المعطيات  
 $\frac{1}{2}x = 5$  دس.  $x = 10$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{2}x + 6 = 5 + 6 = 11$  دس.  
 $1 = 6 - 12 + 5 = -1$  دس.

١٧) إذا علمت ان  $\frac{1}{2}x = 4$  دس = ٤  
فجد قيمة  $\frac{1}{2}x + 5$  دس.  
**الحل:** نرتب المعطيات  
 $\frac{1}{2}x = 4$  دس.  $x = 8$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{2}x + 5 = 4 + 5 = 9$  دس.  
 $10 - 2 \times 5 = 0$  دس.

١٨) إذا كان  $\frac{1}{4}x = 2$  دس = ٢  
فجد قيمة  $\frac{1}{4}x + 3$  دس.  
**الحل:** نرتب المعطيات  
 $\frac{1}{4}x = 2$  دس.  $x = 8$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{4}x + 3 = 2 + 3 = 5$  دس.  
 $4 = 20 - 4 = 16$  دس.  
المطلوب  $\frac{1}{4}x + 3 = 2 + 3 = 5$  دس.  
 $18 = 6 \times 3 = 18$  دس.

\* ملاحظة:

نعلم أن السؤال على خاصية الاضافة، إذا كان لدينا ثلاث تكاملات أو أكثر داخلهم نفس إسم الاقتران ق وحدود التكامل مختلفة .

**خطوات الحل:**

- (١) نرتب المعطيات (نجعل ق لوحدها داخل التكامل)
- (٢) نرسم خط الاضافة ونضع عليه الارقام من حدود التكامل .
- (٣) نعوض بالقانون .
- (٤) لا ننسى ذكر الله والمطلوب من السؤال .

(١٥) إذا كان  $\int_1^2 (س) دس = ٩$  ،  $\int_2^3 (س) دس = ١٨$  فجد قيمة  $\int_1^3 (س) دس$

**الحل:**

$$\int_1^3 (س) دس = \int_1^2 (س) دس + \int_2^3 (س) دس$$

$$١٨ = ٩ + \int_2^3 (س) دس$$

$$\int_2^3 (س) دس = ٩$$

المطلوب  $\int_1^3 (س) دس = \int_1^2 (س) دس + \int_2^3 (س) دس = ٩ + ٩ = ١٨$

(١٦) إذا كان  $\int_1^4 (س) دس = ٤$  ،  $\int_4^٣ (س) دس = ٣$  ،

$\int_٣^٤ (س) دس = ٦$  فجد قيمة  $\int_١^٣ (س) دس$

**الحل:** نرتب المعطيات

$$\int_١^٣ (س) دس = \int_١^٤ (س) دس - \int_٣^٤ (س) دس$$

$$= ٤ - ٣ = ١$$

المطلوب  $\int_١^٣ (س) دس = ١$

(١٧) إذا كان  $\int_١^٤ (س) دس = ٤$  ،  $\int_٤^٣ (س) دس = ٥$  فجد قيمة  $\int_١^٣ (س) دس$

$\int_٣^٤ (س) دس = ٤ - ٥ = -١$

**الحل:** نرتب المعطيات

$$\int_١^٣ (س) دس = \int_١^٤ (س) دس - \int_٣^٤ (س) دس$$

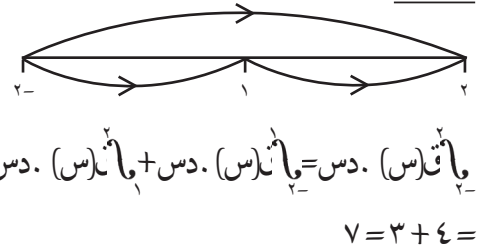
$$= ٤ - (-١) = ٥$$

المطلوب  $\int_١^٣ (س) دس = ٥$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
5  
A  
T  
E  
E  
B

(١٢) إذا كان  $\int_١^٣ (س) دس = ٤$  ،  $\int_٣^٤ (س) دس = ٣$  فجد قيمة  $\int_١^٤ (س) دس$

**الحل:**



$$\int_١^٤ (س) دس = \int_١^٣ (س) دس + \int_٣^٤ (س) دس$$

$$= ٤ + ٣ = ٧$$

(١٣) إذا كان  $\int_١^٣ (س) دس = ٣٠$  ،  $\int_٣^٤ (س) دس = ١٢$  فجد قيمة  $\int_١^٤ (س) دس$

**الحل:**

$$\int_١^٤ (س) دس = \int_١^٣ (س) دس + \int_٣^٤ (س) دس$$

$$= ٣٠ + ١٢ = ٤٢$$

(١٤) إذا كان  $\int_١^٤ (س) دس = ٥$  ،  $\int_٤^٣ (س) دس = ٤$  فجد قيمة  $\int_١^٣ (س) دس$

**الحل:**

$$\int_١^٣ (س) دس = \int_١^٤ (س) دس - \int_٣^٤ (س) دس$$

$$= ٥ - ٤ = ١$$

المطلوب  $\int_١^٣ (س) دس = ١$



S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٨ إذا كان  $\int_{1+m}^{7-} q(s)$  دس = صفر ، فجد قيمة الثابت م .  
الحل:

بما ان الجواب صفر اذا : العلوي = السفلي  
م ٣ = ١ + ٧ - ← م ٣ = ٨ - ← م ٢ = ٧ -

١٨ إذا كان  $\int_{1+2}^{4-2} q(s)$  = صفر ، فجد قيمة الثابت أ .  
الحل:

بما ان الجواب صفر اذا العلوي = السفلي  
٢ - أ = ٤ - ٧ = ١ + ٢ ← ٢ - أ - ٢ = ٦ - أ = صفر  
(أ - ٣) (٣ + أ) = صفر  
∴  $\boxed{أ = ٣}$  ،  $\boxed{أ = ٢}$

١٨ إذا كان  $\int_{1}^{3} q(s) + ٢$  دس = ٤ ،

$\int_{1}^{4} q(s) + ٣$  دس = ١

فجد قيمة  $\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس .

الحل: نرتب المعطيات

$\int_{1}^{3} q(s) + ٢$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s)$  دس +  $\int_{1}^{3} ٢$  دس .

$\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s)$  دس + ٦

$\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s)$  دس + ٦ = ١

$\int_{1}^{4} q(s) + ٣$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس +  $\int_{3}^{4} q(s) + ٣$  دس .

$\int_{1}^{4} q(s) + ٣$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس +  $\int_{3}^{4} q(s) + ٣$  دس = ١ + ٦ = ٧

$\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس = ٧ - ٦ = ١

$\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس +  $\int_{1}^{3} ٣$  دس .

١ = ٢ - ١ =

المطلوب  $\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس =  $\int_{1}^{3} q(s) + ٣$  دس +  $\int_{1}^{3} ٣$  دس .

١ = ٦ + ١ = ٧

قاعدة :-  $\int_{1}^{3} q(s) + ٢$  دس = صفر

مثال :  $\int_{1}^{3} q(s) + ٧$  دس = صفر

$\int_{1}^{3} q(s) + ٦$  دس = صفر

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

تكمال الاقتزان المتشعب:-

\* نستخدم هنا خاصية الاضافة

أسئلة :

$$(1) \text{ اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} 2-4 \text{ س} \\ 2-3 \text{ س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \geq \text{س} \geq 2 \\ 2 > \text{س} \geq 3 \end{array}$$

فجد قيمة ما٢ق(س) دس

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ما٢ق(س)} &= \text{دس} = \text{ما٢ق(س)} + \text{دس} \\ \text{ما٢س} - 2 &= \text{دس} + \text{ما٢س} - 6 \\ 2 &= \text{ما٢س} - 2 + 2 + 2 \\ &= 2 + 2 - (2 - 6) \\ &= 4 - (-4) = 8 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} 4-4 \text{ س} \\ 3-3 \text{ س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \geq \text{س} \geq 0 \\ 3 \geq \text{س} > 1 \end{array}$$

فجد قيمة ما٢ق(س) دس

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ما٢ق(س)} &= \text{دس} = \text{ما٢ق(س)} + \text{دس} \\ \text{ما٢س} - 4 &= \text{دس} + \text{ما٢س} - 2 \\ \text{س} - 4 &= \text{س} + 3 - 2 \\ &= 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

$$(3) \text{ اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} 4-3 \text{ س} \\ 4-2 \text{ س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 > \text{س} \geq 0 \\ 4 \geq \text{س} \geq 2 \end{array}$$

فجد قيمة ما٢ق(س) دس

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ما٢ق(س)} &= \text{دس} = \text{ما٢ق(س)} + \text{دس} \\ \text{ما٢س} - 4 &= \text{دس} + \text{ما٢س} \\ \frac{\text{س}}{4} - 4 &= \text{س} + 4 \\ 8 &= 4 - 16 + (0 - 0) - (8 - 4) = -8 \end{aligned}$$

$$(4) \text{ اذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} 2 \\ 1-2 \text{ س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \geq \text{س} \geq 1 \\ 3 \geq \text{س} > 2 \end{array}$$

فجد قيمة كل ما يلي:

أ) ما٢ق(س) دس (ب) ما٢ق(س) دس

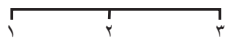
ج) ما٢ق(س) دس (د) ما٢ق(س) + ١ دس

الحل:

أ) ما٢ق(س) دس = ما٢س = ٣ ما٢س دس  
٣ س = ٣ - ١٢ = ٩

ب) ما٢ق(س) دس = ما٢س - ١ دس  
٢ (س - ٢ س) = ٢

٣٦ = (٢ - ٨) ٢ - (٣ - ٢٧) ٢ =



ج) ما٢ق(س) دس = ما٢ق(س) دس + ما٢ق(س) دس

ما٢س = ما٢س - ١ دس

٢ س = ٢ س - ٣ س + ٢

٢١ = (٢ - ٨) - (٣ - ٢٧) + ١ - ٤ =

د) ما٢ق(س) + ١ دس

٢ - ما٢ق(س) دس + ما٢س =

٢ - ٢١ س =

٤٤ - ٢ = ٤٢ - =

التكامل بالتعويض:-

**قاعدة :-**

$$\int (ع(س)) \times ع(س) دس = \int (ص) دص$$

\* يستخدم التكامل بالتعويض عند فشل الترتيب وذلك  
فرض «ص» واحدة من الحالات التالية:

١) قوس مرفوع الى قوة ما داخله غير خطي نفرض  
ص = ما داخل القوس

٢) اذا كان لدينا مثلثي زاوية غير خطية نفرض  
ص = الزاوية

٣) اذا كان لدينا (هـ) الاقتران الأسّي مرفوع لقوة غير خطية  
نفرض ص = القوة

٤) اذا كان لدينا بسط ومقام والبسط هو المشتقة للمقام  
نفرض ص = المقام

٥) اذا كان لدينا (ق) وما داخلها ليس (س)  
نفرض ص = ما داخل (ق)

خطوات حل التكامل بالتعويض:-

١) نفرض «ص»

٢) نشق ونجعل دس =  $\frac{ص}{ص} = \frac{دص}{جواب المشتقة}$

٣) نعود الى التكامل ونعوض وتخلص من «س»

٤) نكامل ونرجع قيمة «ص»

\* اذا كان التكامل محدود فاننا نغير الحدود بالتعويض  
في «ص» ولا نرجع قيمة «ص»

أسئلة :

**جد كل من التكاملات التالية :**

١)  $\int (س+١) دس$

الحل:

$$\begin{aligned} \int (س+١) دس &= \int (١+س) دس \\ &= \int ١ دس + \int س دس \\ &= س + \frac{س^2}{2} + ج \end{aligned}$$

٢)  $\int (س-٤) دس$

الحل:

$$\begin{aligned} \int (س-٤) دس &= \int (س-٤) دس \\ &= \int س دس - \int ٤ دس \\ &= \frac{س^2}{2} - ٤س + ج \end{aligned}$$

٣)  $\int (س^٣+٢) دس$

الحل:

$$\begin{aligned} \int (س^٣+٢) دس &= \int (س^٣+٢) دس \\ &= \int س^٣ دس + \int ٢ دس \\ &= \frac{س^4}{4} + ٢س + ج \end{aligned}$$

٤)  $\int (س+١)(س-٣) دس$

الحل:

$$\begin{aligned} \int (س+١)(س-٣) دس &= \int (س^٢-٢س-٣) دس \\ &= \int س^٢ دس - \int ٢س دس - \int ٣ دس \\ &= \frac{س^3}{3} - س^٢ - ٣س + ج \end{aligned}$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

$$١٩) \int \frac{٦-٤س}{١+س٣-٢س} دس$$

الحل:

$$\int (٦-٤س)(١+س٣+٢س) دس$$

$$ص = ١+س٣+٢س$$

$$\frac{دص}{٣-س٢} = دس \leftarrow ٣-٢س = دس$$

$$\int (٦-٤س)(١+س٣+٢س) دص$$

$$\int ٢٢ص دص$$

$$٣ = \int (١+س٣+٢س) دص$$

$$٣ = \int (١+س٣+٢س) دص$$

$$١٠) \int (٢+س) دس$$

الحل:

$$ص = ٢+س \leftarrow دص = دس \leftarrow دس = دس$$

$$\int ٢ دص = ٢ص$$

$$\int ١ دص = ١ص$$

$$\int (٢+س) دص = ٢ص + \frac{١}{٢}ص^٢$$

$$\frac{٦٥}{٤} = \frac{٨١}{٤} - \frac{١٦}{٤} = \frac{٢}{٤}ص^٢$$

$$١١) \int (١-٤س) دس$$

الحل:

$$\int (١-٤س) دس$$

$$ص = ١-٤س \leftarrow دص = -٤ دس$$

$$\int ١ دص = \frac{١}{-٤}ص$$

$$\int -٤س دص = -١ص$$

$$\int ١ دص = ١ص$$

$$\int (١-٤س) دص = \frac{١}{-٤}ص - ١ص$$

$$\int ١ دص = \frac{٣}{٤}ص$$

$$\frac{٣}{٤}ص = \frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤}ص$$

$$١٥) \int (١-٢س) دس$$

الحل:

$$\int (١-٢س) دس$$

$$\frac{دص}{دس} = دس \leftarrow ١-٢س = دس$$

$$\int (١-٢س) دص = دص - ١ص$$

$$\int (١-٢س) دص = \frac{١}{٢}ص^٢ - ١ص$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}ص^٢ - ١ص$$

$$١٦) \int (٢-٣س) دس$$

الحل:

$$ص = ٢-٣س \leftarrow دص = -٣ دس$$

$$\int (٢-٣س) دص = \frac{٢}{-٣}ص - \frac{٣}{٢}ص^٢$$

$$\frac{١}{٨} = \frac{٢}{-٣}ص - \frac{٣}{٢}ص^٢$$

$$١٧) \int (١٠+٥س) دس$$

الحل:

$$\int (١٠+٥س) دس$$

$$ص = ١٠+٥س \leftarrow دص = دس$$

$$\int (١٠+٥س) دص = ١٠ص + \frac{٥}{٢}ص^٢$$

$$٥ = ١٠ص + \frac{٥}{٢}ص^٢$$

$$١٨) \int (٣+٦س) دس$$

الحل:

$$\int (٣+٦س) دس$$

$$ص = ٣+٦س \leftarrow دص = دس$$

$$\int (٣+٦س) دص = ٣ص + ٣ص^٢$$

$$\frac{٤}{٣} = ٣ص + ٣ص^٢$$

$$\frac{٣}{٨} = ٣ص + ٣ص^٢$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
E  
A  
T  
E  
E  
B

١١٢ ما أس (س-٥) دس

الحل:

$$ص = س - ٥ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\begin{aligned} ٣ = ص \leftarrow ٢ = ص \\ ٥ = ص \leftarrow ٠ = ص \end{aligned}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١٥٢}{٩} = \frac{١٢٥}{٩} + \frac{٢٧}{٩} = \frac{١٥٢}{٩}$$

١١٣ ما أس (س-١) دس

الحل:

$$ص = س - ١ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\begin{aligned} ٣ = ص \leftarrow ٢ = ص \\ ٠ = ص \leftarrow ١ = ص \end{aligned}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{٩}{٣} = \frac{٩}{٣} \leftarrow \frac{٩}{٣} = \frac{٩}{٣} \leftarrow \frac{٩}{٣} = \frac{٩}{٣}$$

١١٤ ما أس (س+١) دس

الحل:

$$ص = س + ١ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\begin{aligned} ٧ = ص \leftarrow ٢ = ص \\ ٢ = ص \leftarrow ١ = ص \end{aligned}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{٥}{٢٨} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٤} = \frac{١}{٢٨}$$

١١٥ ما أس ح (س+٣) دس

الحل:

$$ص = س + ٣ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

١١٦ ما أس جتا (س-٤) دس

الحل:

$$ص = س - ٤ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

١١٧ ما أس (س-٢) جا (س+٤) دس

الحل:

$$ص = س - ٢ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

١١٨ ما أس فا (س+٧) دس

الحل:

$$ص = س + ٧ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

١١٩ ما أس جتا (س+٣) دس

الحل:

$$ص = س + ٣ \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

١٢٠ ما أس جا (س) دس

الحل:

$$ص = س \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص \leftarrow س = دص$$

$$\frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧}$$

$$\frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧}$$

$$\frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧}$$

$$\frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} \leftarrow \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧}$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
E  
A  
T  
E  
E  
B

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س}^2 - \text{س} + 1 &\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 - \text{س} - 1 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^2 - \text{س} - 1 \\ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} &= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} &= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 1}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} \\ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} &= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 1}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} \\ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} &= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 1}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} \\ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} &= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 1}{\text{س}^2 - \text{س} - 1} \end{aligned}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^3}{\text{س}^2 + 1} \quad (٢٦)$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 1 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3 - \text{س}^2 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^3 - \text{س}^2$$

$$\boxed{\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2, \text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3 - \text{س}^2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2}{\text{س}^3 - \text{س}^2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3 - \text{س}^2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2}{\text{س}^3 - \text{س}^2}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^6 - \text{س}^4}{\text{س}^2 + 1} \quad (٢٧)$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 1 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - 2 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - 2$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 2}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 2}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 2}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^2 - \text{س}^3}{\text{س}^2 + 1} \quad (٢٨)$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^2 - 2 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^6 - \text{س} + 1 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^6 - \text{س} + 1$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^6 - \text{س} + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^6 - \text{س} + 1}{\text{س}^6 - \text{س} + 1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^6 - \text{س} + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^6 - \text{س} + 1}{\text{س}^6 - \text{س} + 1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^6 - \text{س} + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^6 - \text{س} + 1}{\text{س}^6 - \text{س} + 1}$$

(٢٩) إذا كان ما فوق (س) دس = ٥

فجد قيمة ما فوق (٥ + س٣) دس.

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^3 + 5 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3 \leftarrow \text{دص} = 3$$

$$\boxed{\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 11}$$

$$\boxed{\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3}{\text{س}^3} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3}{\text{س}^3}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} \quad (٢١)$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^2 - 2 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 - 2 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^2 - 2$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - 2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 - 2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - 2} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 - 2}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 1} \quad (٢٢)$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 1 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 + 1 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^2 + 1$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2 + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 + 1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2 + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 + 1}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^3}{\text{س}^3 + 1} \quad (٢٣)$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^3 + 1 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3 + 1 \leftarrow \text{دص} = \text{س}^3 + 1$$

$$\boxed{\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2}$$

$$\boxed{\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3 + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3 + 1}{\text{س}^3 + 1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^3 + 1} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^3 + 1}{\text{س}^3 + 1}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^7}{\text{س}^7} \quad (٢٤)$$

الحل:

$$\text{ص} = 7 \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow \text{دص} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{س} = 9 \leftarrow \text{ص} = 3}$$

$$\boxed{\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^7} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^7}{\text{س}^7} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^7}{\text{س}^7}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^7} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^7}{\text{س}^7}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^7} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{س}^7}{\text{س}^7}$$

$$\text{دس} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 1} \quad (٢٥)$$

الحل:

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
5  
A  
T  
E  
E  
B

١٣٣) اذا علمت ان ق(٢) = ٤، ق(١) = ١  
فجد قيمة ما<sup>٣</sup>ق(س) ق(١+س). دس.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} + 1 & \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \text{س}^3 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{س} = 0 & \leftarrow \text{ص} = 1, \text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2 \\ \text{ما}^3 \text{ق}(ص) & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ما}^3 \text{ق}(ص). \text{دص} \\ \text{ق}(ص) & = 2 - \text{ق}(٢) - \text{ق}(١) = 2 - 4 - 1 = -3 \end{aligned}$$

١٣٤) اذا كان ق(١٠) = ٥، ق(٢) = ١  
فجد قيمة ما<sup>٣</sup>ق(١+س) ق(١+س). دس.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} + 1 & \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \text{س}^3 + 1 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{س} = 2 & \leftarrow \text{ص} = 10 \\ \text{س} = 1 & \leftarrow \text{ص} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ما}^3 \text{ق}(ص) & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{ما}^3 \text{ق}(ص) & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{ق}(ص) & = 1 \\ \text{ق}(١٠) - \text{ق}(٢) & = 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

١٣٠) اذا كان ما<sup>٣</sup>ق(س) = دس = ٤  
فجد قيمة ما<sup>٢</sup>ق(س) ق(١+س). دس.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} + 1 & \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \text{س}^2 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{س} = 1 & \leftarrow \text{ص} = 2, \text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1 \\ \text{ما}^2 \text{ق}(ص) & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{ما}^2 \text{ق}(ص) & = \text{دص} = 4 \end{aligned}$$

١٣١) اذا كان ما<sup>٣</sup>ق(س) = دس = ٣  
فجد قيمة ما<sup>٤</sup>ق(٢+س) ق(٢+س-١). دس.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} + 1 & \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \text{س}^2 + 1 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{س} = 1 & \leftarrow \text{ص} = 2, \text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 5 \\ \text{ما}^4 \text{ق}(ص) & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{ما}^4 \text{ق}(ص) & = \text{دص} = 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

١٣٢) اذا كان ق(٤) = ١٢، ق(١) = ٨  
فجد قيمة ما<sup>٢</sup>ق(س) ق(س). دس.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{س} + 1 & \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \text{س}^2 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{س} = 2 & \leftarrow \text{ص} = 4, \text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 8 \\ \text{ما}^2 \text{ق}(ص) & = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \\ \text{ق}(ص) & = 12 - \text{ق}(٤) - \text{ق}(١) = 12 - 8 - 1 = 3 \end{aligned}$$

التفسير الهندسي:

\* اذا طلب منا السؤال ق(س) واعطانا ق(س) فإننا ندخل النكامل على طرفين ونكامل .

\* تذكر ان ميل المماس = المشتقة

\* يجب ايجاد (ج) ثابت النكامل في هذا النوع من الاسئلة .

\* النقطة المعطاه تحقق الاقتران ونجد منها (ج) .

أسئلة:

١١ اذا كان ق(س) = ١ + ٢س

فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان النقطة

(٣، ١) تمر بالمنحنى .

الحل:

ما ق(س) = دس = ١ + ٢س . دس

ق(س) = ٢س + ١ + ج

نجد (ج) ← (٣، ١) تحقق

$$٣ = ١ + ١ + ج ← ج = ١$$

ق(س) = ٢س + ١ + ج

١٢ اذا كان ق(س) = ٣س - ١٠س

فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان النقطة

(٣، ٢) تمر بالاقتان .

الحل:

ما ق(س) = دس = ٣س - ١٠س . دس

ق(س) = ٣س - ١٠س + ج

نجد (ج) ← (٣، ٢) تحقق

$$٣ = ٣ - ١٠ + ج ← ج = ١٥$$

ق(س) = ٣س - ١٠س + ١٥

١٣ اذا كان ق(س) قابل للاشتقاق وكان ق(س) =

٣س - ٤س + ١ فجد ق(١) علماً بان ق(٣) = ٢ .

الحل:

ما ق(س) = دس = ٣س - ٤س + ١ . دس

ق(س) = ٣س - ٤س + ١ + ج

نجد (ج) ← ق(٣) = ٢ تحقق

$$٢ = ٣ - ١٢ + ٣ + ج ← ج = ١٠$$

ق(س) = ٣س - ٤س + ١ + ١٠

ق(١) = (١) = (١) - ٤(١) + ١ + ١٠ = ١٤

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٤ اذا كان ميل المماس للمنحنى ق(س) عند النقطة

(س، ص) يساوي (٤س + ٦س - ٣)

فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان منحنى الاقتران ق

يمر بالنقطة (-٢، ٠) .

الحل:

ميل المماس = ق(س) = ٤س + ٦س - ٣

ما ق(س) = دس = ٤س + ٦س - ٣ . دس

ق(س) = ٤س + ٦س - ٣ + ج

نجد (ج) ← النقطة (-٢، ٠) تحقق

$$٠ = ٤(-٢) + ٦(-٢) - ٣ + ج ← ج = ٦$$

ق(س) = ٤س + ٦س - ٣ + ٦

١٥ اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة

(س، ص) هو (٣س - ٢س)

فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان يمر بالنقطة (٢، ٦) .

الحل:

ميل المماس = ق(س) = ٣س - ٢س

ما ق(س) = دس = ٣س - ٢س . دس

ق(س) = ٣س - ٢س + ج

نجد (ج) ← النقطة (٢، ٦) تحقق

$$٦ = ٣(٢) - ٢(٢) + ج ← ج = ٢$$

ق(س) = ٣س - ٢س + ٢

١٦ اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق

عند النقطة (س، ص) يساوي (٤س - ٢)

فاكتب قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان يمر بالنقطة

(١، ٨) .

الحل:

ميل المماس = ق(س) = (٤س - ٢)

ما ق(س) = دس = (٤س - ٢) . دس

$$ق(س) = (٤س - ٢) + ج$$

نجد (ج) ← النقطة (١، ٨) تحقق

$$٨ = (٤ - ٢) + ج ← ج = ٧$$

$$ق(س) = (٤س - ٢) + ٧$$



S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٧ ما ق (س) دس = ما هـ<sup>٦</sup>س -  $\frac{1}{س+هـ}$  دس.

ق (س) = ٣هـ<sup>٣</sup>س - ليواس + هـا + ج

← نجد ج ← النقطة (١, ٠) تحقق

١ = ٣هـ - ليوه + ج

١ = ٣ - ١ + ج ← ج = ١

∴ ق (س) = ٣هـ<sup>٣</sup>س - ليواس + هـا - ١

١٨ إذا كان ميل المماس الاقتران ق (س) عند النقطة

(س, ص) يساوي (٢ -  $\frac{1}{س}$ ) وكان المنحنى يمر

بالنقطة ( $\frac{1}{٣}$ , ١) فجد قاعدة الاقتران ق

الـدـلـ:

ميل المماس = ق (س) = ٢ -  $\frac{1}{س}$

ما ق (س) دس = ما هـ<sup>٢</sup>س - ٢ دس

ق (س) = ٢س + ١ + ج

ق (س) = ٢س +  $\frac{1}{س}$  + ج

نجد ج ← النقطة ( $\frac{1}{٣}$ , ١) تحقق

١ = ٢ ×  $\frac{1}{٣}$  +  $\frac{1}{٣}$  + ج

١ = ١ + ٢ + ج ← ج = ٢

ق (س) = ٢س +  $\frac{1}{س}$  + ٢

١٩ إذا كان ق (س) =  $\frac{1}{س+هـ} + ٨هـ<sup>٣</sup>س$  دس

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن الإقتران يمر

بالنقطة (٠, ٥)

الـدـلـ:

ما ق (س) دس = ما هـ<sup>٦</sup>س +  $\frac{1}{س+هـ}$  دس

ق (س) = ليواس + هـا + ٤هـ<sup>٣</sup>س + ج

نجد ج ← النقطة (١, ٠) تحقق

٥ = ليوه + ٤هـ + ج = ٢ ليوه + ٤ × ١ + ج

٥ = ٢ + ٤ + ج ← ج = ١

∴ ق (س) = ليواس + هـا + ٤هـ<sup>٣</sup>س - ١

\* ملاحظة: ليوه = ن ليوه = ن

ليو = ١, ليو = ١

١٧ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س)

عند النقطة (س, ص) يساوي (٣س - ١) (س + ٥)

فجد قاعدة الاقتران ق (س) علماً بأن

ق (٢) = ٣

الـدـلـ:

ميل المماس = ق (س) = (٣س - ١) (س + ٥)

ما ق (س) = ما هـ<sup>٣</sup>س (٣س - ١) (س + ٥) دس

ما هـ<sup>٣</sup>س + ١٥س - ٥س - ٥ دس

ق (س) = ما هـ<sup>٣</sup>س + ١٤س - ٥ دس

ق (س) = ٣س + ٧س - ٥س + ج

نجد ج ← ق (٢) = ٣ - ٣

٣ - ٣ = ٣ - ٧ + ٢ + ج

ج = ٢٩

ق (س) = ٣س + ٧س - ٥س - ٢٩

١٨ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق

عند النقطة (س, ص) يساوي (هـ<sup>٣</sup>) فجد ق (٢)

علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (٠, ٣)

الـدـلـ:

ميل المماس = ق (س) = (هـ<sup>٣</sup>)

ما ق (س) دس = ما هـ<sup>٣</sup> دس

ق (س) = هـ<sup>٣</sup> + ج

نجد ج ← النقطة (٠, ٣) تحقق

ق (٠) = ٣ = هـ + ج

٣ = ١ + ج ← ج = ٢

ق (س) = هـ<sup>٣</sup> + ٢

١٩ إذا كان ق (س) = ٦هـ<sup>٣</sup>س -  $\frac{1}{س+هـ}$

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة (١, ٠) تقع

على منحنى الاقتران ق

الـدـلـ:

التفسير الفيزيائي:

\* تذكيران

ت (ن) نكامل ← ع (ن) نكامل ← ف (ن)

\* في هذا النوع من الاسئلة يجب التخلص من ثابت التكامل (ج) وذلك بايجاد نقطة التحقق المعادلة (الاقتزان) .

أسئلة:

<sup>١</sup> يتحرك جسم بحيث تكون سرعته تعطى بالعلاقة

$$ع(ن) = (٢ن + ٤) م/ث$$

جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٣) ثواني من بدأ الحرك ، علماً بان الموقع الابتدائي ف (٠) = ٦ .

الحل:

$$ع(ن) = ٢ن + ٤$$

$$م أ ع (ن) . دن = م أ ن + ٤ . دن$$

$$ف (ن) = ٢ن + ٤ن + ج$$

$$نجد (ج) ← ف (٠) = ٦ تحقق$$

$$٦ = (٠)٢ + ٤ + (٠) ج ج = ٦$$

$$ف (ن) = ٢ن + ٤ن + ٦$$

$$ف (٣) = (٣)٢ + ٤(٣) + ٦$$

$$\# المسافة بعد ثلاث ثواني = ٢٧ م$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
5  
A  
T  
E  
E  
B

<sup>١٢</sup> يتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت

$$مقدارته (ن) = ١٢ م/ث$$

جد سرعتها بعد مرور زمن مقدارهن علماً

$$بان السرعة الابتدائية ع (٠) = ٧$$

الحل:

$$ت (ن) = ١٢$$

$$م أ ت (ن) . دن = م أ ن + ١٢ . دن$$

$$ع (ن) = ١٢ن + ج$$

$$نجد (ج) ← ع (٠) = ٧ تحقق$$

$$٧ = ١٢ × ٠ + ج ← ج = ٧$$

$$ع (ن) = ١٢ن + ٧$$

<sup>١٣</sup> يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته

تساوي ع (ن) = ٤ن + ٨ جد المسافة التي يقطعها

الجسم بعد مرور ٤ ثواني ،

علماً بان موقعه الابتدائي ف (٠) = ٣ .

الحل:

$$ع (ن) = ٤ن + ٨$$

$$م أ ع (ن) . دن = م أ ن + ٨ . دن$$

$$ف (ن) = ٢ن + ٨ن + ج$$

$$نجد (ج) ← ف (٠) = ٣ تحقق$$

$$٣ = (٠)٢ + ٨(٠) + ج ← ج = ٣$$

$$ف (ن) = ٢ن + ٨ن + ٣$$

$$ف (٤) = (٤)٢ + ٨(٤) + ٣$$

$$= ٦٧ م$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
5  
A  
T  
E  
E  
B

١٦ انطلق جسم بسرعة ابتدائية ع(٠) = ٤٠ م/ث  
ويتسارع بمقدار ثابت وفق العلاقة  
ت(ن) = ١٠ - م/ث، فجد المسافة التي يقطعها  
الجسم بعد مرور (٤) ثواني اذا علمت ان  
ف(١) = ٨٠ م.

ت(ن) = ١٠ - م  
م(ت(ن)) = دس = ١٠ - م. دن.  
ع(ن) = ١٠ - ن + ج  
نجد (ج) ← ع(٠) = ٤٠ تحقق  
٤٠ = ١٠ - ٠ + ج ← ج = ٤٠  
ع(ن) = ١٠ - ن + ٤٠  
م(ع(ن)) = دن = ١٠ - ن + ٤٠. دن.  
ف(ن) = ٥ - ن + ٤٠ + ج  
نجد (ج) ← ف(١) = ٨٠ تحقق  
٨٠ = ٥ - ١ + ٤٠ + ج  
← ج = ٤٥  
ف(ن) = ٥ - ن + ٤٠ + ٤٥  
ف(٤) = ٥ - ٤ + ٤٠ + ٤٥ = ١٢٥  
المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور  
٤ ثواني = ١٢٥ م

١٤ يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد  
ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣(ن + ١) م/ث.  
فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء  
الحركة، علماً بان موقع الجسم الابتدائي ف(٠) = ١ م.  
**الحل:**

ع(ن) = ٣(ن + ١)<sup>٢</sup>  
م(ع(ن)) = دن = ٣(ن + ١) م. دن.  
ف(ن) = (ن + ١) + ج  
نجد (ج) ← ف(٠) = ١ تحقق  
١ = (٠ + ١) + ج ← ج = ٠  
ف(ن) = (ن + ١)<sup>٢</sup>  
ف(٢) = (٢ + ١) = ٢٧ م

١٥ تحرك جسم وكان تسارع يعطى بالقاعدة  
ت(ن) = ٦ م/ث، فجد المسافة التي يقطعها  
الجسم بعد مرور ن من الثواني من بدء الحركة  
علماً بان ع(٠) = ٢، ف(٠) = ٥  
**الحل:**

ت(ن) = ٦  
م(ت(ن)) = دن = ٦ ن. دن.  
ع(ن) = ٣ ن + ج  
نجد (ج) ← ع(٠) = ٢ تحقق  
٢ = ٣(٠) + ج ← ج = ٢  
ع(ن) = ٣ ن + ٢  
م(ع(ن)) = دن = ٣ ن + ٢. دن.  
ف(ن) = ٣ ن + ٢ + ج  
نجد (ج) ← ف(٠) = ٥ تحقق  
٥ = ٣(٠) + ٢ + ج ← ج = ٥  
ف(ن) = ٣ ن + ٢ + ٥

معادلات النمو و الاضمحلال :

$$ع(ن) = ٥٤ \times هـ^ن$$

٥٤ : قيمة ابتدائية

هـ : عدد نيبيري ثابت  $\approx ٢,٧$

ن : الزمن

أ : ثابتا عدديا

١١ اذا كان عدد سكان بلدة ما يخضع لقانون النمو ، و يتزايد بانتظام واستمرار ٢٪ سنويا وكان عدد سكانها ٤٠ ألف نسمة عام ١٩٩٠ م ، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٤٠ م .

الـحل:

$$ع(ن) = ٥٤ \times هـ^ن$$

$$ع(ن) = ٤٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{٠,٠٢} \times ٥٠$$

$$ع(ن) = ٤٠٠٠٠ \times (٢,٧)$$

$$ع(ن) = ١٠٨٠٠٠$$

$$ع(٥٠) = ١٠٨٠٠٠ \text{ نسمة في } ٢٠٤٠ \text{ م .}$$

١٢ اقترض علي مبلغ ١٠٠٠٠ دينار من مصرف بربح مركب وفق قانون النمو ، بنسبة ربح مقدارها ٤٪ سنويا ، جد جملة المبلغ الذي سيسدده علي بعد مرور خمسة وعشرون سنة .

الـحل:

$$ع(ن) = ٥٤ \times هـ^ن$$

$$ع(ن) = ١٠٠٠٠ \times هـ^{٢٥ \times ٠,٠٤}$$

$$ع(ن) = ٢٧٠٠٠ \times ١٠٠٠٠$$

$$ع(ن) = ٢٧٠٠٠ \text{ دينار جملة المبلغ بعد } ٢٥ \text{ سنة}$$

١٣ تتحلل مادة مشعة وفق قانون الاضمحلال و بمعدل تناقص ٠,٠٠٠٢ سنويا . جد كتلة المادة المشعة المتبقية بعد مرور ٥٠٠٠ سنة علما بأن الكتلة الاصلية ٥٤٠ غراما .

الـحل:

$$ع(ن) = ٥٤ \times هـ^ن$$

$$ع(ن) = ٥٤٠ \times هـ^{-٠,٠٠٠٢ \times ٥٠٠٠}$$

$$ع(ن) = ٥٤٠ \times (٢,٧)^{-١}$$

$$ع(ن) = \frac{٥٤٠}{٢,٧} = ٢٠٠ \text{ غرام بعد مرور } ٥٠٠٠ \text{ سنة}$$

١٤ يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن ، و بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥٪ سنويا . فاذا كان ثمنه الاصيلي ٨٠٠٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنه بعد مرور ٤٠ سنة ؟

الـحل:

$$ع(ن) = ٥٤ \times هـ^ن$$

$$ع(ن) = ٨٠٠٠٠٠ \times هـ^{-٠,٠٥ \times ٤٠}$$

$$ع(ن) = ٨٠٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{-٢}$$

$$ع(ن) = \frac{٨٠٠٠٠٠}{٢(٢,٧)}$$

$$ع(ن) = ١٠٩٧٣,٩ \text{ دينار بعد مرور } ٤٠ \text{ سنة}$$

١٥ تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠٪ في الساعة ، جد عددها بعد نصف ساعة ، علما بأن عددها الابتدائي ٥٠٠٠٠٠٠ .

الـحل:

$$ع(ن) = ٥٤ \times هـ^ن$$

$$ع(ن) = ٥٠٠٠٠٠٠ \times هـ^{\frac{١}{٢} \times ٢}$$

$$ع(ن) = ٥٠٠٠٠٠٠ \times (٢,٧)^١$$

$$ع(ن) = ١٣٥٠٠٠٠٠$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٧ يتزايد سعر قطعة أرض وفق قانون النمو بمرور الزمن وبصورة مستمرة فإذا ازداد سعرها من ٤٠٠ ألف دينار إلى ٨٠٠ ألف دينار خلال ٣ سنوات، فجد بعد مرور ٣٠ سنة.

الـحل:

$$ع(ن) = ٤٠٠ \times هـ^ن$$

$$ع(١٠) = ٤٠٠٠٠٠ \times هـ^{١٠}$$

$$٨٠٠٠٠٠ = ٤٠٠٠٠٠ \times هـ^{١٠}$$

$$٢ = هـ^{١٠}$$

$$ع(ن) = ٤٠٠ \times هـ^ن$$

$$ع(٣٠) = ٤٠٠٠٠٠ \times هـ^{٣٠}$$

$$ع(٣٠) = ٤٠٠٠٠٠ \times (١٠٠)^٣$$

$$ع(٣٠) = ٤٠٠٠٠٠ \times ٣٢$$

$$ع(٣٠) = ٣٢٠٠٠٠٠٠ \text{ دينار في خلال } ٣٠ \text{ سنة}$$

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

١٦ يذوب الملح في الماء وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال اذا وضعت ١٠ كغم من الملح في الماء، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة، فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة.

الـحل:

$$ع(ن) = ١٠ \times هـ^{\frac{1}{4} \times ن}$$

$$ع\left(\frac{1}{4}\right) = ١٠ \times هـ^{\frac{1}{4}}$$

$$٥ = ١٠ \times هـ^{\frac{1}{4}}$$

$$٠,٥ = هـ^{\frac{1}{4}}$$

$$٠,٥ = هـ^{\frac{1}{4}}$$

$$٠,٦٢٥ = هـ^{\frac{1}{4}}$$

١٧ عدد سكان مرتبة ما بصورة مستمرة وفق قانون النمو، بنسبة ٠,٨٪ سنويا، فإذا بلغ عدد سكانها ٦٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠١٠ م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢١٣٥ م.

الـحل:

$$ع(ن) = ٦٠٠٠٠٠ \times هـ^{\frac{٠,٠٠٨}{١٠٠} \times ن}$$

$$ع(١٢٥) = ٦٠٠٠٠٠ \times هـ^{١,٢٥}$$

$$ع(١٢٥) = ٦٠٠٠٠٠ \times هـ^{١,٢٥}$$

$$ع(١٢٥) = ٦٠٠٠٠٠ \times ٢,٧$$

$$ع(١٢٥) = ١٦٢٠٠٠٠ \text{ نسمة بعد } ١٢٥ \text{ سنة}$$

## حساب المساحة باستخدام النكامل المحدود

### × ملاحظات أسئلة المساحة «مفاتيح الحل»

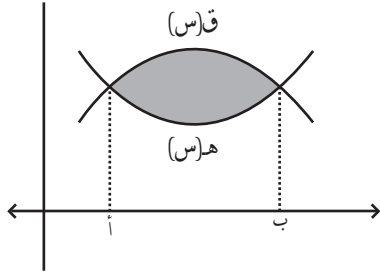
١) كل ق(س) , دص , هـ(س) . . . هو اقتران

٢) كل س = عدد هو عمود

٣) معادلة محور السينات ← ص = صفر «اقتران»

٤) إذا أعطانا فترة [ أ ، ب ] فإن س = أ , س = ب «أعمدة المعطاه»

٥) نهتم بالأعمدة المعطاه



### خطوات الحل :-

١) نحدد الاقترانات والاعمدة المعطاه

٢) نساوي الاقترانات ببعضها

٣) نضع القانون:

$$\text{المساحة} = \int_a^b ق(س) - هـ(س) . دس$$

حيث : ق(س) = الاقتران العلوي , هـ(س) = الاقتران السفلي

ب = العمود الذي على يمين المساحة

أ = العمود الذي على يسار المساحة

٤) نرسم فقط للمعرفة المساحة المحصورة «للعلم فقط»

\* يجب ان تكون المساحة دائماً موجبة

يمكن الاستفادة من قانون : «لا يحتاج للرسم»

$$\text{المساحة} = \int_a^b ق(س) - هـ(س) . دس$$

### هنالك نوعان من الأسئلة :-

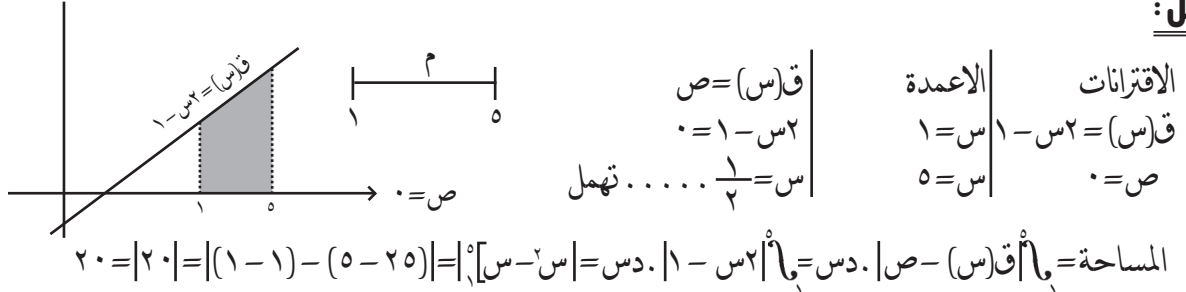
النوع الاول : يعطينا اقترانات ويطلب منا المساحة

النوع الثاني : يعطينا رسمة ويعطينا مساحة ويطلب منا تكامل

أسئلة النوع الأول :

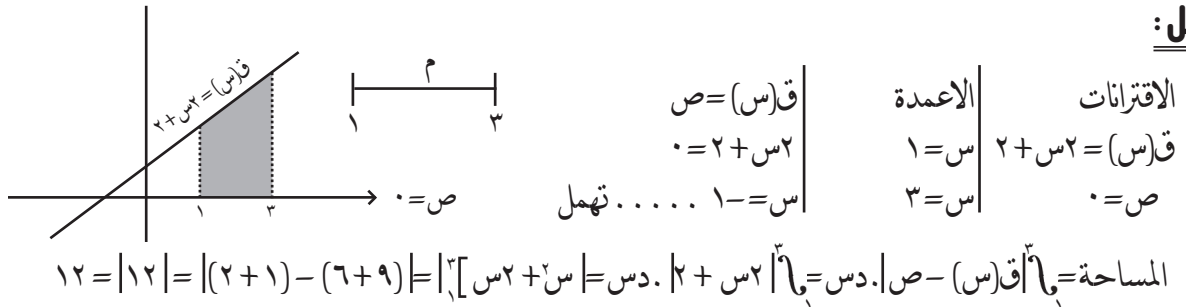
١) إذا كان ق(س) = ١ - س<sup>٢</sup>، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين  
س = ١، س = ٥

الـحل:



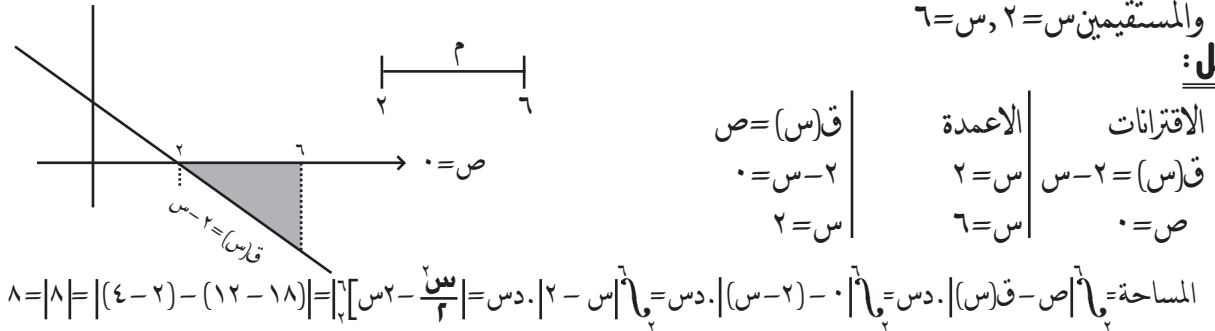
٢) إذا كان ق(س) = ٢ + س<sup>٢</sup>، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين  
س = ١، س = ٣

الـحل:



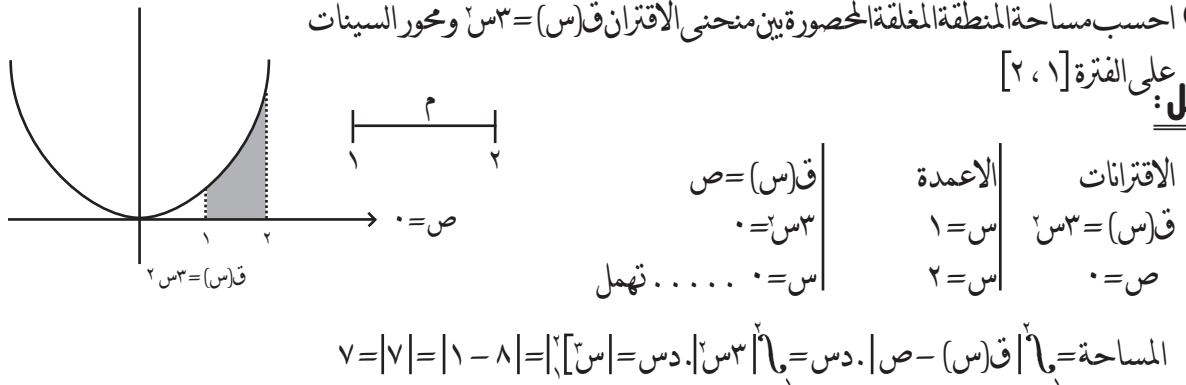
٣) احسب المساحة للمنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢ - س، ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٦

الـحل:



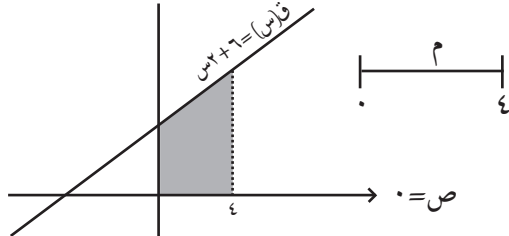
٤) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س<sup>٢</sup> ومحور السينات على الفترة [١، ٢]

الـحل:



١٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران ق(س) = ٢س + ٦ ومحور السينات في الفترة [٠، ٤] :

الـحل:

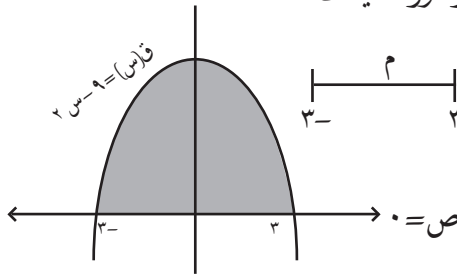


ق(س) = ص	الاعمدة	الاقترانات
٠ = ٢س + ٦	س = ٠	ق(س) = ٢س + ٦
س = -٣ . . . . . تهمل	س = ٤	ص = ٠

$$\text{المساحة} = \int_0^4 (2س + 6) \, دس = \left[ س^2 + 6س \right]_0^4 = (١٦ + ٢٤) - (٠ + ٠) = ٤٠$$

١٦) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٩ - س<sup>٢</sup> ومحور السينات

الـحل:

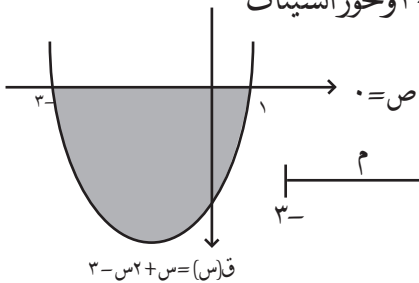


ق(س) = ص	الاعمدة	الاقترانات
٠ = ٩ - س <sup>٢</sup> ← (س - ٣)(س + ٣)	لا يوجد	ق(س) = ٩ - س <sup>٢</sup>
س = ٣، س = -٣ . . . . . اعمدة		ص = ٠

$$\text{المساحة} = \int_{-3}^3 (9 - س^2) \, دس = \left[ ٩س - \frac{س^3}{3} \right]_{-3}^3 = (٢٧ - ٩) - (-٢٧ + ٩) = ٣٦$$

١٧) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س<sup>٢</sup> - ٣س + ٣ ومحور السينات

الـحل:

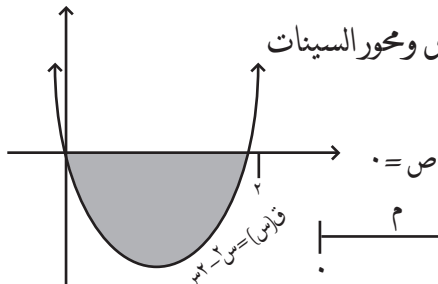


ق(س) = ص	الاعمدة	الاقترانات
٠ = ٢س <sup>٢</sup> - ٣س + ٣ ← (س - ١)(٣س + ٣)	لا يوجد	ص = ٠
س = ١، س = -٣ . . . . . اعمدة		ق(س) = ٢س <sup>٢</sup> - ٣س + ٣

$$\text{المساحة} = \int_1^3 (2س^2 - 3س + 3) \, دس = \left[ \frac{٢س^3}{3} - \frac{٣س^2}{2} + ٣س \right]_1^3 = \left( ١٨ - \frac{٢٧}{2} + ٩ \right) - \left( \frac{٢}{3} - \frac{٣}{2} + ٣ \right) = \frac{٣٢}{3}$$

١٨) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س<sup>٢</sup> - س<sup>٣</sup> ومحور السينات

الـحل:



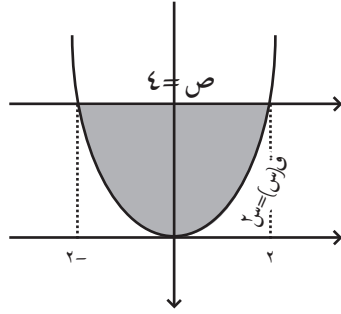
ق(س) = ص	الاعمدة	الاقترانات
٠ = ٢س <sup>٢</sup> - س <sup>٣</sup> ← س(٢س - س <sup>٢</sup> )	لا يوجد	ق(س) = ٢س <sup>٢</sup> - س <sup>٣</sup>
س = ٠، س = ٢ . . . . . اعمدة		ص = ٠

$$\text{المساحة} = \int_0^2 (2س^2 - س^3) \, دس = \left[ \frac{٢س^3}{3} - \frac{س^4}{4} \right]_0^2 = \left( \frac{١٦}{3} - ٤ \right) - (٠ - ٠) = \frac{٤}{٣}$$



١٩) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> والمستقيم ص = ٤

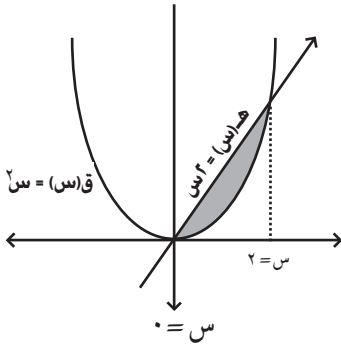
**الـحل :**



$\begin{array}{ l} \text{الاقترانات} \\ \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٤} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{الاعمدة} \\ \text{لا يوجد} \end{array}$
$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٤} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٤} \end{array}$
$\text{المساحة} = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( -8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} - \left( -\frac{32}{3} \right) = \frac{64}{3}$	

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> وهر(س) = ٢س

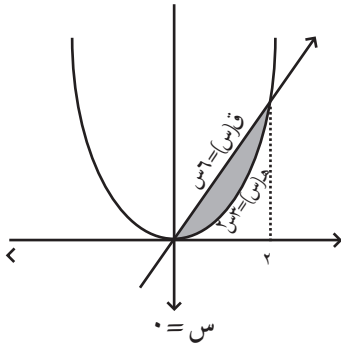
**الـحل :**



$\begin{array}{ l} \text{الاقترانات} \\ \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٢س} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{الاعمدة} \\ \text{لا يوجد} \end{array}$
$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٢س} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٢س} \end{array}$
$\text{المساحة} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{4}{3}$	

١١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = س<sup>٢</sup> وهر(س) = ٣س

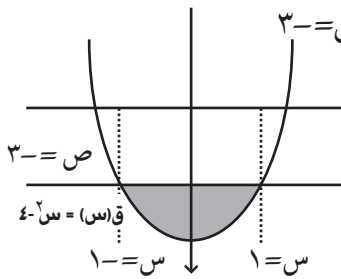
**الـحل :**



$\begin{array}{ l} \text{الاقترانات} \\ \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٣س} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{الاعمدة} \\ \text{لا يوجد} \end{array}$
$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٣س} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٣س} \end{array}$
$\text{المساحة} = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[ \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \left( \frac{27}{2} - 9 \right) - (0 - 0) = \frac{9}{2}$	

١٢) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> والمستقيم ص = ٣

**الـحل :**



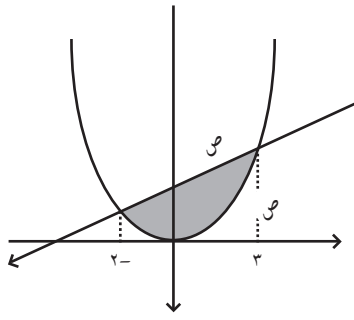
$\begin{array}{ l} \text{الاقترانات} \\ \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٣} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{الاعمدة} \\ \text{لا يوجد} \end{array}$
$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٣} \end{array}$	$\begin{array}{ l} \text{ق(س) = س}^2 \\ \text{هر(س) = ٣} \end{array}$
$\text{المساحة} = \int_{-1}^1 (3 - x^2) dx = \left[ 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left( 3 - \frac{1}{3} \right) - \left( -3 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} - \left( -\frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3}$	

# الوحدة الرابعة : النكامل ونظريقات النكامل [ حساب المساحة ]

سليخ الخطيب ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

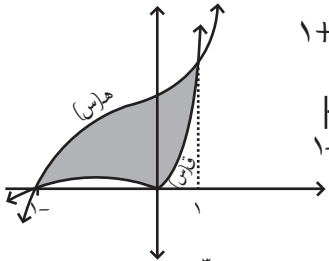
S  
A  
L  
E  
M  
A  
L  
T  
E  
E  
B

١٣ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $v = s - 6$  ،  $v = s^2$  ،  $v = 6 + s^2$  :  
الـحل :



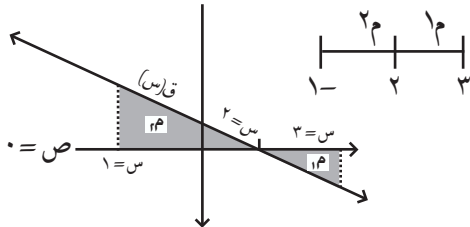
	$\begin{matrix} 2 & 3 \\   &   \\ \hline 2 & 3 \end{matrix}$	الأعمدة $v = s^2$ $v = 6 + s^2$ $v = s - 6$	الاقترانات $v = s^2$ $v = s - 6$
		$0 = s^2 - 6 - s^2 \rightarrow 6 + s^2 = s^2$ $0 = (s+2)(s-3)$	أعمدة . . . 2, 3 $v = s^2$
		المساحة = $\int_2^3 (s - 6 + s^2) ds = \left[ \frac{s^2}{2} - 6s + \frac{s^3}{3} \right]_2^3 = \left( \frac{9}{2} - 18 + \frac{27}{3} \right) - \left( 2 - 12 + \frac{8}{3} \right) = \frac{125}{6}$	

١٤ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $q = s$  ،  $q = s^2 + 1$  ،  $q = s^2$  :  
الـحل :



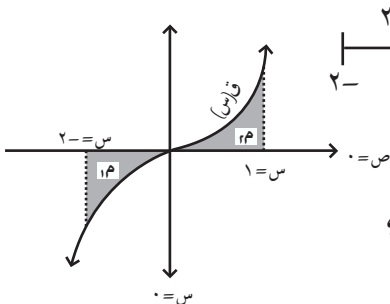
	$\begin{matrix} 1 & 1 \\   &   \\ \hline 1 & 1 \end{matrix}$	الأعمدة $q = s$ $q = s^2 + 1$ $q = s^2$	الاقترانات $q = s$ $q = s^2 + 1$
		$0 = s^2 - 1 - s^2 \rightarrow 1 + s^2 = s^2$ $1 = s^2$	أعمدة . . . . . 1, 1 $q = s^2$
		المساحة = $\int_1^1 (s - (s^2 + 1)) ds = 0$	

١٥ اجد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران  $q = s$  ،  $q = 2s - 4$  ،  $q = s^2$  في الفترة  $[1, 3]$  :  
الـحل :



	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\   &   &   \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	الأعمدة $q = s$ $q = 2s - 4$ $q = s^2$	الاقترانات $q = s$ $q = 2s - 4$ $q = s^2$
		$0 = s^2 - 2s + 4 - s^2 \rightarrow 4 - 2s = 0 \rightarrow s = 2$	أعمدة . . . . . 2 $q = s$
		المساحة الكلية = $\int_1^2 (s - (2s - 4)) ds + \int_2^3 ((2s - 4) - s^2) ds = \left[ \frac{s^2}{2} - 2s + 4s \right]_1^2 + \left[ s^2 - \frac{4s}{3} \right]_2^3 = 9 + 1 = 10$	

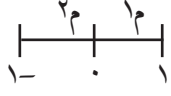
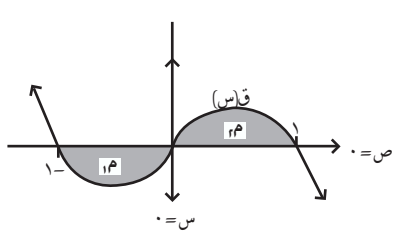
١٦ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين  $q = s$  ، ومحور السينات والمستقيمين  $s = 1$  ،  $s = 2$  :  
الـحل :



	$\begin{matrix} 1 & 2 \\   &   \\ \hline 1 & 2 \end{matrix}$	الأعمدة $q = s^2$ $q = s$	الاقترانات $q = s^2$ $q = s$
		$0 = s^2 - s$	أعمدة . . . . . 0 $q = s^2$
		المساحة الكلية = $\int_0^1 (s^2 - s) ds = \left[ \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$	

١٧ احسب المساحة للمنطقة المحصورة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) = س - س<sup>٢</sup> , ومحور السينات

الحل:



الاقترانات	الاعمدة	ق(س) = ص
ق(س) = س - س <sup>٢</sup>	س = ٠	س = س - س <sup>٢</sup> ← س = ٠
ص = ٠	س = ١	س = ٠ = (١ + س)(١ - س)
	س = -١	س = ٠ = س - س <sup>٢</sup> ← س = ٠

الاقترانات	الاعمدة	ق(س) = ص
ق(س) = س - س <sup>٢</sup>	س = ٠	س = س - س <sup>٢</sup> ← س = ٠
ص = ٠	س = ١	س = ٠ = س - س <sup>٢</sup> ← س = ٠
	س = -١	س = ٠ = س - س <sup>٢</sup> ← س = ٠

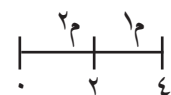
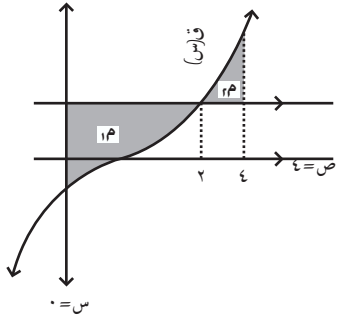
$$م = \int_{-1}^1 (s - s^2) ds = \left[ \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$م = \int_{-1}^0 (s - s^2) ds = \left[ \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_{-1}^0 = \left( 0 - 0 \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$المساحة الكلية = م + م = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

١٨ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٣</sup> - ٤س , والمستقيم ص = ٤ على الفترة [٤, ٠]

الحل:



الاقترانات	الاعمدة	ق(س) = ص
ق(س) = س <sup>٣</sup> - ٤س	س = ٠	س = س <sup>٣</sup> - ٤س ← س = ٠
ص = ٤	س = ٤	س = ٠ = س <sup>٣</sup> - ٤س
	س = ٢	س = ٠ = س <sup>٣</sup> - ٤س

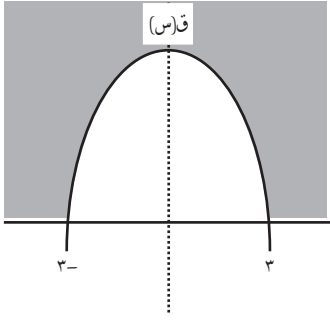
الاقترانات	الاعمدة	ق(س) = ص
ق(س) = س <sup>٣</sup> - ٤س	س = ٠	س = س <sup>٣</sup> - ٤س ← س = ٠
ص = ٤	س = ٤	س = ٠ = س <sup>٣</sup> - ٤س
	س = ٢	س = ٠ = س <sup>٣</sup> - ٤س

$$م = \int_0^2 (s^3 - 4s) ds = \left[ \frac{s^4}{4} - 2s^2 \right]_0^2 = \left( \frac{16}{4} - 8 \right) - \left( 0 - 0 \right) = 4 - 8 = -4$$

$$م = \int_2^4 (4 - (s^3 - 4s)) ds = \int_2^4 (4 - s^3 + 4s) ds = \left[ 4s - \frac{s^4}{4} + 2s^2 \right]_2^4 = \left( 16 - \frac{256}{4} + 32 \right) - \left( 8 - \frac{16}{4} + 8 \right) = 12 - 4 = 8$$

$$المساحة الكلية = م + م = 8 + 12 = 20$$

١٩) يمثل الشكل المجاور الواجهة الامامية لمجمع رياضي مدخل المجمع يمثله منحنى الاقتران  $ق(س) = ٩ - س^٢$ ،  
ما تكلفة إنشاء باب حديد اذا كان سعر المتر المربع منه يساوي (٣٠) دينار .

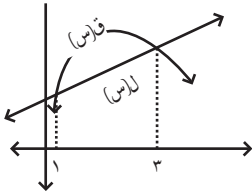


**الحل:**

الاقترانات	الاعمدة	ق(س) = ٩ - س <sup>٢</sup>
ق(س) = ٩ - س <sup>٢</sup>	ق(س) = ٩ - س <sup>٢</sup>	٠ = ٩ - س <sup>٢</sup>
ص = ٠	س = ٣	٣ = س
	س = -٣	٣ = -س

$$\begin{aligned} \text{المساحة} &= \int_{-3}^3 (٩ - س^٢) دس = \int_{-3}^3 ٩ دس - \int_{-3}^3 س^٢ دس \\ &= ٣٦ = ١٨ + ١٨ = (٩ + ٢٧) - (٩ - ٢٧) = \\ \text{التكلفة} &= \text{السعر} \times \text{المساحة} = ٣٠ \times ٣٦ = ١٠٨٠ \end{aligned}$$

٢٠) الشكل المجاور يمثله منحنى الاقتران  $ق(س) = ٢س - ١$  اذا علمت ان  $ل(س) = ٤ - س^٢$  فجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة على الفترة  $[١, ٣]$



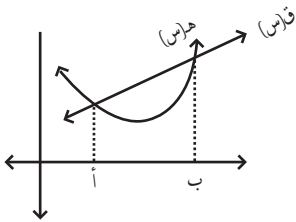
**الحل:**

نرتب المعطيات

$$\begin{aligned} \text{بأ} \quad ق(س) &= ٢س - ١ \\ \text{بأ} \quad ل(س) &= ٤ - س^٢ \end{aligned}$$

$$\text{المساحة} = \int_{1}^3 (٢س - ١ - (٤ - س^٢)) دس = \int_{1}^3 (٢س - ١ - ٤ + س^٢) دس = \int_{1}^3 (س^٢ + ٢س - ٥) دس$$

٢٠) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران  $ق(س) = ٣س - ١$  اذا علمت ان المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين  $ق(س)$  و  $ه(س)$  وحدات



$$\begin{aligned} \text{مربعة وكان} \quad \text{بأ} \quad ق(س) &= ٣س - ١ \\ \text{فجد} \quad \text{بأ} \quad ه(س) &= ٢٤ \end{aligned}$$

**الحل:**

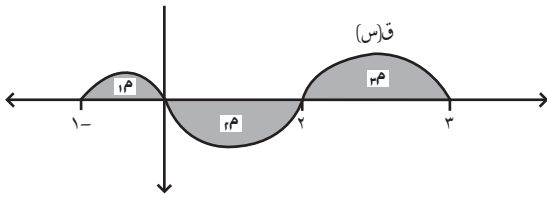
نرتب المعطيات

$$\text{بأ} \quad ق(س) = ٣س - ١$$

$$\text{المساحة} = \int_{1}^3 (٣س - ١ - ٢٤) دس = \int_{1}^3 (٣س - ٢٥) دس$$

$$٣ = \int_{1}^3 (٣س - ٢٥) دس = \int_{1}^3 (٣س - ٢٥) دس$$

$$٩ = \int_{1}^3 (٣س - ٢٥) دس \leftarrow \int_{1}^3 (٣س - ٢٥) دس = ٩$$



علمًا بأن  $٢ = م$ ،  $٦ = م$ ،  $٥ = م$

الحل:

(أ)  $م_1 ق(س) = دس = ٢$

(ب)  $م_2 ق(س) = دس = م_1 ق(س) = دس$

$م_3 ق(س) = دس = ٦ - ٢ = ٤$

(ج)  $م_1 ق(س) = دس = م_2 ق(س) + م_3 ق(س) = دس + م_3 ق(س)$

$٤ = ٥ + ٦ - ٢ = م_3 ق(س)$

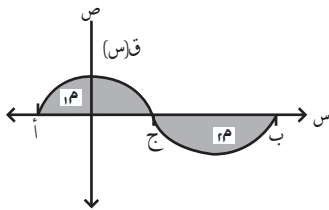
(د)  $م_2 ق(س) = دس = - م_1 ق(س) = دس = ٤$

١٣ يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفقرة [أ، ب] فاذا علمت ان مساحة (م) تساوي ٦ وحدات مربعة،

$م_1 ق(س) = دس = ٤$

فجد مساحة (م)

الحل:



$م_1 ق(س) = دس = ٤$

$م_2 ق(س) = دس = م_1 ق(س) + م_3 ق(س) = دس + م_3 ق(س)$

$٤ = ١ + م$

$٤ = ٦ + م$

$١٠ = م$

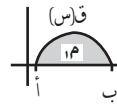
S  
A  
L  
E  
E  
M  
  
A  
L  
E  
A  
T  
E  
E  
B

أسئلة على النوع الثاني:

ملاحظة :-

١) اذا كانت رسم الاقتران فوق محور السينات على

الفترة [أ، ب] فان:



$م_1 ق(س) = دس = المساحة = م = ١$

٢) اذا كانت رسم الاقتران ق(س) تحت محور السينات على

الفترة [أ، ب] فان:



$م_1 ق(س) = دس = - المساحة = - م = -١$

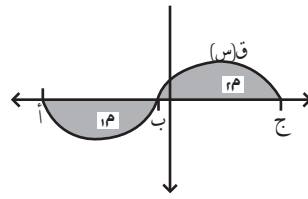
أسئلة:

١) بالاعتماد على الرسم المجاور اذا كان  $٨ = م$ ،  $٥ = م$  فجد قيمة:

(أ)  $م_1 ق(س) = دس$

(ب)  $م_2 ق(س) = دس$

(ج)  $م_3 ق(س) = دس$



الحل:

(أ)  $م_1 ق(س) = دس = م = ٨$

(ب)  $م_2 ق(س) = دس = م = ٥$

(ج)  $م_3 ق(س) = دس = م_1 ق(س) + م_2 ق(س) = دس + م_2 ق(س)$

$٣ = ٥ + ٨ = م$

٢) الشكل المجاور يبين المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات فجد قيمة ما يلي:

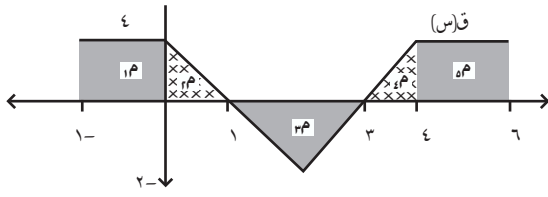
(أ)  $م_1 ق(س) = دس$

(ب)  $م_2 ق(س) = دس$

(ج)  $م_3 ق(س) = دس$

(د)  $م_4 ق(س) = دس$

S  
A  
L  
E  
E  
E  
M



$$١م = مساحة مستطيل = ٤ \times ١ = ٤$$

$$٢م = مساحة مثلث = ١ \times ٤ \times \frac{1}{2} = ٢$$

$$٣م = مساحة مثلث = ١ \times ٢ \times \frac{1}{2} = ١$$

$$٤م = مساحة مثلث = ١ \times ٤ \times \frac{1}{2} = ٢$$

$$٥م = مساحة مستطيل = ٤ \times ٢ = ٨$$

$$١م^٢ ق (س) = ٥م + ٣م - ٢م + ١م + ٤م = دس$$

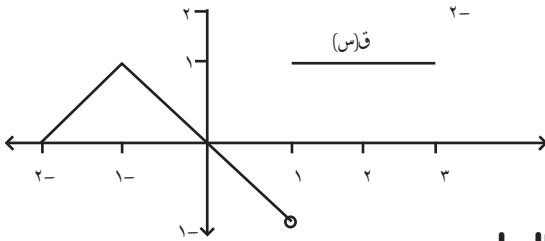
$$١٤ = ٨ + ٢ - ٢ + ٤ =$$

مثال ٢:

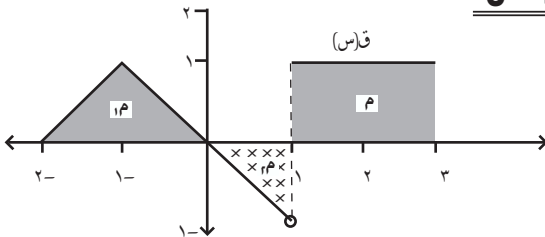
بالاعتماد على الرسم المجاور لمنحنى ق

المعرف على الفقرة [٣، ٢-]

اوجد  $٢م^٢ ق (س)$  دس



الحل:



$$١م = مساحة مثلث = ١ \times ٢ \times \frac{1}{2} = ١$$

$$٢م = مساحة مثلث = ١ \times ١ \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$٣م = مساحة مستطيل = ١ \times ٢ = ٢$$

$$٤م^٢ ق (س) = ٣م + ٢م - ١م = دس$$

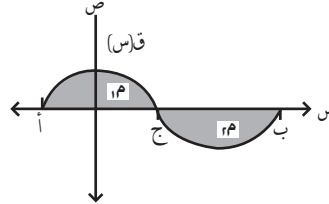
$$٢,٥ = ٢ + \frac{1}{2} - ١ =$$

٤) يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى

الاقتران ق (س) ومحور السينات على الفترة [أ، ب]

فاذا علمت ان مساحة (١م) تساوي (٦) وحدات

مربعة، ما  $١م^٢ ق (س)$  دس = -٤ فجد مساحة (٢م)



الحل:

$$١م^٢ ق (س) = دس = ٣م - ١م$$

$$٤ = ٦ - ٣م$$

$$١٠ = ٣م$$

ملاحظة:

يمكن ان يكون التكامل قيمته سالبة ولكن  
المساحة دائماً موجبه.

ملاحظة:

مساحة المثلث =  $\frac{1}{2} \times القاعدة \times الارتفاع$

مساحة المربع = (الضلع)<sup>٢</sup>

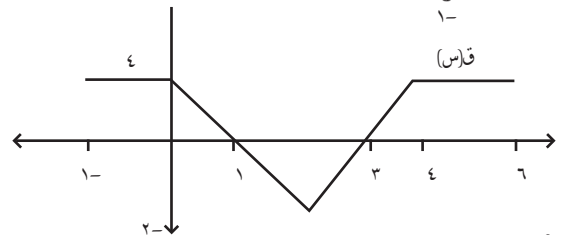
مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

مثال ١:

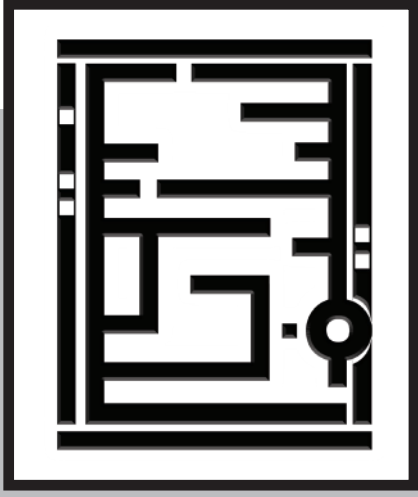
بالاعتماد على الرسم المجاور لمنحنى ق

المعرف على الفقرة [٥، ١-]

اوجد  $١م^٢ ق (س)$  دس



الحل:



INTEGRATION  
AND  
APPLICATION

ملحق  
نمريبيان ومسائل الكتاب

S  
A  
L  
E  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

## أولًا التكامل غير المحدود

## تدريب ١

صفحة

١٦١

$$\left[ \begin{array}{l} \text{إذا كان ص} \\ \text{عندما } \frac{ص}{كس} = ١ - \end{array} \right. \text{ فجد } \frac{١-س٤}{١+٢س} كس ,$$

## تدريب ٢

صفحة

١٦٣

جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\left[ \begin{array}{l} (١) \int كس \\ (٢) \int (٢س^٣) كس \\ (٣) \int (س^{-٥} كس , س \neq ٠) \\ (٤) \int \sqrt{٢س} كس , س \leq ٠ \end{array} \right.$$

## تدريب ٣

صفحة

١٦٤

جد كلاً من التكاملين الآتين:

$$\left[ \begin{array}{l} (١) \int (٣س^٢ - \frac{٦}{س}) كس \\ (٢) \int (٤س - ٣جاس) كس \end{array} \right.$$

## تدريب ٤

صفحة

١٦٥

جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\left[ \begin{array}{l} (١) \int (٣س + ٢) كس \\ (٢) \int \frac{س^٥ - ٢س}{س^٣} كس , س < ٠ \\ (٣) \int \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣} كس , س \neq ٣ \\ (٤) \int \frac{٦٤ + ٢س}{٤ + س} كس , س \neq -٤ \end{array} \right.$$

## تدريب ٥

صفحة

١٦٥

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة ق(س) = ٣س<sup>٢</sup> - ٦س + ٥ ،

علمًا بأن ق(٠) = ٧



## الأسئلة

(١) جد كلاً مما يأتي:

(أ)  $\left[ \frac{1}{2} \right]_{\text{دس}}$

(ب)  $\left[ \frac{\text{دس}}{\text{س}} \right]_{\text{س} \neq 0}$

(ج)  $\left[ (2 - \text{س}^2) \text{دس} \right]$

(د)  $\left[ \text{س}^3 \text{س}^2 \text{دس} \right]$

(هـ)  $\left[ \frac{2 - \text{س}}{\text{س}} \right]$

(٢) جد كلاً مما يأتي:

(أ)  $\left[ (10\text{س}^2 - \sqrt{\text{س}} + 3\text{قأس}) \text{دس} \right]$

(ب)  $\left[ (2 - \text{س})(\text{س} + 4) \text{دس} \right]$

(ج)  $\left[ 3\text{ظاس جتاس دس} \right]$

(د)  $\left[ \frac{\text{س}^2 + 6\text{س} + 8}{2 + \text{س}} \text{دس} \right]_{\text{س} \neq 2}$

(٣) جد  $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$  عندما  $\text{س} = 5$ ، حيث  $\text{ص} = \left[ \frac{1 + 4\text{س}}{\text{س}} \right]_{\text{دس}} \text{دس}$ ،  $\text{س} \neq 0$

(٤) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) =  $6\text{س} - 8\text{س}^2 + 5$ ، وكان ق(1) = 2، فجد قاعدة الاقتران ق.

(٥) إذا كان  $\left[ \text{ع}(\text{س}) \text{دس} \right] = 6\text{س}^2 - 3\text{س}^3 + 5 - \text{س}$ ، فجد  $\text{ع}(1)$ .

٦) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) = ٢س - ٥، وكان ق(٢) = ٤، فجد قيمة ق(١).

٧) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) = ٣س(٦ - ٥س) + ٤س<sup>٣</sup>، وكان ق(٢) = ١ - ١، فجد قيمة ق(١).

٨) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ق(س) =  $\frac{٢س^٨ + ٦س^٦ + ٢س^٤}{س}$ ، س ≠ ٠، فجد قاعدة الاقتران ق.

٩) إذا كان ل اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان ل(س) = ٦س<sup>٢</sup> - ٦س<sup>٣</sup> - ٢س، فجد قيمة ل(٣) - ل(١).

## ثانيًا التكامل المحدود

## ١ تدريب

صفحة

١٦٩

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(٢) \int_{١}^{٤} (س) \frac{٤}{٣} دس$$

$$(١) \int_{٤}^{٦} \frac{٦}{٧س} دس$$

## ٢ تدريب

صفحة

١٧٠

إذا كان ق(١-) = ٣، ق(٢) = ٥، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{١}^{٢} ٤ ق(س) دس$ .

## ٣ تدريب

صفحة

١٧٠

إذا كان  $\int_{١}^{٦} ٦س دس = ٩$ ، فجد قيمة الثابت ب.

## الأسئلة

(١) احسب قيمة كل مما يأتي:

$$(أ) \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$(ب) \int_1^8 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(ج) \int_0^1 (2x^2 + 5x - 8) dx$$

$$(هـ) \int_{-2}^2 (3x - 2)(x + 1) dx$$

(٢) إذا كان  $\int_1^4 x dx = 20$ ، فجد قيمة الثابت م.

(٣) إذا كان الاقتران ق مُعرِّفًا على الفترة  $[1, 5]$ ، وكان ق(س) =  $2s + 1$ ، فجد قيمة ق(٥) - ق(١).

(٤) احسب قيمة التكامل الآتي:  $\int_0^2 (4s - 6s^2 + 3) ds$

(٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(أ) \int_1^3 (2s^2 - 4) ds \quad (ب) \int_1^3 (3 - 2s) ds$$

$$(ج) \int_0^1 \frac{s^2 + 6s - 7}{1 - s} ds$$

(٦) إذا كان  $\int_0^1 (س) ds = 13$ ، وكان ق(٥) =  $-17$ ، فجد قيمة ق(٢).

## ثالثاً خصائص التكامل المحدود

## ١ تدريب

صفحة

١٧٣

إذا كان  $\int_{-1}^2 l(s) ds = -2$  ،  $\int_{-1}^2 e(s) ds = 5$  ، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \int_{-1}^2 \frac{5e(s)}{2} ds \quad (2) \int_{-1}^2 (2e(s) - 3l(s) - 2) ds$$

## ٢ تدريب

صفحة

١٧٥

إذا كان  $\int_{-1}^2 \frac{q(s)}{3} ds = 5$  ،  $\int_{-1}^2 q(s) ds = 4$  ، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \int_{-1}^2 2q(s) ds \quad (2) \int_{-1}^2 q(s) ds$$

## ٣ تدريب

إذا كان  $\int_{-1}^2 (3q(s) - 4) ds = 18$  ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{-1}^2 q(s) ds$

## ٤ تدريب

صفحة

١٧٦

(1) إذا كان  $\int_{-2}^7 q(s) ds = 0$  ، فجد قيمة الثابت م. (2) إذا كان  $\int_0^1 (3 - s) ds = 0$  ، فجد قيمة الثابت ن.

## الأسئلة

(١) إذا كان  $\int_1^4 2q(s) ds = 12$ ،  $\int_1^4 q(s) ds = 4$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(أ)  $\int_1^4 3q(s) ds$  (ب)  $\int_1^4 q(s) ds$

(ج)  $\int_1^4 (q(s) + s^2) ds$

(٢) إذا كان  $\int_1^{-2} \frac{l(s)}{2} ds = 3$ ،  $\int_1^{-2} (h(s) + 1) ds = 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(أ)  $\int_1^{-2} h(s) ds$  (ب)  $\int_1^{-2} (3h(s) - s^2 + 3l(s)) ds$

(٣) إذا كان  $\int_{-1}^{7+10} q(s) ds = 0$ ، فجد قيمة الثابت أ.

(٤) إذا كان  $\int_3^m (2 - 4s) ds = 0$ ، فجد قيمة الثابت م.

(٥) إذا كان  $\int_4^1 (3q(s) - 5) ds = 9$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_1^4 (2q(s) + 1) ds$$

(٦) إذا كان  $\int_1^l (1 - s^2) ds = 6$ ، فجد قيمة الثابت ل.

## رابعًا التكامل بالتعويض

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int 2s \sqrt{s^2 + 9} ds$

تدريب ١

١٧٩

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int 21 (s^3 + s^2 + s^2 + s^2) ds$

تدريب ٢

صفحة

١٨٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s(s^2 + 1) ds \quad (2) \int 2s \ln(s-1) ds$$

$$(3) \int (1 - s^2) \sqrt{1 - s^2} ds \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{1+s}} ds$$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (As + B) ds, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان, } A \neq 0, n \neq 1$$

$$(2) \int (As + B) ds, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان, } A \neq 0$$

تدريب ٥

صفحة

١٨٣

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int 6(1 - s^2) ds \quad (2) \int 12 \ln(s-1) ds$$

## الأسئلة

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{أ) } (1-s^2)(s^2-s^4) \text{ دس} \\ \text{ب) } \int_0^1 \sqrt{2-s^2} \text{ دس} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ج) } (2-s^3-s^4) \text{ دس} \\ \text{د) } \int_0^1 \frac{9-s^3}{(s^2-s^6)^2} \text{ دس} \end{array} \right.$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{أ) } \int_0^1 \sqrt{2-s^3} \text{ دس} \\ \text{ب) } \int_0^1 (s-1)(2s^2-s^4+s+1) \text{ دس} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ج) } \int_0^1 2 \text{ قا} (s-2) \text{ دس} \\ \text{د) } \int_0^1 2s^2 \text{ جا} (s+1) \text{ دس} \end{array} \right.$$

(٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{أ) } \int_0^1 \sqrt{4s+1} \text{ دس} \\ \text{ب) } \int_0^1 s^3 (s^2-1)^3 \text{ دس} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ج) } \int_0^1 s^2 \sqrt{s^2-1} \text{ دس} \\ \text{د) } \int_0^1 \frac{s^2-3}{(s^3-s^2)^2} \text{ دس} \end{array} \right.$$

(٤) إذا علمت أن  $q(-8) = 5$ ،  $q(27) = -6$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_0^3 s^3 \text{ قا} (s^3) \text{ دس}$

(٥) إذا علمت أن  $\int_0^2 q(s) \text{ دس} = 3$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_0^2 8s \text{ قا} (s+1) \text{ دس}$

(٦) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.



## أولاً تطبيقات هندسية

تدريب ١

صفحة

١٨٦

جد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة  $(-١، ٢)$ ، وأن ميل المماس لمنحنى الاقتران  $ص = ق(س)$  عند النقطة  $(س، ص)$  يعطى بالقاعدة:  
 $ق(س) = ٢س - ١$

تدريب ٢

صفحة

١٨٧

جد قيمة  $ق(١٤)$ ، علمًا بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران  $ص = ق(س)$  عند النقطة  $(س، ص)$  يعطى بالقاعدة:  $ق(س) = \sqrt[3]{٦س^٢ - ١}$ ، وأن منحناه يمر بالنقطة  $(٠، ٥)$ .

## الأسئلة

- (١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $ص = ق(س)$  عند النقطة  $(س، ص)$  يساوي  $(٦ - ٢س + ٩س^٣)$ ، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن  $ق(٠) = ٥$
- (٢) جد قاعدة الاقتران ق، إذا كان ميل المماس للمنحنى  $ص = ق(س)$  عند النقطة  $(س، ص)$  يعطى بالقاعدة:  $ق(س) = \frac{س^٢}{\sqrt[3]{٨ + ٢س}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة  $(٠، ٤)$ .
- (٣) جد قيمة  $ق(١)$ ، علمًا بأن ميل المماس للمنحنى  $ص = ق(س)$  عند النقطة  $(س، ص)$  يساوي  $٢٥(٤ + س)$ ، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة  $(-١، ٧)$ .
- (٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة  $(س، ص)$  يعطى بالقاعدة:  
 $ل(س) = ٢س(٤ - ٣س)$ ، فجد قاعدة الاقتران ل، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة  $(٠، ٣)$ .
- (٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة هـ  $(س) = \frac{٢س^٢ - ٥س}{س}$ ،  $س \neq ٠$ ، فجد هـ  $(٢)$ ، علمًا بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة  $(-١، ٥)$ .

## ثانيًا تطبيقات فيزيائية

تدريب ١

صفحة

١٩٠

- (١) يتحرك جسيم على خط مستقيم، وتعطى سرعته بالعلاقة:  $v = (2n - 5) \text{ م/ث}$ ، حيث  $n$ : الزمن بالثواني. جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي  $F(0) = 3 \text{ م}$ .
- (٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور  $(n)$  ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة:  $v = (n^2 - 1) \text{ م/ث}$ . جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي  $F(0) = 5 \text{ م}$ .

تدريب ٢

صفحة

١٩١

- يتحرك جسيم على خط مستقيم، وبتسارع ثابت مقداره  $5 \text{ م/ث}^2$ . إذا كانت سرعته الابتدائية  $v(0) = 5 \text{ م/ث}$ ، وموقعه الابتدائي  $F(0) = 3 \text{ م}$ ، فجد:
- (١) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.
- (٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

## الأسئلة

(١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن - ١)) م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

(٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها، علمًا بأن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢ م.

(٣) إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة: ت(ن) = (٤٨ - ١) (٢ن - ١) م<sup>٣</sup>/ث<sup>٣</sup>، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

(٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: ع(ن) = (١ - ٣ن) (١ + ٤ن) م/ث. جد:

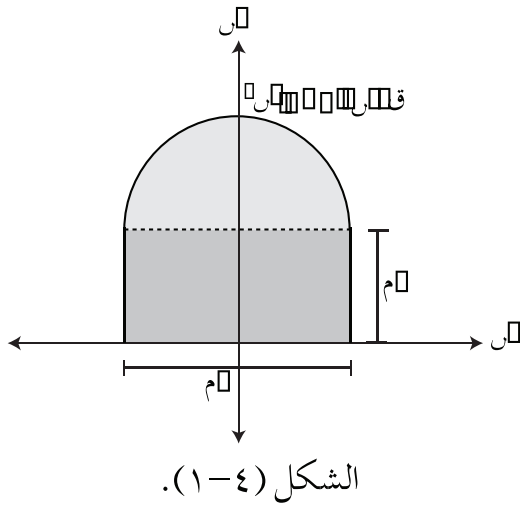
أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧ م.

### ثالثاً المساحة

يمثل الشكل (٤-١) نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته ٢ م، وارتفاعه ١ م، يعلوه منحنى يعطى بالقاعدة:  $ص = ق(س) = ٢ - س^٢$ .

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة؟



#### تدريب ١

صفحة

١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ص = ق(س)$ ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

- (١)  $ق(س) = ١٢ - ٤س$  ، على الفترة  $[١, ٢]$ .
- (٢)  $ق(س) = ٣س^٢ - ١٢س$  ، على الفترة  $[٠, ٢]$ .
- (٣)  $ق(س) = ٢س - ٦$  ، على الفترة  $[١, ٤]$ .

#### تدريب ٢

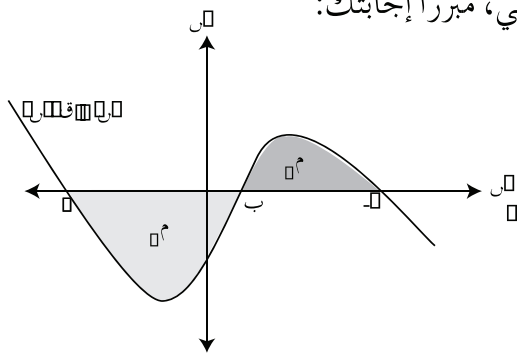
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ص = ق(س) = ٢س^٢ - ٣س$ ، ومحور السينات.

#### تدريب ٣

صفحة

١٩٩

يمثل الشكل (٤-١٠) منحنى الاقتران  $ص = ق(س)$ . فإذا كانت المساحة  $م = ٨$  وحدات مربعة، والمساحة  $م = ٥$  وحدات مربعة، فجد قيمة كل مما يأتي، مبرراً إجابتك:



الشكل (٤-١٠).

$$(١) \int_a^b ق(س) دس \quad (٢) \int_a^b ق(س) دس$$

$$(٣) \int_a^b ق(س) دس$$

(٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $ق$  ومحور السينات على الفترة  $[أ, ج]$ .

الأسئلة

(١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $v = c(s)$ ، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ)  $c(s) = 12$  ،  $s = 1$  ،  $s = 2$

ب)  $c(s) = 5 - 2s$  ،  $s = 2$  ،  $s = 2$

ج)  $c(s) = 3 - 2s$  ،  $s = 2$  ،  $s = 4$

(٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $v = c(s)$ ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

أ)  $c(s) = 6 - 6s^2$  ، على الفترة  $[-2, 0]$ .

ب)  $c(s) = 4s^3$  ، على الفترة  $[-1, 1]$ .

ج)  $c(s) = 3s^2 - 48$  ، على الفترة  $[3, 5]$ .

د)  $c(s) = -2s - 4$  ، على الفترة  $[-1, 1]$ .

(٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $v = c(s)$ ، ومحور السينات في كل مما يأتي:

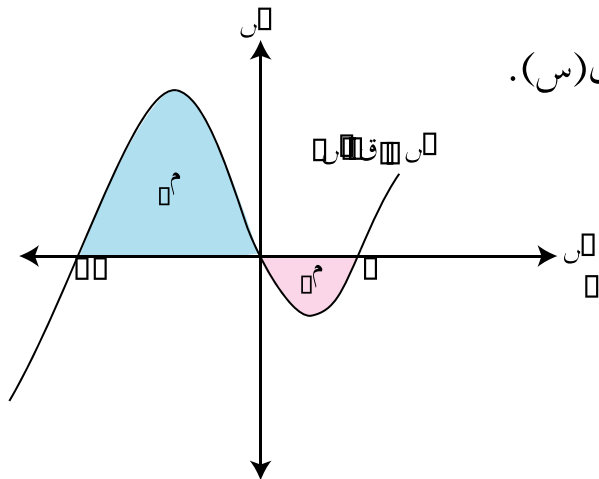
أ)  $c(s) = 4s - s^2$  ، ب)  $c(s) = 4s^3 - 12s^2$

(٤) يمثل الشكل (٤-١١) منحنى الاقتران  $v = c(s)$ .

فإذا كانت المساحة  $M = 13$  وحدة مربعة،

والمساحة  $M = 3$  وحدات مربعة،

فجد قيمة  $\int_{-2}^3 c(s) ds$ ، مبرراً إجابتك.



الشكل (٤-١١).

(٥) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الاقترانان: اللوغاريتمي الطبيعي  
والأسّي الطبيعي

أولاً

١ تدريب

صفحة

٢٠٣

وضّح الفرع (٢) بتطبيق الفرع (١)، مستخدماً قاعدة السلسلة.

$$(١) \text{ إذا كان } q(s) = \log s \text{ حيث } s > 0, \text{ فإن } q'(s) = \frac{1}{s}.$$

$$(٢) \text{ إذا كان } q(s) = \log m(s), \text{ م } (s) > 0, \text{ وكان م اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن}$$

$$q'(s) = \frac{m'(s)}{m(s)}$$

٢ تدريب

صفحة

٢٠٤

جد  $q'(s)$  في كل مما يأتي:

$$(١) \text{ } q(s) = \log \tan s$$

$$(٢) \text{ } q(s) = \log \frac{2}{s}, \text{ } s > 0$$

$$(٣) \text{ } q(s) = \log (s^2 + 8), \text{ } s > -2$$

٣ تدريب

إذا كان  $q(s) = \log (s^2 + 3)$ ، حيث أثبت، وكان  $q'(2) = 1$ ، فجد قيمة الثابت أ.

٤ تدريب

إذا كان  $q(s) = \log |s|$  (حيث  $s \neq 0$ )، فجد  $q'(s)$ .

(إرشاد: ادرس الحالتين: الأولى عندما  $s < 0$  حيث  $|s| = -s$ ،

والثانية عندما  $s > 0$  حيث  $|s| = s$ ).

## تدريب ٥

صفحة

٢٠٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{3-x}{x} dx, x \neq 0$$

$$(2) \int (2x^6 - 4)(x^3 - 2 + 1) dx$$

## تدريب ٦

صفحة

٢٠٦

وضّح الفرع (٢) بتطبيق الفرع (١)، مستخدماً قاعدة السلسلة.

$$(1) \text{ إذا كان } Q(x) = H(x) \text{ (حيث } H \text{ العدد النيبيري)، فإن } Q'(x) = H'(x).$$

$$(2) \text{ إذا كان } Q(x) = H'(x), \text{ وكان } L(x) \text{ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:}$$

$$Q'(x) = L(x) H'(x).$$

## تدريب ٧

صفحة

٢٠٧

جد ص في كل مما يأتي:

$$(1) \text{ ص } = H^{-3}(x)$$

$$(2) \text{ ص } = H^{2}(x)$$

$$(3) \text{ ص } = (H'(x))(L(x))$$

$$(4) \text{ ص } = \frac{H^3(x)}{1+x}$$

## تدريب ٨

وضّح الفرع (٢) بتطبيق الفرع (١)، مستخدماً التكامل بالتعويض.

$$(1) \int H'(x) dx = H(x) + C, \text{ حيث } H \text{ العدد النيبيري.}$$

$$(2) \int H'(x) dx = H(x) + C, \text{ أ، ب عدنان حقيقيان، } A \neq 0.$$

## تدريب ٩

صفحة

٢٠٨

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(3) \int (2x^3 + 2) H^{2x^2+3} dx$$

$$(1) \int \frac{1}{x} H^x dx$$

$$(4) \int \frac{6x}{x^2-1} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{x^3} H^{x^2-1} dx$$

## الأسئلة

(١) جد ق(س) في كل مما يأتي:

(أ)  $ق(س) = \frac{1}{س} + لوس + ٧ه٢س + ٦, س < ٠$

(ب)  $ق(س) = ٣لوس - ٢ه٢س - ٣س, س < ٠$

(ج)  $ق(س) = ه٢س - ٢لو(جتاس)$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int (٢ه٢س - \frac{1}{س} + ٣س) دس$

(ب)  $\int ٤ه٢س دس$

(ج)  $\int ٢س ه٢س دس$

(د)  $\int (٤ - ٣ه٢س - \frac{٥}{س}) دس$

(هـ)  $\int \frac{٨س}{٤ + س} دس$

(٣) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:

ق(س) = ٢ه٢س + ٢س، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٤).

(٤) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة:

ع(ن) = ٨ه٢ن + ١، وإن ن < ٠، جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها.



## ثانيًا النمو والاضمحلال

يتزايد عدد سكان مدينة ما بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة مقدارها  $0,8\%$  سنويًا. فإذا بلغ عدد سكانها  $600000$  نسمة عام  $2010$ م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام  $2135$ م؟

تدريب ١

صفحة

٢١٢

اقترض يمان مبلغ  $10000$  دينار من مصرف يحسب ربحًا مركبًا منتظمًا وفق قانون النمو، بنسبة ربح مقدارها  $4\%$  سنويًا. جد جملة المبلغ الذي سيسدده يمان للمصرف بعد مرور خمس وعشرين سنة.

تدريب ٢

يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل  $5\%$  سنويًا. فإذا كان ثمنه الأصلي  $80000$  دينار، فكم يصبح ثمنه بعد مرور  $40$  سنة؟

## الأسئلة

- (١) تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠٪ في الساعة. جد عددها بعد نصف ساعة، علمًا بأن عددها الابتدائي (٥٠٠٠٠٠٠).
- (٢) يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل ٨٪ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي ١٢٥٨٠ دينارًا، فجد ثمنها بعد مرور ٢٥ سنة.
- (٣) يذوب ملح في الماء، وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال. إذا وضعت ١٠ كيلوغرامات من الملح في الماء، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة، فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة.
- (٤) حلّ المسألة الواردة في بداية السؤال.

## أسئلة الوحدة

(١) جد  $\frac{كص}{كس}$  في كل مما يأتي:

(ب)  $\int_{-1}^2 (كس^3)(كس^4 - 2) كس$

(أ)  $\int كس \frac{1-كس^4}{5+كس^2}$

(د)  $\int_{2}^2 (كس^2 - كس^2) كس$

(ج)  $\int كس (كس + 4)$

(هـ)  $\int كس = كس^2 (كس + 6) - كس^2 + كس^3 - 1$  (و)  $\int كس = كس^2 كس$

(٢) إذا كان ق(كس) =  $كس^2 - 1$ ، فجد ق(كس).

(٣) إذا كان ق(كس) =  $\int كس (كس^2 - 2) كس$ ، فجد ق(كس).

(٤) جد كلاً من التكمالات الآتية:

(ب)  $\int كس \frac{6}{كس^5}$

(أ)  $\int كس \frac{كس^7 - 2}{كس^3}$

(د)  $\int كس^2 (كس^3 + 2)$

(ج)  $\int كس (كس^2 - 2) (كس + 2)$

(و)  $\int كس \frac{كس^2}{1+كس^3} كس < 1$

(هـ)  $\int كس (كس^2 - 1) (كس - 1)$

(ح)  $\int كس \frac{كس^2 + 2}{كس^3 + 4}$

(ز)  $\int كس \left( \frac{2}{كس} - كس^3 + 3 \right)$

(ي)  $\int كس \frac{1+كس^2}{كس (كس^2 + 1)}$

(ط)  $\int كس^6 كس^2 + 5 كس$

٥) احسب قيمة كل من التكمالات الآتية:

(أ)  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s} ds$  (ب)  $\int_{1}^{\sqrt{e}}$  حيث  $e$  العدد النيبيري

(ج)  $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{s}} \right) ds$  (د)  $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{s^2 + 7s + 12}{s + 4} ds$

(هـ)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2}{1 + s^2} ds$  (و)  $\int_{1}^{4e} s \times e^{s^2} ds$

(ز)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{5}} \frac{10}{s^2 + 6} ds$

٦) إذا كان  $\int_{\frac{1}{b+2}}^{b+3} q(s) ds = \text{صفرًا}$ ، فجد قيمة الثابت  $b$ .

٧) إذا كان  $\int_{1}^{\sqrt{e}} q(s) ds = 4$ ،  $\int_{-1}^{\sqrt{e}} (q(s) + 3) ds = 20$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

(أ)  $\int_{1}^{\sqrt{e}} q(s) ds$  (ب)  $\int_{1}^{\sqrt{e}} q(s) ds$  (ج)  $\int_{1}^{\sqrt{e}} (3q(s) - 4s) ds$

٨) جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

$$\int_{-1}^2 2b \, ds = 12 \quad \text{(أ)}$$

$$\int_{-4}^2 (2s - 1) \, ds = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$\int_{-2}^3 (2s^2 + 2) \, ds = -21 \quad \text{(ج)}$$

$$\int_{-2}^4 (4s - 1) \, ds = 5b \quad \text{(د)}$$

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $v = c(s)$  عند النقطة  $(s, v)$  يعطى بالقاعدة  $(1 + s)(3 + s)$ ، فجد قاعدة الاقتران  $c$ ، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة  $(2, -1)$ .

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $v = c(s) = 3s^2 - 27$  ومحور السينات في الفترة  $[-4, 0]$ .

١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره  $t(ن) = 12(ن - 1)$  م/ث<sup>٢</sup>، حيث  $ن$  الزمن بالثواني. فإذا كانت سرعتها الابتدائية  $c(0) = 3$  م/ث، وموقعها الابتدائي  $f(0) = 2$  م، فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

١٢) يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة  $2.5\%$  سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي  $3000$  دينار، فكم يصبح ثمنها بعد مرور  $80$  عامًا؟

تدريب ٢ ص ١٦٣

$$\left[ \text{دس} = \text{س} + \text{ج} \right]$$

$$\left[ \text{س}^٣ \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^٤}{٤} + \text{ج} \right]$$

$$\left[ \text{س}^٥ \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^٤}{٤} - \text{ج} \right]$$

$$\left[ \frac{\text{س}}{٢} \cdot \text{دس} = \frac{١}{٢} \text{س}^٢ \cdot \text{دس} = \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ج} \right]$$

تدريب ٤ ص ١٦٥

$$\left[ (\text{س} + ٣)^٢ \cdot \text{دس} \right]$$

الحل:

$$\left[ \text{س}^٤ + ٢ \cdot \text{س} \cdot ١٢ + ٩ = \text{دس} \cdot ٩ + \text{ج} \right]$$

$$= \frac{٤ \text{س}^٣}{٣} + \frac{٢ \cdot ١٢ \text{س}^٢}{٢} + ٩ \text{س} + \text{ج}$$

$$= \frac{٤ \text{س}^٣}{٣} + ١٢ \text{س} + ٩ + \text{ج}$$

تدريب ٣ ص ١٦٤

$$\left[ (\text{س}^٣ - \frac{٦}{\text{س}}) \cdot \text{دس} \right]$$

الحل:

$$\left[ \text{س}^٣ - ٦ = \frac{١}{٢} \text{س}^{\frac{١}{٢}} \cdot \text{دس} \right]$$

$$= \frac{٣ \text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{٦ \cdot \frac{١}{٢} \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ج}$$

$$= \text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١٢ \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ج}$$

$$\left[ (\text{س}^٤ - ٣ \text{جاس}) \cdot \text{دس} \right]$$

$$= \frac{٤ \text{س}^٤}{٢} + ٣ \text{جاس} + \text{ج}$$

$$= ٢ \text{س}^٢ + ٣ \text{جاس} + \text{ج}$$

$$\left[ \frac{\text{س}^٢ + ٢ \text{س} - ١٥}{٣ - \text{س}} \cdot \text{دس}, \text{س} \neq ٣ \right]$$

الحل:

$$\left[ \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٥)}{٣ - \text{س}} \cdot \text{دس} \right]$$

$$= \left[ \text{س} + ٥ + \frac{\text{س}^٢}{٢} = \text{دس} \cdot ٥ + \frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{ج} \right]$$

$$\left[ \frac{\text{س}^٢ + ٦٤}{٤ + \text{س}} \cdot \text{دس} \right]$$

الحل:

$$\left[ \frac{(\text{س} + ٤)(\text{س}^٢ + ٤ \text{س} + ١٦)}{(\text{س} + ٤)} \cdot \text{دس} \right]$$

تمارين و مسائل س ١ ص ١٦٦

$$(أ) \left[ \frac{1}{2} \text{ دس} = \frac{\text{س}}{2} + \text{ج} \right]$$

$$(ب) \left[ \frac{\text{دس}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{س}^{\circ}}{\text{س}} \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^{\circ}}{4} + \text{ج} \right]$$

$$(ج) \left[ (2 - \text{س}^2) \cdot \text{دس} = \text{س}^2 - 2 = \frac{\text{س}^2}{3} + \text{ج} \right]$$

$$(د) \left[ 3 \text{س}^2 \cdot \text{دس} = \frac{3 \text{س}^3}{3} + \text{ج} = \text{س}^3 + \text{ج} \right]$$

$$(هـ) \left[ \frac{2 - \text{س}}{\text{س}^{\circ}} \cdot \text{دس} = 2 - \text{س}^{\circ} = \frac{2 \text{س}^2 - \text{س}}{2} + \text{ج} \right]$$

تمارين و مسائل س ٢ ص ١٦٦

$$(أ) \left[ (10 \text{س}^2 - 3 \text{س} + 3 \text{قاس}) \cdot \text{دس} \right]$$

الحل:

$$\left[ 10 \text{س}^2 - 3 \text{س} + 3 \text{قاس} \cdot \text{دس} \right]$$

$$= \frac{10 \text{س}^3}{3} - \frac{3 \text{س}^2}{2} + 3 \text{ظاس} + \text{ج}$$

(ب)

$$\left[ 8 \text{س} + 2 - 4 \text{س}^2 - \text{س} \cdot \text{دس} \right]$$

$$= -4 \text{س}^2 + 7 \text{س} + 2 \cdot \text{دس}$$

$$= -\frac{4 \text{س}^3}{3} + \frac{7 \text{س}^2}{2} + 2 \text{س} + \text{ج}$$

$$(ج) \left[ 3 \text{ظاس جتاس} \cdot \text{دس} \right]$$

$$= \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} \times \text{جتاس} \cdot \text{دس}$$

$$= 3 \text{جتاس} \cdot \text{دس} = 3 - \text{جتاس} + \text{ج}$$

$$= \left[ \text{س}^2 + 4 \text{س} + 16 \right] \cdot \text{دس} = \frac{\text{س}^3}{3} + \frac{4 \text{س}^2}{2} + 16 \text{س} + \text{ج}$$

تدريب ٥

الحل:

$$\text{ق(س)} = \left[ \text{ق(س)} \cdot \text{دس} \right]$$

$$\text{ق(س)} = \left[ (3 \text{س}^2 - 6 \text{س} + 5) \cdot \text{دس} \right]$$

$$= \frac{3 \text{س}^3}{3} - \frac{6 \text{س}^2}{2} + 5 \text{س} + \text{ج}$$

$$= \text{ق(س)} = \text{س}^3 - 3 \text{س}^2 + 5 \text{س} + \text{ج}$$

لكن ق(٠) = ٧

$$\text{ق(٠)} = (٠)^3 - 3(٠)^2 + 5(٠) + \text{ج} = ٧$$

$$\leftarrow \text{ج} = ٧$$

$$\leftarrow \text{ق(س)} = \text{س}^3 - 3 \text{س}^2 + 5 \text{س} + ٧$$

تمارين و مسائل س٥ ص ١٦٦

باشتقاق الطرفين

$$ع'(س) = ١٨ = ٢س - ٦ + ٦$$

$$ع'(١) = ١٨ = ٢(١) - ٦ + ٦$$

$$١٨ = ٦ + ٦ - ١٨ =$$

تمارين و مسائل س٦ ص ١٦٦

$$ق(س) = [ ق'(س) ] = [ (٢س - ٥) دس ]$$

$$ق(س) = ٢س^٢ - ٥س + ج$$

$$ق(س) = ٢س^٢ - ٥س + ج$$

$$٤ = (٢)$$

$$\leftarrow ٤ = ١٠ - ج$$

$$\leftarrow ج = ١٠$$

$$ق(س) = ٢س^٢ - ٥س + ١٠$$

$$ق(١) = ١ = ٢(١) - ٥ + ١٠$$

$$١ = ١٠ - ٥ + ج$$

$$ج = ٦$$

تمارين و مسائل س٧ ص ١٦٦

$$اذا كان ق'(س) = ٣س (٦ - ٥س) + ٤س^٣$$

وكان ق(٢) = ١٠ ، فجد ق(١) .

الحل:

$$[ ق'(س) دس ] = ٣س (٦ - ٥س) + ٤س^٣ دس$$

$$ق(س) = \frac{٨س^٢}{٢} + \frac{٥س^٣}{٣} + \frac{٤س^٤}{٤} + ج$$

$$ق(س) = ٩س^٢ - ٥س^٣ + ٤س^٤ + ج$$

$$د) \left[ \frac{٨س^٢ + ٦س + ٨}{٢س} دس , س \neq ٢ \right]$$

الحل:

$$\left[ \frac{(٢س) (٢س + ٤)}{(٢س)} دس \right]$$

$$= [ ٤س + دس ] = ٤س + \frac{٢س^٢}{٢} + ٤س + ج$$

تمارين و مسائل س٣ ص ١٦٦

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٤س + ١}{س}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١ + ٥ \times ٤}{٥} = \frac{٢١}{٥}$$

تمارين و مسائل س٤ ص ١٦٦

$$ق'(س) = ٦س - ٨س^٢ + ٥$$

$$[ ق'(س) دس ] = [ (٦س - ٨س^٢ + ٥) دس ]$$

$$ق(س) = \frac{٦س^٢}{٢} - \frac{٨س^٣}{٣} + ٥س + ج$$

$$ق(س) = ٣س^٢ - \frac{٨س^٣}{٣} + ٥س + ج$$

$$ق(١) = ٢$$

$$٢ = ٣(١) - \frac{٨(١)^٣}{٣} + ٥(١) + ج$$

$$٢ = ٣ - \frac{٨}{٣} + ٥ + ج$$

$$٦ = ٤ + ج \leftarrow ج = ٢$$

$$ق(س) = ٣س^٢ - \frac{٨س^٣}{٣} + ٥س + ٢$$



لايجاد ج :

$$٩س٢ - ٥س٣ + س٤ + ج = ١٠$$

$$٣٦ - ٤٠ + ١٦ + ج = ١٠$$

$$١٢ = ج + ١٠ \leftarrow \boxed{ج = ١٣}$$

$$ق(س) = ٩س٢ - ٥س٣ + س٤ - ١٣$$

$$ق(١) = ٩(١) - ٥(١) + (١) - ١٣ = ١٣ - ٥ + ١ - ١٣ = -٨$$

$$ق(١) = -٨$$

تمارين ومسائل س٨ ص ١٦٦

إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق

$$\frac{س٢ + ٦س + ٨س٣}{س} = ق(س)$$

وكان ق(١) = ١٢ ، فجد قاعدة الاقتران .

الحل:

$$\left[ ق(س) . دس \right] = \frac{س٢ + ٦س + ٨س٣}{س} . دس$$

$$\left[ ق(س) = س + ٦ + ٨س٢ \right] . دس$$

$$\boxed{ق(س) = س + ٦ + \frac{س٢}{٢} + \frac{٨س٣}{٣}}$$

$$ق(١) = ١٢ = ج + (١) + \frac{(١)٢}{٢} + \frac{(١)٨}{٣}$$

$$ق(١) = ١٢ = ج + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{٨}{٣}$$

$$٦ = ج + \frac{٣ + ١٦}{٦} =$$

$$\frac{١٩}{٦} - ٦ = ج \leftarrow ٦ = ج + \frac{١٩}{٦}$$

$$\leftarrow \boxed{ج = ٧}$$

تمارين ومسائل س٩ ص ١٦٦

$$\left[ ل(س) = (٦س٢ - ٦س٣ - ٢س) \right] . دس$$

$$= \frac{٦س٢}{٣} - \frac{٦س٤}{٤} - \frac{٢س٢}{٢} + ج$$

$$ل(٣) - ل(١)$$

$$= ٢(٣) - \frac{٣(٣)٤}{٢} - (٣) + ج$$

$$= -٢(١) - \frac{(١)٣}{٢} - (١) + ج$$

$$= -٥٤ - \frac{٢٤٣}{٢} - ٩ - ٢ + \frac{٣}{٢} + ١$$

$$= -٥٤ - \frac{٢٤٠}{٢} - ١٠ - ٤٤ = ١٢٠ - ٧٦ =$$

تدريب ١ ص ١٦٩

$$\text{جد } \int \frac{6}{x^2} \text{ دس}$$

الحل:

$$\int \frac{6}{x^2} \text{ دس} = \int 6x^{-2} \text{ دس} = 12x^{-1} + C = \frac{12}{x} + C$$

$$= (12 \times \frac{1}{4}) - (12 \times \frac{1}{2}) = 12 - 24 = -12$$

$$\text{جد } \int 14x^{\frac{4}{3}} \text{ دس}$$

الحل:

$$\int \frac{14x^{\frac{4}{3}}}{3} \text{ دس}$$

$$= \frac{14}{3} \times \frac{3}{7} x^{\frac{4}{3}+1} = 2x^{\frac{7}{3}} = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

تدريب ٢ ص ١٦٩

$$\int \frac{4}{x^2} \text{ دس} = \int 4x^{-2} \text{ دس} = -4x^{-1} + C = -\frac{4}{x} + C$$

$$= -\frac{4}{3} - (-\frac{4}{5}) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{5} = -\frac{20}{15} + \frac{12}{15} = -\frac{8}{15}$$

تدريب ٣ ص ١٦٩

$$\text{إذا كان } \int \frac{6}{x^2} \text{ دس} = 9 \text{ ، فجد قيمة الثابت ب.}$$

الحل:

$$9 = \int \frac{6}{x^2} \text{ دس} = \int 6x^{-2} \text{ دس} = -6x^{-1} + C = -\frac{6}{x} + C$$

$$9 = -\frac{6}{3} + C = -2 + C \Rightarrow C = 11$$

$$9 = 3 - 2b^3 \Leftrightarrow 3b^3 = 9 - 3 = 6 \Rightarrow b^3 = 2 \Rightarrow b = \sqrt[3]{2}$$

$$3b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

تمارين و مسائل س ١ ص ١٧١

$$(أ) \int \frac{2}{x^2} \text{ دس} = \int 2x^{-2} \text{ دس} = -2x^{-1} + C = -\frac{2}{x} + C$$

$$(ب) \int \frac{1}{8x^3} \text{ دس} = \int \frac{1}{8} x^{-3} \text{ دس} = \frac{1}{8} \times \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{16x^2} + C$$

$$\int \left[ \frac{2}{x^3} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{8} \right] \text{ دس} = \int \frac{3}{8x^3} \text{ دس} = \frac{3}{8} \times \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{16x^2} + C$$

$$= -\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$(ج) \int (2x^2 + 8x^3 - 5x^4 + 7) \text{ دس}$$

$$= \int 2x^2 \text{ دس} + \int 8x^3 \text{ دس} - \int 5x^4 \text{ دس} + \int 7 \text{ دس}$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 2x^4 - x^5 + 7x + C$$

$$= \frac{2}{3} \times 27 + 2 \times 16 - 125 + 49 + C = 18 + 32 - 125 + 49 + C = -26 + C$$

$$(د) \int (3x^2 - 2) \text{ دس} = \int 3x^2 \text{ دس} - \int 2 \text{ دس} = x^3 - 2x + C$$

$$= (3^3 - 2 \times 3) - (2^3 - 2 \times 2) = (27 - 6) - (8 - 4) = 21 - 4 = 17$$

$$\int (3x^2 + 2) \text{ دس} = x^3 + 2x + C$$

$$= \left[ \frac{3}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{3}x^3 \right] \text{ دس} = x^3 - x^2 + x^3 + C = 2x^3 - x^2 + C$$

$$= (4 + \frac{4}{2} + 8) - (\frac{4}{2} + 8) = (4 + 2 + 8) - (2 + 8) = 14 - 10 = 4$$

$$= 16 = 4 - 2 - 8 + 4 - 2 + 8 = 4$$

تمارين و مسائل س٢ ص ١٧١

إذا كان  $\int_1^4 \frac{1}{x} dx = 2.0$  ، فجد قيمة م

الحل:

$$2.0 = \int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

$$2.0 = 4 - 1 = 3$$

$$4 = م \Leftarrow 2.0 = 4 - 1 \Leftarrow م = 3$$

تمارين و مسائل س٣ ص ١٧١

إذا كان ق معرف على الفترة [١ ، ٥] وكان

ق(س) = ٢س + ١ ، فجد قيمة ق(٥) - ق(١).

الحل:

$$\int_1^5 (2س + 1) ds = 2 \int_1^5 س ds + \int_1^5 1 ds$$

$$= 2 \left[ \frac{س^2}{2} \right]_1^5 + [س]_1^5 = (5^2 - 1^2) + (5 - 1) = 24$$

$$28 = 2 - 3.0 = 28$$

تمارين و مسائل س٤ ص ١٧١

$$\int_2^4 (س^2 - ٦س + ٣) ds = ٢٨$$

$$2س^2 - ٦س + ٣ = ٢٨$$

= صفر

تمارين و مسائل س٥ ص ١٧١

$$\int_1^3 (س^٣ - ٤س^٢ + ٢س) ds = ٤$$

الحل:

$$\int_1^3 (س^٣ - ٤س^٢ + ٢س) ds = \left[ \frac{س^4}{4} - \frac{٤س^3}{3} + س^2 \right]_1^3$$

$$= \left( \frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + 3^2 \right) - \left( \frac{1^4}{4} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} + 1^2 \right) = \left( \frac{81}{4} - 36 + 9 \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{81}{4} - 27 + 9 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{80}{4} - 17 + \frac{4}{3} - 1 = 20 - 17 + \frac{4}{3} - 1 = 3 + \frac{4}{3} - 1 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\int_1^3 (س^٣ - ٤س^٢ + ٢س) ds = ٤$$

الحل:

$$\int_1^3 (س^٣ - ٤س^٢ + ٢س) ds = \left[ \frac{س^4}{4} - \frac{٤س^3}{3} + س^2 \right]_1^3$$

$$= \left( \frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + 3^2 \right) - \left( \frac{1^4}{4} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} + 1^2 \right) = \frac{80}{4} - 17 + \frac{4}{3} - 1 = 20 - 17 + \frac{4}{3} - 1 = 3 + \frac{4}{3} - 1 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\int_1^3 (س^٣ - ٤س^٢ + ٢س) ds = ٤$$

الحل:

$$\int_1^3 (س^٣ - ٤س^٢ + ٢س) ds = \left[ \frac{س^4}{4} - \frac{٤س^3}{3} + س^2 \right]_1^3$$

$$= \left( \frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + 3^2 \right) - \left( \frac{1^4}{4} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} + 1^2 \right) = \frac{80}{4} - 17 + \frac{4}{3} - 1 = 20 - 17 + \frac{4}{3} - 1 = 3 + \frac{4}{3} - 1 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

تمارين و مسائل س٦ ص ١٧١

إذا كان  $\int_0^5 ق(س) ds = ١٣$  ، وكان ق(٥) = ١٧ -

فجد قيمة ق(٢).

الحل:

$$\int_0^5 ق(س) ds = ١٣ \Leftarrow ق(٥) = ١٧$$

$$ق(٢) - ق(٥) = ١٣ - ١٧ = -٤$$

$$ق(٢) = ١٧ - ٤ = ١٣$$

$$ق(٢) = ٤$$

S  
A  
L  
I  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
I  
E  
E  
B

تدريب ١ ص ١٧٣

$$\int_{-1}^2 (س) دس = \frac{2-}{2} = 1-$$

$$(1) \int_{-1}^2 5 (س) دس =$$

$$\frac{25}{2} = 5 \times \frac{5}{2} =$$

$$(2) \int_{-1}^2 2 (س) دس - \int_{-1}^2 3 (س) دس = \int_{-1}^2 2س - 3س دس$$

$$= 2 \times \frac{5}{2} - 3 \times \frac{5}{2} = 5 - \frac{15}{2} = \frac{10}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{5}{2}$$

تدريب ٢ ص ١٧٥

$$\text{إذا كان } \int_{-1}^2 \frac{ق(س)}{3} دس = 5- ، \int_{-1}^2 ق(س) دس = 4$$

فجد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \int_{-1}^2 ق(س) دس \quad (2) \int_{-1}^2 ق(س) دس$$

الحل:

تجهيز المعطى (١)

$$\int_{-1}^2 \frac{ق(س)}{3} دس = 5$$

$$3 \times 5 = \int_{-1}^2 \frac{1}{3} ق(س) دس = 3 \times 5 = 15$$

$$\int_{-1}^2 ق(س) دس = 15$$

المطلوب (١):

$$\int_{-1}^2 ق(س) دس = 15$$

مطلوب (٢) : خاصية الاضافة :

$$\int_{-1}^2 ق(س) دس = \int_{-1}^2 ق(س) دس + \int_{-1}^2 ق(س) دس$$

$$4 = \int_{-1}^2 ق(س) دس + 15$$

$$\int_{-1}^2 ق(س) دس = 11-$$

تدريب ٣ ص ١٧٥

$$\text{إذا كان } \int_{-1}^2 (3ق(س) - 4) دس = 18$$

$$\text{فجد قيمة التكامل الاتي : } \int_{-1}^2 3ق(س) دس$$

الحل: تجهيز المعطى (١)

$$\int_{-1}^2 (3ق(س) - 4) دس = 18$$

$$3 \int_{-1}^2 ق(س) دس - \int_{-1}^2 4 دس = 18$$

$$3 \int_{-1}^2 ق(س) دس - 4س = 18$$

$$3 \int_{-1}^2 ق(س) دس = 18 + 4س = 18 + 20 = 38$$

$$3 \int_{-1}^2 ق(س) دس = 38 \Rightarrow \int_{-1}^2 ق(س) دس = \frac{38}{3} = 12.67$$

$$\therefore \int_{-1}^2 ق(س) دس = 10$$

المطلوب :

$$3 \int_{-1}^2 ق(س) دس = 3 \times 10 = 30$$

تدريب ٤ ص ١٧٥

(١) اذا كان  $\int_{1+2^m}^{7-} \frac{1}{x} dx = 0$  ، فجد قيمة الثابت م

الحل:

بما ان الجواب صفرا اذا : العلوي = السفلي

$$7 - = 1 + 2^m \Rightarrow 2^m = 6 \Rightarrow m = \log_2 6$$

(٢)

اذا كان  $\int_0^1 (2x - 3) dx = 0$  ، فجد قيمة الثابت ن .

الحل:

$$\int_0^1 (2x - 3) dx = 0 \Rightarrow \left[ x^2 - 3x \right]_0^1 = 0$$

$$1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 = 3$$

$$1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 = 3$$

$$1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 = 3$$

$$1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 = 3$$

$$(1 - 3) = 0 \Rightarrow 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 = 3$$

$$\therefore \boxed{1 = 3}, \boxed{2 = 3}$$

تمارين و مسائل س١ ص ١٧٧

$$(أ) \int_0^2 \frac{1}{x} dx = 12$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{x} dx = 12 \Rightarrow \left[ \ln x \right]_0^2 = 12$$

$$\text{المطلوب : } \int_0^3 \frac{1}{x} dx = 6 - 3 = 3$$

$$(ب) \int_0^1 \frac{1}{x} dx = (\text{الاضافة})$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 10 - 6 = 4$$

$$10 - 6 = 4$$

$$(ج) \int_0^4 \frac{1}{x} dx + \int_0^2 \frac{1}{x} dx = 13$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{x} dx + \int_0^2 \frac{1}{x} dx = 13$$

$$= 13 - 16 + 4 = 1$$

تمارين و مسائل س٢ ص ١٧٧

$$(أ) \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 5$$

$$5 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 5$$

$$5 = 3 - \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 3 - 0 = 3$$

$$8 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 8$$

(ب) تجهيز

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = 6$$

المطلوب :

$$\int_0^3 \frac{1}{x} dx + \int_0^2 \frac{1}{x} dx = 3$$

$$3 = \int_0^3 \frac{1}{x} dx - \int_0^2 \frac{1}{x} dx + \int_0^2 \frac{1}{x} dx = 3$$

$$3 = 6 \times 3 + (1 - 2) = 18 - 1 = 17$$

$$= 18 + (1 - 4) - 24 = 18 - 3 = 15$$

$$= 18 + 27 - 24 = 21$$

تمارين و مسائل س٣ ص ١٧٧

$$١ - أ = ٧ + أ٥$$

$$\Leftarrow أ٤ = ٨ -$$

$$\Leftarrow أ = ٢ -$$

تمارين و مسائل س٤ ص ١٧٧

$$٢س - ٢س٢ = ٣$$

$$٢م - ٢م٢ = (١٨ - ٦) -$$

$$٢م - ٢م٢ = ١٢ + ٢م٢ = ٢ -$$

$$٣م - ٦ =$$

$$٣م - ٢م = (٣ - ٢) =$$

$$٣م = ٢ -$$

تمارين و مسائل س٥ ص ١٧٧

$$٣ \left[ \begin{array}{l} ق(س) \\ دس \end{array} \right] - ٥ \left[ \begin{array}{l} دس \\ دس \end{array} \right] = ٩$$

$$\Leftarrow ٣ \left[ \begin{array}{l} ق(س) \\ دس \end{array} \right] - ٥ \left[ \begin{array}{l} دس \\ دس \end{array} \right] = (٥ - ٤) = ٩$$

$$\Leftarrow ٣ \left[ \begin{array}{l} ق(س) \\ دس \end{array} \right] = ١٥ +$$

$$\Leftarrow ٣ \left[ \begin{array}{l} ق(س) \\ دس \end{array} \right] = \frac{٦-}{٣} = ٢ -$$

المطلوب :

$$\left[ \begin{array}{l} ٢ق(س) \\ ١ + دس \end{array} \right]$$

$$٢ = \left[ \begin{array}{l} ق(س) \\ دس \end{array} \right] + ١ \left[ \begin{array}{l} دس \\ دس \end{array} \right] = ٢ \times ٢ + ١(٤ - ١) =$$

$$٧ = ٣ + ٤ =$$

تمارين و مسائل س٦ ص ١٧٧

$$٦ = ل - ٢ل \Leftarrow ٦ = ل$$

$$٦ = ل - ٢ل \Leftarrow ٦ = (٣ - ل)(٢ + ل) =$$

$$٢ - ، ٣ = ل$$

تدريب ١ ص ١٧٩

التعويض :

$$ص = ٢س + ٣س^٢ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٢س + ٣س^٢}{دس}$$

$$دص = \frac{دص}{٢س + ٣س^٢}$$

الحل:

$$\left[ \begin{array}{l} ٢١ \\ ٢س + ٣س^٢ \end{array} \right] \frac{دص}{دص} = \frac{دص}{٢س + ٣س^٢}$$

$$\left[ \begin{array}{l} ٢١ \\ دص \end{array} \right] =$$

$$= \frac{٢١ص}{٨} + ج$$

$$= \frac{٢١(٢س + ٣س^٢)}{٨} + ج$$

تدريب ٢ ص ١٨٢

$$\left[ \begin{array}{l} ١ \\ ١ + ٥س \end{array} \right] دس =$$

$$دص = ٥ = دس$$

$$ص = ٥س + ١$$

$$دس = \frac{دص}{٥}$$

$$٣ = ص \Leftarrow ١٦ =$$

$$٠ = ص \Leftarrow ١ =$$

$$\left[ \begin{array}{l} ١ \\ ١٦ص \end{array} \right] \times \frac{دص}{٥} =$$

$$= \frac{١}{١٦} \left[ \begin{array}{l} ١ \\ ١٦ص \end{array} \right] دص = \frac{١}{١٦} \times ٢ص = \frac{٢}{١٦}$$

$$= \frac{٢}{١٦} \left[ \begin{array}{l} ١ \\ ١٦ص \end{array} \right] = \frac{٢}{١٦} (١٦ - ١٦) =$$

$$= \frac{٢}{١٦} (٤ - ١) = ٣ - \times \frac{٢}{٥} = \frac{٦-}{٥}$$

تدريب ٣ ص ١٨٢

$$(1) \text{ص} = \text{س}^2 + 1 \iff \text{دص} = 2\text{س} \cdot \text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2} = \text{دس}$$

$$\left[ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2} \times \text{ص}^{\circ} \right] \text{س}^{\circ} = \text{دص}$$

$$\left[ \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} \right] \text{ص}^{\circ} = \text{دص} \cdot \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}}$$

(٢)

$$\left[ \text{س}^2 \text{قا}^2 (1 - \text{س}) \right] \text{دس}$$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2} \cdot \text{ص}^{\circ} = \frac{\text{دص}}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{\text{دص}}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{\text{دص}}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{\text{دص}}{\text{س}^2}$$

(٣)

$$\text{ص} = \text{س}^2 - \text{س} - 1$$

$$\text{دص} = (1 - 4\text{س}) \cdot \text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - 1} = \text{دس}$$

$$\text{س} = 1 \iff \text{ص} = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$\text{س} = -1 \iff \text{ص} = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$\left[ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2 - 1} \times \text{ص}^{\circ} \right] \text{س}^{\circ} = \text{دص}$$

$$\left[ \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} \right] \text{ص}^{\circ} = \text{دص} \cdot \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}}$$

(٤)

$$\text{ص} = \text{س} + 1 \iff \text{دص} = \text{دس}$$

$$\text{س} = 0 \iff \text{ص} = 1$$

$$\text{س} = 3 \iff \text{ص} = 4$$

$$\left[ \frac{\text{دص}}{\text{س}^2} \right] \text{س}^{\circ} = \text{دص}$$

$$\left[ \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} \right] \text{ص}^{\circ} = \text{دص} \cdot \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{س}^{\circ}}$$

تدريب ٤ ص ١٨٢

$$(1) \text{ص} = \text{أس} + \text{ب} \quad , \quad \text{دص} = \text{أ دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \text{دس}$$

$$\left[ \frac{\text{دص}}{\text{أ}} \times \text{ص}^{\circ} \right] \text{ص}^{\circ} = \text{دص}$$

$$\frac{\text{ص}^{\circ}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$$

$$(2) \left[ \text{جتا} (\text{أس} + \text{ب}) \right] \text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \text{دس} \quad , \quad \text{دص} = \text{أ دس} \quad , \quad \text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$$

$$\left[ \frac{\text{دص}}{\text{أ}} \times \text{جتا} \text{ص} \right] = \text{دص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$$

S  
A  
L  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

تدريب ٥ ص ١٨٣

$$(١) \text{ ص} = ١ - ٢ \text{ س} \Leftrightarrow \text{دص} = -٢ \cdot \text{دس}$$

$$\frac{\text{لص}}{٢-} = \text{دس}$$

$$\text{س} = ١- \leftarrow \text{ص} = ٣$$

$$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = ١ - ٢ \times ٢ = ٣-$$

$$\left[ \begin{array}{l} ٣- \\ ٢- \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} \times \begin{array}{l} ٦ \\ ٢- \end{array} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} ٣- \\ ٢- \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} =$$

$$\begin{array}{l} ٣- \\ ٢- \end{array} \left[ \begin{array}{l} \text{ص} \\ ٦ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٦ \\ ٦ \end{array} = \begin{array}{l} ٦ \\ ٦ \end{array} \left( \begin{array}{l} ٦ \\ ٦ \end{array} \right) - \begin{array}{l} ٦ \\ ٦ \end{array} \left( \begin{array}{l} ٦ \\ ٦ \end{array} \right) = \text{صفر}$$

$$(٢) \text{ ص} = ١ - ٤ \text{ س} , \text{ دص} = -٤ \cdot \text{دس}$$

$$\frac{\text{لص}}{٤-} = \text{دس}$$

$$\left[ \begin{array}{l} ٣- \\ ٤- \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} \times \begin{array}{l} ٦ \\ ٤- \end{array} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} ٣- \\ ٤- \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} =$$

$$\begin{array}{l} ٣+ \\ ٤+ \end{array} \text{جتا} + \text{ج} =$$

$$\begin{array}{l} ٣ \\ ٤ \end{array} \text{جتا} (١ - ٤ \text{ س}) + \text{ج} =$$

ويمكن حلها على القاعدة المباشرة

$$\frac{١٢ \times \text{جتا} (١ - ٤ \text{ س})}{٤} =$$

$$\begin{array}{l} ٣ \\ ٤ \end{array} \text{جتا} (١ - ٤ \text{ س}) + \text{ج} =$$

تمارين و مسائل س ١ ص ١٨٤

$$(أ) \text{ ص} = \text{س} - \text{س}^٢$$

$$(ب) \text{ ص} = ٢ \text{ س}^٢ - ٢$$

$$(ج) \text{ ص} = \text{س}^٢ - ٢ \text{ س}$$

$$(د) \text{ ص} = \text{س}^٢ - ٦ \text{ س}$$

تمارين و مسائل س ٢ ص ١٨٤

(أ)

$$\left[ \begin{array}{l} ٢ \\ ٣ \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} =$$

حسب القاعدة :

$$\begin{array}{l} ٢ \\ ٣ \end{array} + \frac{\begin{array}{l} ٢ \\ ٣ \end{array} \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array}}{\begin{array}{l} ٥ \\ ٣ \end{array}} =$$

$$\begin{array}{l} ٢ \\ ٣ \end{array} + \frac{\begin{array}{l} ٢ \\ ٣ \end{array} \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array}}{\begin{array}{l} ٥ \\ ٣ \end{array}} =$$

أو بالتعويض

(ب)

$$\text{ص} = ٢ \text{ س}^٢ - ٤ \text{ س} + ١$$

$$\text{دص} = (٤ \text{ س} - ٤) \cdot \text{دس}$$

$$\frac{\text{لص}}{(١ - \text{س})٤} = \text{دس}$$

$$\left[ \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} \times \begin{array}{l} ٤ \\ (١ - \text{س}) \end{array} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array} =$$

$$\begin{array}{l} ١ \\ ٤ \end{array} + \frac{\begin{array}{l} ١ \\ ٤ \end{array} \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array}}{\begin{array}{l} ٦ \\ ٤ \end{array}} =$$

$$\begin{array}{l} ١ \\ ٤ \end{array} + \frac{\begin{array}{l} ١ \\ ٤ \end{array} \begin{array}{l} \text{ص} \\ \text{دص} \end{array}}{\begin{array}{l} ٦ \\ ٤ \end{array}} =$$

S  
A  
L  
I  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
I  
E  
B  
-٣٣-



(ج) ص = ٢ - س ، دص = - دس

$$\int ٢ \text{ قا}^٢ \text{ ص} \times \text{دص} =$$

٢- =  $\int$  قا<sup>٢</sup> ص . دص = ٢- ظاص + ج

٢- = ظا(٢ - س) + ج

(د) ص = س + ١ ، دص = ٤س<sup>٣</sup> . دس

$$\frac{\text{دص}}{٤س^٣} = \text{دس}$$

$$\int ٢ \text{ س}^٢ \text{ جا}ص \times \frac{\text{دص}}{٤س^٣} =$$

$$\int \frac{١}{٢} \text{ جا}ص \cdot \text{دص} =$$

$$\frac{١-}{٢} \text{ جتا}ص + ج =$$

$$\frac{١-}{٢} \text{ جتا} (س + ١) + ج =$$

تمارين و مسائل س٣ ص ١٨٤

(أ)

$$\int (١ + ٤س) \frac{١}{٢} \text{ دس} =$$

$$\int \left[ \frac{\frac{٣}{٢} (١ + ٤س)}{\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}} \right] =$$

$$\int \left[ \frac{٢ (١ + ٤س)}{٦} \right] =$$

$$\frac{٢٧}{٦} = \frac{٩}{٦} =$$

(ب) ص = ١ - س<sup>٢</sup> ، دص = ٣س<sup>٢</sup> . دس

٠ = ص ← ١ = س

٢- = ص ← ١- = س

$$\int ٣ \text{ س}^٢ \text{ ص} \times \frac{\text{دص}}{٣س^٢} = \int \text{ ص} \cdot \text{دص}$$

$$\left( \frac{٤(٢-)}{٤} \right) - ٠ = \int \frac{\text{ص}^٤}{٤} =$$

$$\frac{١٦-}{٤} =$$

(ج) ص = س - ١ ، دص = ٢س . دس

$$\frac{\text{دص}}{٢س} = \text{دس}$$

٠ = ص ← ١ = س

١- = ص ← ٠ = س

$$\int ٣ \text{ س} \text{ جا}ص \times \frac{\text{دص}}{٢س} =$$

$$\int \frac{١}{٣} \text{ ص} \cdot \frac{٣}{٤} \text{ دص} = \int \frac{٣}{٤} \text{ دص} =$$

(د) ص = ٣س<sup>٢</sup> - ٢س ، دص = ٦س - ٢

$$\frac{\text{دص}}{٣س-٢} = \text{دس}$$

$$\int (٣س-٢) (٣س-٢) \frac{\text{دص}}{(٣س-٢)} =$$

$$\int \frac{\text{دص}}{(٣س-٢)} \cdot (٣س-٢) = \int \text{ دص} =$$

$$\int \text{ ص} \cdot \text{دص} =$$

$$\int \frac{١}{ص} = \int \frac{\text{ص}^٢}{١-} =$$

$$\int \frac{١}{(س٣-٢س)} =$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١-}{٢} = \frac{١}{٣-١} - \frac{١}{٦-٤} =$$

صفر

SALIM AL-SAYED

تمارين و مسائل س٤ ص ١٨٤

التعويض :

$$\text{ص} = \text{س}^2 \iff \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3$$

$$\text{دص} = \frac{\text{دص}}{(\text{س}^3)}$$

الحل:

$$\int_{-8}^{27} \frac{\text{دص}}{(\text{س}^3)} \cdot \text{ق}(\text{ص}) \cdot \text{ق}(\text{ص})$$

$$\int_{-8}^{27} \text{ق}(\text{ص}) \cdot \text{دص} =$$

$$\text{ق}(\text{ص}) = \frac{27}{8} - [ \text{ق}(27) - \text{ق}(-8) ] = 11 - 5 - 6 =$$

تمارين و مسائل س٥ ص ١٨٤

الحل:

التعويض :

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$$

$$\int_{-2}^2 \text{س}^8 \text{ق}(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{\text{س}^2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2$$

$$\int_{-2}^2 \text{ق}(\text{ص}) \cdot \text{دص} =$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{س}^2} = \text{دس}$$

$$3 - 4 =$$

$$12 =$$

تمارين و مسائل س٦ ص ١٨٤

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 9, \text{ دص} = 2 \cdot \text{س} \cdot \text{دس}$$

$$\text{س} = 0 \iff \text{ص} = 9$$

$$\text{س} = 4 \iff \text{ص} = 25$$

$$\int_{9}^{25} \frac{\text{دص}}{\text{س}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{ق}(\text{ص}) \cdot \text{ق}(\text{ص})$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\text{دص}}{\text{س}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{ق}(\text{ص}) \cdot \text{ق}(\text{ص}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (9 - 25) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-16) =$$

تدريب (١) ص ١٨٦

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - 1$$

$$\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 1) \cdot \text{دس}$$

$$\text{س}^2 - \text{س} + \text{ج} =$$

$$\text{ق}(-1) = 2$$

$$\text{ق}(-1) - \text{ق}(1) = 2 - \text{ج} = 2$$

$$2 = \text{ج} + 1 + 1$$

$$\text{ج} = 0$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - \text{س}$$

تدريب (٢) ص ١٨٧

$$\int_{-6}^6 \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{دس} =$$

$$\int_{-6}^6 \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{دس} =$$

$$\text{ق}(\text{س}) = 6 = \frac{\frac{4}{3}(\text{س}^2 - 1)}{2 \times \frac{4}{3}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\frac{4}{3}(\text{س}^2 - 1) \cdot 9}{4}$$

ولايجاد قيمة ج نستخدم (٠ ، ٥) :

$$\text{ج} + \frac{\frac{4}{3}(\text{س}^2 - 1) \cdot 9}{4} = 0$$

$$\frac{11}{4} = \text{ج} \iff \text{ج} = \frac{9}{4} - 0 \iff \text{ج} + \frac{9}{4} = 0$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{11}{4} + \frac{\frac{4}{3}(\text{س}^2 - 1) \cdot 9}{4}$$

$$\text{ق}(14) = \frac{11}{4} + \frac{\frac{4}{3}(27) \cdot 9}{4}$$

$$\text{ق}(14) = \frac{11}{4} + \frac{729}{4} = \frac{740}{4}$$

SALIM AL-SAYED

تمارين و مسائل س ١ ص ١٨٨

$$\left[ \text{ق} / \text{س} \right] = \text{دس} \cdot (6 - 2\text{س} + 9\text{س}^2) \cdot \text{دس}$$

$$\text{ق} / \text{س} = 6\text{س} - 2\text{س}^2 + \frac{9\text{س}^3}{4} + \text{ج}$$

ولايجاد ج نستخدم ق(٠) = ٥

$$5 = (0)6 - 2(0)^2 + \frac{9(0)^3}{4} + \text{ج} \Rightarrow \text{ج} = 5$$

تمارين و مسائل س ٢ ص ١٨٨

$$\left[ \text{ق} / \text{س} \right] = \text{دس} \cdot \frac{2\text{س}}{8 + 2\text{س}}$$

$$\left[ \text{ق} / \text{س} \right] = 2\text{س} \left( \frac{1}{3} (8 + 2\text{س}) \right) \cdot \text{دس}$$

$$\text{ق} / \text{س} = 2\text{س} \text{ص} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$$

$$\text{ق} / \text{س} = \text{ص} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{دص}$$

$$\text{ق} / \text{س} = \frac{3\text{ص}^2}{2} + \text{ج}$$

$$\text{ق} / \text{س} = \frac{3}{2} (8 + 2\text{س})^2 + \text{ج}$$

التعويض :

$$\text{ص} = 8 + 2\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{2\text{س}} = \text{دس}$$

ولايجاد قيمة ج نستخدم (٠, ٤)

$$4 = \frac{3}{2} (8 + 2 \cdot 0)^2 + \text{ج}$$

$$4 = \frac{3}{2} (8)^2 + \text{ج}$$

$$4 = \frac{4 \times 3}{2} + \text{ج}$$

$$4 = 6 + \text{ج} \Rightarrow \text{ج} = -2$$

تمارين و مسائل س ٣ ص ١٨٨

$$\left[ \text{ق} / \text{س} \right] = 25(4 + \text{س})^4 \cdot \text{دس}$$

$$\text{ق} / \text{س} = \frac{25(4 + \text{س})^4}{5 \times 5} + \text{ج}$$

$$\text{ق} / \text{س} = (4 + \text{س})^4 + \text{ج}$$

ولايجاد قيمة ج نستخدم (٧, -١):

$$7 = (4 + 1 - 5)^4 + \text{ج}$$

$$7 = 1 - 5 + \text{ج}$$

$$\text{ج} = 8$$

$$\text{ق} / \text{س} = (4 + \text{س})^4 + 8$$

$$\text{ق} / (1) = (4 + 1 \times 5)^4 + 8$$

$$\text{ق} / (1) = 8 + 9$$

$$\text{ق} / (1) = 17$$

تمارين و مسائل س ٤ ص ١٨٨

$$\text{ل} / \text{س} = 2\text{س} (3 - 4) \cdot \text{دس}$$

$$8\text{س} - 8\text{س}^2 =$$

$$\text{ل} / \text{س} = (8\text{س} - 8\text{س}^2) \cdot \text{دس}$$

$$4\text{س}^2 - 2\text{س}^3 + \text{ج} =$$

$$\text{ل} / (0) = 3 \Rightarrow \text{ج} = 3$$

$$\text{ل} / \text{س} = 4\text{س}^2 - 2\text{س}^3 + 3$$

تمارين و مسائل س ٥ ص ١٨٨

$$\left[ \text{ه} / \text{س} \right] = \frac{2\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س}} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ه} / \text{س} = 2\text{س} - 5 \cdot \text{دس}$$

$$\text{ه} / \text{س} = 2\text{س} - 5 + \text{ج}$$

ولايجاد ج نستخدم (٥, -١):

$$0 = 2(1 - 5) - 5 + \text{ج}$$

$$0 = -6 + \text{ج} \Rightarrow \text{ج} = 6$$

S  
A  
L  
I  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
I  
E  
E  
B  
-٣٦-

تدريب (١) ص ١٩٠

$$(١) \text{ ف(ن) } = \text{ع(ن) دن.}$$

$$\text{ع(ن) } = (٥ - ٢ن) \text{ دن.}$$

$$٢ن - ٥ = \text{ج} + ٣$$

$$\text{ف(٠) } = ٠ - ٠ \times ٥ + ٣ = ٣$$

$$\leftarrow \text{ج} = ٣$$

$$\text{ف(ن) } = ٢ن - ٥ + ٣$$

$$\text{ف(٢) } = ٤ - ٥ + ٢ \times ٥ = ٣ - ٥ = ٣$$

$$(٢) \text{ ف(ن) } = \text{ع(ن) دن.}$$

$$\text{ع(ن) } = ٦(٢ن - ١) \text{ دن.}$$

$$\text{ج} + \frac{٣(٢ن - ١)}{٣ \times ٣} =$$

$$= -١(٢ن - ١) + \text{ج}$$

$$\text{ف(٠) } = (٠ \times ٢ - ١) = ٠ - ١ = -١$$

$$-١ = \text{ج} + ٦$$

$$\text{ف(ن) } = -١(٢ن - ١) + ٦$$

$$\text{ف(١) } = -١(١ \times ٢ - ١) + ٦ = ٥ + ٦ = ١١$$

$$= ١١ + ٦ = ١٧$$

تدريب (٢) ص ١٩١

$$(١) \text{ ع(ن) } = \text{ت(ن) دن.} \quad \text{ت(ن) } = ١٢ - \text{دن.}$$

$$١٢ - \text{دن} = \text{ج} + ٥$$

$$\text{ع(٠) } = ٥ = \text{ج} + ٥$$

$$\text{ع(ن) } = ١٢ - \text{ن} + ٥$$

$$\text{ع(٤) } = ٥ + ٤ \times ١٢ - ٥ = ٤٨ + ٥ = ٥٣ \text{ م/ث}$$

$$(٢) \text{ ف(ن) } = \text{ع(ن) دن.}$$

$$\text{ع(ن) } = (١٢ - \text{ن} + ٥) \text{ دن.}$$

$$= \frac{١٢ - \text{ن} + ٥}{٢} + \text{ج}$$

$$= ٦ - \frac{\text{ن}}{٢} + ٥ + \text{ج}$$

$$\text{ف(٠) } = ٣ = \text{ج} + ٣$$

$$\text{ف(ن) } = ٦ - \text{ن} + ٥ + ٣$$

$$\text{ف(٣) } = ٦ - ٣ + ٥ + ٣ = ١١$$

$$= ١١ + ٥ + ٣ = ١٩ \text{ م}$$

تمارين و مسائل س ١ ص ١٩٢

$$\text{ع(ن) } = ١٢ - \text{جتا} (١ - ٢ن)$$

$$\text{د(ف) } = ١٢ - \text{جتا} (١ - ٢ن) \text{ دن.}$$

$$\text{ف(ن) } = \frac{١٢ - \text{جتا}(١ - ٢ن)}{٢} + \text{ج}$$

$$\text{ف(ن) } = ٦ - \text{جتا} (١ - ٢ن) + \text{ج}$$

تمارين و مسائل س ٢ ص ١٩٢

$$\text{ف(ن) } = \text{ع(ن) دن.}$$

$$\text{ف(ن) } = (٤ + \text{ن} + ٨) \text{ دن.}$$

$$= \frac{٤\text{ن}}{٢} + ٨ + \text{ج}$$

$$= ٢\text{ن} + ٨ + \text{ج}$$

$$\text{ف(٠) } = ٢ = \text{ج} + ٨$$

$$\text{ف(ن) } = ٢\text{ن} + ٨ + ٢$$

$$\text{ف(٤) } = ٢(٤) + ٨ + ٢ = ١٨ + ٢ = ٢٠$$

$$= ٢٠ + ٣٢ + ٣٢ = ٨٤ \text{ م}$$

تمارين و مسائل س ٣ ص ١٩٢

$$\text{ت(ن) } = ٤٨ - (١ - ٢ن) \text{ دن.}$$

$$\text{د(ع) } = ٤٨ - (١ - ٢ن) \text{ دن.}$$

$$\text{ع(ن) } = \frac{٤٨ - (١ - ٢ن)}{٢ - ٤} + \text{ج}$$

$$\text{ع(ن) } = \frac{٤٨ - (١ - ٢ن)}{٢} + \text{ج}$$

وليجاد قيمة ج نستخدم ع(٠) = ٢ :

$$٢ = ٠ + ٢٤ - ٤٨ + \text{ج}$$

$$\boxed{\text{ج} = ٢٤}$$

$$\text{ع(ن) } = \frac{٤٨ - (١ - ٢ن)}{٢} + ٢٤$$

تدريب (١) ص ١٩٨

(١)

$$١٢ = ٤س \leftarrow ٠ = ٤س - ١٢$$

$$\leftarrow ٣ = ٣س \text{ خارج الفترة}$$

$$م = \left[ \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] = ١٢ - ٤س \text{ دس}$$

$$١٢ = ٢س - ١٢$$

$$٥ = ١١ - ١٢ = (١ - ١٢) - (٨ - ٢٤) =$$

(٢)

$$٠ = ٣س - ١٢$$

$$٠ = (٤ - ٤س)$$

$$٠ = ٤س \text{ خارج الفترة}$$

$$م = \left[ \begin{array}{l} ٢ \\ ٣ \end{array} \right] = ١٢ - ٣س \text{ دس}$$

$$١٦ = ٣س - ٦س = ٢٤ - ٨ = ٢٤ - ٨ = ١٦$$

(٣)

ق(س) = صفر

٦ - ٢س = صفر

٦ = ٢س

٣ = س

$$م = \left[ \begin{array}{l} ٣ \\ ١ \end{array} \right] = ٦ - ٢س \text{ دس}$$

$$١٦ = ٦س - ٢س$$

$$١٦ = (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$$

$$١٦ = ٩ - ٥$$

$$١٦ = ٤$$

$$م = \left[ \begin{array}{l} ٤ \\ ٣ \end{array} \right] = ٦ - ٢س \text{ دس}$$

$$١٦ = ٦س - ٢س$$

$$١٦ = (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$$

$$١٦ = ٩ - ١$$

$$١٦ = ١$$

$$١٦ = ١٦ + ٢$$

$$١٦ = ٥$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{د ف} \\ \text{ف(ن)} \end{array} \right] = ٦ - (١ - ٢ن) + ٨ \text{ دن}$$

$$\text{ف(ن)} = \frac{٦ - (١ - ٢ن)}{٢ - ٥} = ٨ + ن + ج$$

$$\text{ف(ن)} = \frac{٣}{٥} (١ - ٢ن) + ٨ + ن + ج$$

ولايجاد قيمة ج نستخدم ف(٠) = ٣:

$$٣ = \frac{٣}{٥} + ج$$

$$ج = \frac{١٢}{٥}$$

$$\text{ف(ن)} = \frac{١٢}{٥} + ٨ + \frac{٣}{٥} (١ - ٢ن)$$

$$\text{أ) ع(ن)} = ٦ - (١ - ٢ن) + ٨$$

$$\text{ع(١)} = ٦ - (١ - ٢) + ٨ = ١٠$$

$$\text{ب) ف(ن)} = \frac{٣}{٥} (١ - ٢ن) + ٨ + ن + ج$$

$$\text{ف(٢)} = \frac{٣}{٥} (١ - ٢ \times ٢) + ٨ + ٢ + ج$$

$$= \frac{٣}{٥} + ١٦ + (٢٤ - ٣) =$$

تمارين و مسائل ص ١٩٢

$$\text{أ) ع(ن)} = (١ - ٣ن) (١ + ٤ن)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{د ف} \\ \text{ف(ن)} \end{array} \right] = (١ - ٣ن) (١ + ٤ن) \text{ دن}$$

$$\text{ف(ن)} = ١٢ - ٣ن + ١ - ٤ن = ١ - ٧ن$$

$$\text{ف(ن)} = ١٢ - ٣ن - ١ - ٧ن = ١١ - ١٠ن$$

$$\text{ف(ن)} = ٤ن - \frac{٢ن}{٢} - ن + ج$$

$$\text{ب) ف(٠)} = ٤(٠) - \frac{٢(٠)}{٢} + ج = ٤ + ج = ٧$$

$$ج = ٧$$

$$\text{ف(ن)} = ٤ن - \frac{٢ن}{٢} - ن + ٧ = ٣ن + ٧$$

$$\text{ف(٢)} = ٤(٢) - \frac{٢(٢)}{٢} - ٢ + ٧ = ٨ - ٢ - ٢ + ٧ = ١١$$

$$= ٣٥$$

تدريب (٢) ص ١٩٨

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} = 3 - 2\text{س} - \text{س}^2 &= 3 - 3\text{س} + \text{س}^2 \\ &= (3 - \text{س})(3 + \text{س}) \\ \text{م} &= \int_1^3 (3 - 2\text{س} - \text{س}^2) \text{دس} \\ &= \left[ 3\text{س} - \text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{3} \right]_1^3 \\ &= \left( 9 - 9 - 9 \right) - \left( 3 - 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -9 - \left( 2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -9 - \frac{5}{3} \\ &= -\frac{32}{3} = \text{م} \end{aligned}$$

تدريب (٣) ص ١٩٩

$$\begin{aligned} \text{أ) } \int_1^8 \text{ق(س)} \text{دس} &= 8 \\ \text{ب) } \int_5^8 \text{ق(س)} \text{دس} &= 5 \\ \text{ج) } \int_5^8 \text{ق(س)} \text{دس} &= 8 + 5 = 13 \\ \text{د) مساحة المنطقة المحصورة [أ، ج، د]} & \\ \int_5^8 \text{ق(س)} \text{دس} &= 8 + 5 = 13 \end{aligned}$$

تمارين و مسائل س ١ ص ٢٠٠

$$\begin{aligned} \text{أ) } \int_1^{12} \text{دس} &= 12 = (2 - 1) \times 12 = 36 \\ \text{ب) } 5 - 2\text{س} &= 0 \Rightarrow \text{س} = \frac{5}{2} \\ \text{م} &= \int_0^5 |2\text{س} - 5| \text{دس} \\ &= \int_0^{\frac{5}{2}} (5 - 2\text{س}) \text{دس} + \int_{\frac{5}{2}}^5 (2\text{س} - 5) \text{دس} \\ &= \left[ 5\text{س} - \text{س}^2 \right]_0^{\frac{5}{2}} + \left[ \text{س}^2 - 5\text{س} \right]_{\frac{5}{2}}^5 \\ &= \left( \frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right) - \left( \frac{25}{4} - \frac{25}{2} \right) \\ &= \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 12.5 \end{aligned}$$

S  
A  
L  
A  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B  
-٣٩-

$$\begin{aligned} \text{ج) } 3\text{س}^2 - 3 &= 0 \Rightarrow \text{س}^2 = 1 \Rightarrow \text{س} = \pm 1 \text{ تهمل} \\ \text{م} &= \int_1^3 (3 - 2\text{س} - \text{س}^2) \text{دس} \\ &= \left[ 3\text{س} - \text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{3} \right]_1^3 \\ &= \left( 9 - 9 - 9 \right) - \left( 3 - 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -9 - \left( 2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -9 - \frac{5}{3} = -\frac{32}{3} \end{aligned}$$

تمارين و مسائل س ٢ ص ٢٠٠

$$\begin{aligned} \text{أ) } \text{ق(س)} &= 6 - 6\text{س}^2 = 6(1 - \text{س}^2) \\ &= 6(1 - \text{س})(1 + \text{س}) \\ \text{م} &= \int_1^6 (6 - 6\text{س}^2) \text{دس} \\ &= \left[ 6\text{س} - 2\text{س}^3 \right]_1^6 \\ &= \left( 36 - 72 \right) - \left( 6 - 2 \right) \\ &= -36 - 4 = -40 \\ \text{م} &= \int_1^6 (6 - 6\text{س}^2) \text{دس} \\ &= \left[ 6\text{س} - 2\text{س}^3 \right]_1^6 \\ &= \left( 36 - 72 \right) - \left( 6 - 2 \right) \\ &= -36 - 4 = -40 \\ \text{ك) } \text{م} + \text{م} &= 2\text{م} \\ 12 &= 4 + 8 \end{aligned}$$

ق(س) = صفر

٤س³ = صفر

س = صفر

$$\begin{aligned} \text{م} &= \int_1^{12} \text{دس} \\ \text{م} &= \int_1^{12} \text{دس} \\ \text{م} &= (1) - (0) \\ \text{م} &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

م = 1

تمارين و مسائل س٣ ص ٢٠٠

(أ)

$$ق(س) = ٤س - ٢س = ٠$$

$$٠ = (س - ٤)س$$

$$\Leftarrow س = ٠, ٤$$

$$م = \int (٤س - ٢س) دس = ٢س^٢ - \frac{٢س^٣}{٣} + C$$

$$٠ = \left( \frac{٦٤}{٣} - ٣٢ \right) + C$$

$$\frac{٣٢}{٣} = \left| \frac{٦٤ - ٩٦}{٣} \right|$$

ق(س) = صفر

$$٤س^٢ - ١٢س = صفر$$

$$٤س(س - ٣) = صفر$$

$$س = صفر, ٣$$

(ب)

$$م = \int (٤س^٢ - ١٢س) دس = \frac{٤س^٣}{٣} - ٦س^٢ + C$$

$$م = ٤س^٢ - ١٢س + C$$

$$٠ = (١٠٨ - ١٠٨) + C$$

$$٢٧ = م$$

$$\boxed{٢٧ = م}$$

تمارين و مسائل س٤ ص ٢٠٠

$$\int (س) دس + \int (س) دس = \int (س) دس$$

$$\int (س) دس = ١٣ - ٣$$

$$\int (س) دس = ١٠$$

$$م = \int (٤س^٢) دس$$

$$١ = \int (٤س^٢) دس$$

$$١ - ١ = ٠$$

$$\boxed{١ = م}$$

$$م + ١ = ٢م$$

$$٢ = ١ + ١ =$$

$$\boxed{٢ = م}$$

(ج)

$$٠ = ٤٨ - ٢س^٣$$

$$٤٨ = ٢س^٣ \Leftarrow س^٣ = ٢٤ \Leftarrow س = \sqrt[٣]{٢٤} = ٢$$

$$م = \int (٤٨ - ٢س^٣) دس = ٤٨س - \frac{٢س^٤}{٤} + C$$

$$| (١٤٤ - ٢٧) - (١٩٢ - ٦٤) | = \frac{٤}{٣} [ ٤٨س^٣ - ٢س^٤ ]$$

$$١١ = | ١١٧ + ١٢٨ - |$$

$$م = \int (٤٨ - ٢س^٣) دس = ٤٨س - \frac{٢س^٤}{٤} + C$$

$$٤ = ٤٨س - \frac{٢س^٤}{٤} + C$$

$$| ١٢٨ + ١١٥ - | = | (١٩٢ - ٦٤) - (٢٤٠) - (١٢٥) | =$$

$$١٣ =$$

$$م + ١ = ٢م$$

$$٢٤ = ١٣ + ١١ =$$

(د)

$$٠ = ٤ - ٢س^٢$$

$$٤ = ٢س^٢ \Leftarrow س^٢ = ٢ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٢}$$

$$م = \int (٤ - ٢س^٢) دس = ٤س - \frac{٢س^٣}{٣} + C$$

$$\frac{٢٢}{٣} = \frac{١١}{٣} + \frac{١١}{٣} = \left| \left( ٤ + \frac{١}{٣} \right) - \left( ٤ - \frac{١}{٣} \right) \right| =$$

تمارين و مسائل س ٥ ص ٢٠٠

م مستطيل = طول × عرض

$$\text{م مستطيل} = 1 \times 2$$

$$\boxed{2 = \text{م}}$$

$$\text{م قوس} = \left[ 2 - \text{س} - 1 \right] \cdot \text{دس}$$

$$\text{م قوس} = \left[ 1 - \text{س} \right] \cdot \text{دس}$$

$$\text{م قوس} = \text{س} - \left[ \frac{\text{س}}{3} \right]$$

$$\text{م قوس} = \left( \frac{1}{3} + 1 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$\boxed{\frac{4}{3} = \text{م قوس}}$$

م نافذة = مستطيل + م قوس

$$\text{م نافذة} = \frac{4}{3} + 2$$

$$\boxed{\frac{10}{3} = \text{م نافذة}}$$

$$\text{تكلفة النافذة} = 5 \times \frac{10}{3}$$

$$= 16.6 \text{ دينار}$$

تدريب (١) ص ٢٠٣

نفرض ع = م (س)

$$\text{ص} = \text{ل} \cdot \text{ع} = \text{م} \cdot \text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\frac{1}{\text{ع}} \times \text{م} = \text{س}$$

لكن ع = م (س)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{م} \cdot \text{س}} \times \text{م}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$$

$$\text{ق (س)} = \text{ص}$$

$$2 - \text{س} = 1$$

$$1 - \text{س} = 0$$

$$\text{س} = 1$$

$$\text{س} = 1 \pm$$

تدريب (٢) ص ٢٠٤

(١) ق (س) = لوجتاس

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{الحل: ق (س)}$$

$$(2) \text{ ق (س)} = \text{ل} \cdot \frac{2}{\text{س}}, \text{ س} < 0$$

$$\frac{1 - \text{س}}{\text{س}} = \text{الحل: ق (س)} \leftarrow \frac{\text{س}}{4} \leq \text{ق (س)} \leq \frac{1 - \text{س}}{\text{س}}$$

(٣) ق (س) = لوجتاس (١ + ٢س) ، س < ٢

$$\frac{\text{س}^3}{\text{س} + 8} = \text{الحل: ق (س)}$$



تدريب (٣) ص ٢٠٤

$$ق/س = \frac{أ}{٣+أس}$$

$$\frac{أ}{٣+أ٢-}$$

$$أ = ٣ + أ٢ -$$

$$١ = أ \quad \leftarrow \quad أ٣ = ٣$$

تدريب (٤) ص ٢٠٤

(١) عندما  $س < ٠$  ،  $ق/س = لوس$

$$\leftarrow ق/س = \frac{١}{س}$$

(٢) عندما  $س > ٠$  ،  $ق/س = لوس - س$

$$ق/س = \frac{١-}{س}$$

تدريب (٥) ص ٢٠٥

$$(١) \left[ \frac{٣-}{س} . دس ، س \neq ٠ \right]$$

الحل:

$$٣- = \frac{١}{س} . دس$$

$$٣- = لوس | س + ج$$

$$(٢) \left[ (٦س٢ - ٤)(س٣ - ٢س٢ + ١) = دس \right]$$

الحل:

$$ص = س٣ - ٢س٢ + ١$$

$$دص = (٢س٣ - ٢) . دس$$

$$دص = \frac{دص}{٢س٣ - ٢}$$

$$\left[ ٢(٢س٣ - ٢) \times \frac{دص}{(٢س٣ - ٢)} = ١ \right]$$

$$\left[ ٢ = ١ \cdot دص \right]$$

$$٢ = \frac{١}{ص} . دص = ٢ لوص | + ج$$

$$٢ = لوص | س٣ - ٢س٢ + ١ | + ج$$

تدريب (٦) ص ٢٠٦

نفرض  $ع = ل(س)$

ص = ه٤ ، ع = ل(س)

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع}$$

$$ه٤ \times ل(س) =$$

لكن  $ع = ل(س)$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ل(س)}{ل(س)}$$

تدريب (٧) ص ٢٠٧

$$(١) ص = ه٣ - ٣س٢$$

$$\text{الحل: ص} = ٢ - ٣س ه٣ - ٣س٢$$

$$(٢) ص = ه٢ ج٢س$$

$$\text{الحل: ص} = - جا٢س \times ٢ \times ه٢ ج٢س$$

$$\text{ص} = ٢ - جا٢س ه٢ ج٢س$$

$$(٣) ص = ه٣ لوس$$

$$\text{الحل: ص} = ه٣ \times \frac{١}{س} + لوس \times ه٣$$

$$\text{ص} = \frac{ه٣}{س} + ه٣ لوس$$

$$(٤) ص = \frac{ه٣}{١ + ٢س}$$

$$\text{الحل: ص} = \frac{(١ + ٢س)(ه٣) - (٢س)(ه٣)}{(١ + ٢س)}$$

S  
A  
L  
E  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B  
-٤٢-

تدريب (٨) ص ٢٠٧

$$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب} , \text{دص} = \text{أ} . \text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \text{دس}$$

$$\left[ \text{ه} \text{ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}} \right] \text{ه} \text{ص} . \text{دص}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ه} \text{ص} + \text{ج} =$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ه} \text{أس} + \text{ب} = \text{ج} + \frac{\text{ه} \text{أس} + \text{ب}}{\text{أ}}$$

تدريب (٩) ص ٢٠٨

$$(١) \left[ \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{ه} \text{ص} . \text{دس} \right]$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{ه} \text{ص} + \text{ج} =$$

$$(٢) \left[ \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{ه} \text{أس}^{-١} . \text{دس} \right]$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{ه} \text{أس}^{-١} + \text{ج} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{ه} \text{أس}^{-١} + \frac{\text{ه} \text{أس}^{-١}}{١٨ - ٦}$$

$$(٣) \left[ (\text{ب} + \text{أ}) \text{ه} \text{أس}^{-٢} + \text{دس} \right]$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{أس}^{-٢} + \text{ب} - ١$$

$$\text{دص} = (\text{ب} + \text{أ}) \text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{ب} + \text{أ}} = \text{دس}$$

$$\left[ \frac{\text{دص}}{(\text{ب} + \text{أ})} \times \text{ه} \text{ص} = \frac{(\text{ب} + \text{أ}) \text{دص}}{(\text{ب} + \text{أ})} \right]$$

$$\text{ه} \text{ص} . \text{دص} = \text{ه} \text{ص} + \text{ج}$$

$$\text{ه} \text{ص} \text{أس}^{-٢} + \text{ب} + \text{ج} =$$

$$(٤) \left[ \frac{\text{ب} . \text{دس}}{\text{ه} \text{أس}^{-٢}} \right]$$

الحل:

$$\left[ \text{ب} \text{ه} \text{أس}^{-٢} . \text{دس} \right]$$

$$\text{ب} \text{ه} \text{أس}^{-٢} + \text{ج} =$$

$$\text{ب} \text{ه} \text{أس}^{-٢} + \text{ج} =$$

تمارين ومسائل ص ١ ص ٢٠٩

$$(أ) \text{ق} (\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{لوس} + \text{ه} \text{أس}^{-٢} + ٢$$

$$\text{الحل: ق} (\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{أ}}{\text{س}} + ١٤ \text{ه} \text{أس}^{-٢}$$

$$(ب) \text{ق} (\text{س}) = ٣ \text{لوس} - ٢ \text{ه} \text{أس}^{-٢} - ٢$$

$$\text{الحل: } \frac{\text{أ}}{\text{س}} + ٤ \text{ه} \text{أس}^{-٢} - ٢$$

$$(ج) \text{ق} (\text{س}) = \text{ه} \text{جاس} - ٢ \text{لوس} (\text{جتاس})$$

$$\text{الحل: ق} (\text{س}) = \text{جتاس} \text{ه} \text{جاس} + \frac{\text{٢ جاس}}{\text{جتاس}}$$

تمارين ومسائل ص ٢ ص ٢٠٩

$$(أ) \left[ (\text{ب} + \text{أ}) \text{ه} \text{أس}^{-٣} - \frac{\text{أ}}{\text{س}} + ٣ \text{دس} \right]$$

$$\text{الحل: } \text{ه} \text{أس}^{-٣} - \frac{\text{لوس}}{\text{س}} + \text{س} + \text{ج}$$

$$(ب) \left[ ٢٤ \text{ه} \text{أس}^{-٢} . \text{دس} \right]$$

$$\text{الحل: } ٢٤ \frac{\text{ه} \text{أس}^{-٢}}{\text{ب}} + \text{ج}$$

$$(ج) \text{ق} (\text{س}) = \text{ه} \text{جاس} - ٢ \text{لوس} (\text{جتاس})$$

$$\text{الحل: ق} (\text{س}) = \text{جتا} \text{ه} \text{جاس} + \frac{\text{٢ جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$(د) \left[ \left( \frac{\text{ه}}{\text{س}} - ٣ \text{ه} \text{أس}^{-٣} - ٤ \right) . \text{دس} \right]$$

$$\text{الحل: } \text{ه} \text{لوس} - \text{ه} \text{أس}^{-٣} - ٤ \text{س} + \text{ج}$$

$$[ \text{هـ} ] \quad \frac{٨ \text{س}}{٤ + ٢ \text{س}} \cdot \text{دس}$$

الحل:

$$[ \text{ا} ] \quad \frac{\text{دص}}{٢ \text{س}} \quad ٨ \text{س} \text{ ص}^١$$

$$[ \text{ب} ] \quad ٤ \text{ص}^١ \cdot \text{دص}$$

$$[ \text{ج} ] \quad ٤ = \text{لوا} \text{ص} + \text{دس}$$

$$[ \text{د} ] \quad ٤ = \text{لوا} \text{س} + ٤ + ٢ \text{س} + \text{دس}$$

بالتعويض:

$$\text{ص} = ٤ + ٢ \text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{٢ \text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{٢ \text{س}} = \text{دس}$$

تمارين و مسائل س٣ ص ٢٠٩

$$[ \text{ا} ] \quad \text{ق} (س) = ٢ \text{ه}^٣ + ٢ \text{س} \cdot \text{دس}$$

$$[ \text{ب} ] \quad \text{ق} (س) = ٢ \text{ه}^٣ + ٢ \text{س} + \text{ج}$$

لايجاد قيمة ج نستخدم (٠ ، ٤)

$$٤ = ٢ \text{ه}^٣ + ٢ \cdot ٠ + \text{ج}$$

$$٤ = ٢ + \text{ج}$$

$$\boxed{\text{ج} = ٢}$$

تمارين و مسائل س٤ ص ٢٠٩

$$\text{ع} (ن) = \frac{٨}{ن} + ١^{\text{ن}}$$

$$[ \text{ا} ] \quad \text{د} \text{ف} = \frac{٨}{ن} + ١^{\text{ن}} \cdot \text{دن}$$

$$\text{ف} (ن) = \frac{٨}{ن} + ١^{\text{ن}} \text{لوان} + \text{ج}$$

تدريب (١) ص ٢١٢

$$\text{ع} (ن) = ٥ \text{ه} \times \text{ه}^{\text{ن}}$$

$$\text{ع} (ن) = ١٠٠٠٠ \times \text{ه}^{٢٥ \times \dots \times ٤}$$

$$\text{ع} (ن) = ٢.٧ \times ١٠٠٠٠$$

$$\text{ع} (ن) = ٢٧٠٠٠ \text{ دينار جملة المبلغ بعد ٢٥ سنة}$$

تدريب (٢) ص ٢١٢

$$\text{ع} (ن) = ٥ \text{ه} \times \text{ه}^{\text{ن}}$$

$$\text{ع} (ن) = ٨٠٠٠٠ \times (٢.٧)^{٤ \times \dots \times ٥}$$

$$\text{ع} (ن) = ٨٠٠٠٠ \times (٢.٧)^٢$$

$$\text{ع} (ن) = \frac{٨٠٠٠٠}{٢(٢.٧)}$$

$$\text{ع} (ن) = ١٠٩٧٣.٩ \text{ دينار بعد مرور ٤٠ سنة}$$

تمارين و مسائل س١ ص ٢١٤

$$\text{ع} (ن) = ٥ \text{ه} \times \text{ه}^{\text{ن}}$$

$$\text{ع} (ن) = ٥ \dots \times \text{ه}^{\frac{١}{٢} \times ٢}$$

$$\text{ع} (ن) = ٥ \dots \times (٢.٧)^١$$

$$\text{ع} (ن) = ١٣٥ \dots$$

تمارين و مسائل س٢ ص ٢١٤

$$\text{ثمن السيارة} = \text{ع} (ن) = ٥ \text{ه} \times \text{ه}^{\text{ن}}$$

$$\text{ع} (٢٥) = ١٢٥٨٠ \times \text{ه}^{\frac{٢٥ \times ٨}{١٠٠}}$$

$$= ١٢٥٨٠ \times \text{ه}^٢$$

$$\frac{١٢٥٨٠}{٢(٢.٧)} = \frac{١٢٥٨٠}{٢} =$$

$$= ١٧٢٥ \text{ دينار}$$

S  
A  
L  
E  
M  
S  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

تمارين و مسائل س ٣ ص ٢١٤

$$ع(ن) = ٥هـ \times ٥هـ \times ٥هـ$$

$$ع(١) = \left(\frac{١}{٤}\right) \times ١٠هـ = \frac{١}{٤} \times ١٠هـ$$

$$\frac{١}{٤} \times ١٠هـ = ٥$$

$$\frac{١}{٤} \times ٥هـ = ٠.٥$$

$$٠.٥هـ = \frac{١}{٢}هـ$$

$$\frac{١}{٢}هـ = ٠.٥٢٥هـ$$

كمية الملح بعد مرور  $\left(\frac{٥}{٤}\right)$  ساعة

$$ع(ن) = ٥هـ \times ٥هـ \times ٥هـ$$

$$ع(١) = \left(\frac{٥}{٤}\right) \times ١٠هـ = \frac{٥}{٤} \times ١٠هـ$$

$$ع(١) = \left(\frac{٣}{٤}\right) \times ١٠هـ = \frac{٣}{٤} \times ١٠هـ = ٠.٧٥هـ$$

$$ع(١) = \left(\frac{٥}{٤}\right) \times ٠.٧٥هـ = ٠.٩٣٧٥هـ$$

تمارين و مسائل س ٤ ص ٢١٤

$$ع(ن) = ٥هـ \times ٥هـ \times ٥هـ$$

$$ع(١٢٥) = ١٢٥ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٢٥ \times ٢١٦$$

$$ع(١٢٥) = ١٢٥ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٢٥ \times ٢١٦$$

$$ع(١٢٥) = ١٢٥ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٢٥ \times ٢١٦$$

$$ع(١٢٥) = ١٦٢ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٦٢ \times ٢١٦$$

## أسئلة الوحدة :

السؤال الاول :

$$أ) \frac{دص}{دس} = \frac{١-س٤}{٥+س٢} \text{ دس}$$

$$ب) \frac{دص}{دس} = \text{صفر}$$

$$ج) \frac{دص}{دس} = \text{ظا} (س + ٤)$$

$$د) \frac{دص}{دس} = \text{صفر}$$

$$هـ) \frac{دص}{دس} = \frac{س٢}{٦+س٢} - \frac{١-س٢}{٢} \times ٢ + ٣س٢$$

$$و) \frac{دص}{دس} = (جاس) \left(\frac{١}{س}\right) + (لوس) (جتاس)$$

السؤال الثاني:

$$ق(س) = (٤س) \times (١-٢س)$$

$$ق(س) = (٤س) \times (١-٢س) + (٤س) \times (١-٢س) \times ٤$$

السؤال الثالث:

$$ق(س) = (س - ٢)س$$

$$ق(٢) = (٢ - ٢)س = ٠$$

السؤال الرابع :

$$أ) \left[ \frac{١}{س٣} (س٢ - ٧س) \right] \text{ دس}$$

$$= \left[ \frac{٢}{س٣} - ٧ \right] \text{ دس}$$

$$= \frac{٢١}{٥} - \frac{٣٨}{٨} + ج$$

$$(ب) \int \frac{6}{s} ds$$

$$\int 6s^{-1} ds = 6 \ln |s| + C$$

$$(ج) \int (s-2)(s+2) ds$$

$$= \int (s^2 - 4) ds = \frac{s^3}{3} - 4s + C$$

$$(د) \int \frac{3(2+s^2)}{3 \times 3} ds = \int (2+s^2) ds$$

$$(هـ) \int (s^2 - 1)(s-1) ds$$

الحل:  $v = s^2 - 1$

$$\frac{dv}{ds} = 2s - 1$$

$$\frac{dv}{2s-1} = ds$$

$$\int \frac{dv}{2s-1} = \int (s-1) ds$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2s-1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |s^2 - 1| + C$$

$$(و) \int \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$= \ln |s + \sqrt{1+s^2}| + C$$

$$\frac{1}{2} \ln |1+s^2| + C$$

$$\frac{1}{2} \ln |1+s^2| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \frac{1}{2} \ln |1+s^2| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1+s^2| + C$$

$$(ز) \int \left( \frac{2}{s} - h^3 + 3 \right) ds$$

$$= 2 \ln |s| - \frac{h^4}{4} + 3s + C$$

$$(ح) \int \frac{2s^2 + 3}{s^3 + 4} ds$$

$$= \int \frac{2s^2 + 3}{s^3 + 4} ds$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{3s^2}{s^3 + 4}$$

$$\int \frac{3s^2}{s^3 + 4} ds = \int \frac{dv}{v}$$

$$(ط) \int \frac{1}{s} ds = \ln |s| + C$$

$$= \ln |s| + C$$

$$(ي) \int \frac{5s^2 + 2}{s} ds$$

$$= \int \left( 5s + \frac{2}{s} \right) ds$$

$$= \frac{5s^2}{2} + 2 \ln |s| + C$$

$$\int \frac{5s^2 + 2}{s} ds = \frac{5s^2}{2} + 2 \ln |s| + C$$

$$= \frac{5s^2}{2} + 2 \ln |s| + C$$

$$= \frac{5s^2}{2} + 2 \ln |s| + C$$

$$(ب) \int \frac{1+s^2}{(s-2)^2} ds$$

$$= \int \frac{1+s^2}{(s-2)^2} ds$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2s}{(s-2)^2}$$

$$\int \frac{2s}{(s-2)^2} ds = \int \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{s-2} + \ln |s-2| + C$$

$$= \frac{1}{s-2} + \ln |s-2| + C$$

SALMEEB SATTEEB

السؤال الخامس :

$$(أ) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ دس.}$$

الحل:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left[ -x^{-1} \right]_{-1}^1 = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1$$

$$= \left( -\frac{1}{1} \right) - \left( -\frac{1}{-1} \right) = -1 - 1 = -2$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 dx \text{ دس.}$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx \text{ دس.}$$

$$= \int_{-1}^1 \left( x^{-2} - x^{-1} \right) dx = \left[ -x^{-1} - \ln|x| \right]_{-1}^1$$

$$= \left( -\frac{1}{1} - \ln|1| \right) - \left( -\frac{1}{-1} - \ln|-1| \right) = -1 - 0 - 1 - 0 = -2$$

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( x^{-2} + x^{1/2} \right) dx = \left[ -x^{-1} + \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_{-1}^1$$

$$= \left( -\frac{1}{1} + \frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} \right) - \left( -\frac{1}{-1} + \frac{2}{3} \cdot (-1)^{3/2} \right) = \left( -1 + \frac{2}{3} \right) - \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$(د) \int_{-1}^1 \frac{12 + 7x + x^2}{4 + x} dx \text{ دس.}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{(x+3)(x+4)}{x+4} dx = \int_{-1}^1 (x+3) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1$$

$$= \left( \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) - \left( \frac{(-1)^2}{2} + 3 \cdot (-1) \right) = \left( \frac{1}{2} + 3 \right) - \left( \frac{1}{2} - 3 \right) = \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 3 = 6$$

$$\left( 3 - \frac{1}{2} \right) - \left( 3 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$6 = 3 + \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{2} =$$

$$(هـ) \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx \text{ دس.}$$

$$\text{ص} = 2 + \text{دص} = 2 \text{ دس.}$$

$$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 7$$

$$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2} \times \frac{x}{x} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[ \ln|x| \right]_{-1}^1 = \ln|1| - \ln|-1| = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|1| - \ln|-1| = 0 - 0 = 0$$

$$(ز) \int_{-1}^1 \frac{10}{6+x^5} dx \text{ دس.}$$

$$\text{ص} = 5 + \text{س} = 6 \text{ ، دص} = 5 \text{ دس.}$$

$$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 16$$

$$\text{س} = 6 \leftarrow \text{ص} = 6 + 30 = 36$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left[ -x^{-1} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left[ -x^{-1} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

$$4 \times 4 - 6 \times 4 = 16 - 24 = -8$$

$$8 = 16 - 24 =$$

السؤال السادس :

$$. = 3 - \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}^2 \leftarrow 3 + \text{ب} =$$

$$. = 3 - \text{ب} + \text{ب}^2$$

$$. = (3 - \text{ب})(3 + \text{ب})$$

$$\text{ب} = 3 \text{ ، } \text{ب} = 1$$

SALAMATI B

السؤال السابع :

(ب)  $\int (2s - 1) ds = \text{دس} = \text{صفر}$

الحل:

$$s^2 - s = \text{صفر}$$

$$s^2 - 2s + 1 = (s - 1)^2 = 0$$

$$s - 1 = 0 \Rightarrow s = 1$$

(ج)  $\int (s^2 + 2) ds = \text{دس} = 21$

$$\frac{s^3}{3} + 2s = 21$$

$$\frac{s^3}{3} + 2s - 21 = 0$$

$$s^3 + 6s - 63 = 0$$

$$s^3 - 9 = 63 - 6s$$

$$s^3 - 9 = 63 - 6s \Rightarrow s^3 - 63 = -6s + 9$$

السؤال التاسع :

$$q(s) = (s + 1)(s + 2)$$

$$s^2 + 3s + 2 = s^2 + 2s + 3s + 2 = s^2 + 5s + 2$$

ق(س) =  $\int (s^2 + 5s + 2) ds = \text{دس}$

$$= \frac{s^3}{3} + \frac{5s^2}{2} + 2s + \text{ج}$$

ق(٢) =  $\frac{2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + \text{ج} = 1$

$$1 = \frac{8}{3} + 10 + 4 + \text{ج}$$

$$\text{ج} = 1 - \frac{8}{3} - 14 = -\frac{37}{3}$$

ق(س) =  $\frac{s^3}{3} + \frac{5s^2}{2} + 2s - \frac{37}{3}$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

ق(س) =  $\int (3s + 2) ds = 20$

السؤال الثامن :

(أ)  $\int 2s ds = 12$

الحل:

ق(س) =  $\int 2s ds = 12$

ق(س) =  $\int 2s ds = 12$

السؤال العاشر:

$$٣س٣ - ٢٧ = ٠$$

$$٣س٣ = ٢٧ \Rightarrow ٩ = ٣س \Rightarrow ٣ = س$$

$$١م = \int (٢٧ - ٣س٣) دس$$

$$٩٨ = |٤٤ - ٥٤| = ٣س - ٢٧ س = ٩٨$$

$$٢م = \int (٢٧ - ٣س٣) دس$$

$$٣س - ٢٧ س = ٠$$

$$٥٤ = |(٨١ + ٢٧) - ٠| =$$

$$١٥٢ = ٥٤ + ٩٨ = ٢م + ١م = م$$

السؤال الحادي عشر:

$$أ) ع(ن) = \int (١٢ - ن) د(١ - ن)$$

$$= \int (١٢ - ن) د(١ - ن)$$

$$= ٦ن٢ - ٣ن٣ + ج$$

$$ع(٠) = ٣ = ج$$

$$ع(ن) = ٦ن٢ - ٣ن٣ + ٣$$

$$ع(٤) = ٩٦ - ١٩٢ + ١٢ = ١٥٧$$

$$١٥٧ = ٣ + ٢٥٦ - ٩٦ =$$

$$ب) ف(ن) = \int (١٢ - ن) د(١ - ن)$$

$$= ٦ن٢ - ٣ن٣ + ج$$

$$= ٢ن٢ - ٣ن٣ + ج$$

$$ف(٠) = ٢ = ج$$

$$ف(ن) = ٢ن٢ - ٣ن٣ + ٢$$

$$ف(٢) = ٨ = ٢ + ٦ + ١٦ - ١٦ = ٨$$

السؤال الثاني عشر:

$$٨٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٧٢٠٠٠٠٠٠ هـ$$

$$٨٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٧٢٠٠٠٠٠٠ هـ$$

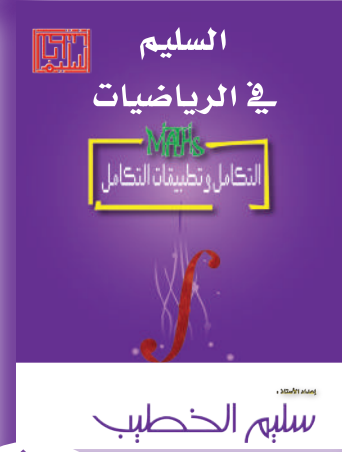
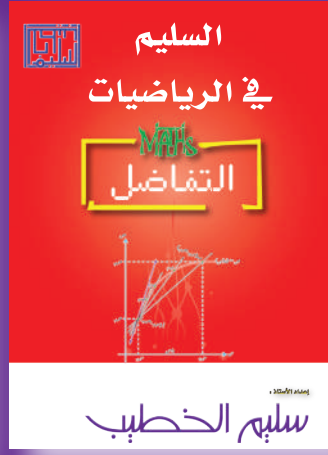
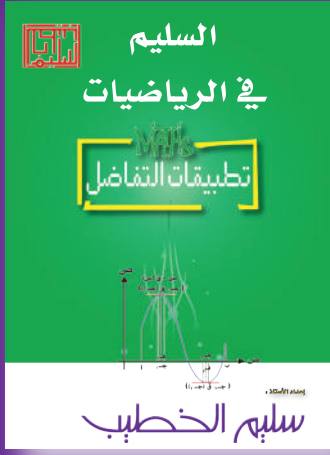
$$٢٤٠٠٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٧٢٠٠٠٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٢١٨٧٠٠٠ هـ$$

$$٢٤٠٠٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٧٢٠٠٠٠٠٠ هـ \times ٣٠٠٠ = ٢١٨٧٠٠٠ هـ$$

$$٢١٨٧٠٠٠ هـ =$$

SALAEEN ALSATTEEB





أكاديمية سليم الخطيب

إعداد الأستاذ :

مركز زهرة النظم الثقافي

سليم الخطيب / 0786230407

الوحدات - شارع مادبا - قرب ألبان ضبعة - فوق مطعم OK

[www.facebook.com/saleemal5ateeb](https://www.facebook.com/saleemal5ateeb)

هاتف : 06 477 33 55 - موبايل : 0787 800 852

Email: saleem\_al5ateeb@yahoo.com