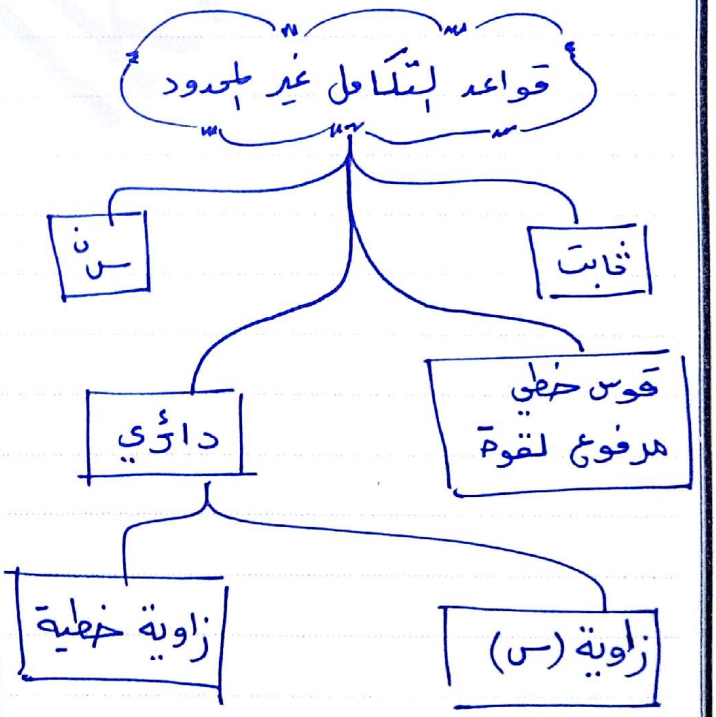
: التكامل هو عملية ايجاد معكوس المشتقة . ( عكس الاشتقاق )




١ تكامل الثابت .

∫ أ دس = أ س + ج

تكامل الثابت = الثابت × س + ج

مثل .

∫ -٣ دس = -٣ س + ج

∫ $\frac{٣\pi}{٤}$ دس = $\frac{٣\pi}{٤}$ س + ج

∫ $\frac{هـ}{٣٧}$ دس = $\frac{هـ}{٣٧}$ س + ج

حيث هـ : العدد النابيري ≈ ٢,٧ .

٢ تكامل $س^{ن}$ ، ن ≠ -١

∫ $س^{ن}$ دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ج

مثل

① ∫ $س^{٦}$ دس = $\frac{س^{٧}}{٧}$ + ج

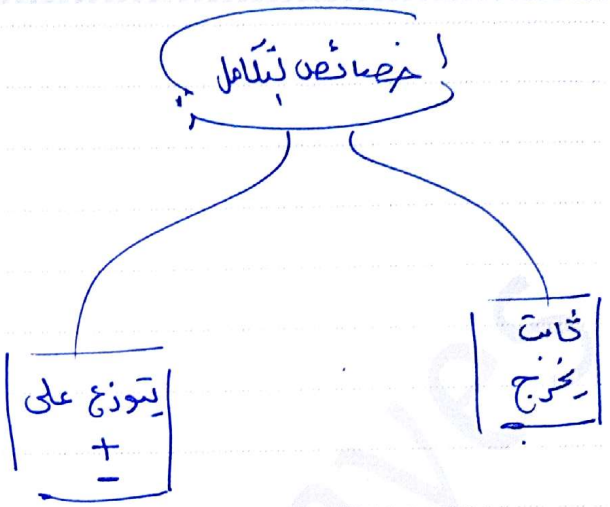
② ∫ $س^{-٣}$ دس = $\frac{س^{-٢}}{-٢}$ + ج

③ ∫ $س^{\frac{٣}{٤}}$ دس = $\frac{س^{\frac{٣}{٤}+١}}{\frac{٣}{٤}+١}$ + ج

= $\frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}}$ + ج = $\frac{٤ س^{\frac{٧}{٤}}}{٧}$ + ج



Scanned by CamScanner




امثلة -

① التعميم -

$\int p\, f(s)\, ds = p \int f(s)\, ds$

② التعميم -

$\int f(s) \pm g(s)\, ds$

$= \int f(s)\, ds \pm \int g(s)\, ds$

* خصائص التكامل في جملة واحدة

$\int p\, f(s) \pm n\, g(s)\, ds$

$= p \int f(s) \pm n \int g(s)\, ds$

$= p \int f(s) \pm n \int g(s)\, ds$

* نتيجة .

[١] $\int s^n\, ds = p \int s^n\, ds$

$= \frac{p\, s^{n+1}}{n+1} + c$

[٢] $\int s^n \pm s^m\, ds$

$= \int s^n\, ds \pm \int s^m\, ds$

$= \frac{s^{n+1}}{n+1} \pm \frac{s^{m+1}}{m+1} + c$

امثلة .

أوجد كلاً من التكاملات الآتية

[١] $\int 3s^2\, ds$

$= \frac{3s^3}{3} = s^3 + c$

[٢] $\int 6s^5 + 4s^{\frac{1}{2}} + 3\, ds$

$= \frac{6s^6}{6} + \frac{4s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3s + c$

$= s^6 + \frac{8s^{\frac{3}{2}}}{3} + 3s + c$



Scanned by CamScanner

مثال ١ . اوجد ناتج التكاملات الاتية

١) $\int -٦ \, دس$

٢) $\int ٣س^{٧} - ٥ \, دس$

٣) $\int ٣س^{\frac{ج}{٣}} + ٤س^{ج} - ١٧ \, دس$

٤) $\int ١٢س^{١٢} + \frac{س^{٧}}{ج} + \frac{٣}{٤}س \, دس$

٣) تكامل قوس خطي موضوع القوة .

$\int (ب+سـ)^{ن} \, دس$ ، $ن \neq -١$

$= \frac{(ب+سـ)^{ن+١}}{(ن+١) \times ١} + ث$

مثل . $\int (١+٣سـ)^{٣} \, دس$

$= \frac{(١+٣سـ)^{٤}}{٤ \times ٣} + ث$

$= \frac{(١+٣سـ)^{٤}}{١٢} + ث$

مثال ٢ . اوجد كلاً من التكاملات الاتية .

١) $\int ٣(٤-٣س)^{٦} \, دس$

$= \frac{٣ \times (٤-٣س)^{٧}}{٧ \times -٣} + ث$

$= \frac{(٤-٣س)^{٧}}{٧} + ث$

٢) $\int \frac{(٣-٥س)^{٣}}{٤} \, دس$ .



Scanned by CamScanner

[٣] $\int \frac{٣(١-٧س)^{٦}}{٤}$ دس .

الحل . $\frac{٣(١-٧س)^{٧}}{-٤\times٧\times٧} + ث$

$= \frac{-٣(١-٧س)^{٧}}{١٩٦} + ث$

[٤] تكامل لدوائر داخل دوائر

دائرة (س) ، دائرة (ص)

لقواعد العامة ( الزاوية س )

[١] $\int جاس$ دس $= -جتاس + ث$

[٢] $\int جتاس$ دس $= جاس + ث$

[٣] $\int قا^{٢}س$ دس $= ظاس + ث$

[٤] $\int قتا^{٢}س$ دس $= -ظتاس + ث$

[٥] $\int قاس ظاس$ دس $= قاس + ث$

[٦] $\int قتاس ظتاس$ دس $= -قتاس + ث$

تذكر أن .!!

$ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$ .أ

$ظتاس = \frac{جتاس}{جاس}$ .ب

$قاس = \frac{١}{جتاس}$ .ج

$قتاس = \frac{١}{جاس}$ .د

لقواعد العامة ( الزاوية الخطية )

[١] $\int جا(أس+ب)$ دس $= -\frac{جتا(أس+ب)}{أ} + ث$

[٢] $\int جتا(أس+ب)$ دس $= \frac{جا(أس+ب)}{أ} + ث$

[٣] $\int قا^{٢}(أس+ب)$ دس $= \frac{ظا(أس+ب)}{أ} + ث$

[٤] $\int قتا^{٢}(أس+ب)$ دس $= -\frac{ظتا(أس+ب)}{أ} + ث$

[٥] $\int قا(أس+ب)ظا(أس+ب)$ دس

$= \frac{قا(أس+ب)}{أ} + ث$

[٦] $\int قتا(أس+ب)ظتا(أس+ب)$ دس

$= -\frac{قتا(أس+ب)}{أ} + ث$



Scanned by CamScanner

مثال ٣ : اوجد كلاً من التكاملات الآتية .

[١] $\int (\text{قا}^2(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{5}) - 5)\, d\pi$

الحل . $= \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{5})}{\frac{1}{6}} + c$

[٢] $\int 5 - 5\,\text{قا}(3\pi)\,\text{ظا}(3\pi)\, d\pi$

الحل .
$5\pi - \frac{5\,\text{قا}(3\pi)}{3} + c$

[٣] $\int \text{قا}^2\pi + \text{ظتا}^2(\frac{\pi}{6})\, d\pi$

الحل
$\text{ظا}\,\pi + \frac{-\text{ظتا}\,\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{6}} + c$

[٤] $\int \pi^2 - 5\pi + 1 - \text{جتا}(4\pi+1)\, d\pi$

الحل .
$= \frac{\pi^3}{3} - \frac{5\pi^2}{2} + \pi - \frac{\text{جا}(4\pi+1)}{4} + c$

[٥] $\int 5\,\text{جا}\,3\pi - 6\pi^2 + 4\,\text{جتا}\,\pi\, d\pi$

[٦] $\int \text{جتا}(4-3\pi)\,\text{ظا}(4-3\pi)\, d\pi$

[٧] $\int c - \text{ظتا}^2 3(4+\pi)\, d\pi$

[٨] $\int 1 - 3\pi^2 + \text{جا}\,7\pi\, d\pi$

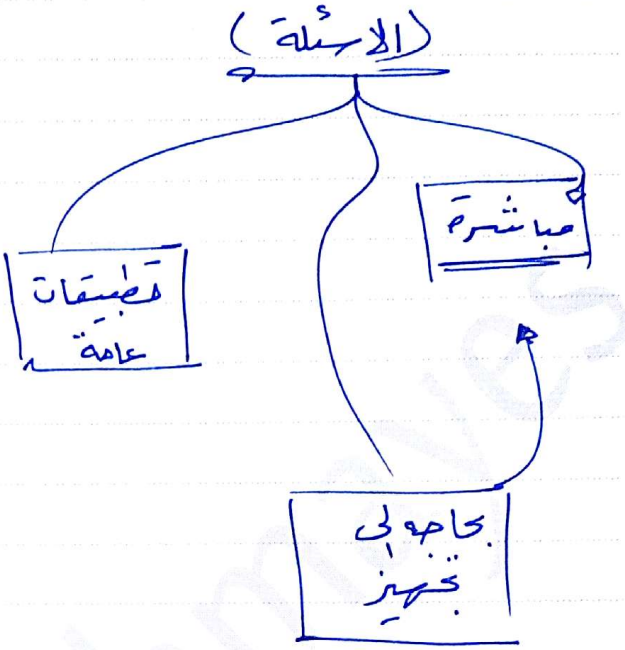
[٩] $\int 10\pi^{11} - 11\pi^{12} + 7\,\text{قا}^2\pi\, d\pi$

[١٠] $\int \text{قا}\,\frac{\pi}{3}\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{3} + \text{قا}^2\frac{\pi}{6}\, d\pi$

[١٤] $\int 8 - 8\,\text{جتا}\,4\pi + \text{قا}^2(5\pi-1)\, d\pi$



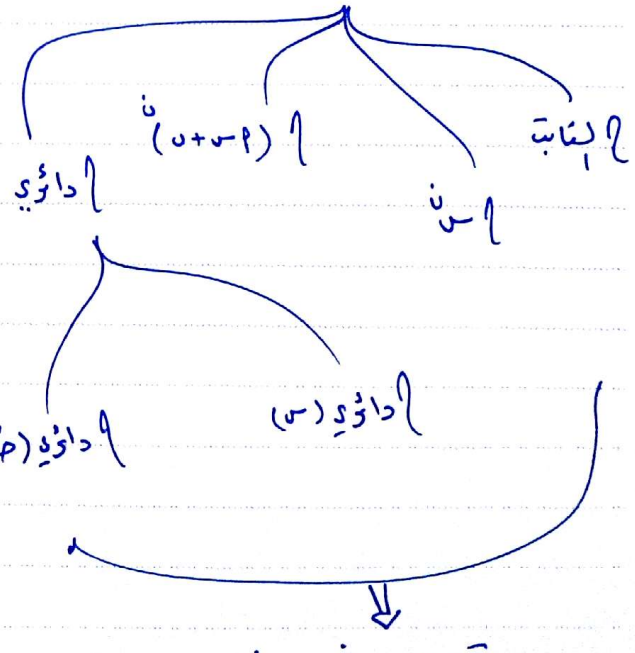
Scanned by CamScanner




## ١ الأسئلة مباشرة

↓

حسب القواعد السابقة




مع استخدام خصائص ...

## ٢ الأسئلة بحاجة الى تجهيز

والهدف هو الوصول بها إلى حالة السؤال المباشر .
ثم استخدام قاعدة التكامل .

* المشكلة والحل .

* اوجد التكامل الآتي .

∫ ٤ جا (٥س + ١) جتا (٥س + ١) دس

نلاحظ أن هذا التكامل غير مألوف في قواعد التكامل ، ولا يمكن هنا توزيع التكامل على الضرب .

⇐ الحل هنا مشكلة نلجأ الى تجهيز المسألة لتحويلها الى شكل مألوف باستخدام المتطابقة

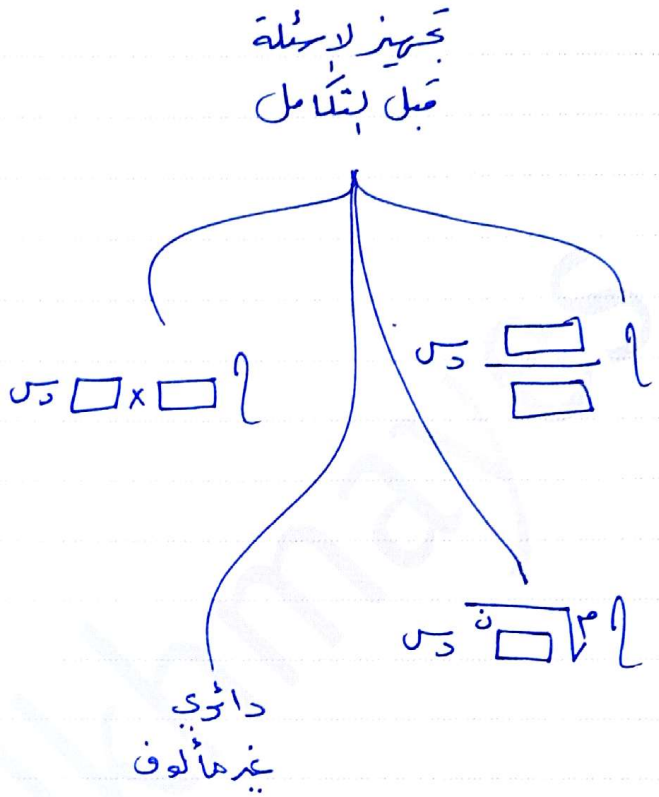
٢ جا ( ) جتا ( ) = جا٢ ( )

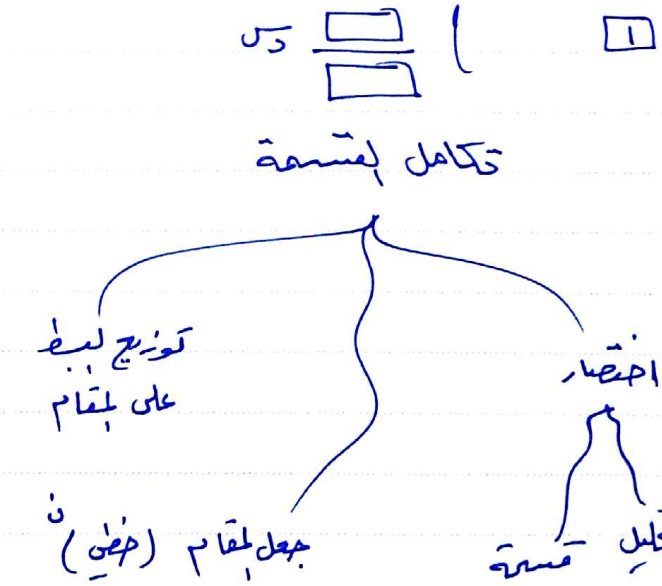
جا ضعف الزاوية . . مألوف .

الحل ... يتبع



Scanned by CamScanner




مثال ١ :

أوجد ناتج لتكاملات لاتية .

١ ) $\int \frac{س^٣ - س + ٦}{س + ٢}$ دس

الحل : تجهيز قبل لتكامل باستخدام لقسمة .

| | $س^٣$ | $س^٢$ | س | ثـ |
|---|---|---|---|---|
| | ١ | ٠ | ١- | ٦ |
| ٢- | | ٢- | ٤ | ٦- |
| | ١ | ٢- | ٣ | ٠ |

$$\int \frac{(س+٢)(س^٢ - ٢س + ٣)}{س+٢}$$ دس

$$\int س^٢ - ٢س + ٣$$ دس (قواعد)

$$= \frac{س^٣}{٣} - \frac{٢س^٢}{٢} + ٣س + ثـ .$$

* ملاحظة هامة .

في هذه لحالة يجب لتأكد من أن لمقام هو لاحد عوامل لبسط وذلك باستخدام نظرية لعامل ولباقي .



Scanned by CamScanner

٢) $\int \frac{ج س^{٣} - ٩ س - ٥}{٥ - س} \, د س$

٣) $\int \frac{ج (١ + ٣ س)^{٣} - ٩}{س - ١} \, د س$

الحل . نلجأ للتجهيز لمسألة باستخدام التحليل والاختصار .

$= \int \frac{((ج (١ + ٣ س)) - ٣)((ج (١ + ٣ س)) + ٣)}{س - ١} \, د س$

$= \int \frac{(ج ٣ س - ج ٢)(ج ٣ س + ج ٤)}{س - ١} \, د س$

$= \int \frac{ج (ج ٣ س - ج ٢)(ج ٣ س + ج ٤)}{س - ١} \, د س$

$= \int ج (ج ٣ س + ج ٤) \, د س$ (مألوف)

$= ج ٣ س + ج ٤ + ج$

٤) $\int \frac{(س^{٣} - ٤ س + ٤)^{٧}}{س - ٢} \, د س$

الحل . تجهز لمسألة بتحليل بسط

$\int \frac{((س - ٢)(س - ٢))^{٧}}{ج - س} \, د س$

$= \int \frac{((س - ٢)^{٢})^{٧}}{ج - س} \, د س$

$= \int \frac{(س - ٢)^{١٤}}{ج - س} \, د س$

$= \int (س - ٢)^{١٣} \, د س$ (مألوف)

$= \frac{(س - ٢)^{١٤}}{١٤ \times ١} + ج$

٥) $\int \frac{ج (٣ + ٣ س)}{(١ + س + س^{٢})^{٧}} \, د س$ .

الحل .

$\int \frac{ج ((١ + س) ٣)}{((١ + س)(١ + س))^{٧}} \, د س$

$\int \frac{ج ٩ (١ + س)}{((١ + س)^{٢})^{٧}} \, د س$

$= \int \frac{ج ٩ (١ + س)}{(١ + س)^{١٤}} \, د س$

$= \int \frac{٩}{(١ + س)^{١٣}} \, د س$



Scanned by CamScanner

$$= \int (1+س)^{9} \, د س^{-12}$$

$$= \frac{(1+س)^{9}}{-11 \times 1} + ج$$

٦ $\int \frac{3}{(4+3س)^{3}} \, د س$

الحل.

٧ $\int \frac{س^{3} - 10 س^{2}}{س^{5} - 5 س} \, د س$

٨ $\int \frac{س^{6} + 5 س^{4} - 10 س^{3} - 3}{س^{5}} \, د س$

الحل. بتوزيع البسط على المقام.

$$= \int س + 5 س^{-1} - 10 س^{-2} - 3 س^{-5} \, د س$$

$$= \frac{س^{2}}{2} + 5 \ln|س| + 10 س^{-1} + \frac{3}{4} س^{-4} + ج$$

٩ $\int \frac{7 س^{4} - 3 س^{2} + 4}{2 س^{5}} \, د س$

الحل.



Scanned by CamScanner

$\int \square \times \square \, d\square$

تكامل الضرب .

في هذا النوع من مسائل تضرب الحدود ببعضها البعض للتوصل الى مسألة من نوع مألوف حسب القواعد .

مثل $\int س (س^{٢} + ١) \, دس$

$= \int س^{٣} + س \, دس$ مألوف

$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + ج$

مثال ٢ - اوجد كلاً من التكاملات

١ $\int (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) \, دس$

الحل . نضرب الحدين .

$\int س^{٣} - ٨ \, دس$ طاذا ؟؟

$= \frac{س^{٤}}{٤} - ٨س + ج$ .

٢ $\int (٢ + ٣س^{٢})^{٢} (١ - ٣س^{٢})(١ + ٣س^{٢}) \, دس$

٣ $\int س^{٢} (١ - \frac{٢}{س^{٥}}) \, دس$

الحل . نضرب الحدين .

$\int س^{٢} - \frac{٣}{س^{٥}} \times س^{٢} \, دس$

$= \int س^{٢} - \frac{٣}{س^{٣}} \, دس$

$= \int س^{٢} - ٣ س^{-٣} \, دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٣ س^{-٢}}{-٢} + ج$

٤ $\int (٦ س^{٢} + ٤ س) (٣ - \frac{١}{س}) \, دس$



Scanned by CamScanner

٥ $\int س^{٦} \left( \frac{٢س + ١}{س} \right)^{٦} د س$

الحل : الاختصار بتوزيع الأس على القسمة في الحد الثاني .

$= \int \frac{س^{٦} (٢س + ١)^{٦}}{س^{٦}} د س$

$= \int (٢س + ١)^{٦} د س$

$= \frac{(٢س + ١)^{٧}}{٧} + ج$

٦ $\int ٣س^{٢} \left( ١ - \frac{٢}{س} \right)^{٢} د س$

٧ $\int (٤ - ٢س)^{٤} \left( \frac{١}{٢ - س} \right) د س$

٨ $\int (٤ + س)^{٤} \left( \frac{٣}{س^{٢} + ٨س + ١٦} \right)^{٣} د س$



Ahmad Akhmeis
Scanned by CamScanner

$\int \sqrt[n]{\square^m}\, dس$ .

* مع الجذور عادة نستخدم تحويلها الى اسس نسبية .

القاعدة $\sqrt[n]{\square^m} = \square^{\frac{m}{n}}$

* يجب التأكد اذا ما داخل الاسس مقدار ضعه قبل اجراء عملية التكامل .

مثال ٢ . جد ناتج التكاملات الاتية .

١) $\int \sqrt[4]{(٣س-٢)^3}\, dس$

الحل . تحويل الجذر الى اس نسبي

$\int (٣س-٢)^{\frac{٣}{٤}}\, dس$

$= \frac{(٣س-٢)^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} + جـ$

٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{(\frac{٥-٣س}{٢})^{ج}}}\, dس$

الحل . تحويل الى اس نسبي

$\int \frac{١}{(\frac{٥-٣س}{٢})^{\frac{ج}{٣}}}\, dس$

$= \int (\frac{٥-٣س}{٢})^{\frac{-ج}{٣}}\, dس$

$= \frac{(\frac{٥-٣س}{٢})^{\frac{١}{٣}}}{\frac{ج}{٣} \times \frac{١}{٣}} + ث$

$= \frac{٩}{ج}(\frac{٥-٣س}{٢})^{\frac{١}{٣}} + ث$

٣) $\int \frac{١}{\sqrt[ن]{(٥-٣س)^{ج}}}\, dس$

الحل . ضرب ثم تفكيك الجذر

$\int \frac{٥}{\sqrt[ن]{(٥-٣س)^{ج}}} - \frac{٣س^{ج}}{\sqrt[ن]{(٥-٣س)^{ج}}}\, dس$

$\int \frac{٥}{(٥-٣س)^{\frac{ج}{ن}}} - \frac{٣س^{ج}}{(٥-٣س)^{\frac{ج}{ن}}}\, dس$

$= \int ٥(٥-٣س)^{-\frac{ج}{ن}} - ٣س^{ج}(٥-٣س)^{-\frac{ج}{ن}}\, dس$

$= \frac{٥(٥-٣س)^{\frac{-ج}{ن}+١}}{-٣(\frac{-ج}{ن}+١)} - \frac{٣س^{ج}(٥-٣س)^{\frac{-ج}{ن}+١}}{-٣(\frac{-ج}{ن}+١)} + ث$

$= \frac{٤٠(٥-٣س)^{\frac{ن-ج}{ن}}}{٣(ن-ج)} - \frac{٣س^{ج}(٥-٣س)^{\frac{ن-ج}{ن}}}{٣(ن-ج)} + ث$



Scanned by CamScanner

٤) $\int_{1}^{2} \frac{ج}{س^{2}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{س}} \right) د س$

٥) $\int_{1}^{2} \sqrt{س^{2} - ٢س + ١}\, د س$

الحل . هنا ما داخل الجذر ليس حظي ، كاول ذلك ونستفيد من أن ما داخله مربع كامل .

$= \int_{1}^{3} \sqrt{(س-١)(س-١)}\, د س$

$= \int_{1}^{3} \sqrt{(س-١)^{2}}\, د س$

$= \int_{1}^{2} (س-١)^{\frac{2}{3}}\, د س$

$= \frac{(س-١)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + ثـ$

$= \frac{3(س-١)^{\frac{5}{2}}}{5} + ثـ$

٦) $\int_{2}^{3} \frac{\sqrt{س^{2} - ٢س - ١٥}}{س+٣}\, د س$

الحل . نكمل ما داخل الجذر ثم نختصر

$\int_{2}^{3} \frac{\sqrt{(س+٣)(س-٥)}}{س+٣}\, د س$

$\int_{2}^{3} \sqrt{س-٥}\, د س$

$\int_{1}^{3} (س-٥)^{\frac{1}{2}}\, د س$

$= ٢ \frac{(س-٥)^{\frac{3}{2}}}{٣} + ثـ$

٧) $\int_{2}^{3} \frac{1}{س^{2}} \sqrt{\left( \frac{س^{2} - ٢س}{س^{2} - ٤س + ٤} \right)^{2}}\, د س$



Ahmad Alkhmayes
Scanned by CamScanner