الصف الثاني عشر

للفرعين الادبي والفندقي والسياحي

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

١) التكامل غير المحدود

٢) التكامل المحدود

٣) خصائص التكامل المحدود

٤) التكامل بالتعويض

٥) تطبيقات هندسية

٦) تطبيقات فيزيائية

٧) الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والاسي الطبيعي

٨) المساحة

٩) النمو والاضمحلال

١٠) حل تدريبات وتمارين الكتاب

١١) اسئلة الوزارة (٢٠٠٨- ٢٠١٨) مع الحلول النموذجية

٩) حلول أسئلة الوحدة

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ المعلم :ناجح الجمزاوي ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

مكتبة الوسام ALWESAM

الدرس الأول

التكامل غير المحدود

تمهيد

تعلمنا في المستوى الثالث انه اذا كان
$ق(س) = س^3 + س^2$ فان
$ق'(س) = 3س^2 + 2س$ أما في هذا الدرس فاننا سوف نأخذ العملية العكسية وهي إيجاد الاقتران $ق(س)$ اذا علمنا المشتقة $ق'(س)$ وتسمى هذه العملية بالتكامل

مثلاً
تكامل $3س^2 + 2س$ يعني إيجاد الاقتران $ق(س)$ الذي مشتقته تساوي $3س^2 + 2س$ وتكتب على شكل

$\int (3س^2 + 2س) \cdot دس$

ويقرأ الرمز $\int$ التكامل
$دس$ تعني التكامل بالنسبة الى $س$
فيكون $\int (3س^2 + 2س) دس$
$= س^3 + س^2 + جـ$
حيث $جـ$ ثابت

ملاحظة

نلاحظ ان العلاقة بين التكامل غير المحدود والمشتقة الأولى علاقة عكسية أي أن

$ق(س)$ ← اشتقاق ← $ق'(س)$
$ق'(س)$ ← تكامل غير محدود ← $ق(س)$

بصورة عامة

① $ق(س) = \int ق'(س) دس$

② $ق'(س) = \frac{د}{دس} \int ق'(س) دس$

③ $ق(س) = \frac{د}{دس} \int ق(س) دس$

مثال ①

اوجد $\int 3س^2 دس$

الحل

المطلوب إيجاد الاقتران الذي مشتقته $3س^2$ ← $\int 3س^2 \cdot دس = س^3 + جـ$
حيث $جـ$ ثابت التكامل

مثال ②

اوجد $\int (6س + 2) دس$

الحل فالمطلوب الاقتران الذي مشتقته $= 6س + 2$ الجواب هو $3س^2 + 2س + جـ$
← $\int (6س + 2) دس = 3س^2 + 2س + جـ$

مثال ③

اذا كان $ق'(س) = \int (3س^2 + 4)\, دس$ أوجد $ق'(2)$ ؟

الحل

لايجاد $ق'(2)$ يجب ان نشتقه الطرفين لنجد أولاً $ق'(س)$.
الطرف الايمن يصبح $ق'(س)$
الطرف الايسر يصبح $3س^2 + 4$
وذلك بحذف اشارة التكامل
$\Leftarrow ق'(س) = 3س^2 + 4$
$ق'(2) = 3(2)^2 + 4$
$= 12 + 4 = 16$

مثال ④

اذا كان $ق'(س) = \int (س^2 - س)\, دس$
جد $ق'(3)$ ؟

الحل

نشتقه الطرفين $\Leftarrow$
$ق'(س) = س^2 - س$ ← (ما داخل التكامل)
$ق'(3) = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

مثال ⑤

$ق'(س) = \int (أس + ب س)\, دس$
أوجد $ق'(س)$

الحل

باشتقاق الطرفين
$ق'(س) = (أس + ب س)$
ما داخل التكامل

ملاحظه هامة

التكامل يلغي المشتقة الأولى و المشتقة الأولى تلغي التكامل

مثال ⑥

اذا كان $ق'(س) = 2س^2 + 5$
جد $\frac{ع}{دس} \int ق'(س)\, دس$

الحل

$\frac{ع}{دس} \int ق'(س)\, دس = ق'(س)$
$= 2س^3 + 5$
المشتقه تلغي التكامل

مثال ⑦

اذا كان $ص = \int (أس + س)\, دس$
جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل

نشتقه الطرفين
$\frac{دص}{دس} = \frac{ع}{دس} \int (أس + س)\, دس$
$= أس + س$

مثال ⑧

اذا كان $ق'(س)\, دس = س^4 - 2س + 7$
جد $ق'(1)$ ، $ق'(2)$ ؟

الحل

التكامل يلغي المشتقة $\Leftarrow$
يتبع

مكتبة العلم
AL-ELM
العلم ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow$ $هـ(س) = س^٤ - ٤س + ٧$

$\Leftarrow$ $هـ(١) = (١)^٤ - ٤(١) + ٧ = ٦$

$\Leftarrow$ $هـ'(س) = ٤س^٣ - ٤$

$\Leftarrow$ $هـ'(٢) = ٤(٢)^٣ - ٤$

$= ٣٢ - ٤ = ٢٨$

مثال ⑨

اذا كان $هـ(س) ص(س) = س^٣ + ٣س^٢ + ١$

جد $هـ(-١)$ ، $هـ'(-٢)$ ؟

الحل

نشتق الطرفين

$\frac{د}{دس}[هـ(س) ص(س) = (س^٣ + ٣س^٢ + ١)]$

$هـ(س) = ٣س^٢ + ٦س$

$هـ(-١) = ٣(-١)^٢ + ٦(-١)$

$= ٣ - ٦ = -٣$

$هـ'(س) = ٦س + ٦$

$هـ'(-٢) = ٦(-٢) + ٦$

$= -١٢ + ٦ = -٦$

تدريب ① ص١٦١

اذا كان $ص = \frac{٤س - ١}{س^٢ + ١}$ دس

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -١$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤س - ١}{س^٢ + ١}$

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=-١} = \frac{٤(-١) - ١}{(-١)^٢ + ١} = \frac{-٥}{٢}$

مثال ⑩

اذا كانت $ص = \frac{١}{٣} س^٣$ دس

فان $\frac{دص}{دس}$ تساوي

أ) $س^٢$ ب) $\frac{١}{٣} س^٢$ ج) $\frac{س^٤}{١٢}$

د) $\frac{س^٤}{١٢} + ٥$

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣} س^٣$ ب

مثال ⑪

اذا كان $هـ(س) = (٤س^٢ - ٢)$ دس

فان $هـ'(٢) =$

أ) ٥ ب) $\frac{٤}{٣}$ ج) -٥ د) ٨

الحل

$هـ'(س) = ٤س^٢ - ٣$

$هـ'(٢) = ٨ - ٣ = ٥$ أ

مثال ⑫

اذا كان $ص = س(٤س - ٢)$ دس

فان $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١$

أ) ٢ ب) -٢ ج) ٤ د) -٤

الحل

$\frac{دص}{دس} = س(٤س - ٢)$

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = ١(٤ - ٢) = ٢ - ٤ = -٢$ ج

مكتبة العلم Alwelm
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اذا كان $\int (\text{هـ}'(س)+٤س)\,دس = ٣س^{٣}-٤س$
وكان هـ(١) = ٤ فان قيمة ٣ =
أ) -٣ ب) ٣ ج) ٤ د) -٤

الحل نشتق الطرفين

$\text{هـ}'(س)+٤س = ٣\times ٣س^{٢}-٤$
$\text{هـ}'(١)+٤ = ٩(١)^{٢}-٤$
$\text{هـ}'(١)+٤ = ٩-٤$
$٤+٤ = ٩-٣$
$\Leftarrow ٣ = ٦ \leftarrow ٣ = \frac{٦}{٣} = ٤$

(ج)

مثال (١٤)

اذا كان $\int \text{هـ}'(س)\,دس = ٣س^{٢}-٥س+٤$
فان قيمة هـ(٤) =
أ) -٤ ب) صفر ج) ٤ د) ٧

الحل

نشتق الطرفين

$\text{هـ}'(س) = ٦س-٥$
$\text{هـ}'(٤) = ٦\times ٤-٥ = ٢٤-٥$
$= ١٩$

(د)

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

اذا كان $\text{هـ}'(س) = \int (٤س^{٢}-٣)\,دس$
فان هـ(٢) =
أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) -٥ ج) ٥ د) ٨

الحل

$\text{هـ}'(س) = ٤س^{٢}-٣$
$\text{هـ}'(٢) = ٨-٣ = ٥$

(ج)

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كانت $ص = \int هـ^{٤س}\,دس$ فان

$\frac{دص}{دس} =$
أ) $٤هـ^{٤س}$ ب) $هـ^{٤س}$ ج) $\frac{١}{٤}هـ^{٤س}+جـ$
د) $٤هـ+جـ$

الحل

$\frac{دص}{دس} = هـ^{٤س}$

(ب)

مكتبة العلم ALWEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كانت ص = ∫ ق(س) دس
فان $\frac{دص}{دس}$ تساوي :

أ) صفر ب) ق(س) ج) ق(س) د) ق(س)

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = ق(س) (ج)

وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كانت ص = ∫ $\frac{1}{س}$ دس س ≠ ٠
فان $\frac{دص}{دس}$ =

أ) لو|س| + و ب) $\frac{-1}{س^2}$
ج) $\frac{1}{س}$ د) صفر

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{1}{س}$ (ج)

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان ق(س) = ∫ $س^2$ دس فان
ق(س) تساوي

أ) جس ب) $\frac{س^3}{3}$ ج) $3س^2$ د) $س^2$

ق(س) = $س^2$ (د)

وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان ق(س) = ∫ ($4س^3$ + 2س) دس
فان ق(١) =

أ) ٢ ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٤

الحل

ق(س) = $4س^3$ + 2س
ق(١) = 4 + 2 = 6 (ب)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان ق(س) = ∫ $3س^2$ دس فان
ق(س) =

أ) $3س^2$ ب) 3 ج) $\frac{3}{2}س^2$ د) صفر

الحل

ق(س) = $3س^2$ (أ)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان ق(س) = ∫ ($س^2$ + 5س) دس
فان ق(-١) =

أ) -٤ ب) -٦ ج) ٣ د) ٤

الحل

ق(س) = $س^2$ + 5س
ق(-١) = $(-1)^2$ + 5×-١
= ١ - ٥ = -٤ (أ)

مكتبة العلم ALWEEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان
$\int (ه'(س)+٣س^{٢})\,دس$
$= س^{٣}+ب س^{٢}+١$ وكان
$ه'(١)=٦$ حيث ب ثابت
ب = ؟

الحل
باشتقاق الطرفين
$ه'(س)+٣س^{٢} = ٣س^{٢}+٢ب س$
$ه'(١)+٣(١)^{٢} = ٣(١)^{٢}+٢ب(١)$
$ه'(١) = ٢ب$
$٦ = ٢ب \Leftarrow ب = ٣$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اذا كان ه اقترانًا متصلاً وكان
$\int ه(س)دس = ٢س^{٤}-٩س^{٢}+٧$
جد $ه'(١)$

الحل
باشتقاق الطرفين
$ه(س) = ٨س^{٣}-١٨س$
باشتقاق مرة أخرى
←

وزارة (٢٠١٦) شتوية

$ه'(س) = ٤ ٢ س^{٢}-٤٥س$
$ه'(١) = ٤٢-٤٥ = -٣$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان ه اقترانًا متصلاً وكان
$\int ه(س)دس = س^{٣}+٢س$ فان
$ه'(س) =$
أ) $٣س^{٢}+٢$ ب) $٣س^{٢}+٢س$
ج) $٦س+٢$ د) $٦س$

الحل
باشتقاق الطرفين
$ه(س) = ٣س^{٢}+٢$
$ه'(س) = ٦س$ (د)

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة الأولى

$\int P\,dس = Pس + ج$

P : ثابت

أمثلة

① $\int ٦\,dس = ٦س + ج$

② $\int -٤\,dس = -٤س + ج$

③ $\int dس = س + ج$

④ $\int \frac{dس}{٤} = \frac{١}{٤}س + ج$

⑤ $\int \sqrt{٣}\,dس = \sqrt{٣}س + ج$

⑥ $\int هـ\,dس = هـس + ج$

⑦ $\int لو_{هـ}٢\,dس = لو_{هـ}٢\,س + ج$

⑧ $\int م^{٠}\,dس = م^{٠}س + ج$

القاعدة الثانية

$\int س^{ن}\,dس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ج$

أمثلة

① $\int س\,dس = \frac{س^{١+١}}{١+١} + ج = \frac{س^{٢}}{٢} + ج$

② $\int س^{٣}\,dس = \frac{س^{٣+١}}{٣+١} + ج = \frac{س^{٤}}{٤} + ج$

ملاحظة
نضيف للأس (١) ونقسم على الأس الجديد

③ $\int س^{٩}\,dس = \frac{س^{٩+١}}{٩+١} + ج = \frac{س^{١٠}}{١٠} + ج$

④ $\int س^{٥}\,dس = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ج = \frac{س^{٦}}{٦} + ج$

⑤ $\int س\,dس = \frac{س^{٧}}{٧} + ج$

⑥ $\int س^{١١}\,dس = \frac{س^{١٢}}{١٢} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مراجعة في قوانين الأسس

① $\frac{1}{س^م} = س^{-م}$ مثال $\frac{1}{س^5} = س^{-5}$

② $(س^م)^ن = س^{م ن}$ مثال: $(س^{\frac{2}{3}})^3 = س^2$

③ $\frac{س^م}{س^ن} = س^{م-ن}$ مثال: $\frac{س^5}{س^2} = س^{5-2} = س^3$

هذه القواعد تستخدم لتجهيز الأقران على شكل $س^ن$ ثم اجراء التكامل حسب القاعدة ②

$\int \frac{1}{س^ن}$ دس ← تجهيز ← $\int س^{-ن}$ دس

ثم اجراء التكامل

هذه الخاصية لا تطبق عندما $ن = 1$ لها قاعده لوحدها سوف تشرح لاحقاً

مثال ①

اوجد $\int \frac{1}{س^2}$ دس

الحل

تجهيز $\int س^{-2}$ دس $= \frac{س^{-2+1}}{-2+1} + ج = \frac{س^{-1}}{-1} + ج$

$= \frac{1}{س} + ج$

مثال ②

اوجد $\int \frac{1}{س^5}$ دس

الحل

$\int \frac{1}{س^5}$ دس $= \int س^{-5}$ دس $= \frac{س^{-5+1}}{-5+1} + ج$

$= \frac{س^{-4}}{-4} + ج = \frac{1}{-4 س^4} + ج$

مثال ③

$\int \frac{1}{س^9}$ دس $= \int س^{-9}$ دس

$= \frac{س^{-9+1}}{-9+1} + ج = \frac{س^{-8}}{-8} + ج$

ملاحظه هامة

$\int \sqrt[ن]{س^م}$ دس $\xleftarrow{\text{تجهيز}}$ $\int س^{\frac{م}{ن}}$ دس

$= \frac{ن}{م+ن} س^{\frac{م+ن}{ن}} + ج$

$= \frac{\text{المقام}}{\text{المقام + بسطه}} \times$ مقلوب ناتج الاس الجديد $س$

مثال ④

$\int \sqrt[5]{س^6}$ دس $= \int س^{\frac{6}{5}}$ دس

$= \frac{5}{6+5} س^{\frac{6+5}{5}} + ج = \frac{5}{11} س^{\frac{11}{5}} + ج$

مكتبة الإسلام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$\int \sqrt{س}\ د س$

الحل

$\int \sqrt{س}\ د س = \int س^{\frac{1}{2}} د س = \frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + ج$

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ج$

مثال ⑥

$\int \sqrt[3]{س}\ د س$

الحل

$\int \sqrt[3]{س}\ د س = \int س^{\frac{1}{3}} د س = \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + ج$

مثال ⑦

$\int س^{-\frac{1}{2}} د س$

الحل $\int س^{-\frac{1}{2}} د س = \frac{س^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + ج$

$= \frac{2}{1} س^{\frac{1}{2}} + ج$

مثال ⑧

$\int س^{-\frac{5}{3}} د س = \frac{3}{-\frac{5}{3}+3} س^{-\frac{5}{3}+3} + ج$

$= -\frac{3}{2} س^{-\frac{2}{3}} + ج$

ملاحظه هامه

الاس السالب المقام - البسط

(المقلوب) س المقام

مثال ⑨

$\int س^{-\frac{5}{3}} د س = \frac{3}{-\frac{5}{3}+1} س^{-\frac{5}{3}+1} + ج$

$= -\frac{3}{2} س^{-\frac{2}{3}} + ج$

مثال ⑩

$\int \frac{1}{س^{\frac{3}{4}}} د س$

الحل: $\int س^{-\frac{3}{4}} د س = \frac{4}{1} س^{\frac{1}{4}} + ج$

مثال ⑪

$\int \frac{1}{\sqrt[4]{س^3}}$

الحل

$\int \frac{1}{س^{\frac{3}{4}}} د س = \int س^{-\frac{3}{4}} د س$

$= -3 س^{\frac{1}{4}} + ج$

مثال ⑫

$\int \sqrt[4]{س^5}$

$= \int س^{\frac{5}{4}} د س = -4 س^{-\frac{1}{4}} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

$$\int \frac{س^{٢}}{س^{٢}}\, دس$$

الحل

$$= \int س^{-٣}\, دس = \frac{س^{-٢}}{-٢} + ج$$

ملاحظه هامه

$$\int \frac{س^{م}}{س^{ن}}\, دس \xleftarrow{\text{تجهيز}} \int س^{م-ن}\, دس$$

مثال (١٤)

$$\int \frac{س^{٤}}{س^{٢}}\, دس \xleftarrow{\text{تجهيز}} \int س^{٤-٢}\, دس$$

$$= \int س^{٢}\, دس = \frac{س^{٣}}{٣} + ج$$

مثال (١٥)

$$\int \frac{س^{٣}}{٧س}\, دس \xleftarrow{\text{تجهيز}} \int \frac{س^{٣}}{س^{\frac{١}{٢}}}\, دس$$

$$= \int س^{٣-\frac{١}{٢}}\, دس = \int س^{\frac{٥}{٢}}\, دس$$

توحيد المقام $\frac{١}{٢} - ٦ = \frac{٥}{٢}$

$$= \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} + ج$$

مثال (١٦)

$$\int \frac{س^{٢}}{٤\sqrt{س}}\, دس \xleftarrow{\text{تجهيز}} \int \frac{س^{٣}}{س^{\frac{١}{٤}}}\, دس$$

$$= \int س^{٣-\frac{١}{٤}}\, دس = \int س^{\frac{١٢}{٤}-\frac{١}{٤}}\, دس$$

توحيد المقام

$$= \int س^{\frac{١١}{٤}}\, دس = \frac{٤}{١٥} س^{\frac{١٥}{٤}} + ج$$

مثال (١٧)

$$\int \frac{٧\sqrt{س}}{س}\, دس \xleftarrow{\text{تجهيز}} \int \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{س}\, دس$$

$$= \int س^{\frac{١}{٢}-١}\, دس = \int س^{-\frac{١}{٢}}\, دس$$

$$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ج = ١٤\sqrt{س} + ج$$

القاعدة الثالثة

① $\int$ حاس دس = $-$ جتاس + ج

② $\int$ جتاس دس = جاس + ج

③ $\int$ قا^{٢}س دس = ظاس + ج

تذكر

① قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$

② ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

خواص التكامل

①

$\int p\, هـ(س)\, دس = p \int هـ(س)\, دس$

أي أن

ثابت × أقتران = ثابت × الأقتران

②

$\int (هـ(س) \pm د(س))\, دس$

$= \int هـ(س)\, دس \pm \int د(س)\, دس$

أي أن

التكامل يوزع على عمليتي الجمع والطرح فقط

مثال ①

$\int ٤ س^{٣}\, دس = ٤ \int س^{٣}\, دس$

$= \frac{٤ س^{٤}}{٤} + ج$

$= س^{٤} + ج$

مثال ②

① $\int ٥ س^{-٣}\, دس = \frac{٥}{-٢} س^{-٢} + ج$

② $\int ٣ جتا س\, دس = ٣ جا س + ج$

③ $\int \frac{٤}{س^{٣}}\, دس = \int ٤ س^{-٣}\, دس$

$= \frac{٤ س^{-٢}}{-٢} + ج = \frac{-٢}{س^{٢}} + ج$

④ $\int \frac{٥}{٧ س}\, دس$

الحل $= \int ٥ س^{-\frac{١}{٢}}\, دس$

$= ٥ \times \frac{١}{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٢}} + ج = ١٠ \sqrt{س} + ج$

مثال ③

جد كلا من التكاملات الآتية

① $\int -١٥\, دس = -١٥ س + ج$

② $\int \frac{دس}{٣} = \frac{١}{٣} س + ج$

③ $\int ٥ س^{٩}\, دس = \frac{٥}{١٠} س^{١٠} + ج = \frac{١}{٢} س^{١٠} + ج$

④ $\int \frac{٧}{س^{٥}}\, دس = \int ٧ س^{-٥}\, دس = \frac{٧}{-٤} س^{-٤} + ج$

⑤ $\int ٩ س^{-\frac{٤}{٣}}\, دس = \frac{-\frac{٤}{٣}}{-\frac{١}{٣}} س^{-\frac{١}{٣}} + ج = -٢٧ س^{-\frac{١}{٣}} + ج$

$= \frac{-٢٧٠}{\sqrt[٣]{س^{٢}}} + ج$

مكتبة المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

اوجد $\int (٦س^{٢} - ٥س + ٣)\, دس$

الحل

$= \frac{٦}{٣} س^{٣} - \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٣س + ح$

$= ٢س^{٣} - \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٣س + ح$

مثال ⑤

اوجد $\int (٤س^{٣} + ٤س + ٧\sqrt{س})\, دس$

الحل

$= \frac{٤س^{٤}}{٤} + \frac{٤س^{٢}}{٢} + ٧ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ح$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} + س^{٢} + \frac{١٤}{٣} س\sqrt{س} + ح$

مثال ⑥

$\int \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٥}}\, دس$ نوزع البسط على المقام

الحل

$= \int (\frac{س^{٢}}{س^{٥}} + \frac{٣}{س^{٥}})\, دس$

$= \int (س^{-٣} + ٣س^{-٥})\, دس$

$= \frac{س^{-٢}}{-٢} + \frac{٣}{-٤} س^{-٤} + ح$

مثال ⑦

$\int (٣ \text{حا}س + ٦ \text{جتا}س - ١)\, دس$

الحل

$= -٣ \text{جتا}س + ٦ \text{حا}س - س + ح$

مثال ⑦

$\int (\text{حا}س - ٤ \text{قا}^{٢}س)\, دس$

الحل

$= -\text{جتا}س - ٤ \text{ظا}س + ح$

مثال ⑧

$\int (\frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} + \text{جتا}س)\, دس$

مدفقه $= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} = \text{قا}^{٢}س$

الحل

$= \int (\text{قا}^{٢}س + \text{جتا}س)\, دس$

$= \text{ظا}س + \text{حا}س + ح$

مثال ⑨

$\int (-\frac{٣}{٤} \text{حا}س + س^{-٢} + \frac{٤}{\sqrt{س}})$

$\frac{٤}{\sqrt{س}} = ٤س^{-\frac{١}{٢}}$ نجهز

الحل

$+ \frac{٣}{٤} \text{جتا}س + \frac{س^{-١}}{-١} + ٤ \times \frac{٢}{١} س^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{٣}{٤} \text{جتا}س - \frac{١}{س} + ٨س^{\frac{١}{٢}} + ح$

مكتبة العلم ALWEDAM للعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

$\int$ ظاس ضاس دس

الحل

ملاحظة: ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{ضاس}}$

$\int \frac{\text{جاس}}{\text{ضاس}} \times \text{ضاس}\, دس = \int \text{جاس}\, دس$

$= -\text{ضاس} + ج$

مثال (١١)

$\int \left(٣\sqrt{س^{٢}} - \frac{٥}{س^{٣}}\right) دس$

الحل

$= \int \left(س^{\frac{٢}{٣}} - ٥ س^{-٣}\right) دس$

$= \frac{١}{\frac{٢}{٣}+١} س^{\frac{٢}{٣}+١} - ٥ \times \frac{١}{-٣+١} س^{-٣+١} + ج$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{١٥}{-٢} س^{-٢} + ج$

مثال (١٢)

جـ $\int (٥س^{٤} - ٢\sqrt{س} + ١) دس$

الحل

$= \int (٥س^{٤} - ٢س^{\frac{١}{٢}} + ١) دس$

$= \frac{٥ س^{٥}}{٥} - ٢ \times \frac{١}{\frac{٣}{٢}} س^{\frac{٣}{٢}} + س + ج$

مثال (١٣)

جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int (٤ قاس^{٢} س + ٤ جاس) دس$

$= ٤ ظاس - ٤ ضاس + ج$

---

② $\int (١٠س^{٤} + ٦س^{٣} - \frac{٣}{٤}س - ٨) دس$

$= \frac{١٠}{٥} س^{٥} + \frac{٦}{٤} س^{٤} - \frac{٣}{٨} س^{٢} - ٨س + ج$

$= ٢س^{٥} + \frac{٣}{٢} س^{٤} - \frac{٣}{٨} س^{٢} - ٨س + ج$

---

③ $\int \frac{س^{٦} - ٥}{\sqrt{س^{٣}}} دس$

الحل

تجهيز $= \int \left(\frac{س^{٦}}{س^{\frac{٣}{٢}}} - \frac{٥}{س^{\frac{٣}{٢}}}\right) دس$

$= \int \left(س^{\frac{٩}{٢}} - ٥ س^{-\frac{٣}{٢}}\right) دس$

$= \int \left(س^{\frac{٩}{٢}} - ٥ س^{-\frac{٣}{٢}}\right) دس$

$= \frac{٢}{١١} س^{\frac{١١}{٢}} - ٥ \times \frac{١}{-\frac{١}{٢}} س^{-\frac{١}{٢}} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

$\int \frac{٣}{\text{جتا}^{٢}س} \, دس = \int ٣ \, \text{قا}^{٢}س \, دس$

$= ٣ \, \text{ظا}س + جـ$

مثال (١٥)

$\int (٥س + ٤)(س - ١) \, دس$

الحل

فك الأقواس

$= \int (٥س^{٢} - ٥س + ٤س - ٤) \, دس$

$= \int (٥س^{٢} - ٣س - ٤) \, دس$

$= \frac{٥}{٣}س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} - ٤س + جـ$

مثال (١٦)

$\int (-٣ \, \text{جا}س + \text{قا}^{٢}س) \, دس$

$= ٣ \, \text{جتا}س + \text{ظا}س + جـ$

مثال (١٧)

اوجد $\int \frac{س^{٣} - ٦س \, \text{قا}^{٢}س}{٦س^{٢}}$

الحل بتجزيء $= \int \frac{س^{٣}}{٦س^{٢}} - \frac{٦س \, \text{قا}^{٢}س}{٦س^{٢}}$

$= \int (\frac{س}{٦} - \text{قا}^{٢}س) \, دس$

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٦} - \text{قا}^{٢}س)$

$= \int (س^{\frac{٥}{٢}} - \text{قا}^{٢}س) \, دس = \frac{٢}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{١}{٦}س - \text{ظا}س + جـ$

ملاحظه هامة جدًا

هناك بعض الاسئله والتي هي عبارة عن حاصل ضرب تحتاج الى تجزيء وذلك بفك الأقواس لأن التكامل لا يوزع على الضرب ولتكيه الاستفاده من القوانين التاليه .

① $ب(ا \pm ج) = ب \times ا \pm ب \times ج$

② $(ا + ب)(ج + د)$

$= ا \times ج + ا \times د + ب \times ج + ب \times د$

③ $(ا + ب)^{٢}$

$= ا^{٢} + ٢ \times ا \times ب + ب^{٢}$

= مربع الأول + ٢ × الأول × الثاني + مربع الثاني

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

$\int 3س^2(4س - س^3)\,دس$

الحل

فك الأقواس $= 6س^3 - 3س^5$

$\int(6س^3 - 3س^5)\,دس = \frac{6س^4}{4} - \frac{3س^6}{6} + ج$

مثال (١٨)

اوجد $\int \frac{1}{س}(س^2 - 4س^3)\,دس$

الحل

$\int(\frac{1}{س} \times س^2 - \frac{1}{س} \times 4س^3)\,دس$

$= \int(س - 4س^2)\,دس$

$= \frac{س^2}{2} - \frac{4س^3}{3} + ج$

مثال (١٩)

اوجد $\int(4س + 1)(س - 3)\,دس$

الحل

$= \int(4س^2 - 6س + س - 3)\,دس$

$= \int(4س^2 - 5س - 3)\,دس$

$= \frac{4س^3}{3} - \frac{5س^2}{2} - 3س + ج$

مثال (٢٠)

اوجد $\int \sqrt{س}(\sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}})\,دس$

الحل

فك الأقواس

$= \int(\sqrt{س} \times \sqrt{س} + \sqrt{س} \times \frac{1}{\sqrt{س}})\,دس$

$= \int(س + 1)\,دس = \frac{س^2}{2} + س + ج$

مثال (٢١)

اوجد $\int(س^2 - س)^2\,دس$

$= \int((س^2)^2 - 2 \times س^2 \times س + س^2)\,دس$

$= \int(س^4 - 2س^3 + س^2)\,دس$

$= \frac{س^5}{5} - \frac{2س^4}{4} + \frac{س^3}{3} + ج$

مثال (٢٢)

اوجد $\int(\sqrt{س} - 5)^2\,دس$

الحل

$= \int((\sqrt{س})^2 - 2 \times \sqrt{س} \times 5 + 5^2)\,دس$

$= \int(س - 10س^{\frac{1}{2}} + 25)\,دس$

$= \frac{س^2}{2} - \frac{10 \times 2س^{\frac{3}{2}}}{3} + 25س + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣)

اوجد $\int (٥-٤س)^{٢}\,دس$

الحل

$= \int (٥^{٢} - ٢\times٥\times٤س + (٤س)^{٢})\,دس$

$= \int (٢٥ - ٤٠س + ١٦س^{٢})\,دس$

$= ٢٥س - \frac{٤٠س^{٢}}{٢} + \frac{١٦س^{٣}}{٣} + ج$

مثال (٤)

اوجد $\int قاس(ظاس - ٣)\,دس$

الحل

$= \int \frac{١}{جتاس}(ظاس - ٣)\,دس$

$= \int \frac{١}{جتاس}\times ظاس - ٣\times \frac{١}{جتاس}$

$= \int (ظاس - ٣قاس)\,دس$

$= ظاس - ٣ظاس + ج$

مثال (٥)

اوجد $\int \frac{٣}{(قاس)^{-٢}}\,دس$

الحل

$\int ٣قاس\,دس = ٣ظاس + ج$

مثال (٦)

اوجد $\int \frac{س^{٢} + ٧س}{٧س^{٣}}\,دس$

الحل

$\int \frac{س^{٢}}{٧س^{٣}} + \frac{٧س}{٧س^{٣}}\,دس$

$= \int (\frac{س^{٢}}{س^{\frac{٣}{٢}}} + \frac{٧س}{س^{\frac{٣}{٢}}})\,دس$

$= \int س^{٢}\times س^{-\frac{٣}{٢}} + ٧س\times س^{-\frac{٣}{٢}}$

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} + ٧س^{-\frac{١}{٢}})\,دس$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢\times٧س^{\frac{١}{٢}} + ج$

مثال (٧)

جد $\int س(٤س^{٢} - ٥س + ١)\,دس$

الحل

$\int (٤س^{٣} - ٥س^{٢} + س)\,دس$

$= \frac{٤س^{٤}}{٤} - \frac{٥س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + ج$

$= س^{٤} - \frac{٥}{٣}س^{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + ج$

مكتبة السام AL WESAM
السام ناجح الجمزاوي

مثال (٢٨)

اوجد $\int (س^2 - 2)^2 \, دس$

الحل

$= \int (س^2)^2 - 2 \times 2 \times س^2 + (2)^2$

$= \int (س^4 - 4س^2 + 4) \, دس$

$= \frac{س^5}{5} - \frac{4س^3}{3} + 4س + ث$

مثال (٢٩)

$\int (2س - 1)(س^2 + 5) \, دس$

الحل

$\int (2س^3 + 10س - س^2 - 5) \, دس$

$= \frac{2س^4}{4} + \frac{10س^2}{2} - \frac{س^3}{3} - 5س + ث$

مثال (٣٠)

$\int (4س + \frac{1}{س^2} + 2) \, دس$

الحل

$\int (4س + س^{-2} + 2) \, دس$

$= \frac{4س^2}{2} + \frac{س^{-1}}{-1} + 2س + ث$

$= 2س^2 - \frac{1}{س} + 2س + ث$

مثال (٣١)

$\int 3س^2 (س^3 - 4س + 1) \, دس$

الحل

$\int (3س^5 - 12س^3 + 3س^2) \, دس$

$= \frac{3س^6}{6} - \frac{12س^4}{4} + \frac{3س^3}{3} + ث$

$= \frac{1}{2}س^6 - 3س^4 + س^3 + ث$

مثال (٣٢)

$\int (2س - 1)(س^2 - س + 5) \, دس$

الحل

$\int 2س^3 - 2س^2 + 10س - س^2 + س - 5$

$= \int (2س^3 - 3س^2 + 11س - 5) \, دس$

$= \frac{2س^4}{4} - \frac{3س^3}{3} + \frac{11س^2}{2} - 5س + ث$

مكتبة الوسام ALWESAM
التعليم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٣)

اذا كان $ق'(س) = ٣س^٢ - ٤س + ١$
جد $ق(-١)$ علماً بان $ق(٣) = ٢$

الحل

$\int ق'(س)\,دس = ق(س)$
نكامل الطرفين

$\int ق'(س)\,دس = \int (٣س^٢ - ٤س + ١)\,دس$

$ق(س) = \frac{٣س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} + س + ج$

$= س^٣ - ٢س^٢ + س + ج$

$ق(٣) = ٢٧ - ١٨ + ٣ + ج = ٢$

$١٢ + ج = ٢ \leftarrow ج = -١٠$

$\Leftarrow ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + س - ١٠$

$\Leftarrow ق(-١) = (-١)^٣ - ٢(-١)^٢ + (-١) - ١٠$

$= -١ - ٢ - ١ - ١٠$

$= -١٤$

مثال (٣٤)

اذا كان $\int ق'(س)\,دس = ٣س^٢ - ٨س + ج$
وجد $ق(س)$ علماً بان $ق(٣) = ١$

الحل

التكامل بشطب الاشتقاق

$ق(س) = ٣س^٢ - ٨س + ج$

نجد قيمة ج

$ق(٣) = ١$

$٣(٣)^٢ - ٨(٣) + ج = ١$

$٢٧ - ٢٤ + ج = ١ \leftarrow ٣ + ج = ١$

$\Leftarrow ج = -٢$

$\Leftarrow ق(س) = ٣س^٢ - ٨س - ٢$

مثال (٣٥)

اوجد $\int \frac{س^٢ - س - ٦}{س + ٢}\,دس$ $\quad س \neq -٢$

الحل

$= \int \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{س + ٢}\,دس$

$= \int (س - ٣)\,دس = \frac{س^٢}{٢} - ٣س + ج$

مثال (٣٦)

اذا كانت $ق'(س) = ٣س^٢ + ٤س + ٤$
جد قاعدة $ق(س)$ علماً بانه يمر بالنقطة $(١، ٨)$

الحل

$\int ق'(س)\,دس = ق(س) + ج$

$= \int (٣س^٢ + ٤س + ٤)\,دس$

$= \frac{٣س^٣}{٣} + \frac{٤س^٢}{٢} + ٤س + ج$

$= س^٣ + ٢س^٢ + ٤س + ج$

لكنه $ق(١) = ٨$

$= (١)^٣ + ٢(١)^٢ + ٤(١) + ج = ٨$

$\Leftarrow ١ + ٢ + ٤ + ج = ٨ \Leftarrow ج = ١$

$ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ٤س + ج$

مثال (٣٧)

اوجد $\int \frac{س^3 - ٨}{س - ٢}$ دس

الحل

$= \int \frac{(س - ٢)(س^2 + ٢س + ٤)}{س - ٢}$ دس

$= \int (س^2 + ٢س + ٤)$ دس

$= \frac{س^3}{٣} + \frac{٢س^2}{٢} + ٤س + ج$

مثال (٣٨)

اوجد $\int \frac{س^2 - ٧س}{س - ٧}$ دس $س \neq ٧$

الحل

$= \int \frac{س(س - ٧)}{س - ٧}$ دس $= \int س$ دس

$= \frac{س^2}{٢} + ج$

مثال (٣٩)

جد قاعدة الاقتران $ق(س)$ علماً بأن $ق(١) = ٤$ ، $ق'(س) = ٣ - ٢س$

الحل

$ق(س) = \int ق'(س)$ دس $= \int (٣ - ٢س)$ دس

$= ٣س - \frac{٢س^2}{٢} + ب$

$= ٣س - س^2 + ج$

لكن $ق(١) = ٤$

$٤ = ٣ \times ١ - (١)^2 + ج$

$٤ = ٣ - ١ + ج \Leftarrow ٤ = ٢ + ج$

$\Leftarrow ج = ٢$

$\Leftarrow ق(س) = ٣س - س^2 + ٢$

مثال (٤٠)

اذا كانت $\int ق(س)$ دس $= ٢س^3 + ب س^2 + ج$

وكان $ق'(٢) = ٢٦$ ، $ق(١) = ٦$ فما قيمة الثابت ب

الحل

باشتقاق الطرفين

$ق'(س) = ٦س^2 + ٢ب س$ لأن ج = ثابت فتختفي

لكن $ق'(٢) = ٢٦$

$٢٦ = ٦(٢)^2 + ٢ب(٢)$

$٢٦ = ٢٤ + ٤ب$

$\Leftarrow ٤ب = ٢ \Leftarrow ب = ١$

مثال (٤١)

اوجد $\int (٢س - ٥)(٢س + ٥)$ دس

$= \int ٤س^2 + ١٠س - ١٠س - ٢٥$

$= \int (س^2 - ٢٥)$ دس $= \frac{س^3}{٣} - ٢٥س + ج$

مثال (٤٢) $\int \frac{س^2 + ٤س - ١٢}{س + ٦}$ دس

$= \int \frac{(س + ٦)(س - ٢)}{س + ٦}$ دس $= \int (س - ٢)$ دس $= \frac{س^2}{٢} - ٢س + ج$

تدريبات الكتاب

تدريب ② ص ١٦٣

جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int ds = s + c$

② $\int s^3 ds = \frac{s^4}{4} + c$

③ $\int s^5 ds \; , \; s \neq 0$

$= \frac{s^6}{6} + c$

④ $\int \sqrt{s}\, ds \; , \; s \geq 0$

$= \int s^{\frac{1}{2}} ds = \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + c$

تدريب ③ ص ١٦٤

جد كلاً من التكاملين الآتيين

① $\int (3s^2 - \frac{6}{\sqrt{s}})\, ds$

$= \int (3s^2 - 6s^{-\frac{1}{2}})\, ds$

$= s^3 - 6 \times 2 s^{\frac{1}{2}} + c$

$= s^3 - 12\sqrt{s} + c$

② $\int (4s - 3\sin s)\, ds$

$= \frac{4s^2}{2} + 3\cos s + c$

$= 2s^2 + 3\cos s + c$

تدريب ④ ص ١٦٥

جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int (4s + 3)^2 ds$

الحل

$\int (16s^2 + 24s + 9)\, ds$

$= \frac{16}{3} s^3 + 12s^2 + 9s + c$

$= \frac{16}{3} s^3 + 6s^2 + 9s + c$

② $\int \frac{s^2 - 5s}{\sqrt{s}}\, ds$

الحل

$\int (\frac{s^2}{s^{\frac{1}{2}}} - \frac{5s}{s^{\frac{1}{2}}})\, ds$

$= \int (s^{\frac{3}{2}} - 5s^{\frac{1}{2}})\, ds$

$= \frac{2}{5} s^{\frac{5}{2}} - 5 \times \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + c$

③ $\int \frac{س^2 + 2س - 15}{س - 3}$ ءس $س \neq 3$

الحل

$\int \frac{(س-3)(س+5)}{س-3}$ ءس

$= \int (س+5)$ ءس $= \frac{س^2}{2} + 5س + ج$

④ $\int \frac{س^2 + 64}{س + 4}$ ءس $س \neq -4$

الحل

$\int \frac{(س+4)(س^2 - 4س + 16)}{س+4}$

$\int (س^2 - 4س + 16)$ ءس

$= \frac{س^3}{3} - \frac{4س^2}{2} + 16س + ج$

تدريب ⑤ ص١٦٥

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة

$ق'(س) = 3س^2 - 6س + 5$

علمًا بأن $ق(1) = 7$

الحل

$ق(س) = \int ق'(س)$ ءس

$ق(س) = \int (3س^2 - 6س + 5)$ ءس

$= \frac{3س^3}{3} - \frac{6س^2}{2} + 5س + ج$

$ق(س) = س^3 - 3س^2 + 5س + ج$

لكن $ق(1) = 7$

$ق(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) + ج = 7$

$\Leftarrow ج = 4$

$\Leftarrow ق(س) = س^3 - 3س^2 + 5س + 4$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

الأسئلة

ص ١٦٦

① جد كلاً مما يأتي

ⓐ $\int \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2}s + c$

ⓑ $\int \frac{ds}{s^5}$ ، $s \neq 0$

$= \int s^{-5} ds = \frac{s^{-4}}{-4} + c$

ⓒ $\int (2 - s^2) ds = 2s - \frac{s^3}{3} + c$

ⓓ $\int 3s^2 ds = \frac{3s^3}{3} + c = s^3 + c$

ⓔ $\int \frac{-2}{s^5} ds = \int -2 s^{-5} ds$

$= \frac{-2}{-6} s^{-6} + c = \frac{1}{3} s^{-6} + c$

② جد كلاً مما يأتي

ⓐ $\int (10s^2 - 6\sqrt{s} + 3\sec^2 s) ds$

$= \int (10s^2 - 6s^{\frac{1}{2}} + 3\sec^2 s) ds$

$= \frac{10s^3}{3} - \frac{6}{\frac{3}{2}} s^{\frac{3}{2}} + 3\tan s + c$

ⓑ $\int (2 - s)(4s + 1) ds$

$= \int (8s + 2 - 4s^2 - s) ds$

$= \int (7s + 2 - 4s^2) ds$

$= \frac{7s^2}{2} + 2s - \frac{4s^3}{3} + c$

ⓒ $\int 3 \tan s \sec s \, ds$

$= \int 3 \frac{\sin s}{\cos s} \times \cos s \, ds$

$= \int 3 \sin s \, ds = -3\cos s + c$

ⓓ $\int \frac{s^2 + 6s + 8}{s + 2} ds \quad s \neq -2$

العل

$= \int \frac{(s+2)(s+4)}{s+2} ds$

$= \int (s + 4) ds$

$= \frac{s^2}{2} + 4s + c$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

③ جد $\frac{ص}{س}$ عندما $س = ٥$

$ص = \begin{cases} \frac{٤س+١}{س} & س \neq ٠ \\ \end{cases}$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{٤س+١}{س}$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=٥} = \frac{٤×٥+١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$

---

④ اذا كان $هـ$ اقترانا قابلا للاشتقاق وكان $هـ'(س) = ٦س - ٨س^{٣} + ٥$ وكان $هـ(١-) = ٢$ ، جد قاعدة الاقتران $هـ$.

الحل

$هـ'(س) = ٦س - ٨س^{٣} + ٥$

$هـ(س) = \int (٦س - ٨س^{٣} + ٥) \, دس$

$هـ(س) = \frac{٦س^{٢}}{٢} - \frac{٨س^{٤}}{٤} + ٥س + ﺟ$

$هـ(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + ﺟ$

$هـ(١-) = ٢$

$٣(-١)^{٢} - ٢(-١)^{٤} + ٥×(-١) + ﺟ = ٢$

$٣ - ٢ - ٥ + ﺟ = ٢$

$-٤ + ﺟ = ٢ \Leftarrow ﺟ = ٦$

$هـ(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + ٦$

---

⑤ اذا كان

$ع'(س) دس = ٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٥$

جد $ع'(١)$ ؟

$\Leftarrow$

بالاشتقاق الطرفين

$ع'(س) = ١٨س^{٢} - ٦س + ٦$

$ع'(١) = ١٨(١)^{٢} - ٦×١ + ٦$

$= ١٨ - ٦ + ٦ = ١٨$

---

⑥ اذا كان $هـ$ أقترانا قابلا للاشتقاق وكان $هـ'(س) = ٤س - ٥$ ، وكان $هـ(٢) = ٤$ ، جد قيمة $هـ(١)$.

الحل

$هـ(س) = \int هـ'(س) = \int (٤س - ٥) \, دس$

$هـ(س) = ٢س^{٢} - ٥س + ﺟ$

$هـ(س) = س^{٢} - ٥س + ﺟ$

$هـ(٢) = ٤$

$٤ = -١٠ + ﺟ \leftarrow$

$ﺟ = ١٠ \leftarrow$

$هـ(س) = س^{٢} - ٥س + ١٠$

$هـ(١) = ١^{٢} - ٥×١ + ١٠$

$= ١ - ٥ + ١٠$

$= ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

⑦ اذا كان $ه$ اقترانا للاستقامه وكان $ه'(س) = ٣س(٦-٥س)+٤س^{٣}$ وكان $ه(٢) = -١٦$ جد قاعدة $ه(١)$

الحل

$ه(س) = \int ه'(س)\,د س = \int ٣س(٦-٥س)+٤س^{٣}\,د س$

$ه(س) = \int (١٨س - ١٥س^{٢}+٤س^{٣})\,د س$

$= \frac{١٨س^{٢}}{٢} - \frac{١٥س^{٣}}{٣} + \frac{٤س^{٤}}{٤} + ج$

$= ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} + ج$

$ه(٢) = ٩(٢)^{٢} - ٥(٢)^{٣} + (٢)^{٤} + ج = -١$

$٣٦ - ٤٠ + ١٦ + ج = -١$

$١٢ + ج = -١$

$ج = -١٣$

$ه(س) = ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} - ١٣$

$ه(١) = ٩ - ٥ + ١ - ١٣$

$= ١٣ - ٥ = -٨$

---

⑧ اذا كان $ه$ اقترانا قابلا للاستقامه وكان

$ه(س) = \frac{س^{٢}+٦س+٨س^{٣}}{س}$ $س \neq ٠$

وكان $ه(١) = ١٢$ جد قاعدة الاقتران $ه$

الحل

$ه(س) = \int \frac{س^{٢}+٦س+٨س^{٣}}{س}$

$= \int \frac{ه'(س)}{س}\,د س$

$= \int (س + ٦ + ٨س^{٢})\,د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٦س + \frac{٨س^{٣}}{٣} + ج$

$ه(١) = \frac{١}{٢} + ٦ + \frac{٨}{٣} + ج = ١٢$

$= \frac{٣}{٦} + \frac{٣٦}{٦} + \frac{١٦}{٦} + ج = ١٢$

$\frac{٥٥}{٦} + ج = ١٢$

$ج = \frac{٧٢}{٦} - \frac{٥٥}{٦} = \frac{١٧}{٦}$

$ه(س) = \frac{س^{٢}}{٢} + ٦س + \frac{٨س^{٣}}{٣} + \frac{١٧}{٦}$

⑨ اذا كان $ل$ اقترانا قابلا للاستقامه وكان $ل'(س) = ٦س^{٢} - ٦س^{٣} - ٤س$ جد قاعدة $ل(١)$ $ل(٣)$

$ل(س) = \int (٦س^{٢} - ٦س^{٣} - ٤س)\,د س$

$= \frac{٦س^{٣}}{٣} - \frac{٦س^{٤}}{٤} - \frac{٤س^{٢}}{٢} + ج$

$ل(٣) - ل(١)$

$= ٢(٣)^{٣} - \frac{٣}{٢}(٣)^{٤} - (٣)^{٢} + ج$

$- (٢(١)^{٣} - \frac{٣}{٢}(١)^{٤} - (١)^{٢} + ج)$

$= ٥٤ - \frac{٢٤٣}{٢} - ٩ - ٢ + \frac{٣}{٢} + ١$

$= ٥٤ - \frac{٢٤٠}{٢} - ١٠$

$= ٤٤ - ١٢٠ = -٧٦$

مكتبة الهادي ALHADISAM المعلم: ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٧) شتوية

① ∫ (٦س − ٩) دس = $\frac{٦س^{٢}}{٢}$ − ٩س + جـ
= ٣س^{٢} − ٩س + جـ

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

∫ (٣س^{٢} − ٤س) دس
= $\frac{٣س^{٣}}{٣}$ − $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ + جـ
= س^{٣} − ٢س^{٢} + جـ

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

①
∫ (هـ^{اس} − جـ) دس يساوي
أ) هـ^{اس} − جـ س + جـ ب) $\frac{١}{اهـ^{اس}}$ − جـ س + جـ
ج) هـ^{اس} + جـ س + جـ د) − هـ^{اس} − جـ س + جـ

الحل
= هـ^{اس} − جـ س + جـ (أ)

② ∫ (٦س^{٢} − ٤س) دس
= $\frac{٦س^{٣}}{٣}$ − $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ + جـ
= ٢س^{٣} − ٢س^{٢} + جـ

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

① ∫ (٣ − ٤س) دس = ٣س − $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ + جـ
= ٣س − ٢س^{٢} + جـ

② اذا علمت ان ل ثابت اوجد
∫ ل دس
الحل = ل س + جـ

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

① ∫ س^{٢} (٣ + ٨س) دس
= ∫ (٨س^{٣} + ٣س^{٢}) دس
= $\frac{٨س^{٤}}{٤}$ + $\frac{٣س^{٣}}{٣}$ + جـ
= ٢س^{٤} + س^{٣} + جـ

② ∫ (١ − هـ^{اس}) دس =
أ) س + هـ^{اس} + جـ ب) س − هـ^{اس} + جـ
ج) هـ^{اس} + جـ د) − هـ^{اس} + جـ
الحل ب) س − هـ^{اس} + جـ

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) صيفية

① ∫ جاس دس =

أ) جا²س/٢ + جـ ب) ضاس + جـ

ج) -جاس + جـ د) -ضاس + جـ

ج

② جـ ∫ (س+١)(س-٣) دس

الحل = ∫ (س² - ٢س + ٣ - ٣) دس

= ∫ (س² - ٢س - ٣) دس

= س³/٣ - ٢س²/٢ - ٣س + جـ

= س³/٣ - س² - ٣س + جـ

وزارة (٢٠١١) شتوية

① ∫ س³ دس =

أ) ٣س²/٢ + جـ ب) س + جـ

ج) ٣س² + جـ د) س⁴/٤ + جـ

ج

وزارة (٢٠١٤) شتوية

① ∫ ٧س² دس ، س > ٠ يساوي

أ) ٥/٢ س^٥/٢ + جـ ب) ٢/٥ س^٥/٢ + جـ

ج) ٣/٢ س^٢/٣ + جـ د) ٢/٣ س^٣/٢ + جـ

① اكل = ∫ س^٣/٢ = ٢/٥ س^٥/٢ + جـ

② ∫ (-جاس + ١) دس

أ) ضاس + س + جـ ب) -ضاس + س + جـ

ج) -ضاس - س + جـ د) ضاس + س + جـ

اكل + ضاس + س + جـ ⑤

وزارة (٢٠١٢) صيفية

∫ (قأس/٣ - ٤س + ١٢) دس

الحل

١/٣ ظاس - ٤س²/٢ + ١٢س + جـ

١/٣ ظاس - ٢س² + ١٢س + جـ

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) شتوية

① ∫ ٤ قا^٢ س ظا س د س =

أ) ٤ ظا س + جـ ب) ظا س + جـ

جـ) ٤ قا^٢ س + جـ د) ٤ ظا^٢ س + جـ

②

وزارة (٢٠١٥) صيفية

جـ) $\int \frac{س^{٢} - ٧\sqrt{س}\ ظا س}{٧\sqrt{س}}\ د س$

الحل

$\int \frac{س^{٢}}{٧\sqrt{س}} - \frac{٧\sqrt{س}\ ظا س}{٧\sqrt{س}}\ د س$

$\int س^{٢} \times س^{-\frac{١}{٢}} - ظا س\ د س$

$\int (س^{\frac{٣}{٢}} - ظا س) د س = \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ظا س + جـ$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

$\int \frac{٢}{ظا^{٢} س} - \frac{١}{٧\sqrt{س^{٥}}} + \frac{٦}{س}$

$\int ٣ قا^{٢} س - س^{-\frac{٣}{٥}} + \frac{٦}{س}$

$٣ ظا س - \frac{٥}{٢} س^{\frac{٢}{٥}} + ٦ لو |س| + جـ$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني

التكامل المحدود

① التكامل المحدود للاقتران هـ(س) في الفترة [أ ، ب] يساوي هـ(ب) − هـ(أ) أي أن

$$\int_{أ}^{ب} هـ'(س)\,دس = [هـ(س)]_{أ}^{ب}$$

$$= هـ(ب) - هـ(أ)$$

أ : الحد السفلي أو الحد الأدنى
ب : الحد الأعلى أو الحد العلوي

② أي أن التكامل المحدود هو نفسه غير المحدود باستثناء أنه لا يكون هناك (جـ) والناتج سيكون عدد

مثال ①
إذا كان هـ(١) = ٧ ، هـ(٣) = ١٢
جد $\int_{١}^{٣} هـ'(س)\,دس$

الحل
$$\int_{١}^{٣} هـ'(س)\,دس = [هـ(س)]_{١}^{٣}$$
$$= هـ(٣) - هـ(١)$$
$$= ١٢ - ٧ = ٥$$

مثال ②
إذا كان هـ(٢) = ٧ ، هـ(٥) = ٣
فأوجد
ⓐ $\int_{٢}^{٥} هـ'(س)\,دس$ ⓑ $\int_{٥}^{٢} هـ'(س)\,دس$

الحل
ⓐ $\int_{٢}^{٥} هـ'(س)\,دس = هـ(٥) - هـ(٢)$
$= ٣ - ٧ = -٤$

ⓑ $\int_{٥}^{٢} هـ'(س)\,دس = هـ(٢) - هـ(٥)$
$= ٧ - ٣ = ٤$

مثال ③
إذا كان هـ(-٣) = ١٥ ، هـ(-١) = ٨
جد $\int_{-٣}^{-١} هـ'(س)\,دس$ =

أ) −٧ ب) ٧ جـ) ٢٣ د) ٤

الحل
$$\int_{-٣}^{-١} هـ'(س)\,دس = هـ(-١) - هـ(-٣)$$
$$= ٨ - ١٥ = -٧$$

(أ)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④
اذا كان هـ(٢) = ٨ وكان
$\int_{م}^{ن} هـ'(س)\,دس = ٢$ فأوجد هـ(ب) ؟

الحل
$\int_{م}^{ن} هـ'(س)\,دس = هـ(ن) - هـ(م) = ٢$
$هـ(ن) - ٨ = ٢$
$\Leftarrow هـ(ن) = ٢ + ٨ = ١٠$

مثال ⑤
اذا كان هـ'(س) = ٦س حيث هـ دالة متصلة على الفترة [-٢، ٣] جد هـ(٣) - هـ(-٢) ؟

الحل
$\int_{-٢}^{٣} هـ'(س)\,دس = هـ(٣) - هـ(-٢)$
$= \int_{-٢}^{٣} ٦س\,دس = ٣س^٢ \Big]_{-٢}^{٣}$
$= ٣(٣)^٢ - ٣(-٢)^٢$
$= ٣ \times ٩ - ٣ \times ٤ = ٢٧ - ١٢ = ١٥$

مثال ⑥
اذا كان هـ(ن) = -٩ وكان
$\int_{م}^{ن} هـ'(س)\,دس = ٦$ جد هـ(م) ؟

الحل
$\int_{م}^{ن} هـ'(س)\,دس = هـ(ن) - هـ(م) = ٦ \Leftarrow$
$\int_{م}^{ن} هـ'(س)\,دس = ٦ = ٣$
$هـ(ن) - هـ(م) = ٣$
$-٩ - هـ(م) = ٣$
$هـ(م) = -٩ - ٣ = -١٢$

مثال ⑦
اذا كان هـ'(س) = $\frac{س}{٢}$ دالة متصلة
هـ(٣) - هـ(١) ؟

$هـ(٣) - هـ(١) = \int_{١}^{٣} هـ'(س)\,دس$
$= \int_{١}^{٣} \frac{س}{٢}\,دس = \frac{س^٢}{٤} \Big]_{١}^{٣}$
$= \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

مثال ⑧
اذا كان $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس = س^٣ + ٣س^٢ + ٥س$
جد قيمة $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس$ ؟

$\int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس = س^٣ + ٣س^٢ + ٥س \Big]_{١}^{٢}$
$٤ + ٦ + ١٠ - ١ - ٣ - ٥ = ١٠ - ٤ = ٦$

مثال ⑨
اذا كان $\int_{١}^{٢} ل(س)\,دس = س^٤ + ٥$
جد $\int_{١}^{٢} ل(س)\,دس$ ؟

الحل = $س^٤ \Big]_{١}^{٢} = (٢)^٤ - (١)^٤ = ١٦ - ١ = ١٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

قواعد التكامل المحدود

قاعدة ①
اذا كان جـ عدد ثابت فإن
$\int_{م}^{ن} جـ \, دس = جـ (ن - م)$

ملاحظة هامة
مشتقة التكامل المحدود = صفر
أي أن
$\frac{د}{دس} \int_{م}^{ن} ق(س) \, دس = صفر$

مثال ①
$\int_{-٢}^{٦} ٤ \, دس = ٤ (٦ - (-٢)) = ٤ \times ٤ = ١٦$

مثال ②
$\int_{-٤}^{٢} \sqrt{٧} \, دس = \sqrt{٧} (٢ - (-٤)) = ٦\sqrt{٧}$

مثال ③
$\int_{-٧}^{-٣} ١ \, دس = ١ (-٣ - (-٧)) = ٤$

مثال ④
$\int_{-٣}^{٣} \frac{٢}{٣} \, دس = \frac{٢}{٣} (٣ - (-٣)) = \frac{٢}{٣} \times ٦ = ٤$

مثال ⑤
$\int_{-١١}^{٧} \frac{١}{٣} \, دس = \frac{١}{٣} (٧ - (-١١)) = \frac{١}{٣} \times ١٨ = ٦$

مثال ⑥
جد صحة أو خطأ كل مما يأتي
① $\int_{-٢}^{٥} ل \, دس = ١٢$

الحل
$ل (٥ - (-٢)) = ١٢$
$٧ ل = ١٢$
$ل = \frac{١٢}{٧}$ ⇐ خطأ

مثال ⑦
اذا علمت ان $ص = \int_{-١}^{٣} (٦س^{٢} - ٤س) \, دس$
فاوجد $\frac{د ص}{دس}$

الحل
$\frac{د ص}{دس} = صفر$
لأنه تكامل محدود

مثال ⑧
اذا كان
$ق(س) = \int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٣س + ١) \, دس$
جد ق'(١)

الحل
$ق'(س) = ٦س - صفر + (١ - ٤س)$
$ق'(١) = ٦ \times ١ + (١ \times -٤)$
$= ٦ - ٤ = ٢$

مكتبة الإسلام
Alislam
المعلم ناجح الجمزاوي

② $\int_{ك}^{٣} ٤ س = ٢٠$

الحل

$٤(٣ - ك) = ٢٠$

$١٢ - ٤ك = ٢٠ \Leftarrow -٤ك = ٨$

$\leftarrow ك = -٢$

② $\int_{-٣}^{١} ك س = ٨$

الحل

$ك(١ - -٣) = ٨ \Leftarrow ٤ك = ٨$

$\leftarrow ك = ٢$

مثال ③

$\int_{ك}^{٢} ٢ك + ١$

اذا كان $\int_{ك}^{٢} س = ٤$ اوجد قيمة ك

أ) -١ ب) ١ ج) ٤ د) -٤

الحل

$\int_{ك}^{٢} ٢ك + ١ س = ٤ \leftarrow [ك^٢ + ك]_{ك}^{٢} = ٤$

$٢ - (ك^٢ + ك) = ٤$

$ك^٢ + ك + ٢ = ٤ \leftarrow ك^٢ + ك = ٢$

$ك^٢ + ك - ٢ = ٠$

$\leftarrow ك = ١$

ب

مثال ④ إذا

اذا كانت $\int_{-٢}^{ك} س = -٢$

فان قيمة ك ؟

أ) ١ ب) -١ ج) ١ د) -١

الحل

$\int_{-٢}^{ك} ك س = [ك^٢]_{-٢}^{ك} = -٢$

$ك^٢ - ٤ = -٢$

$ك^٢ + ٢ = ٠$ بالقسمة على ٢

$ك^٢ + ٢ك + ١ = ٠$

$(ك + ١)(ك + ١) = ٠$

$\Leftarrow ك = -١$ ب

مثال ⑤

اذا كان $\int_{٢}^{٥} ل س = ١٨$

فان قيمة الثابت ل

أ) ٦ ب) -٦ ج) ١٨ د) -١٨

الحل

$ل(٥ - ٢) = ١٨$

$٣ل = ١٨$

$ل = ٦$ أ

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

قاعدة ②

$$\int_{ا}^{ب} س^{ن} \, ءس = \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1} \right]_{ا}^{ب}$$

$$= \left(\frac{ب^{ن+1}}{ن+1} \right) - \left(\frac{ا^{ن+1}}{ن+1} \right)$$

$ن \neq -1 \quad ن \in ح$

ملاحظة هامة

نستخدم نفس قواعد التكامل غير المحدود ونعوض

الحد الأعلى − الحد الادنى

مثال ①

اوجد $\int_{2}^{3} س \, ءس$

الحل

$$= \left[\frac{س^{2}}{2} \right]_{2}^{3}$$

$$= \left(\frac{(3)^{2}}{2} \right) - \left(\frac{2^{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

مثال ②

$$\int_{-1}^{2} س^{5} \, ءس = \left[\frac{س^{6}}{6} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^{6}}{6} \right) - \left(\frac{(-1)^{6}}{6} \right) = \frac{64}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{63}{6}$$

مثال ③

جد $\int_{-1}^{-2} \left(\frac{3}{س^{4}} + 2س^{4} \right) ءس$

$$= \left[\frac{3س^{-3}}{-3} + \frac{2س^{5}}{5} \right]_{-1}^{-2}$$ ضاللابد التجهيز للتعويض

$$= \left[-\frac{1}{س^{3}} \right]_{-1}^{-2} = -\frac{1}{(-2)^{3}} - \left(-\frac{1}{(-1)^{3}} \right)$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$$

مثال ④

اوجد $\int_{1}^{2} \frac{1}{س^{4}} \, ءس$

الحل

$$\int_{1}^{2} س^{-4} \, ءس = \left[\frac{س^{-3}}{-3} \right]_{1}^{2} = \left[-\frac{1}{3س^{3}} \right]_{1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3(2)^{3}} - \left(-\frac{1}{3(1)^{3}} \right) = -\frac{1}{24} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{-1+8}{24} = \frac{7}{24}$$

مكتبة الوسام AL-WESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤
اوجد قيمة $\int_{1}^{4} \sqrt{س}\, د س$

الحل
$\int_{1}^{4} \sqrt{س}\, د س = \int_{1}^{4} س^{\frac{1}{2}} د س$
$= \left[\frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} = \frac{2}{3} \left[(\sqrt{س})^3\right]_{1}^{4}$
$= \frac{2}{3} (4)^3 - \frac{2}{3} (1)^3$
$= \frac{2}{3} \times 8 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}$
$= \frac{14}{3}$

مثال ⑥
اوجد قيمة $\int_{1}^{8} س^{-\frac{4}{3}} د س$

الحل
$= \left[-3 س^{-\frac{1}{3}}\right]_{1}^{8} = \left[\frac{-3}{\sqrt[3]{س}}\right]_{1}^{8}$
$= \frac{-3}{\sqrt[3]{8}} - \frac{-3}{\sqrt[3]{1}} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{1}$
$= \frac{-3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{3}{2}$

مثال ⑦
اوجد قيمة التكاملات الآتية
① $\int_{-1}^{2} (3س^2 + 4س - 1)\, د س$
←

الحل
$= \left[س^3 + 2س^2 - س\right]_{-1}^{2}$
$= (2^3 + 2(2)^2 - 2) - ((-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1))$
$= (8 + 8 - 2) - (-1 + 2 + 1)$
$= 14 - 2 = 12$

② $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{8}\, د س = \frac{1}{8} (-1 - (-3))$
$= \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$

③ $\int_{1}^{8} \frac{-1}{\sqrt[3]{س^2}}\, د س$
$= \int_{1}^{8} -1 \times س^{-\frac{2}{3}}\, د س = -1 \left[3 س^{\frac{1}{3}}\right]_{1}^{8}$
$= -3 \left[(\sqrt[3]{س})^1\right]_{1}^{8}$
$= -3 (\sqrt[3]{8})^1 - (-3 (\sqrt[3]{1})^1)$
$= -6 \times 2 + 3 = -12 + 3$
$= -9$

④ $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{س^2} + \sqrt{س}\right) د س$
الحل
$= \int_{1}^{4} (س^{-2} + س^{\frac{1}{2}})\, د س$
$= \left[\frac{س^{-1}}{-1} + \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4}$
$= \left[-\frac{1}{س} + \frac{2}{3} (\sqrt{س})^3\right]_{1}^{4}$
←يتبع

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

$= (\frac{-1}{4} + \frac{5}{2} \times 8) - (\frac{-1}{1} + \frac{5}{2})$

$= \frac{-1}{4} + \frac{16}{3} + 1 - \frac{5}{3} =$

$= \frac{-1}{4} + \frac{14}{3} + 1 =$ توحيد المقام

$\frac{-1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{14 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3}{12} = \frac{56}{12} + \frac{3}{12} + \frac{12}{12}$

$= \frac{65}{12}$

مثال ⑧

جد قيمة التكاملات التالية

① $\int_{1}^{1} (س+1)(س-3)\,دس$

الحل

$\int_{1}^{1} (س^2 - 3س + س - 3)\,دس$

$= \int_{1}^{1} (س^2 - 2س - 3)\,دس = \left[\frac{س^3}{3} - س^2 - 3س\right]_{1}^{1}$

$= (\frac{1}{3} - 1 - 3) - (0)$

$= \frac{1}{3} - \frac{4}{1} = \frac{1}{3} - \frac{12}{3} = \frac{-11}{3}$

---

② $\int_{-1}^{1} س(س^2 - 2)\,دس$

الحل

$= \int_{-1}^{1} (س^3 - 2س)\,دس$

$= \left[\frac{س^4}{4} - س^2\right]_{-1}^{1} = (\frac{1}{4} - 1) - (\frac{1}{4} - 1)$

$= \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} + 1 =$ صفر

أمثلة على إيجاد الثوابت

مثال ① لـ ع

إذا كان $\int_{ع}^{س} دس = ٣ع$ فأوجد لـ ع ؟

الحل

$\left[\frac{س}{ع}\right]_{ع}^{لـ} = ٣ع$

$\Leftarrow \frac{لـ^2}{2} - \frac{ع^2}{2} = ٣ع \Leftarrow \frac{لـ^2}{2} = ٣ع$

$\Leftarrow لـ^2 = ٦٤ \Leftarrow لـ = \pm\sqrt{٦٤} = \pm ٨$

مثال ⑦

$\int_{P}^{4} ٤س^3\,دس = ١٦$ أوجد قيمة P ؟

الحل

$\left[\frac{٤س^4}{4}\right]_{P}^{4} = ١٦$

$4^4 - P^4 = ١٦ \Leftarrow ٢٥٦ - P^4 = ١٦$

$P = \sqrt[4]{٢٤٠} = \pm ٢$

مثال ③

إذا كان $\int_{1}^{لـ} ٣س^2\,دس = ٢٦$

أوجد قيمة لـ ؟

الحل

$\left[\frac{٣س^3}{3}\right]_{1}^{لـ} = ٢٦$

$لـ^3 - 1 = ٢٦$

$لـ^3 = ٢٧ \quad لـ = \sqrt[3]{٢٧} = ٣$

مكتبة الإسكندرية ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

مثال ④ جـ

اذا كان $\int_{3}^{جـ} 3س^2 ds = -35$

اوجد قيمة جـ ؟

الحل

$= [س^3]_{3}^{جـ} = -35$

$جـ^3 - 27 = -35$

$جـ^3 = -8 \Leftarrow جـ = \sqrt[3]{-8} = -2$

مثال ⑤

اذا كان $\int_{1}^{م} 5س^4 ds = -31$

فما قيمة م ؟

الحل

$= [س^5]_{1}^{م} = -31$

$م^5 - 1 = -31$

$م^5 = -32 \Leftarrow م = -2$

تدريب ① ص١٦٩

جد قيمة كل مما يأتي

① $\int_{4}^{1} \frac{6}{\sqrt{س}} ds$

الحل

$\int_{4}^{1} 6 س^{-\frac{1}{2}} ds = [6 \times 2 س^{\frac{1}{2}}]_{4}^{1}$

$= [12\sqrt{س}]_{4}^{1} = 12\sqrt{1} - 12\sqrt{4}$

$= 12 - 12 \times 2 = 12 - 24 = -12$

② $\int_{1}^{2} 14 (س)^{\frac{3}{2}} ds$

الحل

$= 14 \times \frac{2}{5} [س^{\frac{5}{2}}]_{1}^{2}$

$= 6 [س^{\frac{5}{2}}]_{1}^{2} = 6 - 0 = 6$

تدريب ② ص١٧٠

اذا كان $\int_{1}^{2} (ا س + ب) ds = 5$

$\int_{1}^{2} (ا س + ب) ds = 4$

جد قيمة $\int_{1}^{2} (ا س - ب) ds$

الحل $= \int_{1}^{2} (ا س + ب) ds - \int_{1}^{2} 2ب ds$

$= 4 - 2ب (2 - 1) = 4 - 2ب = 8$

تدريب ③ ص١٧٠

$\int_{1}^{3} 6س^2 ds = [2س^3]_{1}^{3} = 9$

$\int_{1}^{3} 6س^2 ds = 9$

$\Leftarrow 2ج^3 - 2 = 9 \Leftarrow 2ج^3 = 12$

$\Leftarrow ج^3 = 8 \Leftarrow ج = 2$

مكتبة العلم AlIlmLib
المعلم ناجح الجمزاوي

الأسئلة

ف ١ / ٧

① احسب قيمة كل مما يأتي

(ب) $\int_{-2}^{6} -2\,ds = -2(6-(-1)) = -14$

(ج) $\int_{1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{8s}}\,ds = \int_{1}^{8} \frac{1}{2}\,s^{-\frac{1}{3}}\,ds$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\left[s^{\frac{2}{3}}\right]_{1}^{8}$

$= \frac{3}{4}\left((8)^{\frac{2}{3}} - (1)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{4}(4-1) = \frac{9}{4}$

(د) $\int_{-2}^{2} (s+1)(3-s^2)\,ds$

$= \int_{-2}^{2} (3s^2 + 2s - s^3 - 2)\,ds$

$= \int_{-2}^{2} (3s^2 - s^3 + s - 2)\,ds$

$= \left[s^3 - \frac{s^4}{4} + \frac{s^2}{2} - 2s\right]_{-2}^{2}$

$= (8 - 4 + 2 - 4) - (-8 - 4 + 2 + 4)$

$= 2 - 4 - 8 + 4 = -6$

(هـ) $\int_{1}^{2} (7 + 2s^4 - 5s^3 + 8s^2 + s)\,ds$

$= \left[7s + \frac{2s^5}{5} - \frac{5s^4}{4} + \frac{8s^3}{3} + \frac{s^2}{2}\right]_{1}^{2}$

$= 14 + \frac{64}{5} - 20 + \frac{64}{3} + 2 - \left(7 + \frac{2}{5} - \frac{5}{4} + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right)$

$= 8 + \frac{64}{5} - \frac{2}{5} + 20 - \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - 7 - \frac{1}{2} + \frac{5}{4}$

$= 21 + \frac{62}{5} - \frac{72}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4}$

$= 21 + 12.4 - 24 - 0.5 + 1.25 = 10.15$

② إذا كان $\int_{1}^{m} 4\,ds = 0$ جد قيمة الثابت م ؟

الحل

$4(m+1) = 0 \Leftarrow 4m + 4 = 0$

$4m = -4 \longleftarrow m = -1$

③ إذا كان الاقتران f معرفاً على الفترة $[1, 5]$ وكان $f(s) = 2s + 1$ جد قيمة $f(5) - f(1)$

الحل

$f(5) - f(1) = \int_{1}^{5} f'(s)\,ds$

$= \int_{1}^{5} (2s + 1)\,ds = \left[s^2 + s\right]_{1}^{5}$

$= 25 + 5 - (1 + 1)$

$= 30 - 2 = 28$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ اجب قيمة التكامل

$\int_{-2}^{2} (٤س - ٦س^{٢} + ٣)\, دس$

الحل

$[٢س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣س]_{-٢}^{٢}$

= صفر

---

⑤ اجب قيمة كل من التكاملات التاليه

(أ) $\int_{١}^{٢} ٣س^{٣}(٤ - ٢س^{٢})\, دس$

الحل $\int_{١}^{٢} (١٢س^{٣} - ٦س^{٣})\, دس$

$= [\frac{١٢س^{٤}}{٤} - \frac{٦س^{٤}}{٤}]_{١}^{٢}$

$= [٣س^{٤} - \frac{٣}{٢}س^{٤}]_{١}^{٢}$

$= (٤ \times ٢ - \frac{٣}{٢} \times ١٦) - (٣ - \frac{٣}{٢})$

$= (٤ \times ٢ - ٤) - ٦ + \frac{٣}{٢} = -٦ + \frac{٣}{٢}$

$= \frac{-١٢}{٢} + \frac{٣}{٢} = \frac{-٩}{٢}$

(ب) $\int_{-١}^{١} (٢ - ٣س)^{٢}\, دس$

فك الأقواس

$= \int_{-١}^{١} (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\, دس$

$= [\frac{٤س^{٣}}{٣} - \frac{١٢س^{٢}}{٢} + ٩س]_{-١}^{١}$

$(\frac{٤}{٣} - ٦ + ٩) - (-\frac{٤}{٣} - ٦ - ٩)$

$= \frac{٤}{٣} + ٦ + \frac{٤}{٣} + ٩ = \frac{٨}{٣} + ١٥ = \frac{٥٤}{٣} = \frac{٦٣}{٣}$

---

⑥ $\int \frac{س^{٢} + ٦س - ٧}{س - ١}\, دس$

$= \int \frac{(س + ٧)(س - ١)}{س - ١}\, دس$

$= \int (س + ٧)\, دس$

$= [\frac{س^{٢}}{٢} + ٧س]$

$= \frac{٤}{٢} - ١٤ - ٠ = ٢ - ١٤$

$= -١٢$

---

⑦ اذا كان

$\int_{٥}^{٢} و'(س)\, دس = ١٣$ وكان

$و(٥) = -١٧$ ، جد قيمة $و(٢)$

الحل

$\int_{٥}^{٢} و'(س)\, دس = و(٢) - و(٥) = ١٣$

$و(٢) - -١٧ = ١٣$

$و(٢) + ١٧ = ١٣$

$-١٧ \quad -١٧$

$و(٢) = -٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٧) شتوية

① اذا علمت ان $\int_{-}^{} (٦س - ٥)\,دس$ فان $\int_{١}^{٢} (س)\,دس$ =

أ) -٢ ب) صفر ج) ١ د) ٦

الحل

① مشتقة التكامل المحدود = صفر

② اذا علمت ان $\int_{}^{هـ} ٣س^{٢}\,دس = ٨$

حيث هـ ثابت

الحل

$= [س^{٣}]_{}^{هـ} = ٨$

$هـ^{٣} = ٨ \Leftarrow هـ = ٢$

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان $\int_{١}^{٢} (س)\,دس = ١٠$ ، $\int_{١}^{٣} (س)\,دس = ٦$

فاوجد $\int_{٢}^{٣} (س)\,دس$

أ) ٢ ب) -٤ ج) ٤ د) ١٦

الحل

$\int_{٢}^{٣} (س)\,دس = \int_{١}^{٣} (س) - \int_{١}^{٢}$

$= ٦ - ١٠ = -٤$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $\int_{١}^{جـ} (٢س + ٣)\,دس = ٦$

حيث جـ ثابت

الحل

$[س^{٢} + ٣س]_{}^{هـ} = ٦$

$هـ^{٢} + ٣هـ - ٤ = ٦$

$هـ^{٢} + ٣هـ - ١٠ = ٠$

$(هـ + ٥)(هـ - ٢) = ٠$

$هـ = -٥ \quad هـ = ٢$

وزارة (٢٠١١) شتوية

جد $\int_{}^{١} (٨س + س)\,دس$

الحل ١

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} + س)\,دس$

$= \left[\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}س^{٢}\right]_{}^{١}$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - (٠)$

$= \frac{٤}{٦} + \frac{٣}{٦} = \frac{٧}{٦}$

مكتبة الإسكندر ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا علمت ان هـ(س) متصل وكان
هـ(١) = -٣ ، هـ(٢) = ١ فان
$\int_1^2$ هـ(س) دس =
أ) -٤ ب) ٢ ج) ٤ د) -٢

الحل
$\int_1^2$ هـ(س) دس = هـ(٢) - هـ(١)
= ١ - -٣ = ٤
(ج)

وزارة (٢٠١٣) شتوية

①
اذا كان هـ(١) = ٦ ، هـ(٣) = ٨
فان $\int_1^3$ هـ(س) دس =
أ) صفر ب) ٢ ج) -٤ د) ١٤

الحل = هـ(٣) - هـ(١)
= ٨ - ٦ = ٢ (ب)

② $\int_1^{\sqrt{س}}$ دس =
أ) ١ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) ٢

الحل $\int_1^{س^{\frac{1}{2}}}$ دس = $\left[\frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{\cdot}$
= $\frac{2}{3}$ (ب)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $\int_1^{ح}$ ٣س دس = -٦ فان ح =
أ) -٣ ب) ٣ ج) -١ د) ١

الحل
٣(ح - ١) = -٦
ح - ١ = $\frac{-6}{3}$ = -٢
ح = -٢ + ١ = -١ (ج)

وزارة (٢٠١٤) شتوية

$\int_1^{\cdot}$ (٦$\sqrt{س}$ + ٣س$^{\frac{1}{2}}$) دس

الحل
$\int_1^{\cdot}$ (س$^{\frac{1}{2}}$ + ٣س$^{\frac{1}{2}}$) دس
= $\left[\frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{\cdot}$
= $\frac{2}{3}$ + ١ = $\frac{5}{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٥) شتوية

① اذا كان ق(س) متصلاً وكان
ق(١) = ٤ ، ق(٤) = ١٢

$\int_1^4 p\, ق'(س)\, دس = ١٦$ p ثابت جد p؟

الحل

$\int_1^4 p\, ق'(س)\, دس = ١٦$

$p\,(ق(٤) - ق(١)) = ١٦$

$p\,(١٢ - ٤) = ١٦$

$٨p = ٦ \Leftarrow p = \frac{١٦}{٨} = ٢$

② اوجد $\int س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٤}\, دس$

الحل $= \int س^{٢}(س^{٦} - ٤\sqrt{٢} + ١)\, دس$

$= \int (س^{٨} - ٤\sqrt{٥} + س^{٢})\, دس$

$= \left[\frac{س^{٩}}{٩} - \frac{٤\sqrt{٦}}{٩} + \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}$

$= \frac{١}{٩} \quad \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٩}$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

قيمة $\int_{٨}^{٤} دس =$

أ) ٤ ب) ٥ - ٤ ج) صفر د) -١٦

الحل

$٤(٤ - ٨) = ٤ \times -٤ = -١٦$ ⑦

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

خصائص التكامل المحدود

الخاصية الاولى

الخصائص الخطية

① $\int_{أ}^{ب} جـ\, و(س)\, دس = جـ \int_{أ}^{ب} و(س)\, دس$

② $\int_{أ}^{ب} (و(س) \pm هـ(س))\, دس$

$= \int_{أ}^{ب} و(س)\, دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, دس$

يتوزع التكامل على عمليتي الجمع والطرح

مثال ①

① $\int_{1}^{3} ٣س^{٢}\, دس = ٣ \int_{1}^{3} س^{٢}\, دس$

$= ٣ \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{1}^{3}$

$= ٣ \left(\frac{٢٧-١}{٣}\right) = ٢٦$

② $\int_{٠}^{١} (س-١)^{٢}\, دس$

$= \int_{٠}^{١} (س^{٢} - ٢س + ١)\, دس$

$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٢س^{٢}}{٢} + س\right]_{٠}^{١}$

$= \left(\frac{١}{٣} - ١ + ١\right) - (٠) = \frac{١}{٣}$

③ $\int_{-٣}^{-١} \frac{٤س^{٣} - ٢س^{٢} - ١}{س^{٢}}\, دس$

الحل

$= \int_{-٣}^{-١} \left(\frac{٤س^{٣}}{س^{٢}} - \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٢}}\right) دس$

$= \int_{-٣}^{-١} (٤س - ٢ - س^{-٢})\, دس$

$= \left[\frac{٤س^{٢}}{٢} - ٢س - \frac{س^{-١}}{-١}\right]_{-٣}^{-١}$

$= \left[٢س^{٢} - ٢س + \frac{١}{س}\right]_{-٣}^{-١}$

$= (٢(-١)^{٢} - ٢(-١) + \frac{١}{-١}) - (٢(-٣)^{٢} - ٢(-٣) + \frac{١}{-٣})$

$= (٢ + ٢ - ١) - (١٨ + ٦ - \frac{١}{٣})$

$= ٣ - ٢٤ + \frac{١}{٣} = -\frac{٦٩}{٣}$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ②
احسب قيمة $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{س^2}\, دس$

الحل
$\int_{-1}^{8} س^{\frac{2}{3}}\, دس = \left[3 س^{\frac{1}{3}} \right]_{-1}^{8}$
$= 3 \sqrt[3]{س} \Big]_{-1}^{8} = 3 (\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{-1})$
$= 3 (2 - (-1)) = 3 \times 3 = 9$

مثال ③
احسب قيمة
$\int_{1}^{} (3\sqrt{س} - 4\sqrt[3]{س})\, دس$
$= \int_{1}^{} (3 س^{\frac{1}{2}} - 4 س^{\frac{1}{3}})\, دس$
$= \left[3 \times \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4 \times \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} \right]_{1}$
$= (2 - 3) - (0) = -1$

مثال ④
اذا كان $\int_{1}^{5} د(س)\, دس = 16$ فجد
ⓐ $\int_{1}^{5} 2 د(س)\, دس$
ⓑ $\int_{1}^{5} -\frac{1}{8} د(س)\, دس$
ⓒ $\int_{1}^{5} (3 د(س) + 4س - 3)\, دس$

الحل
ⓐ $= 2 \int_{1}^{5} د(س)\, دس = 2 \times 16 = 32$
ⓑ $= -\frac{1}{8} \int_{1}^{5} د(س)\, دس = -\frac{1}{8} \times 16 = -2$
ⓒ توزيع التكامل
$= 3 \int_{1}^{5} د(س)\, دس + \int_{1}^{5} (4س - 3)\, دس$
$= 3 \times 16 + \left[\frac{4س^2}{2} - 3س \right]_{1}^{5}$
$= 48 + (50 - 15) - (2 - 3)$
$= 48 + 35 + 1 = 84$

مثال ⑤
اذا كان $\int_{-1}^{2} (2 د(س) - 1)\, دس = 18$
فجد $\int_{-1}^{2} د(س)\, دس$

الحل
$\int_{-1}^{2} 2 د(س)\, دس - \int_{-1}^{2} 1\, دس = 18$
$2 \int_{-1}^{2} د(س)\, دس - (2 - (-1)) = 18$
$2 \int_{-1}^{2} د(س)\, دس - 3 = 18$
$+3 \quad +3$
$2 \int_{-1}^{2} د(س)\, دس = 21$
$\int_{-1}^{2} د(س)\, دس = \frac{21}{2}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

الخاصية الثانيه

① $\int_{م}^{م} د(س)\,دس = صفر$

التكامل من العدد نفسه = صفر
أو اذا تساوت حدود التكامل فان قيمة التكامل = صفر .

② $\int_{م}^{ن} د(س)\,دس = -\int_{ن}^{م} د(س)\,دس$

اذا قلبنا حدود التكامل فاننا نعكس اشارة التكامل .

ملاحظه هامه

- اذا كان ناتج التكامل = صفر فليس بالضرورة ان الحد الأدنى = الحد الأعلى
- انتبه لحدود التكامل

مثال ⑥

اذا كان $د(س) = ٣س^{٢}$

أ) $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس = ٨$ فاوجد

ب) $\int_{١}^{٢} (٢د(س) + ٣هـ(س))\,دس$

الحل

$\int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس = ٨ \Leftarrow \int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس = \frac{٨}{٢} = ٤$

$\int_{١}^{٢} د(س)\,دس + ٣\int_{١}^{٢} هـ(س)\,دس$

$= \int_{١}^{٢} ٣س^{٢}\,دس + ٣ \times ٤$

$= [س^{٣}]_{١}^{٢} + ١٢$

$= ٨ - ١ + ١٢ = ١٤$

مثال ⑦

اذا كان $\int_{١}^{٣} (د(س) + هـ(س))\,دس = ١٣$

وكان $\int_{٣}^{٥} د(س)\,دس = ٥$ جد

$\int_{٣}^{٥} هـ(س)\,دس$

الحل

$\int_{٣}^{٥} د(س)\,دس + \int_{٣}^{٥} هـ(س)\,دس = ١٣$

$٥ + \int_{٣}^{٥} هـ(س)\,دس = ١٣$

$\int_{٣}^{٥} هـ(س)\,دس = ١٣ - ٥ = ٨$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال ①

اوجد التكاملات الاتية

① $\int_{1}^{5} \frac{س^{2}+س}{س^{3}}$ دس = صفر

② $\int_{-2}^{2} (٦س^{2}+٥س^{3}-\frac{٤}{س})$ دس

الجواب = صفر

مثال ②

اذا كان $\int_{٣}^{٤} ق(س)$ دس = ٤ فاوجد

① $\int_{٣}^{٢} ق(س)$ دس = -٤

② $\int_{٣}^{٤} ٤ ق(س)$ دس

الحل ٤ $\int_{٣}^{٢} ق(س)$ دس = ٤×-٤
$= -١٦$

③ $\int_{-٢}^{٢} ق(س)$ دس

الكل = صفر

مثال ③

اذا كان $\int_{٢}^{٥} ق(س)$ دس = ١٢

فان $\int_{٥}^{٣} ق(س)$ دس =

أ) -١٢ ب) ٦ ج) -٦ د) ١٢

الحل

$\frac{١}{٢} \int_{٢}^{٥} ق(س)$ دس $= \frac{١٢}{٢} = ٦$

$\int_{٥}^{٢} ق(س)$ دس $= -٦$ ج

مثال ④

اذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)$ دس = ٦ وكان

$\int_{-١}^{٣} \frac{ع(س)}{٢}$ دس $= -٥$ فاوجد

① $\int_{-١}^{٣} (٤ق(س) - ع(س))$ دس

② $\int_{-١}^{٣} (٦س^{٢} - ٣ع(س) + ٢)$ دس

الحل

$\int_{٣}^{٢} ع(س)$ دس $= -٥ \times ٢ = -١٠$

$\int_{-١}^{٣} ع(س)$ دس $= ١٠$

مكتبة الرسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

①
$\int_{-1}^{2} ه(س)\,د س - \int_{-1}^{3} ع(س)\,د س$

$= ٤ \times ٦ - ١٠ = ٢٤ - ١٠ = ١٤$

②
$\int_{-1}^{3} ٦ س^{٢}\,د س - \int_{-1}^{2} ع(س)\,د س + \int_{1}^{2} ٢\,د س$

$\left[\frac{٦ س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٢} - ٣٠ \times ١٠ + ٢ (٣ - (-١))$

$٥٤ + ٢ - ٣٠ + ٨ = ٣٤$

مثال ⑤
إذا كان $\int_{٣}^{٥} ه(س)\,د س = -٥$
فأوجد $\int_{٣}^{٥} (٢ ه(س) - ٧)\,د س$

الحل
$\int_{٣}^{٥} (٢ ه(س) - ٧)\,د س$

$= ٢ \int_{٣}^{٥} ه(س)\,د س - \int_{٣}^{٥} ٧\,د س$

$= ٢ \times -٥ - ٧ (٥ - ٣)$ (انشئ للحدود)

$= -١٠ - ١٤ = -٢٤$

مثال ⑥
إذا كان $\int_{٣}^{١} ٢ ه(س)\,د س = ٨$
فأوجد $\int_{١}^{٣} (١ - ه(س))\,د س$

الحل
$= \int_{١}^{٣} ١ \,د س - \int_{١}^{٣} ه(س)\,د س$ (انشئ لحدود المطلوب)

$= ١ (٣ - ١) - ٤ = ٢ + ٤ = ٦$ لأن $\int_{١}^{٣} ه(س) = \frac{٨}{٢} = ٤$

مثال ⑦
إذا كان $\int_{٢}^{٤} ه(س)\,د س = ٨ - ٤ ح$
فأوجد قيمة ح

الحل
$٤ ح - ٨ = ٠ \quad ٤ ح = ٨$
$ح = ٢$

مثال ⑧
إذا كان $\int_{١}^{٣} (س^{٢} + ح س + ٩)\,د س = ٣٠$
فما قيمة الثابت ح ؟

الحل
$\left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{ح س^{٢}}{٢} + ٩ س\right]_{١}^{٣} = ٣٠$

$٩ + \frac{٩ ح}{٢} + ٢٧ = ٣٠$

$\frac{٩ ح}{٢} + ٣٦ = ٣٠$

$-٣٦ \quad -٣٦$

$\frac{٩ ح}{٢} = -٦$

$٩ ح = -١٢$

$ح = -\frac{٤}{٣}$

مكتبة الوسام العلمية AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

إذا كان $\int_1^4 (3 + ق(س))\,دس = 10$

وكان $\int_4^1 ق(س)\,دس = 12$ أوجد $ق$؟

الحل

$$\int_1^4 ق(س)\,دس + \int_1^4 3\,دس = 10$$

$$\int_1^4 ق(س)\,دس + 3(4-1) = 10$$

$$\int_1^4 ق(س)\,دس = 10 - 9 = 1$$

$$\Leftarrow \int_4^1 ق(س)\,دس = -1$$

$$\Leftarrow ق \times -6 = 12 \Leftarrow ق = \frac{12}{-6} = -2$$

مثال ⑩

إذا كان $\int_ج^ق س\,دس = 0$ حيث $ق \neq ج$؟

الحل

صنا ليس شرطا ان $ق = ج$

$$= \left[\frac{س^2}{2}\right]_ج^ق$$

$$ق^2 - ج^2 = 0$$

$$ق^2 = ج^2 \Leftarrow ق = \pm ج$$

مثال ⑪

إذا كان $\int_1^ق (3س^2 + 2)\,دس = 0$

حيث $ق$ قيمة $ج$

الحل

$$\int_1^ق (3س^2 + 2)\,دس = \left[س^3 + 2س\right]_1^ق = 0$$

$$ق^3 + 2ق - 3 = 0$$

$$(ق - 1)(ق^2 + ق + 3) = 0$$

$$ق = 1 \qquad ق^2 + ق + 3 = 0$$

مثال ⑫

إذا كان $\int_3^ق (2س^2 - 9)\,دس = -10$

حيث $ق$ قيمة $ج$

الحل

$$\left[\frac{2س^3}{3} - 9س\right]_3^ق = -10$$

$$\frac{2ق^3}{3} - 9ق - (-27) = -10$$

$$2ق^3 - 27ق + 27 = -30$$

$$2ق^3 - 27ق + 57 = 0$$

$$(ق - 3)(2ق^2 + 6ق - 19) = 0$$

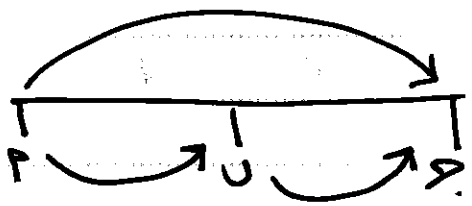
$$ق = 3 \Leftarrow ق = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الخاصية الثالثة

خاصية الاضافة

اذا كان أ ، ب ، جـ اعداد حقيقية
فان
$$\int_{أ}^{جـ} و(س)\,د س = \int_{أ}^{ب} و(س)\,د س + \int_{ب}^{جـ} و(س)\,د س$$



مثال ①
اذا كان $\int_{-٢}^{٨} و(س)\,د س = ١٩$ ، $\int_{-٢}^{٥} و(س)\,د س = ٨$
اوجد $\int_{٥}^{٨} و(س)\,د س$ ؟

الحل
باستخدام خاصية الاضافة

$$\int_{٥}^{٨} = \int_{-٢}^{٨} + \int_{-٢}^{٥}$$

(٨ الأعلى) (-٢ الوسط) (-٢ ، ٥ الأدنى)

ضعنا
① نكتب المطلوب
② نرتب الحدود ، الاصغر الوسط ، الأكبر
③ نعوض مع الانتباه للحدود

$$\int_{٥}^{٨} و(س)\,د س = \int_{-٢}^{٨} و(س)\,د س + \int_{-٢}^{٥} و(س)\,د س$$
$$= -٨ + ١٩ = ١١$$

مثال ②
اذا كان $\int_{٣}^{٢} ٥\,و(س)\,د س = -٥$
$\int_{٣}^{٦} ٤\,و(س)\,د س = ٨$ ، أوجد $\int_{٣}^{٦} ٥\,و(س)\,د س$

الحل
بتجهيز $\frac{٥}{٥}$
$$\int_{٣}^{٢} و(س)\,د س = \frac{-٥}{٥}$$
$$\Leftarrow \int_{٣}^{٢} و(س)\,د س = -١$$
$$\int_{٣}^{٦} ٤\,و(س)\,د س = ٨ \Leftarrow \int_{٣}^{٦} و(س)\,د س = ٢$$

المطلوب $\int_{٣}^{٦} ٥\,و(س)\,د س$ ← خاصية الاضافة
$$= ٥\left(\int_{٣}^{٢} و(س)\,د س + \int_{٢}^{٦} و(س)\,د س \right)$$
$$= ٥(-١ + ٢) = ٥ \times ١ = ٥$$

مثال ③
اذا كان $\int_{-١}^{٢} و(س)\,د س = ٩$
وكان $\int_{-٢}^{١} ٣\,و(س)\,د س = ١٨$ جد $\int_{-٢}^{٢} و(س)\,د س$

الحل
$$\int_{-٢}^{٢} و(س)\,د س = ٣\left(\int_{-٢}^{١} و(س)\,د س + \int_{-١}^{٢} و(س)\,د س \right)$$
$$= ٣(-٩ + ١٨) = ٣ \times ٩ = ٢٧$$

وصفات الإبداع ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

اذا كان $\int_{1}^{3} 3\,و(س)\,دس = -12$

$\int_{1}^{2} و(س)\,دس = -8$ فجد $\int_{1}^{3} و(س)\,دس$

الحل

بتجزيء $\int_{1}^{2} و(س)\,دس = \frac{-12}{3} = -4$

$\int_{2}^{3} و(س)\,دس = \int_{1}^{3} و(س)\,دس + \int_{1}^{2} و(س)\,دس$

$= -4 + 8 = 4$

④ $\int_{-1}^{4} و(س)\,دس = \int_{-1}^{1} و(س)\,دس + \int_{1}^{4} و(س)\,دس$

$= 6 - 2 = 4$

⑦ $\frac{1}{2}\int_{4}^{1} و(س) + 3س^2$

$\frac{1}{2} \times -6 + [\frac{3س^3}{3}]_{4}^{1}$

$-3 + (1)^3 - (4)^2$

$= -3 - 1 - 64 = -68$

مثال ⑤

اذا علمت ان $\int_{-1}^{4} (3و(س) - 2)\,دس = 8$

وان $\int_{-1}^{2} و(س)\,دس = -2$ فاوجد قيمة

④ $\int_{-1}^{4} و(س)\,دس$ ⑦ $\int_{-1}^{2} \frac{و(س)}{2} + 3س^2$

الحل

بتجزيء $\int_{-1}^{4} 3و(س) - \int_{-1}^{4} 2\,دس = 8$

$3\int_{-1}^{4} و(س) - (2(4) - (-1)) = 8$

$3\int_{-1}^{4} و(س) - 10 = 8$

$3\int_{-1}^{4} و(س) = 18 \Leftarrow \int_{-1}^{4} و(س)\,دس = \frac{18}{3}$

$= 6$

$\int_{-1}^{4} و(س)\,دس = 6$

مثال ⑥

اذا علمت ان $\int_{2}^{6} 3\,و(س)\,دس = 15$

وكان $\int_{6}^{5} (و(س) + 2س)\,دس = 9$

فاوجد $\int_{2}^{5} و(س)\,دس$.

الحل

بتجزيء ① $\int_{2}^{6} و(س)\,دس = \frac{15}{3} = 5$

② $\int_{6}^{5} و(س) + \int_{6}^{5} 2س = 9$

$\int_{6}^{5} و(س)\,دس + [\frac{2س^2}{2}]_{6}^{5} = 9$

$\int_{6}^{5} و(س)\,دس + (25 - 36) = 9$

$\int_{6}^{5} و(س)\,دس = 20$

المطلوب $\int_{2}^{5} و(س)\,دس = \int_{2}^{6} و(س) + \int_{6}^{5} و(س)$

$= 5 + 20 = 25$

مكتبة الإسراء ALISRAA.COM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

تكامل الاقترانات المتشعبه

نستخدم خاصية الاضافة في ايجاد تكامل الاقترانات المتشعبه

مثال ①
اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤س & ٠ \le س < ٢ \\ س^{٢} & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$
اوجد $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س$

الحل

$$\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س = \int_{٠}^{٢} ٤س\,د س + \int_{٢}^{٤} س^{٢}\,د س$$

$$= \left[\frac{٤س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left[٢س^{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٢}^{٤}$$

$$= ٨ + \frac{٦٤}{٣} - \frac{٨}{٣} = ٨ + ٢٠ = ٢٨$$

مثال ②
$ق(س) = \begin{cases} ٥ - ٤س & ٠ \le س < ٣ \\ ٣س^{٢} & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$
جد $\int_{١}^{٥} ق(س)\,د س$

الحل

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\,د س = \int_{١}^{٣} ق(س)\,د س + \int_{٣}^{٥} ق(س)\,د س$$

$$= \int_{١}^{٣} (٥ - ٤س)\,د س + \int_{٣}^{٥} ٣س^{٢}\,د س$$

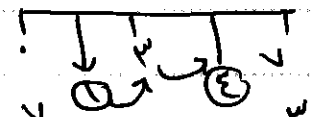
$$= \left[٥س - \frac{٤س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٣} + \left[\frac{٣س^{٣}}{٣}\right]_{٣}^{٥}$$

$$= (١٥ - ٩) - (٥ - ٢) + (١٢٥ - ٢٧)$$

$$= ٦ - ٤ + ٩٨ = ١٠٠$$

مثال ③
اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٦س & ٠ \le س < ٣ \\ ٤ & ٣ \le س \le ٧ \end{cases}$
اوجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\,د س$

الحل



$$\int_{١}^{٤} ق(س)\,د س = \int_{١}^{٣} ٦س\,د س + \int_{٣}^{٤} ٤\,د س$$

$$= \left[\frac{٦س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٣} + ٤(٤ - ٣)$$

$$٣(٣)^{٢} - ٣(١)^{٢} + ١٦$$

$$٢٧ - ٣ + ١٦ = ٤٠$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٧٤

اذا كان $\int_{-1}^{2} ل(س)\,دس = -٢$

$\int_{-1}^{2} ع(س)\,دس = ٥$ جد قيمة كل مما يلي

① $\int_{-1}^{2} \frac{٥ع(س)}{٢}\,دس$

② $\int_{-1}^{2} (٣ع(س) - ٣ل(س) - ٢س)\,دس$

الحل

بالتجهيز

$\int_{-1}^{2} ل(س)\,دس = \frac{-٢}{٢} = -١$

① $\frac{٥}{٢}\int_{-1}^{2} ع(س)\,دس$

$= \frac{٥}{٢} \times ٥ = \frac{٢٥}{٢}$

② $\int_{-1}^{2} ٣ع(س)\,دس - \int_{-1}^{2} ٣ل(س)\,دس - \int_{-1}^{2} ٢س\,دس$

$= ٣ \times ٥ - ٣ \times -١ - [س^٢]_{-١}^{٢}$

$= ١٥ + ٣ - (٤ - ١)$

$= ١٨ - ٣ = ١٥$

تدريب ② ص ١٧٥

اذا كان $\int_{-1}^{٣} \frac{و(س)}{٣}\,دس = ٥$

$\int_{-1}^{٦} و(س)\,دس = ٤$ ، جد قيمة كل مما يلي

① $\int_{٢}^{-١} ٢و(س)\,دس$

② $\int_{٦}^{٢} و(س)\,دس$

الحل

$\int_{-1}^{٣} و(س)\,دس = ١٥$

① $٢\int_{٢}^{-١} و(س)\,دس = ٢ \times ١٥ = -٣٠$

② $\int_{٦}^{٢} ٢و(س)\,دس = \int_{-1}^{٦} و(س)\,دس + \int_{-1}^{٣} و(س)\,دس$

$= -٤ + ١٥ = ١١$

تدريب ③ ص ١٧٥

اذا كان $\int_{٢}^{٥} (٣و(س) - ٤)\,دس = ١٨$

جد $\int_{٢}^{٥} و(س)\,دس$

الحل

$\int_{٢}^{٥} ٣و(س)\,دس - \int_{٢}^{٥} ٤\,دس = ١٨$

$٣\int_{٢}^{٥} و(س)\,دس - ٤(٥-٢) = ١٨$

$٣\int_{٢}^{٥} و(س)\,دس = ١٨ + ١٢ = ٣٠$

$\int_{٢}^{٥} و(س)\,دس = \frac{٣٠}{٣} = ١٠$

مكتبة السيام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ④ ص ١٧٦

① اذا كان $\int_{-٧}^{م^٣+١} (و(س)\,دس = ٠$ حيث م ∈ ح

الحل

$م^٣ + ١ = -٧ \Leftarrow م^٣ = -٨$

$م = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

② اذا كان $\int_{ن}^{١} (٣-٢س)\,دس = ٠$ حيث ن

الحل

$[س^٢ - ٣س]_{ن}^{١} = ٠$

$(١-٣) - (ن^٢ - ٣ن) = ٠$

$-٢ - ن^٢ + ٣ن = ٠$ بالضرب في سالب

$ن^٢ - ٣ن + ٢ = ٠$

$(ن-٢)(ن-١) = ٠$

$ن = ٢$ ، $ن = ١$

الأسئلة

الكتاب ص ١٧٧

① اذا كان $\int_{١}^{٤} و(س)\,دس = ١٢$

$\int_{٤}^{٥} و(س)\,دس = ٤$ حيث كل مما يأتي

④ $\int_{٤}^{١} ٣و(س)\,دس$

الحل $\int_{١}^{٤} و(س)\,دس = ١٢$ تجهيز

$\Leftarrow \int_{١}^{٤} و(س)\,دس = \frac{١٢}{٢} = ٦$ أعطوني المرور

المطلوب $\int_{٤}^{١} ٣و(س)\,دس = ٣ \times -٦$

$= -١٨$

⑤ $\int_{٥}^{١} و(س)\,دس$ (الاضافة)

$= \int_{٥}^{٤} و(س)\,دس + \int_{٤}^{١} و(س)\,دس$

$= -٤ + -٦ = -١٠$

⑥ $\int_{٥}^{٤} (و(س) + ٣س)\,دس$

$= \int_{٥}^{٤} و(س)\,دس + \int_{٥}^{٤} ٣س\,دس$

$= -٤ + [\frac{٣س^٢}{٢}]_{٥}^{٤}$

$-٤ + ١٦ - ٢٥$

$= -١٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ اذا كان $\int_{-1}^{2} \frac{ل(س)}{ء} ءس = ٣$

$\int_{-1}^{2} (هـ(س) + ١) ءس = ٥$ جد

⑤ $\int_{ء}^{-١} هـ(س) ءس$

الحل هنه بعضيات

$\int_{ء}^{-١} هـ(س) + \int_{ء}^{-١} اءس = ٥$

$\int_{ء}^{-١} هـ(س) ءس + ١ × (-١-ء) = ٥$

$\int_{ء}^{-١} هـ(س) ءس = ٥ - ٣ + ٣ + ٣$

$\int_{ء}^{-١} هـ(س) ءس = ٨$

⑥ بتجهيز $\int_{-١}^{ء} ل(س) ءس = ٦$

المطلوب

$\int_{ء}^{-١} ٣ هـ(س) - ٤س + ٣ ل(س) ءس$

$= ٣ \int_{ء}^{-١} هـ(س) - \int_{ء}^{-١} ٤س + ٣ \int_{ء}^{-١} ل(س)$

$= ٣ × ٢ - ٨ - (\frac{٤}{٢}[ء^٢ - (-١)^٢]) + ٣ × ٦$

$= ٦ - ٤ء^٢ + ٤ + ١٨$

$= -٤ء^٢ + ٢٢$

$= -٤ × ٧ + ٢٢ = -٩$

③ اذا كان $\int_{-P}^{P+٧} هـ(س) ءس = ٠$ حيث $P \neq ١$

الحل

$P + ٧ = ١ - P \Leftarrow$

$٤P = -٨ \Leftarrow P = -٢$

④ اذا كان $\int_{٣}^{م} (ء^٢ - ٤س) ءس = ٠$ حيث $م \neq ٣$

الحل

$[ءس^٢ - \frac{٤}{٣}س^٣]_{٣}^{م} = ٠ \Leftarrow$

$ءم^٢ - \frac{٤}{٣}م^٣ - (٦ - ١٨) = ٠$

$ءم^٢ - \frac{٤}{٣}م^٣ + ١٢ = ٠$ بالضرب في -٣

$م^٣ - ٣م - ٩ = ٠$

$(م - ٣)(م + ٣) = ٠$

$م = ٣$

$م = -٣$

⑤ اذا كان $\int_{١}^{٤} (٣هـ(س) - ٥) ءس = ٩$

حيث $\int_{١}^{٤} (هـ(س) + ١) ءس$ جد

الحل $٣ \int_{١}^{٤} هـ(س) - \int_{١}^{٤} ٥ = ٩$

$\Leftarrow ٣ \int_{١}^{٤} هـ(س) - (٥(٤-١)) = ٩$

$\Leftarrow ٣ \int_{١}^{٤} هـ(س) + ١٥ = ٩$

$\Leftarrow \int_{١}^{٤} هـ(س) = \frac{-٦}{٣} = -٢$

المطلوب $\int_{١}^{٤} (٢هـ(س) + ١) ءس$

$= ٢ \int_{١}^{٤} هـ(س) + \int_{١}^{٤} ١ ءس = ٢ × -٢ + ١(٤-١)$

$= -٤ + ٣ = -١$

⑥ $\int_{ء}^{٦} (٤ - س) = ٦$ جد ل

$[٤ء - \frac{س^٢}{٢}]_{ء}^{٦} = ٦ \Leftarrow ل^٢ - ل = ٦$

$ل^٢ - ل - ٦ = ٠ \quad (ل-٣)(ل+٢)$

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

① اذا علمت ان $\int_{2}^{4} ق(س)\,دس = ٤$

$\int_{2}^{4} ٦ ق(س)\,دس = ١٢$ فاوجد $\int_{4}^{3} ق(س)\,دس$

أ) -١٦ ب) ١٦ ج) ٦ د) -٦

الحل

$٦ \int_{2}^{4} ق(س)\,دس = ١٢ \Leftarrow \int_{2}^{4} ق(س)\,دس = \frac{١٢}{٦} = ٢$

$\int_{2}^{3} = \int_{2}^{4} + \int_{4}^{3}$

$= -٢ + -٤ = -٦$ (د)

② اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٤ & ٠ \le س < ٢ \\ ٤س & ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$

فاوجد $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس$

الحل

$\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{٢} س^{٣} - ٤\,دس + \int_{٢}^{٤} ٤س\,دس$

$= \left[\frac{س^{٤}}{٤} - ٤س\right]_{٠}^{٢} + \left[٢س^{٢}\right]_{٢}^{٤}$

$= (٤ - ٨) + ٤ \times ٤ - ٤$

$= ٤ - ٨ + ١٦ - ٤ = ٨$

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان $\int_{١}^{٢} ٣ق(س)\,دس = ١٢$

فان قيمة $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس =$

أ) -٤ ب) ٤ ج) ٢ د) -٣

الحل

$\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = \frac{١٢}{٣} = ٤$

$\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس = -٤$ (أ)

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا علمت ان $\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = ٨$

فاوجد $\int_{ن}^{م} ق(س)\,دس$

أ) -١٦ ب) -٨ ج) ٨ د) ١٦

الحل

$\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = -٨$

$= -١٦$

(النتيجة لحدود التكامل)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

① $\int_{-٤}^{٤} (س^٣ + ٨س - ٢)\,دس =$

أ) صفر ب) ٤ ج) ٨ د) ١٤

الجواب (أ)

② اذا علمت ان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$

فان قيمة $\int_{٥}^{١} ق(س)\,دس$ ، $\int_{٥}^{٣} ق(س)\,دس = ٢$

أ) -٤ ب) ٨ ج) ١٢ د) ٤

الحل

$\int_{١}^{٥} = \int_{١}^{٣} + \int_{٣}^{٥}$

$= ٦ - ٢ = ٤$ (د)

وزارة (٢٠١٠) شتوية

① اذا علمت ان $\int_{ب}^{م} ق(س)\,دس = \frac{٣}{٤}$

فان $\int_{م}^{ب} ق(س)\,دس$ يساوي

أ) $\frac{٣}{٤}$ ب) $-\frac{٣}{٤}$ ج) $\frac{٤}{٣}$ د) $-\frac{٤}{٣}$

الحل $= -\frac{٣}{٤}$ (ب)

② اذا علمت ان $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = ٥$

فان $\int_{٠}^{٢} (ق(س) - ٢)\,دس$ يساوي

أ) ٩ ب) ٣ ج) ١ د) -١

الحل

$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس - \int_{٠}^{٢} ٢\,دس = ٥ - (٢)(٢-٠)$

$= ٥ - ٦ = -١$

(د)

③ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٢ & ١ \le س < ٢ \\ ٤س + ٦ & ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$

فاوجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس$

الحل

$= \int_{١}^{٢} (٣س^٢ - ٢)\,دس + \int_{٢}^{٤} (٤س + ٦)\,دس$

$= [س^٣ - ٢س]_{١}^{٢} + [٢س^٢ + ٦س]_{٢}^{٤}$

$= (٨ - ٤) - (١ - ٢) + (٣٢ + ٢٤) - (٨ + ١٢)$

$= ٤ + ١ + ٤٠ - ١٦$

$= ٢٩$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) صيفية

① اذا كان $\int_{م}^{ن} (ه(س)\,د س = -٣$

$\int_{ن}^{جـ} (ه(س)\,د س = ٤$ فان $\int_{م}^{جـ} (ه(س)\,د س =$

أ) ١ ب) -٧ ج) -١ د) ٧

الحل

$\int_{م}^{جـ} = \int_{م}^{ن} + \int_{ن}^{جـ}$

$= -٣ - ٤ = -٧$ ①

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $\int_{ب}^{جـ} (ه(س)\,د س = ٦$

فان $\int_{جـ}^{ب} (ه(س)\,د س =$

أ) صفر ب) $\frac{١}{٦}$ ج) -٦ د) $\frac{١}{٦}$

الكل $= -٦$ ج

وزارة (٢٠١١) صيفية

① اذا كان $\int_{جـ}^{ا} (ه(س)\,د س = ٥$

$\int_{جـ}^{ا} ٣(ه(س)\,د س = ٩$ فان $\int_{ا}^{ب} (ه(س)\,د س =$

أ) ٤ ب) ٢ ج) -٢ د) -٤

الحل

$\int_{جـ}^{ب} (ه(س)\,د س = \frac{٩}{٣} = ٣$

$\int_{ا}^{جـ} = \int_{ا}^{ب} + \int_{ب}^{جـ}$

$\Leftarrow \int_{ا}^{ب} = \int_{ا}^{جـ} - \int_{ب}^{جـ}$

$= -٥ + ٣ = -٢$ ج

② اذا كان $\int_{ا}^{جـ} \frac{(ه(س)}{جـ}\,د س = ٦$

فاوجد $\int_{ا}^{جـ} (٣س^{٢} + ٣ه(س)\,د س$

الحل

$\int_{ا}^{جـ} ٣س^{٢} + ٣ (ه(س)\,د س$

$س^{٣}]_{ا}^{جـ} + ٣ \times ١٢$ ، بس $\int_{ا}^{جـ} (ه(س) = ٦ \times ٢ = ١٢$

$٨ + ٣٦ = ٤٤$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

① اذا كان $\int_{ا}^{ب} (ه(س)\,د س = ١٠$

فاوجد $\int_{ا}^{ب} (٤س + ه(س)\,د س$

أ) ١٦ ب) ١٩ ج) ١٢ د) ٩

الحل

$\int_{ا}^{ب} (٤س + \int_{ا}^{ب} (ه(س) = س^{٢}]_{ا}^{ب} + \int_{ا}^{ب} (ه(س)$

$٩ + ١٠ = ١٩$ ①

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

④ اذا كان $\int_{-1}^{1} (ه(س)\,دس = ٦$

$\int_{٣}^{١} (ه(س)\,دس = -$ أوجد $\int_{-١}^{٣} (ه(س)+٥)\,دس$

الحل

$\int_{-١}^{٣} (ه(س)\,دس + \int_{-١}^{٣} ٥\,دس$

$= \int_{-١}^{١} (ه(س)\,دس + \int_{١}^{٣} (ه(س)\,دس) + ٥(٣-(-١))$

$= (٦+٢)+٢٠ = ٢٨$

وزارة (٢٠١٢) صيفية

① اذا كان $\int_{٦}^{٧} ٢(ه(س)\,دس = ١٠$

فان قيمة $\int_{٧}^{٦} (ه(س)\,دس$ تساوي

أ) -١٠ ب) ٥ ج) ١٠ د) -٥

الحل

$\int_{٦}^{٧} (ه(س)\,دس = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$\int_{٧}^{٦} (ه(س)\,دس = -٥$ ②

③ اذا كان $\int_{٣}^{٥} \frac{ه(س)}{٢}\,دس = ٤$

$\int_{٩}^{٥} (ه(س)\,دس = ١٢$ فاوجد $\int_{٣}^{٩} (ه(س)-٧)\,دس$

الحل

$\int_{٣}^{٥} (ه(س)\,دس = ٨$

$\Rightarrow \int_{٣}^{٩} (ه(س) - \int_{٣}^{٩} ٧\,دس$

بالاضافة

$\left(\int_{٣}^{٥} (ه(س)\,دس + \int_{٥}^{٩} (ه(س)\,دس\right) - ٧(٩-٣)$

$= (٨ - ١٢) - ٦ \times ٧ = -٤ - ٤٢$

$= -٤٦$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان $\int_{-٢}^{٥} (ه(س)\,دس = ٦$

$\int_{٥}^{-٢} \frac{١}{٢} ع(س)\,دس = ٤$ فاوجد

$\int_{-٢}^{٥} (٣ه(س) + ع(س) - س)\,دس$

الحل

$\int_{-٢}^{٥} ع(س)\,دس = ٤ \times ٢ = ٨$

$٣\int_{-٢}^{٥} (ه(س)\,دس + \int_{-٢}^{٥} ع(س)\,دس - \int_{-٢}^{٥} س\,دس$

$٣ \times ٦ + (-٨) - \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{-٢}^{٥}$

$١٨ - ٨ - \left(\frac{٢٥}{٢} - \frac{٤}{٢}\right)$

$١٠ - \frac{٢١}{٢} = \frac{٢٠}{٢} - \frac{٢١}{٢}$

$= -\frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $\int_{-1}^{6} و(س)\,دس = ٨$

$\int_{-1}^{3} ٢و(س)\,دس = ١٠$ أوجد $\int_{٣}^{6} (و(س)+٣س)$

الحل

$\int_{-1}^{3} ٢و(س)\,دس = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$\Leftarrow$

$\int_{٣}^{6} و(س)\,دس + \int_{٣}^{6} ٣س\,دس$

حالة اضافة

$\left[\int_{-1}^{3} و(س)\,دس + \int_{-1}^{6} و(س)\,دس\right] + [س^٣]_٣^٦$

$(-٥ + ٨) + (٢١٦ - ٩)$

$٣ + ٢٠٧ = ٢١٠$

وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان $\int_{-1}^{6} (٣و(س) - ٢)\,دس = ١٠$

$\int_{٢}^{6} و(س)\,دس = ١٤$ ، أوجد $\int_{-1}^{٢} و(س)\,دس$

الحل

بتجهيز $\int_{-1}^{6} ٣و(س)\,دس - \int_{-1}^{6} ٢\,دس = ١٠$

$٣\int_{-1}^{6} و(س)\,دس - ٢(٦-(-١)) = ١٠$

$٣\int_{-1}^{6} و(س)\,دس - ١٤ = ١٠$

$٣\int_{-1}^{6} و(س)\,دس = ٢٤$

$\Leftarrow \int_{-1}^{6} و(س)\,دس = \frac{٢٤}{٣} = ٨$

المطلوب $\int_{-1}^{٢} و(س)\,دس = \int_{-1}^{6} و(س)\,دس + \int_{٦}^{٢} و(س)\,دس$

$= ٨ + (-١٤) = -٦$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{و(س)}{٢} - ١\right)دس = ٦$

$\int_{٣}^{٥} و(س)\,دس = ١٠$ فأوجد

$\int_{٣}^{٨} (و(س) + ٢س)\,دس$

الحل

بتجهيز $\int_{٣}^{٥} \frac{و(س)}{٢}\,دس - \int_{٣}^{٥} ١\,دس = ٦$

$\frac{١}{٢}\int_{٣}^{٥} و(س)\,دس - (٥-٣) = ٦$

$\frac{١}{٢}\int_{٣}^{٥} و(س)\,دس = ٦ + ٢ = ٨$

$\Leftarrow \int_{٣}^{٥} و(س)\,دس = ١٦$

المطلوب $\int_{٣}^{٨} و(س)\,دس + \int_{٣}^{٨} ٢س\,دس$

$\int_{٣}^{٥} و(س)\,دس + \int_{٥}^{٨} و(س)\,دس + [س^٢]_٣^٨$

$(١٦ - ١٠) + ٦٤ - ٩$

$٦ + ٥٥ = ٦١$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $\int_{1}^{6}(3-هـ(س))دس = 7$

$\int_{2}^{6} هـ(س)دس = -5$ فاوجد

$\int_{1}^{2}(\frac{1}{2}هـ(س) - 4س)دس$

الحل

$\int_{1}^{6} 3 - \int_{1}^{6} هـ(س)دس = 7$

$3(6-1) - \int_{1}^{6} هـ(س)دس = 7$

$15 - \int_{1}^{6} هـ(س)دس = 7$

$\Leftarrow \int_{1}^{6} هـ(س)دس = 15-7 = 8$

المطلوب

$\frac{1}{2}\int_{1}^{2} هـ(س)دس - \int_{1}^{2} 4س دس$

$= \frac{1}{2}\left[\int_{1}^{6} هـ(س)دس + \int_{6}^{2} هـ(س)دس\right] - [2س^2]_1^2$

$= \frac{1}{2}(8+5) - (8-2)$

$= \frac{13}{2} - 6 = \frac{13}{2} - \frac{12}{2}$

$= \frac{1}{2}$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

اذا كان $\int_{1}^{5} هـ(س)دس = 2$

$\int_{2}^{5}(1-هـ(س))دس = 7$ فاوجد

$\int_{1}^{2}(هـ(س) - 6س^2)دس$

الحل

بتجهيز $\int_{2}^{5} 1دس - \int_{2}^{5} هـ(س)دس = 7$

$1(5-2) - \int_{2}^{5} هـ(س)دس = 7$

$3 - \int_{2}^{5} هـ(س)دس = 7$

$\Leftarrow \int_{2}^{5} هـ(س)دس = 3-7 = -4$

المطلوب

$\int_{1}^{2} هـ(س)دس - \int_{1}^{2} 6س^2 دس$

$= \left(\int_{1}^{5} هـ(س)دس + \int_{5}^{2} هـ(س)دس\right) - [3س^3]_1^2$

$= (2+4) - (16+2)$

$= 6 - 18 = -12$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٥) شتوية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & -1 \le س < 2 \\ 4س - 2 & 2 \le س \le 4 \end{cases}$

اوجد $\int_{-1}^{4} ق(س)\,د س$

الحل

$$\int_{-1}^{4} ق(س)\,د س = \int_{-1}^{2} (س^2 + 1)\,د س + \int_{2}^{4} (4س - 2)\,د س$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} + س\right]_{-1}^{2} + \left[2س^2 - 2س\right]_{2}^{4}$$

$$= (8 + 2) - (-\frac{1}{3} - 1) + (32 - 8)$$

$$= 10 + \frac{4}{3} + 24$$

$$= 34 + \frac{4}{3} = \frac{106}{3}$$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

اذا كان $\int_{1}^{7} 4 ق(س)\,د س = 8$

$\int_{5}^{7} ق(س)\,د س = -9$ فاوجد

$\int_{1}^{5} (3ق(س) - \frac{3}{4}س^2)\,د س$

الحل

$$\int_{1}^{7} ق(س)\,د س = \frac{8}{4} = 2$$

$$\int_{1}^{5} ق(س)\,د س + \int_{5}^{7} ق(س)\,د س = 2$$

$$\int_{1}^{5} ق(س)\,د س - 9 = 2$$

$$\int_{1}^{5} ق(س)\,د س = 11$$

$$3\int_{1}^{5} ق(س)\,د س - \int_{1}^{5} \frac{3}{4}س^2\,د س$$

$$= 3(11) - \left[\frac{1}{4}س^3\right]_{1}^{5}$$

$$= 33 - (\frac{125}{4} - \frac{1}{4})$$

$$= 33 - \frac{124}{4} = 33 - 31$$

$$= 2$$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان $\int_{2}^{3} (ق(س) - 4)\,د س = 6$

$\int_{2}^{3} ق(س)\,د س = -1$ فاوجد

$\int_{2}^{3} (ق(س) + 3س^2)\,د س$

الحل

$$\int_{2}^{3} ق(س)\,د س - \int_{2}^{3} 4\,د س = 6$$

$$\int_{2}^{3} ق(س)\,د س - 4 = 6$$

$$\int_{2}^{3} ق(س)\,د س = 10$$

$$\int_{2}^{3} ق(س)\,د س + \int_{2}^{3} 3س^2\,د س$$

$$= (-14 - 1) + (27 - 8)$$

$$= -15 + 19 = 4$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & ، 3 \le س < 4 \\ 5س + 2 & ، 0 \le س < 3 \end{cases}$

اوجد $\int_{0}^{4} ق(س)\, د س$

الحل

$= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{3} (5س + 2)\, د س + \int_{3}^{4} (س^2 + 2)\, د س \right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{5س^2}{2} + 2س \right]_{0}^{3} + \left[\frac{س^3}{3} + 2س \right]_{3}^{4} \right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{45}{2} + 6\right) + \left(\frac{64}{3} + 8\right) - \left(9 + 6\right) \right)$

$= \frac{1}{2}\left(4 + \frac{64}{3} + 8 - 15 \right)$

$= \frac{1}{2}\left(17 + \frac{64}{3} \right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{51}{3} + \frac{64}{3} \right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{115}{3} = \frac{115}{6}$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

① اذا كان $ق$ اقترانا متصلا وكان $\int_{-2}^{2} ق(س)\, د س = 6$

فان $\int_{0}^{2} ق(س)\, د س =$

أ) -3 ب) 3 ج) 0 د) 6

الحل

$\int_{-2}^{2} ق(س)\, د س = 6$

$\int_{-2}^{0} ق(س)\, د س + \int_{0}^{2} ق(س)\, د س = 6$

$3 + \int_{0}^{2} ق(س)\, د س = 6$

$\int_{0}^{2} ق(س)\, د س = 3$

الجواب ب) -3

② اذا كان $\int_{1}^{6} (ق(س) + 2)\, د س = 8$

$\int_{3}^{6} ق(س)\, د س = 10$ فاوجد $\int_{1}^{3} ق(س)\, د س$

الحل

$\int_{1}^{6} ق(س)\, د س + \int_{1}^{6} 2\, د س = 8$

$\int_{1}^{6} ق(س)\, د س + 2 \times (6-1) = 8$

$\int_{1}^{6} ق(س)\, د س = 8 - 10 = -2$

المطلوب

$\int_{1}^{3} ق(س)\, د س = \int_{1}^{6} ق(س)\, د س + \int_{6}^{3} ق(س)\, د س$

$= -2 + -15 = -17$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الدرس الرابع

التكامل بالتعويض

يستخدم التكامل بالتعويض لايجاد تكامل حاصل ضرب أو قسمة اقترانين احدهما مشتقة الآخر

اقتران × مشتقته = ق(س) · ق'(س) ء س

الخطوات

① نفرض ص = ق(س)

② نشتق الطرفين

$\frac{د ص}{د س} = ق'(س)$

③ نجد د س بدلالة د ص

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ق'(س)}{1}$ ضرب تبادلي

د ص = ق'(س) د س

← $د س = \frac{د ص}{ق'(س)}$

④ نحوض في التكامل بدل ق(س) نضع ص بدل د س نضع $\frac{د ص}{ق'(س)}$

= ∫ ص × ق'(س) × $\frac{د ص}{ق'(س)}$

= ∫ ص د ص

⑤ نكامل حسب قواعد التكامل

$= \frac{ص^{2}}{2} + ج$

⑥ نستبدل بدل ص ما تساويه بالـ (س)

$= \frac{(ق(س))^{2}}{2} + ج$

ملاحظة هامة

في التكامل المحدود نجد قيم ص التي تقابل قيم س

الصور العامة للتكامل بالتعويض

① ∫ مشتقة اقتران (اقتران)^{ن} د س

② $\int \frac{\text{مشتقة اقتران}}{(\text{اقتران})^{ن}}$ د س

③ ∫ مشتقة اقتران $\sqrt[ن]{\text{اقتران}}$

④ $\int \frac{\text{مشتقة اقتران}}{\sqrt[ن]{\text{اقتران}}}$

⑤ ∫ مشتقة الزاوية جتا (الزاوية) ، جا (الزاوية)

مكتبة الوسام AlWesam

مثال ①
اوجد $\int 3س^2(س^3+2)^3 \, دس$

الحل
نلاحظ ان ماخارج القوس يساوي مشتقة ماداخل القوس لذلك نستخدم التكامل بالتعويض .
نفرض ص $= س^3+2$
نشتقه الطرفين
$\frac{دص}{دس} = 3س^2 \Leftarrow دص = 3س^2 \, دس$
$\Leftarrow دس = \frac{دص}{3س^2}$ نعوض في التكامل
$\int 3س^2(س^3+2)^3 \, دس$
$= \int 3س^2(ص)^3 \frac{دص}{3س^2}$ نختصر
$= \int ص^3 \, دص$ نجري التكامل
$= \frac{ص^4}{4} + ج$ نستبدل بدل ص ماتساويه بالس
$= \frac{(س^3+2)^4}{4} + ج$

مثال ②
اوجد $\int (6س+2)(3س^2+2س+4)^7 \, دس$

الحل
نلاحظ ان ماخارج القوس يساوي مشتقة ماداخل القوس لذلك نحل بالتعويض
① نفرض ماداخل القوس = ص
ص $= 3س^2+2س+4$
② نشتقه الطرفين
$\frac{دص}{دس} = 6س+2$ نجد دس بدلالة دص
$دس = \frac{دص}{6س+2}$
③ نعوض التكامل بدلالة ص .
$= \int (6س+2)(ص)^7 \frac{دص}{(6س+2)}$
④ الأختصار $= \int ص^7 \, دص$
⑤ التكامل $= \frac{ص^8}{8} + ج$
⑥ ارجاع قيمة ص بدلالة س
$= \frac{(3س^2+2س+4)^8}{8} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

اوجد $\int \frac{٤س - ٤}{(س^٢ - ٤س + ١)^٣} \, دس$

الحل

نلاحظ ان البسط يساوي مشتقة المقام ولكنه ليس بشكل مباشر

مشتقة المقام $= ٢س - ٤ = ٢(س - ٢)$

البسط $= ٤س - ٤ = ٤(س - ١)$

لذلك يحل بالتعويض.

نفرض ص = ما داخل القوس

$ص = س^٢ - ٤س + ١$

$\frac{دص}{دس} = (٢س - ٤) \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س - ٤}$

$\Leftarrow = \int \frac{٤س - ٤}{ص^٣} \times \frac{دص}{٢س - ٤}$

$= \int \frac{٤(س - ١)}{ص^٣} \times \frac{دص}{٢(س - ٢)}$

$= ٢ \int \frac{١}{ص^٣} \, دص = ٢ \int ص^{-٣} \, دص$

$= ٢ \frac{ص^{-٢}}{-٢} + ج$

$= -\frac{١}{ص^٢} + ج$

$= -\frac{١}{(س^٢ - ٤س + ١)^٢} + ج$

ملاحظه هامة

اذا لم يتم الأختصار بشكل مباشر فلا بد أن هناك خطوة أخرى الأغلب اخراج عامل مشترك

مثال ④

اوجد $\int (س^٢ + ١)^٣ \sqrt{س^٣ + ٣س + ٥} \, دس$

الحل

نفرض ص $= س^٣ + ٣س + ٥$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^٢ + ٣$

$\Leftarrow دص = (٣س^٢ + ٣) دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{(٣س^٢ + ٣)}$

$= \int (س^٢ + ١)^٣ \sqrt{ص} \times \frac{دص}{٣س^٢ + ٣}$

$= \int \frac{(س^٢ + ١)^٣ \sqrt{ص}}{٣(س^٢ + ١)} \times دص$ ← اخراج عامل مشترك

$= \frac{١}{٣} \int \sqrt{ص} \, دص = \frac{١}{٣} \int ص^{\frac{١}{٣}} \, دص$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} = \frac{١}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{١}{٤} + (س^٣ + ٣س + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$\int س^3 \sqrt{ج - س^4}\, دس$

الحل

$ص = ج - س^4$

$دص = -٤ س^3 دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{-٤ س^3}$

$= \int \frac{س^3 \sqrt{ص} \times دص}{-٤ س^3}$

$= -\frac{1}{٤} \int \sqrt{ص}\, دص$

$= -\frac{1}{٤} \int ص^{\frac{1}{2}} دص = -\frac{1}{٤} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} ص^{\frac{3}{2}} + ج$

$= -\frac{1}{٦} (ج - س^4)^{\frac{3}{2}} + ج$

مثال ⑥

$\int \frac{س^3}{\sqrt{١٦ + س^2}}\, دس$

الحل

$ص = ١٦ + س^2$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = ١٦ + (٠)^2 = ١٦$

$س = ٣ \Leftarrow ص = ١٦ + ٩ = ٢٥$

استبدلنا الحدود بواسطة الفرض

نشتقه

$دص = ٢ س\, دس$

$دس = \frac{دص}{٢ س}$

$= \int_{١٦}^{٢٥} \frac{س^3}{\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{٢ س}$

$= \frac{1}{2} \int_{١٦}^{٢٥} \frac{1}{\sqrt{ص}}\, دص = \frac{1}{2} \int_{١٦}^{٢٥} ص^{-\frac{1}{2}} دص$

$= \frac{1}{2} \left[ص^{\frac{1}{2}} \times 2 \right]_{١٦}^{٢٥} = \left[\sqrt{ص} \right]_{١٦}^{٢٥} = \sqrt{٢٥} - \sqrt{١٦}$

$= ٥ - ٤ = ١$

مثال ⑦

اوجد $\int س^2$ جتا $(س^2 - ٣)\, دس$

الحل

نفرض ص = الزاوية

$ص = س^2 - ٣$

$دص = ٢ س\, دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٢ س}$

$= \int ص$ جتا ص $\times \frac{دص}{٢ س}$

$= \int$ جتا ص دص

$=$ حا ص $+ ج$

$=$ حا $(س^2 - ٣) + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اوجد ∫ (س٢-١) حا(س٣-٣س) دس

الحل

ص = س٣-٣س

⇐ دص = (٣س٢-٣) دس

⇐ دس = دص / ٣(س٢-١)

∫ (س٢-١) حاص × دص / ٣(س٢-١)

(١/٣) ∫ حاص دص = -(١/٣) جتاص + جـ

= -(١/٣) جتا(س٣-٣س) + جـ

مثال ⑨

جد ∫ جتا(٢س+٦) دس

الحل

ص = ٢س+٦ ⇐ دص = ٢ دس

⇐ دس = دص / ٢

∫ جتاص × دص / ٢

= (١/٢) حاص + جـ

= (١/٢) حا(٢س+٦) + جـ

ملاحظة هامة

في حالة وجود الأقتران خطي فإنه لا يوجد مشتقة لأن مشتقة س تساوي ١ لذلك نفرض ص دائماً الأقتران الخطي وبشكل عام

① ∫ (أس+ب)^ن دس

= (أس+ب)^(ن+١) / أ(ن+١)

② ∫ حا(أس+ب) دس

= -جتا(أس+ب)/أ + جـ

③ ∫ جتا(أس+ب) دس

= حا(أس+ب)/أ + جـ

④ ∫ قا٢(أس+ب) دس

= ظا(أس+ب)/أ + جـ

مكتبة المعلم MALEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

① اوجد $\int (٣س + ١٠)^{٥} \, دس$

الحل

$= \frac{(٣س + ١٠)^{٦}}{٦ \times ٣} + ج$

② اوجد $\int حا(٤ - ٢س) \, دس$

الحل

$= \frac{-حتا(٤ - ٢س)}{-٢} + ج$

$= \frac{١}{٢} حتا(٤ - ٢س) + ج$

③ اوجد $\int \sqrt[٣]{(٢س + ٧)^{٥}} \, دس$

الحل

$= \int (٢س + ٧)^{\frac{٥}{٣}} \, دس$

$= \frac{(٢س + ٧)^{\frac{٨}{٣}}}{٢ \times \frac{٨}{٣}} + ج$

④ اوجد $\int (٢س - ٣)^{٤} \, دس$

الحل

$= \left[\frac{(٢س - ٣)^{٥}}{٥ \times ٢} \right]_{١}^{٢}$

$= \frac{(١-)^{٥}}{١٠} - \frac{(١)^{٥}}{١٠} = \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠}$

$= \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

$= \frac{(٢ - ٢ \times ٢)^{٥}}{١٠} - \frac{(٣ - ١ \times ٢)^{٥}}{١٠}$

مثال (١١)

اوجد $\int حتا(\frac{س}{٣}) \, دس$

الحل

$= \int حتا(\frac{١}{٣} س) \, دس$

$= \frac{حا \frac{١}{٣} س}{\frac{١}{٣}} + ج$

$= ٣ حا \frac{١}{٣} س + ج$

مثال (١٢)

اوجد $\int قا^{٢}(٥س - ٨)$

الحل

$= \frac{ظا(٥س - ٨)}{٥} + ج$

أو نستطيع حله بالتعويض

$ص = ٥س - ٨ \quad \Rightarrow دص = ٥ دس$

$\int قا^{٢} ص \times \frac{دص}{٥} = \frac{١}{٥} \int قا^{٢} ص \, دص$

$= \frac{١}{٥} ظا ص + ج = \frac{١}{٥} ظا(٥س - ٨) + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

$$\int \frac{-3}{(6س-1)^4}\,دس$$

الحل

$ص = 6س-1 \quad دص = 6\,دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{6}$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}}{ص^4} \times \frac{دص}{6} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{ص^4}\,دص$$

$$= -\frac{1}{2}\int ص^{-4}\,دص = \frac{1}{2}\cdot\frac{ص^{-3}}{-3} + ث$$

$$= -\frac{1}{6ص^2} + ث$$

$$= -\frac{1}{6(6س-1)^3} + ث$$

عليه استخدام القاعدة

$$\int (أس+ب)^ن\,دس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)}$$

أكمل

$$\int \frac{-3}{(6س-1)^4}\,دس = \int -3(6س-1)^{-4}\,دس$$

$$= \frac{-3(6س-1)^{-3}}{6\times -3}$$

$$= \frac{1}{6(6س-1)^3} + ث$$

مثال (١٤)

$$\int س^2(س^3-5)^2\,دس$$

الحل

$ص = س^3-5 \Leftarrow دص = 3س^2\,دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{3س^2}$

$س = 0 \leftarrow ص = 0^3-5 = -5$

$س = 2 \leftarrow ص = 2^3-5 = 8-5 = 3$

$$\Leftarrow \int_{-5}^{3} س^2 ص^2 \times \frac{دص}{3س^2}$$

$$= \int_{-5}^{3} \frac{1}{3} ص^2\,دص = \frac{1}{3}\left[\frac{ص^3}{3}\right]_{-5}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-5)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(9 + \frac{125}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{27}{3}+\frac{125}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{152}{3} = \frac{152}{9}$$

مثال (١٥)

$$\int_{1}^{9} (4س-3)(س^2-3س+1)^{\frac{1}{2}}\,دس$$

الحل

$ص = س^2-3س+1$

$دص = (2س-3)\,دس$

$دس = \frac{دص}{4س-3}$ ← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

$= \int (٤س - ٣)(ص)^{٩} \times \frac{دص}{٤س - ٣}$

$= \int ص^{٩} \times دص = \frac{ص^{١٠}}{١٠} + ج$

$= \frac{(٤س^{٢} - ٣س + ١)^{١٠}}{١٠} + ج$

مثال (١٦)

$\int س \sqrt{س^{٢} - ٥}\ دس$

الحل

$ص = س^{٢} - ٥ \Leftarrow دص = ٢س\ دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$= \int س \sqrt{ص} \times \frac{دص}{٢س}$

$= \int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\ دص = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= \frac{١}{٣} (س^{٢} - ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ج$

مثال (١٧)

جد $\int \frac{(س^{٢} + ٤س + ٣)}{٢س + ٤}\ دس$

الحل نلاحظ ان المقام ليس مشتقة البسط
لذلك ليس تكامل بالتعويض
نحلل البسط

$= \int \frac{(س + ٣)(س + ١)}{٢(س + ٢)}\ دس$

$= \frac{١}{٢} \int (س + ٣)\ دس$

$= \frac{١}{٢} \left[\frac{س^{٢}}{٢} + ٣س \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \left(\frac{٤}{٢} + ٦ \right) - ٠ = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤$

مثال (١٨)

جد $\int_{-٢}^{١} (٣س^{٢} - ٢)(س^{٣} - ٤س + ١)^{٤}\ دس$

الحل

$ص = س^{٣} - ٤س + ١$

$دص = (٣س^{٢} - ٤)\ دس$

$\leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢} - ٤}$

$س = -٢ \Leftarrow ص = (-٢)^{٣} - ٤(-٢) + ١$

$= -٨ + ٨ + ١ = -٣$

$س = ١ \Leftarrow ص = ١ - ٤ + ١ = ٠$

$= \int_{-٣}^{٠} ص^{٤} \times \frac{دص}{٣ص^{٢} - ٤}$

$= \int_{-٣}^{٠} ص^{٤}\ دص = \left[\frac{ص^{٥}}{٥} \right]_{-٣}^{٠}$

$= ٠ - \frac{(-٣)^{٥}}{٥}$

$= + \frac{٢٤٣}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٩)

$$\int \frac{1-3س}{\sqrt{س^2-س+4}}\, دس$$

الحل

$ص = س^2 - س + 4 \Leftarrow دص = (3س - 1)$

$س = 0 \Leftarrow ص = 4$

$س = 1 \Leftarrow ص = 4$

$$= \int_4^4 \frac{1-3س}{\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{-(3س-1)} = صفر$$

لأن الحد الأدنى = الحد الأعلى

مثال (٢٠)

اوجد $\int \frac{حا\sqrt{س}}{\sqrt{س}}\, دس$

الحل

$ص = \sqrt{س} \quad \frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$\Leftarrow دص = \frac{دس}{2\sqrt{س}}$

$\Leftarrow دس = 2\sqrt{س}\, دص$

$$\int \frac{حا ص}{\sqrt{س}} \times 2\sqrt{س}\, دص$$

$$\int 2 حا ص\, دص = -2 جتا ص + ج$$

$$= -2 جتا\sqrt{س} + ج$$

مثال (٢١)

اوجد $\int (س-1)^2 قا^2(2س^2 - 4س + 1)\, دس$

الحل

$ص = 2س^2 - 4س + 1$

$دص = (4س - 4)\, دس$

$\Rightarrow دس = \frac{دص}{4(س-1)}$

$$= \int (س-1)^2 قا^2 ص \times \frac{دص}{4(س-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \int قا^2 ص\, دص$$

$$= \frac{1}{4} ظا ص + ج$$

$$= \frac{1}{4} ظا(2س^2 - 4س + 1) + ج$$

مثال (٢٢)

جد $\int \frac{4س - 6}{\sqrt[3]{س^2 - 3س + 1}}\, دس$

الحل

$ص = س^2 - 3س + 1 \Leftarrow دص = (2س - 3)\, دس$

$دس = \frac{دص}{2س - 3}$

$$= \int \frac{4س - 6}{\sqrt[3]{ص}} \times \frac{دص}{2س - 3}$$

$$= \int \frac{2(2س - 3)}{\sqrt[3]{ص}} \times \frac{دص}{2س - 3}$$

$$= \int 2 ص^{-\frac{1}{3}}\, دص = 2 \times \frac{3}{2} ص^{\frac{2}{3}} + ج$$

$$= 3 ص^{\frac{2}{3}} + ج = 3(س^2 - 3س + 1)^{\frac{2}{3}} + ج$$

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال (٣)

$\int س\,قا^{2}(س^{2}+٨)\,د س$

الحل

$ص = س^{2}+٨ \leftarrow د ص = ٢س\,د س$

$د س = \frac{د ص}{٢س}$

$\int س\,قا^{2} ص \times \frac{د ص}{٢س} = \frac{١}{٢}\int قا^{2} ص\,د ص$

$= \frac{١}{٢} ظا ص + ج = \frac{١}{٢} ظا(س^{2}+٨) + ج$

مثال (٤)

$\int \sqrt[٥]{(٥-٣س)^{٣}}\,د س$

الحل

$= \int (٥-٣س)^{\frac{٣}{٥}}\,د س$

$= \frac{(٥-٣س)^{\frac{٨}{٥}}}{-٣ \times \frac{٨}{٥}} + ج$

$= \frac{-٥}{٢٤}(٥-٣س)^{\frac{٨}{٥}} + ج$

عكس داخلي

$ص = ٥-٣س \quad د ص = -٣\,د س$

$= \int (ص)^{\frac{٣}{٥}} \times \frac{د ص}{-٣}$

$= \frac{ص^{\frac{٨}{٥}}}{-٣ \times \frac{٨}{٥}} + ج = \frac{-٥}{٢٤}(٥-٣س)^{\frac{٨}{٥}} + ج$

مثال (٥)

$\int (س+٣) \sqrt[٣]{س^{2}+٦س-٤}\,د س$

الحل

$ص = س^{2}+٦س-٤$

$د ص = (٢س+٦)\,د س$

$د س = \frac{د ص}{٢س+٦}$

$\int (س+٣) \sqrt[٣]{ص} \times \frac{د ص}{٢(س+٣)}$

$= \int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٣}}\,د ص$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٨}(س^{2}+٦س-٤)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

مثال (٦)

$\int س^{2} ظتا(٤-س^{2})\,د س$

الحل

$ص = ٤-س^{2} \quad ، \quad د ص = -٢س\,د س$

$\leftarrow د س = \frac{د ص}{-٢س}$

$\int س\,ظتا ص \times \frac{د ص}{-٢س}$

$-\int ظتا ص\,د ص = -حا ص + ج$

$= -حا(٤-س^{2}) + ج$

مكتبة الهناء
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٢٧)

اذا علمت ان $\int_{-1}^{2} هـ(س) \, دس = ١٢$ ، $\int_{-1}^{4} هـ(س) \, دس = -٨$
فاحسب قيمة $\int_{-1}^{2} س \, هـ'(س^٢) \, دس$

الحل

نفرض $ص = س^٢ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$س = -١ \leftarrow ص = (-١)^٢ = ١$

$س = ٢ \leftarrow ص = ٢^٢ = ٤$

$= \int_{١}^{٤} ٢س \, هـ'(ص) \times \frac{دص}{٢س}$

$= \int_{١}^{٤} هـ'(ص) \, دص$

$= هـ(٤) - هـ(١)$

$= ١٢ - (-٨) = ١٢ + ٨$

$= ٢٠$

مثال (٢٨)

اذا كان $\int_{٠}^{٩} هـ(س) \, دس = ٦$

فجد $\int_{٠}^{٣} هـ(٣س) \, دس$

الحل

$ص = ٣س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٣}$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٣ \times ٠ = ٠$

$س = ٣ \leftarrow ص = ٣ \times ٣ = ٩$

$\int_{٠}^{٣} هـ(٣س) \, دس = \int_{٠}^{٩} هـ(ص) \times \frac{دص}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \int_{٠}^{٩} هـ(ص) \, دص = \frac{١}{٣} \times ٦ = ٢$

مثال (٢٩)

اذا كان $هـ(-١) = ٣$ ، $هـ(١) = ٥$
فجد $\int_{-١}^{١} س^٢ \, هـ'(\frac{١}{س}) \, دس$

الحل

$ص = \frac{١}{س}$ $\quad دص = -\frac{١}{س^٢} \, دس$

$\Leftarrow دس = -س^٢ \, دص$

$س = -١ \leftarrow ص = -١$

$س = ١ \leftarrow ص = ١$

$\Leftarrow -\int_{-١}^{١} هـ'(ص) \times -س^٢ \, دص$

$= -\int_{-١}^{١} هـ'(ص) \, دص = -(هـ(١) - هـ(-١))$

$= -٢ \times (٥ - ٣) = -٤$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٠)

اذا كان $هـ(٣)=٦$ ، $هـ(١٠)=٢٢$

جد $\int_{١}^{٢} ٣س^{٢} هـ(س^{٣}+٢)\,دس$

الحل

$ص = س^{٣}+٢ \Leftarrow دص = ٣س^{٢}\,دس$

$س=١ \leftarrow ص=٣$

$س=٢ \leftarrow ص=١٠$

$= \int_{٣}^{١٠} هـ(ص)\,دص$

$= هـ(ص)\,دص = هـ(١٠) - هـ(٣)$

$= ٢٢ - ٦ = ١٦$

مثال (٣١)

اذا كان $هـ(٢)=٤$ ، $هـ(١)=١$

فاوجد $\int_{١}^{٤} \frac{١}{٢\sqrt{س}} هـ(١+\sqrt{س})\,دس$

الحل

$ص = ١+\sqrt{س}$ $\quad دص = \frac{١}{٢\sqrt{س}}\,دس$

$\Leftarrow دس = ٢\sqrt{س}\,دص$

$س=١ \leftarrow ص=١$

$س=٤ \leftarrow ص=٢$

$= \int_{١}^{٢} هـ(ص)\,٢\sqrt{س}\,دص$

$= \int_{١}^{٢} هـ(ص)\,٢ص\,دص$

$= ٢\left[\frac{ص^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٢}$

$= ٢\left(\frac{١٥}{٢}\right) = ١٥$

مثال (٣٢)

اذا كان $هـ(١)=١$ ، $هـ(٢)=٤$

اوجد $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,هـ'(س)\,دس$

الحل

$ص = هـ(س) \Leftarrow دص = هـ'(س)\,دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ'(س)}$

$س=١ \leftarrow ص = هـ(١) = ١$

$س=٢ \leftarrow ص = هـ(٢) = ٤$

$= \int_{١}^{٤} ص \times هـ'(س) \times \frac{دص}{هـ'(س)}$

$= \int_{١}^{٤} ص\,دص = \left[\frac{ص^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٤}$

$= \frac{١٦}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{١٥}{٢}$

مكتبة العلم ALWEJAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٣)

اوجد $\int \frac{٥}{\text{جتا}^{٢}(٣س+١)}\, دس$

الحل

$ص = ٣س+١ \quad دص = ٣\, دس$

$دس = \frac{دص}{٣}$

$\int \frac{٥}{\text{جتا}^{٢}ص} \times \frac{دص}{٣}$

$= \frac{٥}{٣} \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}ص}\, دص$

$= \frac{٥}{٣} \int \text{قا}^{٢}ص\, دص = \frac{٥}{٣}\, \text{ظا}\, ص + د$

$= \frac{٥}{٣}\, \text{ظا}(٣س+١) + د$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٧٩

صحيحة $\int_{1}^{2} (3س^2+4س)(س^3+2س^2)^7 \, دس$

الحل

$ص = س^3+2س^2$

$دص = (3س^2+4س)\, دس$

$دس = \frac{دص}{3س^2+4س}$

$\int_{1}^{2} (3س^2+4س)(ص)^7 \times \frac{دص}{3س^2+4س}$

$\int_{1}^{2} ص^7 \, دص = \frac{1}{8}[ص^8]_{1}^{2} + ج$

$= \frac{1}{8}[(س^3+2س^2)^8]_{1}^{2} + ج$

تدريب ② ص ١٨٢

$\int_{3}^{16} \frac{1}{\sqrt{1+5س}} \, دس$

$ص = 1+5س \quad دص = 5 \, دس$

$دس = \frac{دص}{5}$

$س = 3 \leftarrow ص = 16$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$\int_{1}^{16} \frac{1}{\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{5}$

$= \frac{1}{5}\int_{1}^{16} ص^{-\frac{1}{2}} \, دص = \frac{1}{5} \times 2[ص^{\frac{1}{2}}]_{1}^{16}$

$= \frac{2}{5}(\sqrt{16}-\sqrt{1}) = \frac{2}{5}(4-1) = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$

تدريب ④ ص ١٨٢

صحيحة كل من التكاملات الآتية

① $\int_{0}^{1} 3س(س^2+1)^5 \, دس$

الحل

$ص = س^2+1 \Leftarrow دص = 2س \, دس$

$دس = \frac{دص}{2س}$

$= \int 3س \, (ص)^5 \times \frac{دص}{2س}$

$= \frac{3}{2}\int ص^5 \, دص = \frac{3}{2} \cdot \frac{ص^6}{6}$

$= \frac{3}{8}(س^2+1)^6 + ج$

② $\int_{0}^{1} 2س \sqrt{1-س^2} \, دس$

الحل

$ص = 1-س^2 \quad دص = -2س \, دس$

$دس = \frac{دص}{-2س} \Leftarrow$ يتبع

$\int \frac{\text{جتا}^2 \text{ص} \times d\text{ص}}{-\text{جا ص}}$

$= -\int \text{جتا ص} \, d\text{ص}$

$= -\text{جا ص} + \text{ح} = -\text{جا}(1-\text{س}) + \text{ح}$

(٣) $\int_{1}^{2} (4\text{س}-1)\sqrt{\text{س}-2\text{س}^2-1}\, d\text{س}$

الحل

$\text{ص} = \text{س} - 2\text{س}^2 - 1$

$d\text{ص} = (1-4\text{س})\, d\text{س}$

$d\text{س} = \frac{d\text{ص}}{1-4\text{س}}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1-2-1 = -2$

$\text{س} = -1 \leftarrow \text{ص} = -1-2-1 = -4$

$\int_{-4}^{-2} (4\text{س}-1)\sqrt{\text{ص}} \times \frac{d\text{ص}}{1-4\text{س}}$

$= \int_{-4}^{-2} \text{ص}^{\frac{1}{2}} \, d\text{ص} = \left[\frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{-2}$

$= \frac{2}{3}(-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-4)^{\frac{3}{2}}$

(٤) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[5]{\text{س}+1}}\, d\text{س}$

$\text{ص} = \text{س}+1 \quad d\text{ص} = d\text{س}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 4$

$= \int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{\text{ص}}}\, d\text{ص}$

$= \int_{1}^{4} \text{ص}^{-\frac{1}{5}} d\text{ص} = \left[\frac{5}{4}\text{ص}^{\frac{4}{5}}\right]_{1}^{4}$

$= \frac{5}{4}\left((4)^{\frac{4}{5}} - 1\right)$

تدريب (٤) ص١٨٢

اثبت أن

(١) $\int (3\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\, d\text{س}$

$\text{ص} = 3\text{س}+\text{ب} \quad d\text{ص} = 3\, d\text{س}$

$d\text{س} = \frac{d\text{ص}}{3}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{d\text{ص}}{3} = \frac{1}{3}\int \text{ص}^{\text{ن}}\, d\text{ص}$

$= \frac{1}{3}\frac{(\text{ص})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} = \frac{(3\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{3(\text{ن}+1)} + \text{ح}$

(٢) $\int \text{جتا}(3\text{س}+\text{ب})\, d\text{س}$

$\text{ص} = 3\text{س}+\text{ب} \quad d\text{ص} = 3\, d\text{س}$

$= \int \text{جتا ص} \times \frac{d\text{ص}}{3}$

$= \frac{\text{جا ص}}{3} = \frac{\text{جا}(3\text{س}+\text{ب})}{3} + \text{ح}$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ⑤ ص١٨٣

صحيحة كل تكامل مما يأتي

① $\int_{-1}^{2} 6(1-2س)^5 \, دس$

الحل

ص = $1-2س$ ⟹ دص = -2 دس

⟹ دس = $\frac{دص}{-2}$

س = -1 ⟵ ص = 3

س = 2 ⟵ ص = $1-2\times2 = -3$

$= \int_{3}^{-3} 6(ص)^5 \times \frac{دص}{-2}$

$= \int_{-3}^{3} -3ص^5 \, دص$

$= -3\left[\frac{ص^6}{6}\right]_{-3}^{3}$

$= -3\left(\frac{3^6}{6} - \frac{(-3)^6}{6}\right)$

$= -3\left(\frac{729}{6} - \frac{729}{6}\right) = صفر$

② $\int 12 \, حا(1-4س) \, دس$

الحل

ص = $1-4س$ دص = -4 دس

دس = $\frac{دص}{-4}$

$\int حا^3 ص \times \frac{دص}{-4}$

$-3 \int حا^3 ص \, دص$

$= +3$ ضا ص + جـ

$= 3$ ضا $(1-4س)$ + جـ

عليه طريقة القاعدة مباشرة

$= \frac{12 \times$ ضا $(1-4س)}{4}$

$= 3$ ضا $(1-4س)$ + جـ

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجزاوي

الأسئلة

الكتاب صـ١٨٤

① أكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية

(أ) $\int (1-2س)(س-س^2)^4 \, دس$

$ص = س - س^2$

(ب) $\int 6س^2 \sqrt[5]{(4س^3-2)^2} \, دس$

$ص = 4س^3 - 2$

(ج) $\int (4س-3س^2) \sqrt{(س^3-2س)} \, دس$

$ص = س^3 - 2س$

(د) $\int \frac{3س-9}{(س^2-6س)^2} \, دس$

$ص = س^2 - 6س$

② جد قيمة كل من التكاملات الآتية

(أ) $\int \sqrt[3]{(3س-2)^2} \, دس$

الحل

$= \int (3س-2)^{\frac{2}{3}} \, دس$

حسب القاعدة

$= \frac{(3س-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} \times 3} + ح$

$= \frac{(3س-2)^{\frac{5}{3}}}{5} + ح$

أو بالتعويض

(ب) $\int (س-1)(2س^2-4س+1)^5 \, دس$

$ص = 2س^2 - 4س + 1$

$دص = (4س - 4) \, دس$

$دس = \frac{دص}{4(س-1)}$

$\int (س-1) ص^5 \frac{دص}{4(س-1)}$

$= \frac{1}{4} \int ص^5 \, دص$

$= \frac{1}{4} \frac{ص^6}{6} + ح$

$= \frac{(2س^2-4س+1)^6}{24} + ح$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

⑥ $\int_{-2}^{2} \sqrt{(2-س)}\, د س$

الحل

$ص = 2 - س \quad د ص = -د س$

$\int_{-2}^{2} \sqrt{ص} \times -د ص$

$= -\int_{-2}^{2} ص^{\frac{1}{2}} د ص$

$= -\left[\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2}$

$= -\frac{2}{3}\left[(2-س)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2}$

$= -\frac{2}{3}\left[0 - (4)^{\frac{3}{2}}\right]$

$= -\frac{2}{3}(-8) = \frac{16}{3}$

⑦ $\int_{0}^{2} س^3 \sqrt{(1+س^4)}\, د س$

$ص = 1 + س^4 \quad د ص = 4 س^3 د س$

$د س = \frac{د ص}{4 س^3}$

$\int_{1}^{17} س^3 \sqrt{ص} \times \frac{د ص}{4 س^3}$

$\frac{1}{4}\int_{1}^{17} ص^{\frac{1}{2}} د ص$

$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\left[ص^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{17}$

$= \frac{1}{6}\left[(1+س^4)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2}$

$= \frac{1}{6}\left[(17)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$

⑧ $\int_{1}^{2} 3 س^2 (س^3 - 1)^3\, د س$

الحل

$ص = س^3 - 1 \quad د ص = 3 س^2 د س$

$س = 1 \leftarrow ص = 0$

$س = 2 \leftarrow ص = 7$

$\int_{0}^{7} ص^3 د ص = \left[\frac{ص^4}{4}\right]_{0}^{7}$

$= \frac{2401}{4} - 0 = \frac{2401}{4}$

③ احسب قيمة التكاملات التالية.

④ $\int_{0}^{2} \sqrt{4س + 1}\, د س$

الحل $= \int_{0}^{2} (4س+1)^{\frac{1}{2}} د س$

$= \left[\frac{(4س+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 4}\right]_{0}^{2}$

$= \left[\frac{(4س+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_{0}^{2}$

$= \frac{(9)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{27}{6}$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

⑥ $\int_{1}^{2} س^{2}\sqrt{س^{2}-1}\,دس$

الحل

$ص = س^{2}-1 \quad دص = 2س\,دس$

$دس = \frac{دص}{2س}$

$س = 1 \Leftarrow ص = 0$

$س = 0 \longleftarrow ص = -1$

$\int_{-1}^{0} س^{2}\sqrt{ص}\times\frac{دص}{2س}$

$\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}س\sqrt{ص}\,دص = \left[\frac{3}{4}ص^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$

$= \frac{3}{4}$

---

⑤ $\int_{1}^{2} \frac{3-2س}{(س^{2}-3س)^{2}}\,دس$

الحل

$ص = س^{2}-3س \longleftarrow دص = (2س-3)دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{2س-3}$

$س = 1 \Leftarrow ص = 1-3 = -2$

$س = 2 \Leftarrow ص = 4-6 = -2$

$\int_{-2}^{-2} \frac{3-2س}{ص^{2}}\times\frac{دص}{2س-3} = صفر$

لأن

أكد لادني = أكد لاعلى

---

④ اذا علمت ان $\int_{-8}^{-1} هـ(س)\,دس = 5$

$\int_{-2}^{2} 6-هـ(س^{3})\,3س^{2}\,دس$

الحل

$ص = س^{3} \quad دص = 3س^{2}\,دس$

$س = -2 \longleftarrow ص = -8$

$س = 2 \longleftarrow ص = 8$

$\int_{-8}^{8} 6-هـ(ص)\times\frac{دص}{3س^{2}}$

$= \int_{-8}^{8} هـ(ص)\,دص = هـ(8) - هـ(-8)$

$= -6-5 = -11$

---

③ اذا علمت ان $\int_{0}^{2} هـ(س)\,دس = 3$

$\int_{-1}^{0} 8س\,هـ(س^{2}+1)\,دس$

$ص = س^{2}+1 \longleftarrow دص = 2س\,دس$

$س = -1 \longleftarrow ص = 2$

$س = 0 \longleftarrow ص = 1$

$\int_{2}^{1} 8\times هـ(ص)\times\frac{دص}{2}$

$4\int_{2}^{1} هـ(ص)\,دص = 4\times -3 = -12$

---

⑦ $\int_{2}^{4} س\sqrt{س^{2}+9}\,دس$

$ص = س^{2}+9 \longleftarrow دص = 2س\,دس$

$س = 0 \longleftarrow ص = 9 \quad ، \quad س = 4 \longleftarrow ص = 25$

$\int_{9}^{25} س\,ص^{\frac{1}{2}}\times\frac{دص}{2س} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}}\right]_{9}^{25}$

$= \frac{1}{3}(25)^{\frac{3}{2}} - (9)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(125-27)$

مكتبة الوسام AlWesam
العلم نجاح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

اوجد $\int s^2 \sin(s^3+7)\,ds$

الحل

$ص = s^3+7 \quad د ص = 3s^2\,ds$

$ds = \frac{د ص}{3s^2}$

$\int s^2 \sin ص \times \frac{د ص}{3s^2} = \frac{1}{3}\int \sin ص\,د ص$

$= -\frac{1}{3}\text{جتا} ص + د$

$= -\frac{1}{3}\text{جتا}(s^3+7) + د$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

$\int s \sin(s^2+7)\,ds$

$ص = s^2+7 \quad د ص = 2s\,ds$

$ds = \frac{د ص}{2s}$

$\int s \sin ص \times \frac{د ص}{2s} = \frac{1}{2}\int \sin ص\,د ص$

$= -\frac{1}{2}\text{جتا} ص + د$

$= -\frac{1}{2}\text{جتا}(s^2+7) + د$

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

$\int 6s \sin s^2\,ds$

$ص = s^2 \leftarrow د ص = 2s\,ds$

$ds = \frac{د ص}{2s}$

$\int 6s \sin ص \times \frac{د ص}{2s} =$

$= \int 3 \sin ص\,د ص = -3\text{جتا} ص + د$

$= -3\text{جتا} s^2 + د$

وزارة (٢٠١٠) شتوية

$\int \frac{1+2s}{\sqrt{s^2+s+1}}\,ds$

$ص = s^2+s+1 \quad د ص = (2s+1)\,ds$

$ds = \frac{د ص}{1+2s}$

$\int \frac{1+2s}{\sqrt{ص}} \times \frac{د ص}{1+2s} = \int ص^{-\frac{1}{2}}\,د ص$

$= 2ص^{\frac{1}{2}} + د$

$= 2\sqrt{s^2+s+1} + د$

مكتبة المعلم
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) شتوية

أوجد $\int \frac{٣س^{٢}+١}{(س^{٣}+س+٧)^{٥}}\,دس$

الحل

$ص = س^{٣}+س+٧$ ، $دص = (٣س^{٢}+١)دس$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}+١}$

$= \int \frac{٣س^{٢}+١}{ص^{٥}} \times \frac{دص}{٣س^{٢}+١}$

$= \int ص^{-٥}\,دص = \frac{ص^{-٤}}{-٤} + د$

$= \frac{(س^{٣}+س+٧)^{-٤}}{-٤} + د$

وزارة (٢٠١١) صيفية

أوجد $\int س\sqrt{٦-س}\,(٦-٤س)\,دس$

الحل

$ص = ٦-س-س^{٢}$ ، $دص = (-٦-٤س)دس$

$دس = \frac{دص}{-٦-٤س}$

$= \int \sqrt{ص} \times (٦+٤س) \times \frac{دص}{-٦-٤س}$

$= \int ص^{\frac{١}{٢}}\,دص = \frac{٣}{٤}ص^{\frac{٣}{٢}} + د$

$= \frac{٣}{٤}(٦-س-س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + د$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

أوجد $\int \frac{٤س+٣}{جتا^{٢}(س^{٢}+٣س)}\,دس$

الحل

$ص = س^{٢}+٣س$ ، $دص = (٢س+٣)دس$

$دس = \frac{دص}{٢س+٣}$

$= \int \frac{٤س+٣}{جتا^{٢}ص} \times \frac{دص}{٢س+٣}$

$= \int \frac{١}{جتا^{٢}ص}\,دص = \int قا^{٢}ص\,دص$

$= ظاص + د = ظا(س^{٢}+٣س) + د$

وزارة (٢٠١٢) صيفية

أوجد $\int \frac{٣س^{٢}-٦}{\sqrt[٥]{س^{٣}-٦س+٩}}\,دس$

$ص = س^{٣}-٦س+٩$ ، $دص = (٣س^{٢}-٦)دس$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}-٦}$

$= \int \frac{٣س^{٢}-٦}{\sqrt[٥]{ص}} \times \frac{دص}{٣س^{٢}-٦}$

$= \int ص^{-\frac{١}{٥}}\,دص = \frac{٥}{٤}ص^{\frac{٤}{٥}} + د$

$= \frac{٥}{٤}(س^{٣}-٦س+٩)^{\frac{٤}{٥}} + د$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) صيفية

$\int_{0}^{2} س\sqrt{س^2+3}\, د س$

الحل

$ص = س^2+3$ ، $د ص = 2س\, د س$

$د س = \frac{د ص}{2س}$

$\int_{0}^{2} س\sqrt{ص} \times \frac{د ص}{2س}$

$\frac{1}{2}\int_{0}^{2} ص^{\frac{1}{2}}\, د ص = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ث$

$\frac{1}{3}(س^2+3)^{\frac{3}{2}} + ث$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

$\int \frac{10س - 1}{\sqrt{5س^2 - س + 1}}\, د س$

$ص = 5س^2 - س + 1$

$د ص = (10س - 1)\, د س$

$د س = \frac{د ص}{10س - 1}$

$\int \frac{10س - 1}{\sqrt{ص}} \times \frac{د ص}{10س - 1}$

$\int ص^{-\frac{1}{2}}\, د ص = 2ص^{\frac{1}{2}} + ث$

$\Leftarrow 2(5س^2 - س + 1)^{\frac{1}{2}} + ث$

وزارة (٢٠١٤) شتوية

ادعد $\int س^2 جا(س^3 - 1)\, د س$

$ص = س^3 - 1$ ، $د ص = 3س^2\, د س$

$د س = \frac{د ص}{3س^2}$

$\int س^2 جا ص \times \frac{د ص}{3س^2}$

$\frac{1}{3}\int جا ص\, د ص$

$-\frac{1}{3} جتا ص + ث$

$-\frac{1}{3} جتا(س^3 - 1) + ث$

وزارة (٢٠١٥) شتوية

ادعد $\int س^2 (س^3 - 1)^2\, د س$

$ص = س^3 - 1$ $د ص = 3س^2\, د س$

$د س = \frac{د ص}{3س^2}$

$س = 0 \Leftarrow ص = -1$

$س = 1 \Leftarrow ص = 0$

$\int س^2 ص^2 \times \frac{د ص}{3س^2}$

$\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} ص^2\, د ص = \frac{1}{3}\left[\frac{ص^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\left(0 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٥) صيفية

اذا كان $\int_{-1}^{5} 3x^2 f(x^3)\,dx$ حد قيمة

الحل

$u = x^3 \quad du = 3x^2\,dx$

$dx = \frac{du}{3x^2}$

$x = -1 \leftarrow u = -1$

$x = 2 \leftarrow u = 8$

$\int_{-1}^{8} 3x^2 f(u) \times \frac{du}{3x^2}$

$\int_{-1}^{8} f(u)\,du = f(8) - f(-1)$

$= 14 - -5 = 19$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

$\int \frac{6x - 8}{\sqrt[3]{3x^2 - 8x + 9}}\,dx$

الحل

$u = 3x^2 - 8x + 9 \quad du = (6x - 8)\,dx$

$dx = \frac{du}{6x - 8}$

$\int \frac{6x - 8}{\sqrt[3]{u}} \times \frac{du}{6x - 8}$

$= \int u^{-\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + c$

$= \frac{3}{2}(3x^2 - 8x + 9)^{\frac{2}{3}} + c$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

$\int \frac{6x + 4}{\text{جتا}^2(3x^2 + 4x)}\,dx$

الحل

$u = 3x^2 + 4x$

$\frac{du}{dx} = 6x + 4 \Leftarrow dx = \frac{du}{6x + 4}$

$\int \frac{6x + 4}{\text{جتا}^2 u} \times \frac{du}{6x + 4}$

$\int \frac{1}{\text{جتا}^2 u}\,du = \int \text{قا}^2 u\,du$

$= \text{ظا}\,u + c \Leftarrow$

$= \text{ظا}(3x^2 + 4x) + c$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

$\int \frac{٨س+٤}{(س^٢+س-١)^٣}$ دس

الحل

ص = $س^٢+س-١$ ⇐ دس = $\frac{دص}{٢س+١}$

دص = $(٢س+١)$ دس

$\int \frac{٨س+٤}{ص^٣} \times \frac{دص}{٢س+١}$

$\int ص^{-٣}$ دص = $\frac{ص^{-٢}}{-٢} + ج$

= $\frac{(س^٢+س-١)^{-٢}}{-٢} + ج$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

احسب قيمة $\int_{-١}^{٢} ٤س^٣ هـ'(س^٤)$ دس

صيث هـ(١٦) = ١٤ ، هـ(١) = -٦

الحل

ص = $س^٤$ دص = $٤س^٣$ دس

دس = $\frac{دص}{٤س^٣}$

س = -١ ← ص = ١

س = ٢ ← ص = $٢^٤ = ١٦$

$\int_{١}^{١٦} ٤س^٢ هـ'(ص) \times \frac{دص}{٤س^٣}$

$= \int_{١}^{١٦}$ هـ'(ص) دص = هـ(١٦) - هـ(١)

= ١٤ + ٦ = ٢٠

وزارة (٢٠١٨) شتوية

$\int س^٢ حا(س^٣+٧)$ دس

الحل

ص = $س^٣+٧$ ، دص = $٣س^٢$ دس

دس = $\frac{دص}{٣س^٢}$

$\int س^٢ حاص \times \frac{دص}{٣س^٢}$

$\int \frac{١}{٣}$ حاص دص

= $-\frac{١}{٣}$ جتا ص + ج

= $-\frac{١}{٣}$ جتا $(س^٣+٧)$ + ج

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

تطبيقات هندسية

تذكر

ميل المماس $= \frac{ص}{س}$

$= ه'(س)$

لإيجاد قاعدة الأقتران

① نجد التكامل غير المحدود باستخدام طرق التكامل

② نعوض النقطة المعطاه لإيجاد قيمة جـ.

ملاحظة

$ه(س)$ يمر بالنقطة $(أ ، ب)$ تعني أن $ه(أ) = ب$

ملاحظة

$\int ه'(س) د س = ه(س) + جـ$

مثال ①

إذا كان ميل المماس لمنحنى $ه(س)$ عند النقطة $(س ، ص)$ يساوي $(٤س^٣ + ٦س^٢ - ٣)$ جد قاعدة الأقتران علماً بأن منحنى الأقتران يمر بالنقطة $(-٢ ، ٥)$ ؟

الحل

$ه'(س) = ٤س^٣ + ٦س^٢ - ٣$

$ه(س) = \int ه'(س) = \int (٤س^٣ + ٦س^٢ - ٣)$

$ه(س) = \frac{٤س^٤}{٤} + \frac{٦س^٣}{٣} - ٣س + جـ$

$ه(س) = س^٤ + ٢س^٣ - ٣س + جـ$

لكنه يمر بالنقطة $(-٢ ، ٥)$

تعني أن $ه(-٢) = ٥$ نعوضها لإيجاد قيمة جـ

$ه(-٢) = ١٦ - ١٦ + ٦ + جـ = ٥$

$جـ = -٦$

$\therefore ه(س) = س^٤ + ٢س^٣ - ٣س - ٦$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ②

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ه(س)$ عند اي نقطة $(س، ص)$ يساوي $(٣س - ١)(س + ٥)$ جد قاعدة الاقتران علماً بان $ه(٢) = -٣$ ؟

الحل

$ه'(س) = (٣س - ١)(س + ٥)$

$ه(س) = \int (٣س - ١)(س + ٥)\, د س$

$= \int (٣س^٢ + ١٥س - س - ٥)\, د س$

$= \int (٣س^٢ + ١٤س - ٥)\, د س$

$= س^٣ + ٧س^٢ - ٥س + ح$

$ه(٢) = -٣$

$٨ + ٢٨ - ١٠ + ح = -٣$

$٢٦ + ح = -٣$

$\Leftarrow ح = -٢٩$

$ه(س) = س^٣ + ٧س^٢ - ٥س - ٢٩$

مثال ③

اذا كانت $ه''(س) = ٣س^٢ + ٤س$ وكانت $ه'(٠) = ٥$ ، جد اشتقاقه الأولى $ه(س)$ ؟

الحل

$ه''(س) = ٣س^٢ + ٤س$

نكامل الطرفين

$ه'(س) = \int (٣س^٢ + ٤س)\, د س$

$= س^٢ + ٢س^٢ + ح$

لكن $ه'(٠) = ٥$

$(٠)^٢ + (٠)^٢ + ح = ٥$

$\Leftarrow ح = ٥$

$\Leftarrow$ قاعدة $ه'(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ٥$

مثال ④

اذا كان $ه'(س) = ٣س^٢ - ٤س + ٦$ جد $ه(س)$ علماً بان $ه(٣) = ٢$

الحل

$ه(س) = \int ه'(س)\, د س$

$= \int (٣س^٢ - ٤س + ٦)\, د س$

$= س^٣ - ٢س^٢ + ٦س + ح$

$ه(٣) = ٢$

$٢٧ - ١٨ + ١٨ + ح = ٢$

$٣٦ + ح = ٢$

$\Leftarrow ح = -٣٤$

$ه(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٦س - ٣٤$

مثال ⑤

اذا كان $ه'(س) = ٣س^٢ - ١٠س$ فجد قيمة $ه(٣)$ علماً بان المنحنى يقع على المنحنى $(٢، ٢)$ يقع على منحناه

الحل

$ه(س) = \int (٣س^٢ - ١٠س)\, د س$

$= س^٣ - ٥س^٢ + ح$

$\Leftarrow$ يقع

مكتبة الوسام ALWESAM

يمر بالنقطة (٢، ٣)

$ق(١) = ٣$

$٨ - ٢٠ + ب = ٣$

$ب = ١٥$

$\Leftarrow$

$ق(س) = س^٣ - ٥س^٢ + ١٥$

$ق(٣) = ٢٧ - ٤٥ + ١٥$

$= ٤٢ - ٤٥ = -٣$

مثال ⑥

اذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق
وكان $ق'(س) = ٣س^٢ - ٤س + ١$
جد $ق(-١)$ علماً بان $ق(٢) = ٣$ ؟

الحل

لايجاد $ق(٢)$ يجب اولاً ان
نجد قاعدة $ق(س)$ ؟

$ق(س) = \int (٣س^٢ - ٤س + ١)\, دس$

$= س^٣ - ٢س^٢ + س + جـ$

$ق(٢) = ٨ - ٨ + ٢ + جـ = ٣$

$جـ = ١$

$ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + س + ١$

$ق(-١) = -١ - ٢ - ١ + ١$

$= -٣$

مثال ⑦

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي
$(٤س + ٣)^٥$ وكان $ق(-١) = ٧$
جد قاعدة الاقتران

الحل

$ق'(س) = (٤س + ١)^٥$

$ق(س) = \int (٤س + ١)^٥\, دس$

$= \frac{(٤س + ٣)^٦}{٦ \times ٤} + جـ$

لكن $ق(-١) = ٧$

$٧ = \frac{(٤ \times -١ + ٣)^٦}{٢٤} + جـ$

$٧ = \frac{(-١)^٦}{٢٤} + جـ$

$٧ = \frac{١}{٢٤} + جـ$

$\Leftarrow جـ = ٧ - \frac{١}{٢٤}$

$ق(س) = \frac{(٤س + ٣)^٦}{٢٤} + (٧ - \frac{١}{٢٤})$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اذا علمت ان ميل المماس لمنحنى الأقتران $ق(س)$ هو

$٨س(س^{٢}+١)^{٣}$ فجد قاعدة الأقتران $ق(س)$ علماً بان $ق(٠)=٢$

الحل

$ق'(س)=٨س(س^{٢}+١)^{٣}$

$ق(س)=\int ٨س(س^{٢}+١)^{٣}\,د س$

بالتعويض

$ص=س^{٢}+١ \quad د ص=٢س\,د س$

$د س=\frac{د ص}{٢س}$

$=\int ٨ص^{٣}\times\frac{د ص}{٢س}$

$=\int ٤ص^{٣}\,د ص=٤\frac{ص^{٤}}{٤}+جـ$

$=ص^{٤}+جـ$

$=(س^{٢}+١)^{٤}+جـ$

$ق(٠)=٢$

$\Rightarrow ٢=(٠^{٢}+١)^{٤}+جـ$

$\Rightarrow جـ=١$

$ق(س)=(س^{٢}+١)^{٤}+١$

مثال ⑨

اذا كان ميل المماس لمنحنى الأقتران $ق$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $\frac{٢}{(س+١)^{٢}}$ $س\neq -١$ أوجد قاعدة $ق$ علماً بانه يمر بالنقطة $(١، ٠)$

الحل

ميل المماس $=ق'(س)=\frac{٢}{(س+١)^{٢}}$

بالتكامل

$ق(س)=\int \frac{٢}{(س+١)^{٢}}\,د س$

$=\int ٢(س+١)^{-٢}\,د س$

$=٢\frac{(س+١)^{-١}}{-١}+جـ$

$=\frac{-٢}{س+١}+جـ$

بالتعويض

$ق(٠)=\frac{-٢}{١+٠}+جـ=١$

$-٢+جـ=١$

$\Rightarrow جـ=٣$

$ق(س)=\frac{-٢}{س+١}+٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

اذا كان $ق'(س) = \sqrt{س+1}$
حيث $ق(٨)$ علماً بان النقطة $(٠ ، -\frac{١}{٣})$ تقع على منحناه

الحل

$$ق(س) = \int \sqrt{س+1}\, دس$$
$$= \int (س+1)^{\frac{١}{٢}} دس$$
$$= \frac{(س+1)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + د$$
$$= \frac{٢}{٣}(س+1)^{\frac{٣}{٢}} + د$$
$$ق(٠) = \frac{٢}{٣}(٠+1)^{\frac{٣}{٢}} + د = -\frac{١}{٣}$$
$$\frac{٢}{٣} + د = -\frac{١}{٣}$$
$$د = -\frac{١}{٣} - \frac{٢}{٣} = -\frac{٣}{٣} = -١$$
$$ق(س) = \frac{٢}{٣}(س+1)^{\frac{٣}{٢}} - ١$$
$$ق(٨) = \frac{٢}{٣}(٨+1)^{\frac{٣}{٢}} - ١$$
$$= \frac{٢}{٣}(٩)^{\frac{٣}{٢}} - ١$$
$$= \frac{٢}{٣} \times ٢٧ - ١$$
$$١٨ - ١ = ١٧$$

مثال (١١)

جد قاعدة الاقتران ص = ق(س) علماً بان ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^٢+٩}$ وأن النقطة $(-٤ ، ١٥)$ تقع على منحنى الاقتران ص .

الحل

ميل المماس $= \frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^٢+٩}$

$$دص = س\sqrt{س^٢+٩}\, دس$$
$$\int دص = \int س\sqrt{س^٢+٩}\, دس$$

بالتعويض

$$ص = س^٢ + ٩ \quad دص = ٢س\, دس$$
$$دس = \frac{دص}{٢س}$$
$$= \int س\sqrt{ص} \times \frac{دص}{٢س}$$
$$= \frac{١}{٢}\int \sqrt{ص}\, دص$$
$$= \frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٢}} دص = \frac{١}{٢} ص^{\frac{٣}{٢}} + د$$
$$ص = \frac{١}{٣}(\sqrt{س^٢+٩})^{٣} + د$$

ص = ١ عندما س = -٤

$$١ = \frac{١}{٣}(\sqrt{(-٤)^٢+٩})^{٣} + د$$
$$١ = \frac{١}{٣} \times (٥)^{٣} + د$$
$$١ = \frac{١٢٥}{٣} + د$$
$$د = ١ - \frac{١٢٥}{٣} = \frac{٣}{٣} - \frac{١٢٥}{٣} = -\frac{١٢٢}{٣}$$
$$ص = \frac{١}{٣}(\sqrt{س^٢+٩})^{٣} - \frac{١٢٢}{٣}$$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٨٦

جد قاعدة الأقتران ق ، علماً بان منحناه يمر بالنقطة (-١ ، ٢) وأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة ق'(س) = ٤س - ١ .

الحل

ق'(س) = ٤س - ١

ق(س) = ∫ (٤س - ١) دس

= س² - س + ج

ق(-١) = ٢

(-١)² - (-١) + ج = ٢

١ + ١ + ج = ٢

ج = ٠ ⟸ صفر

ق(س) = س² - س

تدريب ② ص ١٨٧

جد قيمة ق(١٤) ، علماً بان ميل المماس لمنحنى الأقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة ق'(س) = ٦∛(٤س - ١) وأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥)

الحل

ق'(س) = ٦∛(٤س - ١)

ق(س) = ∫ ٦∛(٤س - ١) دس

= ∫ ٦ (٤س - ١)^(١/٣) دس

= ٦ (٤س - ١)^(٤/٣) / (٤/٣ × ٤) + ج

= ١٨/٨ (٤س - ١)^(٤/٣) + ج

= ٩/٤ (٤س - ١)^(٤/٣) + ج

ق(١) = ٩/٤ (٤ × ٠ - ١)^(٤/٣) + ج

= ٩/٤ × ١ + ج = ٥

ج = ٥ - ٩/٤ = ٢٠/٤ - ٩/٤

= ١١/٤

ق(س) = ٩/٤ (٤س - ١)^(٤/٣) - ١١/٤

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الأسئله

الكتاب ص١٨٨

① اذا كان ميل المماس لمنحنى الأقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $(٦-٢س+٩س^{٣})$ وكان قاعدة الأقتران ق ، علماً بان ق(١) = ٥

الحل

$ق'(س) = ٦-٢س+٩س^{٣}$

$ق(س) = \int (٦-٢س+٩س^{٣})\,دس$

$= ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + ج$

$ق(١) = ٠ - ١ + \frac{٩}{٤} + ج = ٥$

$\Leftarrow ج = ٥$

$ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + ٥$

② جد قاعدة الأقتران ق ، اذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة $ق'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢}+٨}}$ وكان منحنى الأقتران ق يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

الحل

$ق(س) = \int \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢}+٨}}\,دس$

بالتعويض

$ص = س^{٢}+٨ \quad دص = ٢س\,دس$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$= \int \frac{٢س}{\sqrt[٣]{ص}} \times \frac{دص}{٢س} = \int \frac{١}{\sqrt[٣]{ص}}\,دص$

$= \int ص^{-\frac{١}{٣}}\,دص = \frac{٣}{٢}ص^{\frac{٢}{٣}} + هـ$

$= \frac{٣}{٢}(س^{٢}+٨)^{\frac{٢}{٣}} + هـ$

$ق(٠) = ٤$

$= \frac{٣}{٢}(٠+٨)^{\frac{٢}{٣}} + هـ = ٤$

$\frac{٣}{٢} \times ٤ + هـ = ٤$

$٦ + هـ = ٤ \Leftarrow هـ = -٢$

$ق(س) = \frac{٣}{٢}(س^{٢}+٨)^{\frac{٢}{٣}} - ٢$

③ ص قيمة ق(١١) ، علماً بان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $٥(٥س+٤)^{٤}$ ، وأن منحنى الأقتران ق يمر بالنقطة (-١ ، ٧)

الحل

$ق'(س) = ٥(٥س+٤)^{٤}$

$\Leftarrow$ بتتبع

المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ق(س) = \int_{0}^{س} ٢٥(٥س+٤)^{٤}\,دس$$

$$= \frac{٢٥(٥س+٤)^{٥}}{٥\times٥} + ح$$

$$= (٥س+٤)^{٥} + ح$$

بكتب

$$ق(-١) = ٧$$

$$(٥\times-١+٤)^{٥} + ح = ٧$$

$$١ + ح = ٧$$

$$\Leftarrow ح = ٦$$

$$ق(س) = (٥س+٤)^{٥} + ٦$$

④ اذا كان ميل المماس لمنحنى الأقتران ل عند النقطة $(س، ص)$ يعطى بالقاعدة $ل'(س) = ٤س^{٣} - ٤س$ حيث قاعدة الأقتران ل ، علماً بان منحناه يمر بالنقطة $(٠، ٣)$

الحل

$$ل'(س) = ٤س^{٣} - ٤س$$

$$= ٨س - ٦س^{٢}$$

$$ل(س) = \int (٨س - ٦س^{٢})\,دس$$

$$= ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ح$$

$$ل(٠) = ٣ \Leftarrow ح = ٣$$

$$ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$$

⑤ اذا كان ميل المماس لمنحنى الأقتران ه يعطى بالقاعدة

$$ه'(س) = \frac{٤س^{٢} - ٥س}{س} \quad س \neq ٠$$

حيث $ه(٣)$ علماً بان منحنى الأقتران ه يمر بالنقطة $(-١، ٥)$

الحل

$$ه(س) = \int \frac{٤س^{٢} - ٥س}{س}\,دس$$

$$= \int \frac{ح(٤س - ٥)}{ح}\,دس$$

$$= \int (٤س - ٥)\,دس$$

$$= ٢س^{٢} - ٥س + ح$$

$$ه(-١) = ٢(-١)^{٢} - ٥(-١) + ح = ٥$$

$$٢ + ٥ + ح = ٥$$

$$ح = ٥ - ٧$$

$$ح = -٢$$

$$ه(س) = ٢س^{٢} - ٥س - ٢$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $هـ$ عند النقطة $(س، ص)$ هو $(٦-٤س)$ حيث قاعدة الاقتران علماً بان $هـ(١) = ٢$

الحل

ميل المماس $= هـ'(س) = ٦-٤س$

$هـ(س) = \int (٦-٤س) دس$

$= ٦س - س^٢ + ج$

نجد ج

$هـ(١) = ٦ - ١ + ج = ٢$

$ج = -٣$

$هـ(س) = ٦س - س^٢ - ٣$

وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان ميل المماس لمنحنى $هـ(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $(٤س^٣ - ٦س)$ حيث قاعدة الاقتران $هـ$ علماً بان منحنى $هـ$ يمر بالنقطة $(٢، ٥)$

الحل

$هـ'(س) = ٤س^٣ - ٦س$

$هـ(س) = \int (٤س^٣ - ٦س) دس$

$= \frac{٤س^٤}{٤} - \frac{٦س^٢}{٢} + ج$

$= س^٤ - ٣س^٢ + ج$

$هـ(٢) = ٥$

$١٦ - ١٢ + ج = ٥$

$٤ + ج = ٥ \Leftarrow ج = ١$

$هـ(س) = س^٤ - ٣س^٢ + ١$

وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $هـ(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $(٣س^٢ - ١)$ حيث قاعدة الاقتران $هـ$ علماً بان منحنى الاقتران $هـ$ يمر بالنقطة $(٢، ٤)$

الحل

$هـ'(س) = ٣س^٢ - ١$

$هـ(س) = \int (٣س^٢ - ١) دس \Leftarrow$ نكمل

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ق(س) = \int (٣س^{٢} - ١)\,دس$$

$$= \frac{٣س^{٣}}{٣} - س + ج$$

$$ق(٢) = ٨ - ٢ + ج = ٤$$

$$٦ + ج = ٤$$

$$ج = -٢$$

$$ق(س) = س^{٣} - س - ٢$$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(س ، ص)$ يساوي $(٢ - \frac{١}{س^{٢}})$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{١}{٢} ، ١)$ جد قاعدة $ق$

الحل

$$ق'(س) = ٢ - \frac{١}{س^{٢}}$$

$$ق(س) = \int (٢ - \frac{١}{س^{٢}})\,دس$$

$$= \int (٢ - س^{-٢})\,دس$$

$$= ٢س - \frac{س^{-١}}{-١} + ج$$

$$ق(\frac{١}{٢}) = ٢ \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{\frac{١}{٢}} + ج = ١$$

$$١ + ٢ + ج = ١$$

$$ج = -٢$$

$$\Leftarrow ق(س) = ٢س + \frac{١}{س} - ٢$$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(س ، ص)$ يساوي $\frac{٣س - س^{٣}}{س^{٣}}$ جد قاعدة الاقتران $ق(س)$ علماً بان منحنى الاقتران $ق$ يمر بالنقطة $(-١ ، ٦)$

الحل

$$ق'(س) = \frac{٣س - س^{٣}}{س^{٣}}$$

$$ق(س) = \int \frac{٣س - س^{٣}}{س^{٣}}\,دس$$

$$= \int (\frac{٣س}{س^{٣}} - \frac{س^{٣}}{س^{٣}})\,دس$$

$$= \int (\frac{٣}{س^{٢}} - ١)\,دس = \int (٣س^{-٢} - ١)\,دس$$

$$= \frac{٣س^{-١}}{-١} - س + ج$$

$$= -\frac{٣}{س} - س + ج$$

$$ق(-١) = -\frac{٣}{-١} + ١ + ج = ٦$$

$$٣ + ١ + ج = ٦$$

$$ج = ٢$$

$$\Leftarrow ق(س) = -\frac{٣}{س} - س + ٢$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $٣س(س+٤)$، فجد قاعدة الاقتران $ق$، علماً بان منحناه يمر بالنقطة $(١، ٥)$

الحل

$$ق'(س) = ٣س(س+٤)$$
$$= ٣س^{٢} + ١٢س$$

$$ق(س) = \int (٣س^{٢} + ١٢س)\, دس$$

$$= \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{١٢س^{٢}}{٢} + د$$

$$= س^{٣} + ٦س^{٢} + د$$

$$ق(١) = ٥$$
$$١ + ٦ + د = ٥$$
$$٧ + د = ٥ \Leftarrow د = -٢$$

$$ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} - ٢$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تطبيقات فيزيائية

نذكر أن

$ع(ن) = ف'(ن) = \frac{د ف}{د ن}$

$ت(ن) = ع'(ن) = \frac{د ع}{د ن}$

---

① $ف(ن) = \int ع(ن)\, د ن$

② $ع(ن) = \int ت(ن)\, د ن$

$ت(ن) \xrightarrow{\text{تكامل}} ع(ن) \xrightarrow{\text{تكامل}} ف(ن)$

أو

$ف = \int ع(ن)\, د ن$

$ع = \int ت(ن)\, د ن$

ملاحظه هامه جداً

في كل مرة يجري فيها التكامل غير المحدود جد قيمة ثابت التكامل جـ

مثال ①

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته وعطاه بالعلاقه التاليه $ع(ن) = ٦ن - ٤$ م/ث ، جد المسافه التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء حركته علماً بان الموقع البدائي للجسيم $ف(٠) = ٦$ م

الحل

$ف(ن) = \int ع(ن)\, د ن = \int (٦ن - ٤)\, د ن$

$= \frac{٦ن^٢}{٢} - ٤ن + جـ$

$= ٣ن^٢ - ٤ن + جـ$

$ف(٠) = ٦$

$٣(٠)^٢ - ٤ \times ٠ + جـ = ٦$

$\Leftarrow جـ = ٦$

$ف(ن) = ٣ن^٢ - ٤ن + ٦$

المطلوب $ف(٣)$

$= ٣(٣)^٢ - ٤ \times ٣ + ٦$

$= ٢٧ - ١٢ + ٦$

$= ٢١$ م

مكتبة الوسام ALWESAM
ناجح الجمزاوي

مثال ②
يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يكون سارعة معطى بالعلاقة ت(ن) = ٢ن + ٨ م/ث، جد سرعة الجسم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن سرعة الجسم كانت ٣ م/ث بعد ٢ ثانية.

الحل
ت(ن) = ٢ن + ٨

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن = ∫ (٢ن + ٨) دن

= ٢ن²/٢ + ٨ن + ج

= ن² + ٨ن + ج

ع(٢) = ٣

٤ + ١٦ + ج = ٣

ج = -١٧

ع(ن) = ن² + ٨ن - ١٧

ع(١) = ١ + ٨ - ١٧ = -٨

مثال ③
يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد ن ثانية تساوي ع(ن) = ٤ن + ٨ م/ث، جد موقعه بعد مرور (٢) ثانية علماً بأن ف(٠) = ٣ م

الحل
ع(ن) = ٤ن + ٨

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ (٤ن + ٨) دن

= ٤ن²/٢ + ٨ن + ج

ف(ن) = ٢ن² + ٨ن + ج

بما ان ف(٠) = ٣

٢(٠)² + ٨(٠) + ج = ٣

ج = ٣

ف(ن) = ٢ن² + ٨ن + ٣

ف(٢) = ٨ + ١٦ + ٣ = ٢٧ م

مثال ④
تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت ت مقداره ٥ ت(ن) = ١٢ م/ث²، جد سرعتها بعد مرور مدة ن ثانية علماً بان سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٧

الحل
ت(ن) = ١٢

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن = ∫ ١٢ دن

ع(ن) = ١٢ن + ج

ع(٠) = ١٢(٠) + ج = ٧

ج = ٧

ع(ن) = ١٢ن + ٧

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

اذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة
ت(ن) = ٦ ن م/ث٢ ، مجد موقع الجسم بعد مرور ٣ ثواني من بدء حركته علماً بان السرعة الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م

الحل

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن = ∫ ٦ن دن
= ٦ن٢/٢ + ج = ٣ن٢ + ج
ع(٠) = ٢ ⇐ ج = ٢
ع(ن) = ٣ن٢ + ٢
ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫ ٣ن٢ + ٢ دن
= ٣ن٣/٣ + ٢ن + ج
ف(٠) = ٥ ⇐ ج = ٥
ف(ن) = ن٣ + ٢ن + ٥
ف(٣) = ٢٧ + ٦ + ٥
= ٣٨ م

مثال ⑥

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣(ن+١)٢ م/ث٢ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ١ م

الحل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن
= ∫ ٣(ن+١)٢ دن
ف(ن) = ٣(ن+١)٣/٣ + ج
ف(ن) = (ن+١)٣ + ج
ف(٠) = (٠+١)٣ + ج = ١
١ + ج = ١ ⇐ ج = ٠
ف(ن) = (ن+١)٣
ف(٢) = (٢+١)٣ = ٣٣
= ٢٧ م

مثال ⑦

يتحرك جسيم بسرعة تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٢ن √(ن٢+٤)
جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ن ثانية علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م ؟
← يتبع الحل

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

اكمل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ ن^٢ √(٤ن^٢ + ٤) دن

⇐ كامل بالتعويض

ص = ٤ن^٢ + ٤ ، دص = ٨ن دن

دن = دص / ٨ن

∫ ½ ص^½ × دص / ٨ن

∫ ¼ ص^½ دص = ¼ × ٢/٣ ص^٣/٢ + جـ

ف(ن) = ⅙ (٤ن^٢ + ٤)^٣/٢ + جـ

= ⅙ (√(٤ن^٢ + ٤))^٣ + جـ

ف(٠) = ٣

⇐ ⅙ (√٤)^٣ + جـ = ٣

⅙ × ٨ + جـ = ٣

٤/٣ + جـ = ٣ ⇐ جـ = ٣ − ٤/٣

= ٩/٣ − ٤/٣ = ٥/٣

ف(ن) = ⅙ (√(٤ن^٢ + ٤))^٣ + ٥/٣

مثال ⑧

يتحرك جسم بسرعة تعطى بالعلاقة ع(ن) = (ن − ١)(٢ن + ١) م/ث حيث موقع الجسم بعد ن ثانية علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٤

اكمل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن =

= ∫ (ن − ١)(٢ن + ١) دن

= ∫ (٢ن^٢ + ن − ٢ن − ١) دن

= ∫ (٢ن^٢ − ن − ١) دن

= ٢ن^٣/٣ − ن^٢/٢ − ن + جـ

ف(١) = ٠ ⇐ ٢/٣ − ½ − ١ + جـ = ٤

ف(ن) = ٢/٣ (ن)^٣ − ½ ن^٢ − ن + ٤

ف(٢) = ٢/٣ (٢)^٣ − ½ (٢)^٢ − ٢ + ٤

= ١٦/٣ − ٤/٢ + ٢

= ١٦/٣ − ٦/٣ + ٢ = ١٠/٣ + ٢ = ١٦/٣

مثال ⑨

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة

ع(ن) = ٦ جا(٣ن + ١) م/ث

جد المسافة التي تمثل موقع الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة

يتبع اكمل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

$ف(ن) = \int ٦ جتا(٣ن+١) دن$

$= -٦ \frac{جتا(٣ن+١)}{٣} + جـ$

$= -٢ جتا(٣ن+١) + جـ$

مثال (١٠)

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته تعطى بالعلاقة

$ع(ن) = \frac{ن^٢+١}{ن+١}$ $ن \neq -١$

اوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد (١) ثانية علماً بان موقعه الابتدائي $ف(٠) = ٥$

الحل

$ف(ن) = \int ع(ن) دن$

$= \int \frac{ن^٢+١}{ن+١} دن$

$= \int \frac{(ن+١)(ن^٢+ن+١)}{ن+١} دن$

$= \int (ن^٢+ن+١) دن$

$= \frac{ن^٣}{٣} + \frac{ن^٢}{٢} + ن + جـ$

$ف(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ٥$

$جـ = ٥$

$ف(ن) = \frac{١}{٣}ن^٣ + \frac{١}{٢}ن^٢ + ن + ٥$

$ف(١) = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} + ١ + ٥$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ٦$

$= \frac{٣٦}{٦} + \frac{٣}{٦} + \frac{٣}{٦}$

$= \frac{٤٤}{٦}$

ملاحظه هامه

تختلف قيمة الثابت جـ في حالة ايجاد التكامل بطريقة القواعد

$\int (٣س+٥)^{ن} دس$

ولكنه اكل يكون صحيح

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص١٩٠

① يتحرك جسيم على خط مستقيم وتعطى سرعته بالعلاقة ع(ن) = (٢ن - ٥) حيث موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م

الحل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ (٢ن - ٥) دن

= ن² - ٥ن + ج

ف(٠) = ٠ - ٠ + ج = ٣

⇐ ج = ٣

ف(ن) = ن² - ٥ن + ٣

ف(٢) = ٤ - ١٠ + ٣ = -٣

---

② يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة

ع(ن) = (٦(١ - ٢ن)^٢) م/ث

جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م

الحل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ ٦(١ - ٢ن)^٢ دن

= (١ - ٢ن)^٣ / (٣ × -٢) + ج

= -(١ - ٢ن)^٣ + ج

ف(٠) = -(١ - ٠)^٣ + ج = ٥

⇐ -١ + ج = ٥ ⇐ ج = ٦

ف(ن) = -(١ - ٢ن)^٣ + ٦

ف(١) = -(١ - ٢)^٣ + ٦

= ١ + ٦ = ٧

تدريب ② ص١٩١

يتحرك جسم على خط مستقيم وتسارع ت(ن) = -١٢ م/ث^٢ ، اذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م جد

① سرعة الجسم بعد مرور اربع ثواني من بدء الحركة

الحل

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن = ∫ -١٢ دن

= -١٢ن + ج

ع(٠) = ٥ ⇐ ج = ٥

ع(ن) = -١٢ن + ٥

ع(٤) = -١٢ × ٤ + ٥ = -٤٨ + ٥

= -٤٣ م/ث

← يتبع

(٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثواني من بدء الحركة .

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ (-١٢ن + ٥) دن

= -١٢ن^٢/٢ + ٥ن + ج

= -٦ن^٢ + ٥ن + ج

ف(٠) = ٣ ⇐ ج = ٣

ف(ن) = -٦ن^٢ + ٥ن + ٣

ف(٣) = -٦(٣)^٢ + ٥×٣ + ٣

= -٥٤ + ١٥ + ٣

= -٣٦ م

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الأسئلة
الكتاب ص ١٩٢

① يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة
ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن - ١)) م/ث
جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية .

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن
= ∫ ١٢ جتا(٢ن - ١) دن
= ١٢ جا(٢ن - ١) / ٢ + ج
= ٦ جا(٢ن - ١) + ج

④ تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث ان سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة
ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث ، جد موقع النقطة المادية بعد مرور اربع ثوان من بدء حركتها ، علماً بان موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م

الحل
ف(ن) = ∫ ع(ن) دن
ف(ن) = ∫ (٤ن + ٨) دن
= ٤ن²/٢ + ٨ن + ج
= ٢ن² + ٨ن + ج
ف(٠) = ٢ ⇐ ج = ٢
ف(ن) = ٢ن² + ٨ن + ٢
ف(٤) = ٢(٤)² + ٨×٤ + ٢
= ٣٢ + ٣٢ + ٢ = ٦٦

③ اذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة
ت(ن) = ٤٨ (١ - ٢ن)³ وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢م/ث جد
④ سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة .

الحل
ع(ن) = ∫ ت(ن)
= ∫ ٤٨ (١ - ٢ن)³ دن
نكامل بالتعويض
ص = ١ - ٢ن ⇐ دص = -٢دن
= ∫ ٤٨ ص³ × دص/(-٢)
← يتبع

ع(ن) = ∫ ٤ جـ ص^٣ د ص

= ٤ جـ ص^٤ / ٤ + جـ

= جـ ص^٤ + جـ

ع(ن) = ٦ (١ - جـ ن)^٤ + جـ

ع(٠) = ٦ (١ - جـ ٠)^٤ + جـ = ٢

⇐ ٢ = ٦ + جـ ⇐ جـ = ٨

ع(ن) = ٦ (١ - جـ ن)^٤ + ٨

⑤ موقع الجسم بعد مرور ثانيتين

ف(ن) = ∫ ع(ن) د ن

= ∫ ٦ (١ - جـ ن)^٤ + ٨

= ٦ (١ - جـ ن)^٥ / (٥ × -جـ) + ٨ن + جـ

= ٦/١٠ (١ - جـ ن)^٥ + ٨ن + جـ

ف(٠) = ٣

٦/١٠ (١ - ٠ × جـ)^٥ + ٨ × ٠ + جـ = ٣

٦/١٠ + جـ = ٣

جـ = ٣ - ٦/١٠ = ٣٠/١٠ - ٦/١٠

= ٢٤/١٠

ف(ن) = ٦/١٠ (١ - جـ ن)^٥ + ٨ن + ٢٤/١٠

ف(٢) = ٦/١٠ (١ - ٢ جـ)^٥ + ٨ × ٢ + ٢٤/١٠

④ يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة

ع(ن) = (٣ن - ١)(٤ن + ١)

⑥ القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية

ف(ن) = ∫ (٣ن - ١)(٤ن + ١) د ن

= ∫ (١٢ن^٢ + ٣ن - ٤ن - ١) د ن

= ∫ (١٢ن^٢ - ن - ١) د ن

= ١٢ن^٣/٣ - ن^٢/٢ - ن + جـ

= ٤ن^٣ - ن^٢/٢ - ن + جـ

⑦ موقع الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧ م

ف(٠) = ٤(٠)^٣ - (٠)^٢/٢ - ٠ + جـ = ٧

جـ = ٧

ف(ن) = ٤ن^٣ - ن^٢/٢ - ن + ٧

ف(٢) = ٤(٢)^٣ - ٤/٢ - ٢ + ٧

= ٣٢ - ٢ - ٢ + ٧

= ٣٥

مكتبة الوسام AlWesam
الاستاذ ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٢ن ، جد المسافة التي تقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م

الحل

ف(ن) = ∫ (٣ن^{٢} - ٢ن) دن

= $\frac{٣ن^{٣}}{٣}$ - $\frac{٢ن^{٢}}{٢}$ + جـ

= ن^{٣} - ن^{٢} + جـ

ف(٠) = ٥ ⇐ جـ = ٥

ف(ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥

ف(٣) = ٢٧ - ٩ + ٥

= ٢٣ م

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم بتباطؤ ثابت مقداره ت(ن) = ١٢ م/ث^{٢} جد سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بان السرعة الابتدائية ع(٠) = ٧ م/ث

الحل

ع(ن) = ∫ ١٢ دن

= ١٢ن + جـ

ع(٠) = ٧ ⇐ جـ = ٧

ع(ن) = ١٢ن + ٧

ع(١) = ١٢×١ + ٧ = ١٩

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣(ن+١)^{٢} جد بعد انه التي تقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ١ م

الحل

ف(ن) = ∫ ٣(ن+١)^{٢} دن

= $\frac{٣(ن+١)^{٣}}{٣}$ + جـ

ف(٠) = $\frac{٣(٠+١)^{٣}}{٣}$ + جـ = ١

جـ = ٠

ف(ن) = (ن+١)^{٣}

ف(٢) = (٢+١)^{٣} = ٢٧

مكتبة الوسام ALWESAM الأستاذ ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته لحد (ن) ثانية تساوي ع (ن) = ٦ ن + ٣ حد المسافة التي يقطعها الجسيم لحد (٣) ثواني علماً بان موقعه الابتدائي ف (٠) = ٢ م .

الحل

ف (ن) = ∫ (٦ ن + ٣) د ن

= ٦ ن^٢ / ٢ + ٣ ن + د

= ٣ ن^٢ + ٣ ن + د

ف (٠) = ٢ = ٣ (٠)^٢ + ٣ (٠) + د = ٢

د = ٢

ف (ن) = ٣ ن^٢ + ٣ ن + ٢

ف (٣) = ٢٧ + ٩ + ٢ = ٣٨

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان تسارع جسيم ت لحد مرور ن من الثواني يعطى بالعلاقة ت (ن) = (٨ ن) م/ث^٢ ، جد السرعة التي يقطعها الجسيم لحد مرور ن ثانية من بدء الحركة ، علماً بان السرعة الابتدائية ع (٠) = ٣ م/ث

الحل

ع (ن) = ∫ ت (ن) د ن

ع (ن) = ∫ ٨ ن د ن

= ٨ ن^٢ / ٢ + د

= ٤ ن^٢ + د

ع (٠) = ٣ = ٤ (٠)^٢ + د

د = ٣

ع (ن) = ٤ ن^٢ + ٣

وزارة (٢٠١٢) صيفية

يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع محطاه بالعلاقة ع (ن) = (٦ ن + ٨) م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم لحد مرور ن ثانية من بدء الحركة علماً بان الموقع الابتدائي ف (٠) = ٣ م

الحل

ف (ن) = ∫ ع (ن) د ن

= ∫ (٦ ن + ٨) د ن

= ٣ ن^٢ + ٨ ن + د

ف (٠) = ٣ = ٠ + ٠ + د

د = ٣

ف (ن) = ٣ ن^٢ + ٨ ن + ٣

مركز الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) شتوية

يتحرك جسم في خط مستقيم بتباعد ثابت (ت) مقداره ت(ن) = ٨ م/ث² جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء حركته علمًا بان سرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ وموضعه الابتدائي ف (٠) = ١٠ م

الحل

ع(ن) = ∫ ٨ دن

= ٨ن + جـ

ع(٠) = ٢ ⇐ ٢ = جـ

ع(ن) = ٨ن + ٢

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ (٨ن + ٢) دن

= ٤ن² + ٢ن + جـ

ف(٠) = ١٠ ⇐ جـ = ١٠

ف(ن) = ٤ن² + ٢ن + ١٠

وزارة (٢٠١٣) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم بتباعد ثابت ت(ن) = ٦ م/ث²، اذا كانت السرعة الابتدائية للجسم ع(٠) = ٨ فاوجد سرعة الجسم بعد ن ثانية

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن = ∫ ٦ دن

= ٦ن + جـ

ع(٠) = ٨ ⇐

٦ × ٠ + جـ = ٨ ← جـ = ٨

ع(ن) = ٦ن + ٨

وزارة (٢٠١٤) شتوية

يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع محطاه بالعلاقة ع(ن) = (٤ن + ٦) م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ٢ ثواني من بدء الحركة، علمًا بان الموقع الابتدائي ف (٠) = ١٠

الحل

ف(ن) = ∫ (٤ن + ٦) دن

= ٢ن² + ٦ن + جـ

ف(٠) = ١٠

⇐ جـ = ١٠

ف(ن) = ٢ن² + ٦ن + ١٠

ف(٣) = ٢ × ٩ + ٦ × ٣ + ١٠ = ٤٦

وزارة (٢٠١٤) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٦(ن + ٢) م/ث جد المسافة التي يقطعها بعد مرور (٢) ثانية من بدء الحركة علمًا بان موقعه الابتدائي

ف(٠) = ٥ م

← يتبع الحل

مركز المعلم ناجح الجمزاوي

الحل

$ف(ن) = \int ٦(ن+٢)^{٢} دن$

$= \frac{٦(ن+٢)^{٣}}{٣ \times ١} + جـ$

$= ٢(ن+٢)^{٣} + جـ$

$ف(٠) = ٥$

$٥ = ٢(٠+٢)^{٣} + جـ$

$٥ = ١٦ + جـ$

$جـ = ٥ - ١٦ = -١١$

$ف(ن) = ٢(ن+٢)^{٣} - ١١$

$ف(٢) = ٢(٢+٢)^{٣} - ١١$

$= ٢(٤)^{٣} - ١١$

$= ٢ \times ٦٤ - ١١ = ١٢٨ - ١١$

$= ١١٧$ م

وزارة (٢٠١٥) شتوية

اذا كان تسارع جسم يتحرك بعجلة (ن) من السكون يعطى بالعلاقة $ت(ن) = ٦ن$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علمًا بان السرعة الابتدائية $ع(٠) = ٢$ م/ث ، وموقعه الابتدائي $ف(٠) = ١٢$ م

الحل

$ع(ن) = \int ٦ن دن = ٣ن^{٢} + جـ$

$ع(٠) = ٢ \Leftarrow جـ = ٢$

$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢$

$ف(ن) = \int (٣ن^{٢} + ٢) دن$

$= \frac{٣ن^{٣}}{٣} + ٢ن + جـ$

$= ن^{٣} + ٢ن + جـ$

$ف(١) = (١)^{٣} + ٢ \times ١ + جـ = ١٢$

$جـ = ٩$

$ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن + ٩$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم بتسارع ثابت يعطى بالقاعدة $ت(ن) = ٦$ م/ث^{٢} ، $ن \geq$ صفر ، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة علمًا بان السرعة الابتدائية للجسم $ع(٠) = ٤$ م/ث ، وموقعه الابتدائي $ف(٠) = ١٠$ م

الحل

$ع(ن) = \int ٦ دن = ٦ن + جـ$

$ع(٠) = ٤ \Leftarrow جـ = ٤$

$ع(ن) = ٦ن + ٤$

$ف(ن) = \int (٦ن + ٤) دن$

$= ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ$

$ف(٠) = ١٠ \Leftarrow جـ = ١٠$

$ف(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ١٠$

$ف(٢) = ١٢ + ٨ + ١٠ = ٣٠$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد ن ثانية تحسب بالعلاقة ع(ن) = ٦(ن+١)^٢ جد المسافة التي تقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٨ م

الحل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ ٦(ن+١)^٢ دن

= ٦(ن+١)^٣ / ٣ + جـ

= ٢(ن+١)^٣ + جـ

ف(٠) = ٢(٠+١)^٣ + جـ = ٨

٢ + جـ = ٨

جـ = ٦

ف(ن) = ٢(ن+١)^٣ + ٦

ف(٢) = ٢(٢+١)^٣ + ٦

٥٤ + ٦ = ٦٠

وزارة (٢٠١٦) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن تسارعه ت بعد ن ثانية يعطى بالقاعدة ت(ن) = ١٢ م/ث^٢ فجد المسافة التي تقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بان السرعة الابتدائية ع(٠) = ٤ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٦

الحل

ع(ن) = ∫ ١٢ دن

= ١٢ن + جـ

ع(٠) = ٤ ← جـ = ٤

ع(ن) = ١٢ن + ٤

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ (١٢ن + ٤) دن

= ١٢ن^٢ / ٢ + ٤ن + جـ

= ٦ن^٢ + ٤ن + جـ

ف(٠) = ٦ ← جـ = ٦

ف(ن) = ٦ن^٢ + ٤ن + ٦

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٦(ن+١)^٢ ضد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علمًا بان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٩ م

الحل

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن
= ∫ ٦(ن+١)^٢ دن
= ٦(ن+١)^٣ / ٣ + جـ
= ٢(ن+١)^٣ + جـ
ف(٠) = ٩
٩ = ٢(٠+١)^٣ + جـ
٩ = ٢ + جـ ⇐ جـ = ٧
ف(ن) = ٢(ن+١)^٣ + ٧
ف(٢) = ٢(٢+١)^٣ + ٧
= ٥٤ + ٧ = ٦١

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اذا كان تسارع جسم يتحرك بعد ن ثانية يعطى بالقاعدة ت(ن) = ٨ن ضد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ن ثانية علمًا بان السرعة الابتدائية ع(٠) = ٤ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م

الحل

ع(ن) = ∫ ٨ن دن
= ٤ن^٢ + جـ
ع(٠) = ٤ ⇐ جـ = ٤
ع(ن) = ٤ن^٢ + ٤

ف(ن) = ∫ (٤ن^٢ + ٤) دن
= ٤ن^٣ / ٣ + ٤ن + جـ
ف(٠) = ٣ ⇐ جـ = ٣

ف(ن) = ٤ن^٣ / ٣ + ٤ن + ٣

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية

تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت ت(ن) = ١٤ م/ث٢ جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علمًا بأن سرعتها البدائية ع(٠) = ٥ م/ث

الحل

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

= ∫ ١٤ دن

= ١٤ن + جـ

ع(٠) = ٥ ⇐ جـ = ٥

ع(ن) = ١٤ن + ٥

ع(٢) = ١٤ × ٢ + ٥

= ٢٨ + ٥ = ٣٣

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الاقترانات اللوغاريتمية والأسّيّة

① الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

تعريف
اذا كان س > ٠ فإن
$\text{لو}_{\text{هـ}} س = \int_{1}^{س} \frac{1}{ع} \, دع$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

① $ه(س) = \text{لو}_{\text{هـ}} س \quad س > ٠$
$\Leftarrow ه'(س) = \frac{1}{س}$

② $ه(س) = \text{لو}_{\text{هـ}} م(س)$
$ه'(س) = \frac{م'(س)}{م(س)}$

ملاحظة هامة
$\text{لو}_{\text{هـ}} ا \times ب = \text{لو}_{\text{هـ}} ا + \text{لو}_{\text{هـ}} ب$
$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{ا}{ب} = \text{لو}_{\text{هـ}} ا - \text{لو}_{\text{هـ}} ب$

مثال ①
اوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي

① $ص = \text{لو}_{\text{هـ}} س^{٢}$
$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{س^{٢}} = \frac{١}{س}$

② $ص = \text{لو}_{\text{هـ}} (س^{٢}+٥)$
$دص = \frac{٢س}{س^{٢}+٥}$

③ $ص = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جا} س$
$\frac{دص}{دس} = \frac{\text{جتا} س}{\text{جا} س}$

④ $ص = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{س+١}$
$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{١}{٢\sqrt{س+١}}}{\sqrt{س+١}}$
$= \frac{١}{٢\sqrt{س+١}} \times \frac{١}{\sqrt{س+١}} = \frac{١}{٢(س+١)}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ②
جد هـ(س) لكل مما يأتي

① هـ(س) = س لوهـ س

الحل
هـ'(س) = س × $\frac{1}{س}$ + لوهـ س × ١
= ١ + لوهـ س

مشتقة حاصل ضرب
الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

② هـ(س) = $\frac{لو(س+١)}{س^{٢}}$

الحل
هـ'(س) = $\frac{س^{٢} \times \frac{١}{١+س} - لو(س+١) \times ٢س}{(س^{٢})^{٢}}$

= $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

③ هـ(س) = $(لو(س^{٣}+٥) + س^{٢})^{٥}$
مشتقة القوس
هـ'(س) = $٥(لو(س^{٣}+٥) + س^{٢})^{٤}$
× $(\frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٥} + ٢س)$

مثال ③
اذا كان هـ(س) = لو$_{هـ}$(ب س + ١)
وكان هـ'(١) = ٢ أوجد قيمة ب

الحل
هـ'(س) = $\frac{ب}{١+ب س}$
هـ'(١) = $\frac{ب}{١+ب}$ = $\frac{٢}{١}$ ضرب تبادلي
⇐ ب = ٢ + ٢ب
⇐ ب - ٢ب = ٢ ⇐ -ب = ٢ ⇐ ب = -٢

مثال ④
هـ(س) = لو$_{هـ}$ $\frac{٣}{س}$ جد هـ'(س)

الحل
هـ'(س) = $\frac{-\frac{٣}{س^{٢}}}{\frac{٣}{س}}$
= $\frac{-٣}{س^{٢}} \times \frac{س}{٣}$ = $\frac{-٣س}{٣س^{٢}}$ = $\frac{-١}{س}$

ملاحظة
عليه استخدام قواعد اللوغاريتم
حيث لو$_{هـ}$ $\frac{٣}{س}$ = لو$_{هـ}$ ٣ - لو$_{هـ}$ س
لاثابت
هـ'(س) = صفر - $\frac{١}{س}$
= $\frac{-١}{س}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑤
اذا كان $ه(س) = (٣س^{٢} + \log_{هـ} س^{٢})$ جد $ه'(٢)$ ؟

الحل
$ه'(س) = ٣س^{٢} + \log_{هـ} س^{٢}$
$ه'(س) = ٦س + \frac{٢س}{س^{٢}}$
$= ٦س + \frac{٢}{س}$
$ه'(٢) = ٦ \times ٢ + \frac{٢}{٢}$
$= ١٢ + ١ = ١٣$

مثال ⑥
اذا كان $ه(س) = ٣ \log_{هـ} س + (\frac{١}{١+س^{٢}})$ جد
فان $ه'(١)$ تساوي
أ) ٣ ب) -١ ج) $\log_{هـ} س$ د) صفر

الحل
$ه'(س) = ٣ \times \frac{١}{س} + صفر$
$ه'(١) = \frac{٣}{١} = ٣$ ⑧

مثال ⑦
اذا كان $ه(س) = \log_{هـ} ١٦ + س$
فان $ه'(س) =$
أ) $\log_{هـ} ١٦$ ب) $\log_{هـ} ١٦ + ١$ ج) ١ د) -١

الحل
مشتقة ثابت
$ه'(س) = صفر + ١ = ١$ ⑥

مثال ⑧
اذا كان $ه(س) = ٢ \log(س+١) + (٣س + ٤)$
فاوجد $ه'(١) =$
أ) ٢ ب) ٣ ج) صفر د) -٣

الحل
$ه'(س) = ٢ \times \frac{١}{س+١} + ٣$
$ه'(١) = ٢ \times \frac{١}{١+١} + ٣$
$= \frac{٢}{٢} + ٣ = ١ + ٣ = ٤$
⑤

مثال ⑨
اذا كان $ه(س) = ٣س^{٢} + \log_{هـ} جتاس$
فاوجد $ه'(س)$

الحل
$ه'(س) = ٦س + \frac{-جاس}{جتاس}$
$= ٦س - ظاس$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كانت ص = لو(ع+١)
ع = ٣س٢ + ٢ فاوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

قاعدة السلسلة

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= \frac{١}{ع+١} \times ٦س$

$= \frac{٦س}{٣س٢+٢+١} = \frac{٦س}{٣س٢+٣}$

تدريب ① ص٢٠٣

اثبت انه اذا كان هـ(س) = لو م(س)
فان هـ'(س) = $\frac{م'(س)}{م(س)}$
مستخدماً قاعدة السلسلة

الحل

نفرض ع = م(س)

ص = لو ع
هـ

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= \frac{١}{ع} \times م'(س)$

لكن ع = م(س)

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{م(س)} \times م'(س)$

$= \frac{م'(س)}{م(س)}$

تدريب ② ص٢٠٤

جد هـ'(س) في كل مما يأتي

① هـ(س) = لو حتا س
هـ

هـ'(س) = $\frac{-حا س}{حتا س} = -ظا س$

② هـ(س) = لو$_{هـ}$ س٢ ، س > ٠

هـ'(س) = $\frac{٢س}{س٢} = \frac{٢}{س}$

③ هـ(س) = لو$_{هـ}$ (س٣ + ٨) ، س > -٢

هـ'(س) = $\frac{٣س٢}{س٣+٨}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الإعلام ناجح الجمزاوي

تدريب ③ ص٢٠٤

اذا كان $هـ(س) = لو_{هـ}(أس + ٣)$

حيث أ ثابت وكان $هـ'(-٢) = ١$

فجد قيمة الثابت أ

الحل

$$هـ'(س) = \frac{أ}{أس + ٣}$$

$$هـ'(-٢) = \frac{أ}{-٢أ + ٣} = \frac{١}{٢}$$

ضرب تبادلي

$$٢أ = -٢أ + ٣$$

$$٤أ = ٣$$

$$أ = \frac{٣}{٤} \neq ١$$

تدريب ④

اذا كان $هـ(س) = لو_{|هـ|} س$ ، $س \neq ٠$

جد $هـ'(س)$

الحل

① عند $س = ٢$ ، $هـ(س) = لو س$

$$\Rightarrow هـ'(س) = \frac{١}{س}$$

② عند $س = -٢$ ، $هـ(س) = لو(-س)$

$$هـ'(س) = \frac{-١}{-س} = \frac{١}{س}$$

ملاحظة هامة جداً

$لو_{هـ} ١ = صفر$

$لو_{هـ} هـ = ١$

نتذكر قواعد الاشتقاق

① مشتقة حاصل ضرب اقترانين

الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

② مشتقة المسمى

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

③ مشتقة القوس

$ص = (هـ(س))^{ن}$

$ص' = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

④ قاعدة السلسلة

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

⑤ $ص = حا هـ(س)$

$ص' = هـ'(س) جتا هـ(س)$

مكتبة الوسام Alwesam
العلم ناجح الجمزاوي

تكامل الأقتران اللوغاريتمي الطبيعي

① $\int \frac{1}{س} \, د س = لو_{هـ} |س| + ج$

② $\int \frac{ه'(س)}{ه(س)} \, د س = لو_{هـ} |ه(س)| + ج$

اذا كان البسط يساوي مشتقة المقام فالجواب $لو_{هـ}$ |المقام| + ج

وعليه حلها بطريقة التكامل بالتعويض

$\int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}} = لو_{هـ} |\text{المقام}| + ج$

مثال ①

جد ما يأتي التكاملات التالية

① $\int \frac{٣}{س} \, د س$

الحل

$٣ \int \frac{١}{س} \, د س = ٣ لو_{هـ} |س| + ج$

② $\int (\frac{-١}{س} + س) \, د س$

الحل

$= -١ لو_{هـ} |س| + \frac{س^٢}{٢} + ج$

مثال ②

جد $\int \frac{٢ + ٣ س}{١ + ٣ س + س^٢} \, د س$

الحل

نلاحظ ان البسط = مشتقة المقام

$= لو_{هـ} |١ + ٣ س + س^٢| + ج$

حل آخر بالتعويض

نفرض ص = $١ + ٣ س + س^٢$

$د ص = (٣ + ٢ س) \, د س$

$د س = \frac{د ص}{٣ + ٢ س}$

$\int \frac{٢ + ٣ س}{ص} \times \frac{د ص}{٣ + ٢ س}$

$\int \frac{١}{ص} \, د ص = لو_{هـ} |ص| + ج$

$= لو_{هـ} |١ + ٣ س + س^٢| + ج$

مثال ③

اوجد $\int \frac{-٤}{٥ س} \, د س$

الحل $= \frac{-٤}{٥} \int \frac{١}{س} \, د س$

$= \frac{-٤}{٥} لو_{هـ} |س| + ج$

مكتبة العلم
ALILMLIBRARY
العلم ناجح الجمزاوي

مثال ④
اوجد $\int (\frac{٣}{س} جتا س - \frac{١٤}{س}) دس$

الحل
$= \frac{٣}{ج} \times جتا س - ١٤ لو_{هـ} |س| +$

مثال ⑤
اوجد $\int (\frac{-٢}{٣س} + قا^{٢} س + ٧^{س})$

الحل
$= \frac{-٢}{٣} لو_{هـ} |س| + ظا س + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

مثال ⑤
اذا كان $ه$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق
وكانت $ه'(س) = \frac{٢}{١+س}$ $س \neq -١$
وكان منحنى الاقتران $ه$ يمر بالنقطة $(٠، ٣)$ جد قاعدة الاقتران $ه$

الحل
$ه(س) = \int ه'(س) دس$
$= \int \frac{٢}{١+س} دس$
$= ٢ لو_{هـ} |س+١| + جـ$
$ه(١) = ٢ لو_{هـ} ١ + جـ = ٣$
$٢ \times ٠ + جـ = ٣$
$جـ = ٣$

$ه(س) = ٢ لو_{هـ} |س+١| + ٣$

مثال ⑤
احسب قيمة $\int_{١}^{٤} \frac{١}{س} دس$

الحل
$= لو_{هـ} |س|]_{١}^{٤} = لو_{هـ} ٤ - لو_{هـ} ١$
$= لو_{هـ} ٤ - ٠ = لو_{هـ} ٤$

مثال ⑥
اذا كان $\int_{١}^{٣} \frac{م}{س} دس = ٢ لو_{هـ} ٣$
فاوجد قيمة $م$ ؟

الحل
$\int_{١}^{٣} \frac{م}{س} دس = م لو_{هـ} |س|]_{١}^{٣} = ٢ لو_{هـ} ٣$
$م لو_{هـ} ٣ - م لو_{هـ} ١ = ٢ لو_{هـ} ٣$
$م لو_{هـ} ٣ - صفر = ٢ لو_{هـ} ٣$
$م لو_{هـ} ٣ = ٢ لو_{هـ} ٣$
$م = \frac{٢ لو_{هـ} ٣}{لو_{هـ} ٣} = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑦
اذا كان $\int_{م}^{1} \frac{1}{س} \, د س = -1$
فاوجد قيمة م ؟

الحل
$[\text{لو}_{هـ} |س|]_{م}^{1} = -1$
$\text{لو}_{هـ} 1 - \text{لو}_{هـ} م = -1$
$\therefore -\text{لو}_{هـ} م = -1 \Leftarrow \text{لو}_{هـ} م = 1$
$م = هـ^{1}$ ملاحظة
$\text{لو}_{م} ص = س \Leftarrow ص = م^{س}$

مثال ⑧
اوجد $\int \frac{س^{2} + 5}{س^{3} + 5س^{2} + 10} \, د س$

الحل
نلاحظ ان البسط = مشتقة المقام
لذلك بالتعويض
$ص = س^{3} + 5س^{2} + 10$
$د ص = (3س^{2} + 10س) \, د س$
$د س = \frac{د ص}{3س^{2} + 10س}$
$\int \frac{5 + س^{2}}{س} \times \frac{د ص}{3(5 + س^{2})}$
$\int \frac{1}{3ص} \, د ص = \frac{1}{3} \text{لو}_{هـ} |ص| + جـ$
$= \frac{1}{3} \text{لو}_{هـ} |س^{3} + 5س^{2} + 10| + جـ$

مثال ⑨
جد $\int \frac{-2}{1 + س} \, د س$

الحل
$ص = س + 1 \quad د ص = د س$
$\int \frac{-2}{ص} \times د ص = -2 \text{لو}_{هـ} |ص| + جـ$
$= -2 \text{لو}_{هـ} |س + 1| + جـ$

مثال ⑩
جد $\int_{1}^{2} \frac{2}{2 + س} \, د س$

الحل
$ص = س + 2 \quad د ص = د س$
عندما $س = 1 \Leftarrow ص = 3$
$س = 2 \leftarrow ص = 4$
$\int_{3}^{4} \frac{2}{ص} \times د ص = 2 [\text{لو}_{هـ} |ص|]_{3}^{4}$
$= 2 (\text{لو}_{هـ} 4 - \text{لو}_{هـ} 3)$

مثال ⑪
اوجد $\int \frac{3}{3س - 12} \, د س$
$ص = 3س - 12 \quad د ص = 3 \, د س$
$د س = \frac{د ص}{3}$
$\int \frac{1}{3ص} \times \frac{د ص}{3} = \int \frac{1}{ص} \, د ص$
$= \text{لو}_{هـ} |ص| + جـ = \text{لو}_{هـ} |3س - 12| + جـ$

مكتبة العلم ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

$$\int_{-1}^{1} \frac{3س^2}{3س^2+1}\,دس$$

الحل

$ص = 3س^2+1$ ، $دص = 6س\,دس$

$$دس = \frac{دص}{6س}$$

$س = -1 \leftarrow ص = 4$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$$\int_{4}^{1} \frac{3س^2}{ص} \times \frac{دص}{6س} = \frac{1}{2}\int_{4}^{1} \frac{1}{ص}\,دص$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln_{هـ} |ص|\right]_{4}^{1} = \frac{1}{2}(\ln_{هـ} 1 - \ln_{هـ} 4)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln_{هـ} 4$$

مثال (١٣)

$$\int \frac{3جتا \ln_{هـ} س}{س}\,دس$$

الحل

$ص = \ln_{هـ} س$ ، $دص = \frac{1}{س}$

$دس = س\,دص$

$$= \int \frac{3جتا ص}{س} \times س\,دص$$

$$= \int 3جتا ص\,دص = 3جا ص + ث$$

$$= 3جا \ln_{هـ} س + ث$$

مثال (١٤)

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $(ق - \frac{1}{س})$ أوجد قاعدة الاقتران $ق$ علماً بأنه يمر بالنقطة $(1، ق(1))$

الحل

$$ق'(س) = ق - \frac{1}{س}$$

$$ق(س) = \int (ق - \frac{1}{س})\,دس$$

$$= ق س - \ln_{هـ} س + ث$$

$$ق(1) = ق \times 1 - \ln_{هـ} 1 + ث = ق$$

$$ق = ق - 0 + ث$$

$$ث = 0$$

$$ق(س) = ق س - \ln_{هـ} س$$

مثال (١٥)

$$\int_{-1} (س+1)(س^2+ق س+1)\,دس$$

الحل

$ص = س^2+ق س+1$

$دص = (ق+ق س)\,دس$ ، $دس = \frac{دص}{ق+ق س}$

$$\int (س+1)(ص)^{-1} \times \frac{دص}{(ق+ق س)}$$

$$\frac{1}{ق}\int ص^{-1}\,دص = \frac{1}{ق}\ln_{هـ} |ص| + ث$$

$$\frac{1}{ق}\ln_{هـ} |س^2+ق س+1| + ث$$

مكتبة الإسلام
Alislam
الأستاذ ناجح الجمزاوي

تدريب ⑤ ص ٢٠٥

صحة كل تكامل مما يأتي

① $\int \frac{-٣}{س} \, دس$ ، $س \neq ٠$

الحل

$= -٣ \int \frac{١}{س} \, دس$

$= -٣ \, لو|س| + جـ$

② $\int (٦س^{٢} - ٤)(س^{٣} - ٢س + ١)^{-١} \, دس$

الحل

$ص = ص^{٣} - ٢س + ١$

$دص = (٣س^{٢} - ٢) \, دس$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢} - ٢}$

اقواس مرفوعة لـ

$= ٢ \int (٣س^{٢} - ٢) ص^{-١} \times \frac{دص}{٣س^{٢} - ٢}$

$= ٢ \int ص^{-١} \, دص$

$= ٢ \int \frac{١}{ص} \, دص = ٢ \, لو|ص| + د$

$٢ \, لو|س^{٣} - ٢س + ١| + د$

مثال ⑯

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث ان سرعتها تعطى بالعلاقة

ع(ن) $= \frac{٣}{ن + ١}$ $ن \neq -١$ ، $ن > -١$

جد المكان الذي يمثل موقع النقطة بعد مرور ن ثانية

الحل

ف(ن) $= \int$ ع(ن) $دن = \int \frac{٣}{ن + ١} \, دن$

$= ٣ \, لو|ن + ١| + جـ$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

⑦ الأقتران الاسي الطبيعي

مشتقة الأقتران الاسي

ص = هـ^س ⇔ لو_هـ ص = س

① و(س) = هـ^س
و'(س) = هـ^س

② و(س) = هـ^ل(س)
و'(س) = ل'(س) هـ^ل(س)

ملاحظه هامه

هـ^٠ = ١ ، هـ^١ = هـ

مثال ①
اوجد و'(س) لكل مما يأتي

① و(س) = هـ^-٣س
و'(س) = -٣ هـ^-٣س

④ و(س) = هـ^(س^٢+٥)
و'(س) = ٢س هـ^(س^٢+٥)

③ و(س) = هـ^جاس
و'(س) = جتاس هـ^جاس

④ و(س) = هـ^جتاس
و'(س) = -جاس هـ^جتاس

⑤ و(س) = س^٣ هـ^س^٢
مشتقة حاصل ضرب
و'(س) = س^٣ × ٢س هـ^س^٢ + هـ^س^٢ × ٣س^٢

⑥ و(س) = هـ^لوس
و'(س) = ١/س هـ^لوس

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①
جد صَ في كل مما يأتي

① ص = هـ^(٦-٣س^٢)
صَ = -٦س هـ^(٦-٣س^٢)

② ص = هـ^(٤س) لو_هـ س
صَ = هـ^(٤س) × ٤ + لو_هـ س × ٤ هـ^(٤س)

③ ص = س^٢ / (هـ^س + ٥)
صَ = [(هـ^س + ٥) × ٢س - س^٢ × هـ^س] / (هـ^س + ٥)^٢

④ ص = هـ^٣ لو_هـ س
صَ = هـ^٣ × ١/س = هـ^٣ / س
ملاحظة هـ^٣ = ثابت

⑤ ص = ٣- / هـ^س
اكل ص = -٣ هـ^-س
صَ = +٣ هـ^-س

⑥ ص = هـ^س / هـ^٤س
اكل ص = هـ^(س^٢ - ٤س)
ملاحظة قوانين ١/س
ص = هـ^-ن
صَ = -هـ^-س
① هـ^-ن / هـ^-ن = هـ^(-ن+ن)
② هـ^ن × هـ^ن = هـ^(ن+ن)

مثال ③
اوجد قَ(س) لما يلي

① قَ(س) = ٣/س + لو_هـ س + هـ^٥س
قَ(س) = -٣/س^٢ + ١/س + ٥ هـ^٥س

② قَ(س) = جتاس هـ + ٢ لو_هـ جاس
قَ(س) = -جاس هـ^جتاس + ٢ × جتاس / جاس

③ قَ(س) = ٤ لو_هـ س - ٣ هـ^(٤س-س^٢)
قَ(س) = ٤ × ١/س - ٣(٤-٢س) هـ^(٤س-س^٢)

④ قَ(س) = لو_هـ س / (هـ^س + ١)
قَ(س) = [(هـ^س + ١) × ١/س - لو_هـ س × هـ^س] / (هـ^س + ١)

مكتبة الوسط ALWESAT
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

اذا كان $ق(س) = هـ^{س^2} + 3س^2$

اوجد $ق'(س)$ ؟

الحل

$ق'(س) = \underbrace{2س هـ^{س^2}}_{\text{ضرب}} + 6س$

$ق'(س) = 2 \times 2 هـ^{س^2} + هـ^{س^2} \times 2$

$+ 6$

$= 4س^2 هـ^{س^2} + 2هـ^{س^2} + 6$

مثال ⑤

اذا كان $ق(س) = هـ^{3س} + لو_{هـ} س$

اوجد $ق'(س)$ ؟

الحل

$ق'(س) = 3هـ^{3س} + \frac{1}{س}$

$ق'(س) = 9هـ^{3س} - \frac{1}{س^2}$

مثال ⑥

$ق(س) = لو(س^2 + 1) + هـ^{2س}$ ثابتة

اوجد $ق'(س)$ ؟

الحل

$ق'(س) = \frac{2س}{س^2+1} + 0 + 2هـ^{2س}$

$ق'(س) = \frac{(س^2+1) \times 2 - 2س \times 2س}{(س^2+1)^2}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تكامل الأقتران الأسي

① $\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + ج$

② $\int هـ^{أ س + ب} \, دس = \frac{هـ^{أ س + ب}}{أ} + ج$

مثال ①
جد قيمة كل من التكاملات الآتية

① $\int (٢هـ^{س} - \frac{٥}{س^{٢}} + ٤) \, دس$

الحل
$= ٢هـ^{س} - \frac{٥}{٢} لو|س| + ٤س + ج$

② $\int ٤ هـ^{٥ - ٢س} \, دس$
$= ٤ \frac{هـ^{٥-٢س}}{-٢} + ج$
$= -٢ هـ^{٥-٢س} + ج$

③ $\int (٢هـ^{٥س+١} + \frac{٤}{س}) \, دس$
$= ٢ \frac{هـ^{٥س+١}}{٥} + ٤ لو|س| + ج$

④ $\int (\frac{س^{٢} + ٣س}{س^{٢}}) \, دس$
$= \int (\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٣س}{س^{٢}}) \, دس$
$= \int (١ + \frac{٣}{س}) \, دس = س + ٣ لو|س| + ج$

⑤ $\int (\frac{هـ^{س}}{٢} + \frac{٤}{٥س} + س^{-١}) \, دس$
$= \frac{١}{٢} هـ^{س} + \frac{٤}{٥} لو|س| + لو|س| + ج$

⑥ $\int (٣هـ^{س} - ٧ هـ^{س}) \, دس$
$= ٣هـ^{س} - ٧ هـ^{س} + ج$

⑦ $\int (هـ^{٤س-١} + حا(٤س+٥)) \, دس$
$= \frac{هـ^{٤س-١}}{٤} + \frac{-ضا(٤س+٥)}{٤} + ج$

⑧ $\int هـ^{-س} - ظا(٣س+٦)^{٢} + \frac{٢}{س+١} \, دس$
$= \frac{هـ^{-س}}{-١} - \frac{ظا(٣س+٦)}{٣} + ٢ لو|س+١| + ج$

مكتبة الوسام
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال ②

اجب $\int_{1}^{2} \frac{1}{هـ^{س}} \, دس$

الحل

$\int_{1}^{2} هـ^{-س} \, دس = [هـ^{-س}]_{1}^{2}$

$= هـ^{-2} - هـ^{-1}$

مثال ③

$\int_{1}^{2} (٤ هـ^{س} + \frac{٣}{س} - ٢) \, دس$

الحل

$[٤ هـ^{س} + ٣ لو|س| - ٤س]_{1}^{3}$

$= (٤ هـ^{٣} + ٣ لو ٣ - ٦) - (٤ هـ^{١} + ٣ لو ١ - ٤)$

$= ٤ هـ^{٣} + ٣ لو ٣ - ٦ - ٤ هـ + ٤$

$= ٤ هـ^{٣} - ٤ هـ + ٣ لو ٣ - ٤$

مثال ④

اوجد $\int ٦س \, هـ^{س^{٢}} \, دس$

التكامل بالتعويض

$ص = س^{٢}$ $\quad دص = ٢س \, دس$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int ٦س \, هـ^{ص} \times \frac{دص}{٢س}$

$\int ٣ هـ^{ص} \, دص = ٣ هـ^{ص} + جـ$

$= ٣ هـ^{س^{٢}} + جـ$

مثال ⑤

اوجد $\int (٦س - ١) \, هـ^{٣س^{٢} - س} \, دس$

الحل

$ص = ٣س^{٢} - س$

$دص = (٦س - ١) \, دس$

$\int (٦س - ١) \, هـ^{ص} \times \frac{دص}{٦س - ١}$

$= \int هـ^{ص} \, دص = هـ^{ص} + جـ$

$= هـ^{٣س^{٢} - س} + جـ$

مثال ⑥

اوجد $\int هـ^{س} \, ضتا(٢هـ^{س} - ١) \, دس$

الحل $ص = ٢هـ^{س} - ١$ $\quad دص = ٢هـ^{س} \, دس$

$دس = \frac{دص}{٢هـ^{س}}$

$\int هـ^{س} \, ضتا ص \times \frac{دص}{٢هـ^{س}} \Leftarrow$

$\frac{١}{٢} \int ضتا ص \, دص$

$= \frac{١}{٢} جا ص + جـ = \frac{١}{٢} جا(٢هـ^{س} - ١) + جـ$

مكتبة الوفاء
AL-WAFA
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{2} هـ^{\frac{1}{2}س-1} \, دس$$

$$= \left[هـ^{\frac{1}{2}س-1} \right]_{1}^{4}$$

$$= هـ^{1} - هـ^{\frac{1}{2}}$$

مثال ⑧

$$\int_{0}^{\frac{1}{9}س-1} هـ \, دس$$

$$= هـ^{\frac{1}{9}س-1} + ح$$

$$9 \times 5$$

مثال ⑨

$$\int_{1}^{3} 6س هـ^{س^2-1} \, دس$$

ص = $س^2 - 1$ ، $دص = 2س \, دس$

$$دس = \frac{دص}{2س}$$

س = 1 ← ص = 0

س = 3 ← ص = 8

$$\int_{0}^{8} 6س هـ^{ص} \times \frac{دص}{2س}$$

$$= 3 \int_{0}^{8} هـ^{ص}$$

$$= 3 هـ^{8} - 3 هـ^{0} = 3هـ^{8} - 3$$

مثال ⑩

$$\int س هـ^{س^2} \, دس$$

اكمل ص = $س^2$ ، $دص = 2س \, دس$

$$دس = \frac{دص}{2س}$$

$$\int س هـ^{ص} \times \frac{دص}{2س}$$

$$\frac{1}{2} \int هـ^{ص} دص = \frac{1}{2} هـ^{ص} + ح$$

$$= \frac{1}{2} هـ^{س^2} + ح$$

مثال ⑪

اذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (س ، ص) يساوي $4س هـ^{2س}$ اوجد قاعدة $\frac{1}{2}$ ق علماً بانه يمر بالنقطة (0 ، 1)

الحل

ميل المماس = $ق'(س) = 4س هـ^{2س}$

$$ق(س) = \int 4س هـ^{2س} \, دس$$

ص = $2س$ ، $دص = 4س \, دس$

$$دس = \frac{دص}{4س}$$

$$\int 4س هـ^{ص} \times \frac{دص}{4س} = \int هـ^{ص} دص$$

$$= هـ^{ص} + ح = هـ^{2س} + ح$$

← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

لكنه $ق(٠) = -١$

$ق' + ق = -١$

$١ + ق = -١ \Leftarrow ق = -٢$

$ق(س) = هـ^{س^٢} - ٢$

مثال (١٢)

اذا كانت $ق'(س) = ٣هـ^{س} - \frac{١}{س+هـ}$ حيث هـ عدد الأقتران وعلما بانه يمر بالنقطة $(٤،٠)$ تقع على منحنى ق

الحل

$ق(س) = ٣هـ^{س} - \frac{١}{س+هـ}$

$= ٣هـ^{س} - لو_{هـ}(س+هـ) + جـ$

$ق(٠) = ٢$

$٣هـ^{٠} - لو_{هـ}هـ + جـ = ٤$

$٣ - ١ + جـ = ٤$

$جـ = ٤ - ٢ = ٢$

$ق(س) = ٣هـ^{س} - لو_{هـ}(س+هـ) + ٢$

مثال (١٣)

اذا كانت $ق(س) = ٣هـ^{س^٢} + لو_{هـ}٢$

اوجد $ق'(١)$

الحل

$ق'(س) = ٣ \times ٢س هـ^{س^٢} + ٠$

$ق'(١) = ٦هـ^{(١)^٢}$

$= ٦هـ$

مثال (١٤)

اذا كان $ق(س) = هـ^{٣س} + لو_{هـ}س^٢$

فاوجد $ق''(١)$ ؟

الحل

$ق'(س) = هـ^{٣س} + لو_{هـ}س^٢$

$ق''(س) = ٣هـ^{٣س} + \frac{٢س}{س^٢}$

$= ٣هـ^{٣س} + \frac{٢}{س}$

$ق''(١) = ٣هـ^{٣} + ٢$

مثال (١٥)

اذا كان $(ق(س))^{س} = هـ^{س^٥} + لو_{هـ}س$

فاوجد $ق(١)$ ؟

الحل نشتق الطرفين

$ق(س) \times ق'(س)^{س} = ٥س^٤ هـ^{س^٥} + \frac{١}{س}$

$ق(١) \times ق'(١) = ٥هـ + ١ = ٦هـ$

مكتبة الوسام
ALWSAM
ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ⑥ ص ٢٠٦

$ق(س) = هـ^{ل(س)}$ اثبت أن

$ق'(س) = ل'(س)\ هـ^{ل(س)}$

الحل

نفرض $ع = ل(س)$

$\Leftarrow$ $ص = هـ^{ع}$ ، $ع = ل(س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= هـ^{ع} \times ل'(س)$

لكن $ع = ل(س)$

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = هـ^{ل(س)} \times ل'(س)$

تدريب ⑦ ص ٢٠٧

جد $ص'$ في كل مما يأتي

① $ص = هـ^{٣ - س^{٢}}$

$ص' = -٢س\ هـ^{٣ - س^{٢}}$

② $ص = هـ^{جتا س}$

$ص' = -٢ جا س\ هـ^{جتا س}$

③ $ص = (هـ^{س})(لو_{هـ} س)$ حاصل ضرب

$ص' = هـ^{س} \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times هـ^{س}$

④ $ص = \frac{هـ^{٣س}}{س^{٢} + ١}$ قسمة

$ص' = \frac{(س^{٢}+١)\ ٣هـ^{٣س} - هـ^{٣س} \times ٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

تدريب ⑧ ص ٢٠٧

اثبت أن $هـ^{٣س+ب} = \frac{هـ^{٣س+ب}}{٣} + ج$

الحل

$ص = ٣س + ب$ ، $د ص = ٣ د س$

$د س = \frac{د ص}{٣}$

$\int هـ^{ص} \times \frac{د ص}{٣} = \frac{١}{٣} \int هـ^{ص} د ص$

$= \frac{١}{٣} هـ^{ص} + ج$

$= \frac{١}{٣} هـ^{٣س+ب} + ج = \frac{هـ^{٣س+ب}}{٣} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

تدريب ⑨ ص ٢٠٨

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

① $\int \frac{1}{2} e^{3س} \, د س$

$= \frac{1}{2} e^{3س} + ج$

② $\int \frac{1}{3} e^{1-6س} \, د س$

$= \frac{1}{3} \times \frac{e^{1-6س}}{-6} + ج$

$= \frac{e^{1-6س}}{-18} + ج$

أو تكامل بالتعويض

③ $\int (2+3س^2) e^{س^3+2س-1} \, د س$

الحل

$ص = س^3 + 2س - 1$

$د ص = (3س^2 + 2) د س$

$د س = \frac{د ص}{3س^2+2}$

$\int (2+3س^2) e^{ص} \times \frac{د ص}{3س^2+2}$

$= \int e^{ص} د ص = e^{ص} + ج$

$= e^{س^3+2س-1} + ج$

④ $\int \frac{6 د س}{e^{1-2س}}$

الحل

$\int 6 e^{1-2س} د س = \int 6 e^{-1+2س} د س$

ملاحظة $\int e^{ن} = e^{ن}$ قوانين الأساس

$ص = -1+2س \quad د ص = 2 د س$

$د س = \frac{د ص}{2}$

$\int 6 e^{ص} \times \frac{د ص}{2} = \int 3 e^{ص} د ص$

$= 3 e^{ص} + ج = 3 e^{-1+2س} + ج$

أو حل آخر

$\int \frac{6}{e^{1-2س}} د س$

$ص = 1-2س \quad د ص = -2 د س$

$د س = \frac{د ص}{-2}$

$\int \frac{6}{e^{ص}} \times \frac{د ص}{-2} = \int -3 e^{-ص} د ص$

$= \frac{-3}{e^{ص}} + ج = \frac{-3}{e^{1-2س}} + ج$

$= -3 e^{-(1-2س)} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الأسئلة

الكتاب ص ٢٠٩

① جد $و(س)$ في كل مما يأتي

(أ) $و(س) = \frac{١}{س} + \log_{هـ} س + ٧ هـ^{٦ س}$

$و'(س) = \frac{-١}{س^{٢}} + \frac{١}{س} + ٧ \times ٦ هـ^{٦ س}$

(ب) $و(س) = ٣ \log_{هـ} س - ٢ هـ^{-٣ س^{٢}} - س^{٢}$

$و'(س) = ٣ \times \frac{١}{س} - ٢ \times -٦ س هـ^{-٣ س^{٢}} - ٢ س$

(ج) $و(س) = هـ^{جاس} - ٢ \log_{هـ}(جتاس)$

$و'(س) = جتاس هـ^{جاس} - ٢ \times \frac{-جاس}{جتاس}$

---

② جد ضمنياً كل من التكاملات الآتية

(أ) $\int (٢ هـ^{س} - \frac{١}{س} + ٣ س^{٢}) د س$

$= ٢ هـ^{س} - \log_{هـ}|س| + \frac{٣ س^{٣}}{٣} + جـ$

$= ٢ هـ^{س} - \log_{هـ}|س| + س^{٣} + جـ$

(ب) $\int \frac{هـ^{٤ + ١ س}}{٢} د س$

$= \frac{١}{٢} \int هـ^{٤ + ١ س} د س$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٤ + ١ س} + جـ$

(ج) $\int س \sqrt{١ - س^{٢}} د س$

$ص = ١ - س^{٢} \quad د ص = -٢ س د س$

$د س = \frac{د ص}{-٢ س}$

$\int س \sqrt{ص} \times \frac{د ص}{-٢ س} = -\frac{١}{٢} \int ص^{\frac{١}{٢}} د ص$

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = -\frac{١}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= -\frac{١}{٣} (١ - س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

(د) $\int (\frac{٥}{س} - ٣ هـ^{٣ س} - ٤) د س$

$= ٥ \log_{هـ}|س| - \frac{٣ هـ^{٣ س}}{٣} - ٤ س + جـ$

$= ٥ \log_{هـ}|س| - هـ^{٣ س} - ٤ س + جـ$

يتبع ←

مكتبة العلم ALWESAM العلم ناجح الجمزاوي

(٥) $\int \frac{٨س}{س^٢+٤}$ دس

ص = $س^٢+٤$

دص = $٢س$ دس ⇐ دس = $\frac{دص}{٢س}$

$\int \frac{٨س}{ص} \times \frac{دص}{٢س} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{ص}$ دص

$= \frac{١}{٢}$ لو |ص| + جـ

$= \frac{١}{٢}$ لو $|س^٢+٤|$ + جـ

(٣) اذا كان ميل المماس للأقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة ق'(س) = $٢هـ^{س}+٢س$ فجد قاعدة الأقتران ق ، علماً بان منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

الحل

ق(س) = $\int (٢هـ^{س}+٢س)$ دس

$= ٢هـ^{س} + \frac{٢س^٢}{٢} + جـ$

ق(٠) = ٤

$٢هـ^{٠} + ٠ + جـ = ٤$

$٢ + ٠ + جـ = ٤$

$جـ = ٤-٢$ $جـ = ٢$

ق(س) = $٢هـ^{س} + س^٢ + ٢$

(٤) يتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث ان سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة ع(ن) = $هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن}$ ن > ٠

جد الأقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور ن ثانية

الحل

ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن

$= \int هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن}$

$= هـ^{ن+١} + ٨$ لو |ن| + جـ

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

إذا كان $\int_{1}^{ك} هـ^{س} د س = $ صفر فإن قيمة ك تساوي

أ) -1 ب) صفر جـ) 1 د) 2

ك = ١ (جـ)

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

جد $\int س^{٢} هـ^{س} د س$

الحل

$ص = س^{٢}$ $\quad د ص = ٢ س د س$

$د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$س = ١ \leftarrow ص = (١)^{٢} = ١$

$\int_{٠}^{١} ص هـ^{ص} \times \frac{د ص}{٢ س} = \frac{١}{٢} \int_{٠}^{١} هـ^{ص} د ص$

$\frac{١}{٢} [هـ^{ص}]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢} (هـ^{١} - هـ^{٠})$

$\frac{١}{٢} (هـ - ١)$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

إذا كان $ص = \int هـ^{س^{٢}} د س$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$

أ) $٢ س هـ^{س^{٢}}$ ب) $\frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}} + ج$ جـ) $هـ^{س} + ج$ د) $هـ + ج$

الكل $\frac{د ص}{د س} = هـ^{س^{٢}}$ (ب)

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

جد $\int (هـ^{-س} + ٥ س^{٤}) د س$

الكل

$= \frac{هـ^{-س}}{-١} + ٥ \frac{س^{٥}}{٥} + ج$

$= -هـ^{-س} + س^{٥} + ج$

وزارة (٢٠١٠) شتوية

جد $\int (هـ^{س} + ٥ (٤)^{س}) د س$

$= هـ^{س} + \frac{٥^{س}}{ل ٤} + ج$

مكتبة السيام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) صيفية

① اذا كانت ص = ∫ (١/س) دس ، س ≠ ٠
فان dص/dس تساوي
أ) لو|س+١| + جـ ب) (-١/س٢) جـ) (١/س) د) صفر

الحل
dص/dس = ١/س ✓ جـ

② جـ ∫ (س+١) هـ^(س٢+٢س) دس

الحل
ص = س٢+٢س ، dص = (٢س+٢) dس
dس = dص / (٢س+٢) = dص / ٢(س+١)
∫ (س+١) هـ^ص × dص / ٢(س+١)
(١/٢) ∫ هـ^ص dص = (١/٢) هـ^ص + جـ
= (١/٢) هـ^(س٢+٢س) + جـ

③ اذا كان ق(س) = { هـ^س ، س ≤ ٣ ; س٢ ، س > ٣ }
جـ ∫ (من ١ الى ٥) ق(س) دس

الحل
∫ (من ١ الى ٥) ق(س) دس = ∫ (من ١ الى ٣) هـ^س دس + ∫ (من ٣ الى ٥) س٢ دس
= [هـ^س] (من ١ الى ٣) + [س٣/٣] (من ٣ الى ٥)
= هـ^٣ - هـ^١ + ١٢٥/٣ - ٩/٣
= هـ^٣ - هـ + ١١٦/٣ = هـ^٣ - هـ + ٣٨ ✓

وزارة (٢٠١١) شتوية

① ∫ (من ١ الى هـ) (١/س) دس =
أ) صفر ب) (-١/س٢) جـ) لو|س+هـ| د) (-١/س٢) لو|س+هـ|

الحل = صفر لان الحد الاعلى = الحد الادنى
أو لو|س|^١ = لو هـ - لو ١ = ٠

② اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ق(س)) يساوي هـ^(٣س) فاكتب قاعدة الاقتران علماً بانه يمر بالنقطة (٠ ، ١)

ق'(س) = هـ^(٣س) ⇐ ق(س) = ∫ هـ^(٣س) دس
⇐ ق(س) = هـ^(٣س)/٣ + جـ
ق(٠) = ١ ⇐ هـ^٠/٣ + جـ = ١
⇐ ١/٣ + جـ = ١ ⇐ جـ = ١ - ١/٣ = ٢/٣
ق(س) = هـ^(٣س)/٣ + ٢/٣

مكتبة الهدى ALWEDAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) صيفية

$\int \left(أ س + \frac{٣}{س}\right) د س$

الحل

$= \frac{أ س^{٢}}{٢} + ٣ لو|س| + جـ$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

$\int \left(س^{٥} + \frac{٤}{س} + هـ^{س}\right) د س$

الحل

$= \frac{س^{٦}}{٦} + ٤ لو|س| + هـ^{س} + جـ$

وزارة (٢٠١٢) صيفية

$\int \left(هـ^{س} - \frac{٥}{س} + أ س\right) د س$

$= هـ^{س} - ٥ لو|س| + \frac{أ س^{٢}}{٢} + جـ$

وزارة (٢٠١٣) شتوية

$\int (٦ س^{٢} + ٣ هـ^{س} - ب س) د س$

الحل

$= \frac{٦ س^{٣}}{٣} + ٣ هـ^{س} - \frac{ب س^{٢}}{٢} + جـ$

$= ٢ س^{٣} + ٣ هـ^{س} - \frac{ب}{٢} س^{٢} + جـ$

وزارة (٢٠١٣) صيفية

$\int \left(هـ^{س} - \frac{٥}{س} + أ س\right) د س$

$= هـ^{س} - ٥ لو|س| + \frac{أ س^{٢}}{٢} + جـ$

وزارة (٢٠١٤) شتوية

إذا كانت $ق'(س) = ٦ هـ^{٣س} - \frac{١}{س+هـ}$

حيث قاعدة الأقتران ق علماً بأن النقطة (١، ٥٠) تقع على منحنى الأقتران ق

الحل

$ق(س) = \int \left(٦ هـ^{٣س} - \frac{١}{س+هـ}\right) د س$

$= \frac{٦ هـ^{٣س}}{٣} - لو|س+هـ| + جـ$

$ق(١) = ٢ هـ^{٣} - لو|١+هـ| + جـ = ١$

$٣ - ١ + جـ = ١ \Leftarrow جـ = -١$

$ق(س) = ٢ هـ^{٣س} - لو|س+هـ| - ١$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

① قيمة $\int_{١}^{١} هـ^{س} د س$ تساوي

أ) هـ ب) ١ - هـ ج) هـ - ١ د) ١

الحل

$\left[هـ^{س}\right]_{١}^{١} = هـ^{١} - هـ = هـ - هـ = ٠$

الجواب (ج)

② $\int \frac{١}{س} د س$ تساوي

أ) $س^{-١} + جـ$ ب) $لو|س| + جـ$

ج) $\frac{-١}{س^{٢}} + جـ$ د) $\frac{-١}{س} + جـ$

الجواب ب) $لو|س| + جـ$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

$\int (3\sqrt{س} + \frac{5}{س} - \sin س)\, د س$

$= 3 \ln|س| + 5\ln|س| + \cos س + ج$

وزارة (٢٠١٥) شتوية

① $\int (\sqrt{س} - 2\cos س + \frac{1}{س})\, د س$

$= \ln|س| - 2\sin س + \ln|س| + ج$

② اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ه(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $(ه^{3-س})$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $(3، 16)$ جد قاعدة الاقتران $ه$

الحل

$ه(س) = \int ه^{3-س}\, د س$

$= \frac{ه^{3-س}}{-1} + ج$

$ه(3) = \frac{ه^{3-3}}{-1} + ج = 1$

$\frac{1}{-1} + ج = 1 \Leftarrow ج = 2$

$ه(س) = -ه^{3-س} + 2$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

① اذا كان $ه(س) د س = ه^{4+س^2}$

وكان $ه(ب) = -2ب$ $ب \neq 0$

جد قيمة (قيم) الثابت $ب$ ؟

الحل

$ه(س) = ه^{4+س^2}$ ثابت

$ه(س) = -2س\, ه^{4+س^2} + صفر$

$ه(ب) = -2ب\, ه^{4+ب^2}$

$-2ب = \frac{-2ب}{ه^{4+ب^2}}$

$ه^{4+ب^2} = 1 \Leftarrow ه^{4+ب^2} = ه^0$

لأن $ه^0 = 1$

$\Leftarrow$ الاس = الأس

$4 + ب^2 = 0$

$(ب - 1)(ب + 1) = 0$

$ب = 1 \quad ب = -1$

② اذا كان $ه$ اقترانا قابلا للاشتقاق وكانت $ه(س) = \frac{3}{س+1}$ $س \neq -1$

وكان منحنى الاقتران $ه$ يمر بالنقطة $(2، 0)$ جد قاعدة $ه$

$\Leftarrow$ اكمل

مكتبة العلم ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

الحل

$$\text{ه}'(س) = \frac{٣}{س+١}$$

$$\text{ه}(س) = \int \frac{٣}{س+١}\, دس$$

$$= ٣ \text{لو}|س+١| + جـ$$

$$\text{ه}(٠) = ٣\,\text{لو}(١) + جـ = ٢$$

$$٠ \times ٣ + جـ = ٢$$

$$جـ = ٢$$

$$\text{ه}(س) = ٣\,\text{لو}|س+١| + ٢$$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

① $\int \left(\frac{٤س}{س^{٢}+٥} - هـ^{-س}\right) دس$

$$= \frac{٤}{٢}\text{ظا}س + ٥\,\text{لو}|س^{٢}+٥| + هـ^{-س} + جـ$$

---

② اذا كان $\text{ه}'(س) = \frac{١}{س^{٢}+هـ^{س}} + ٨هـ^{٢س} \pm هـ^{س}$

صد قاعدة الأقتران ه علماً بان منحنى الأقتران يمر بالنقطة (٠،٥)

الحل

$$\text{ه}(س) = \int \left(\frac{١}{س^{٢}+هـ^{س}} + ٨هـ^{٢س}\right) دس$$

$$= \text{لو}|س^{٢}+هـ^{س}| + \frac{٨هـ^{٢س}}{٢} + جـ$$

$$\text{ه}(٠) = \text{لو}_{هـ}٤ + ٤هـ^{٠} + جـ = ٥$$

$$= ٢ + ٤ + جـ = ٥$$

$$\Leftarrow جـ = -١$$

$$\text{ه}(س) = \text{لو}|س^{٢}+هـ^{س}| + ٤هـ^{٢س} - ١$$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

① صد $\int \left(\frac{١}{٣س} + هـ^{-س} + \text{ضتا}س\,\text{ظا}س\right) دس$

الحل

$$= \frac{١}{٣}\int \frac{١}{س} + \int هـ^{-س} + \int \text{ضتا}س \times \frac{\text{جتا}س}{\text{جتا}س}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{لو}|س| + \frac{هـ^{-س}}{-١} + -\text{ضتا}س$$

② اذا كان $\text{ه}(س)$ اقتراناً وكان $\text{ه}(٤) = ٩$ ، $\text{ه}(١١) = ٥$

$$\int_{١}^{٤} (٤هـ^{س-١} + ٩\text{ه}(س)) = ٨$$

صد صحة ٩ بدلالة هـ

الحل

$$٤\int_{١}^{٤} هـ^{س-١} + ٩\int_{١}^{٤} \text{ه}(س) = ٨$$

$$\Leftarrow$$ يتبع

$\int_{1}^{2} (هـ^{س-1}) + ٢(هـ(٢) - هـ(١)) = ٨$

$٤(هـ - هـ^{-1}) + ٢(٩ - ٥) = ٨$

$٤(هـ - ١) + ٢٤ = ٨$

$٤هـ - ٤ + ٢٤ = ٨$

$٢٤ = ٨ - ٤هـ + ٤$

$= ١٢ - ٤هـ$

$ج = \frac{١٢ - ٤هـ}{٤} = ٣ - هـ$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

① $\int \frac{س^{٢} - س هـ^{س} + ١}{س}$ توضح

$\int \frac{س^{٢}}{س} - \frac{س هـ^{س}}{س} + \frac{١}{س}$

$\int (س - هـ^{س} + \frac{١}{س})$ دس

$= \frac{س^{٢}}{٢} - هـ^{س} + لو|س| + ج$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + هـ^{-س} + لو|س| + ج$

② اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ عند النقطة (س، ص) يساوي $(٤س^{٣} + \frac{١}{ك + هـ})$ جد قاعدة الاقتران هـ علماً بان منحنى هـ يمر بالنقطة (٠، ٣)

الحل

$هـ'(س) = ٤س^{٣} + \frac{١}{س + هـ}$

$هـ(س) = \int ٤س^{٣} + \frac{١}{س + هـ}$

$= \frac{٤س^{٤}}{٤} + لو|س + هـ| + ج$

$هـ(٠) = (٠)^{٤} + لو(٠ + هـ) + ج = ٣$

$لو هـ + ج = ٣$

$١ + ج = ٣ \Leftarrow ج = ٢$

$هـ(س) = س^{٤} + لو|س + هـ| + ٢$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

① جد $\int \frac{٣}{هـ^{٥س}} - \frac{١}{٣س^{٥}} + \frac{٦}{س}$

الحل

$\int ٣هـ^{-٥س} - س^{-\frac{٣}{٥}} + \frac{٦}{س}$

$= ٣ \times \frac{١}{-٥} هـ^{-٥س} - \frac{س^{\frac{٢}{٥}}}{\frac{٢}{٥}} + ٦ لو|س| + ج$

يتبع ←

مكتبة الهدام ALWSAM
الوعلم ناجح الجمزاوي

⑦ اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $\frac{٣}{هـ^{س}}$ ، جد قاعدة الاقتران $ق$ علماً بان منحناه يمر بالنقطة $(٠، ١)$

الحل

$ق'(س) = \frac{٣}{هـ^{س}} = ٣هـ^{-س}$

$ق(س) = \int ٣هـ^{-س} دس$

$= -٣هـ^{-س} + جـ$

$ق(٠) = -٣هـ^{٠} + جـ = ١$

$-٣ + جـ = ١$

$جـ = ٤ \Leftarrow$

$ق(س) = -٣هـ^{-س} + ٤$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

جد $\int (٤هـ^{س} + ٦جتا^{٥} + \frac{١}{س}) دس$

الحل

$= ٤هـ^{س} + \frac{٦س^{-٤}}{-٤} + لو|س| + جـ$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

المساحة

التكامل المحدود له كثير من الجوانب التطبيقية ، ومنها إيجاد المساحات لأقترانات مختلفة .

ملاحظات على إيجاد المساحات

① حدود التكامل تؤخذ من حدود س

② يكون الناتج موجب ، واذا كان الناتج سالب يأخذ القيمة المطلقة للناتج

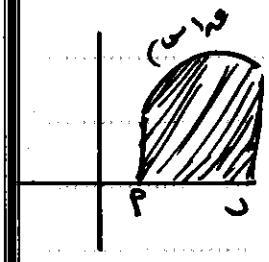
مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الأقتران ص = ق(س) ومحور السينات على الفترة [م ، ن] تعطى بالقاعدة

$$\text{المساحة} = \int_{م}^{ن} |ق(س)| \, دس$$

وهناك اربع حالات

---

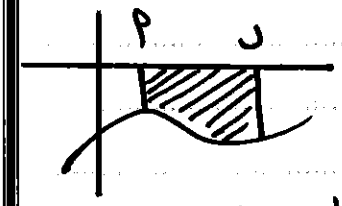
① ق(س) فوق محور السينات



ق(س) ≥ ٠

$$\text{المساحة} = \int_{م}^{ن} ق(س) \, دس$$

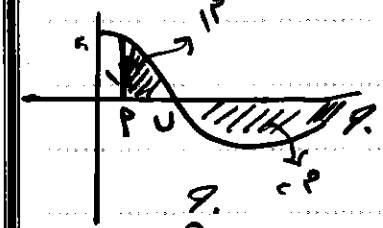
② ق(س) تحت محور السينات (أ ، ب)



ق(س) ≤ ٠

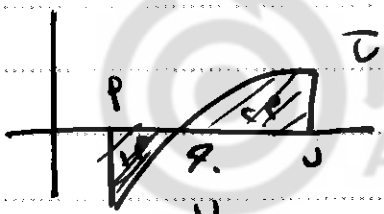
$$\text{المساحة} = \int_{م}^{ن} -ق(س) \, دس$$

③ ق(س) تحت وفوق محور السينات



$$\text{المساحة} = \int_{م}^{ن} ق(س) \, دس - \int_{ن}^{جـ} ق(س) \, دس$$

④ ق(س) تحت وفوق محور السينات



$$\text{المساحة} = -\int_{م}^{جـ} ق(س) \, دس + \int_{جـ}^{ن} ق(س) \, دس$$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

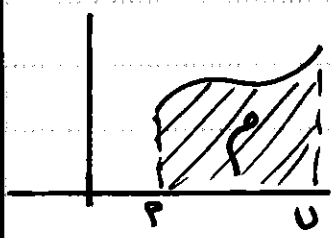
خطوات إيجاد المساحة

بين اقترانين ومحور السينات ومستقيمين $س = م$ ، $س = ن$.

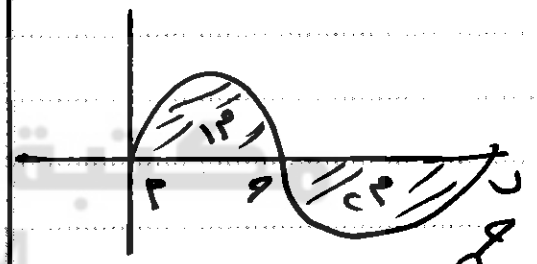
① نجد نقط تقاطع الاقترانين مع محور السينات وذلك بوضع $ق(س) = ٠$

② نجد قيم $س$

③ اذا لم تقع قيم $س$ (نقط التقاطع) بين $(م ، ن)$ تكون المساحة $= \int_{م}^{ن} |ق(س)| \, د س$



④ اذا وقعت قيم $س$ (نقط التقاطع) بين $(م ، ن)$



المساحة $= \int_{م}^{ن} |ق(س)| \, د س$

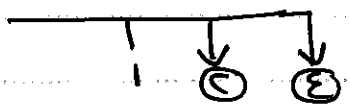
$+ \int_{ن}^{ه} |ق(س)| \, د س$

مثال ①

جد المساحة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س - ١$ ومحور السينات والمستقيمين $س = ٢$ ، $س = ٤$

الحل

① $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$



لا تقع بين $(٢ ، ٤)$

$$م = \int_{٢}^{٤} (س - ١) \, د س$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - س \right]_{٢}^{٤} = (٨ - ٤) - (٢ - ٢)$$

$$= ٤ - ٠ = ٤$$

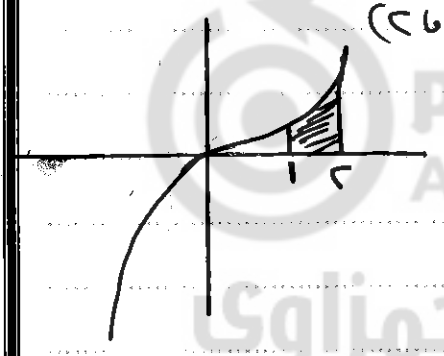
مثال ②

اوجد المساحة المحصورة بين $ص = س^{٣}$ ومحور السينات والمستقيمين $س = ١$ ، $س = ٢$ ؟

الحل

$س^{٣} = ٠$

$س = ٠ \notin (١ ، ٢)$



$$م = \int_{١}^{٢} س^{٣} \, د س$$

$$= \left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{١٦}{٤} - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١٥}{٤}$$

مكتبة الأوائل AWEBAM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ③

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الأقتران ق(س) = ٤س² ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢

الحل

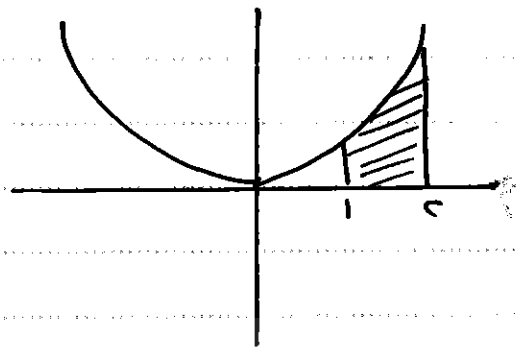
٤س² = ٠

س = ٠ ∉ (١ ، ٢)

$$م = \int_{1}^{2} 4س^2 \, دس = \left[\frac{4س^3}{3} \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{4 \times 8}{3} - \frac{4(1)^3}{3}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$$



مثال ④

اوجد المساحة المحصورة بين منحنى الأقتران ق(س) = س² + ٢ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٣

الحل

س² + ٢ ≠ ٠ لا تحل

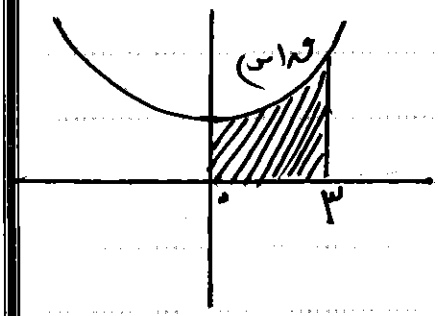
∴ لا يقطع محور السينات

∴ محور الصادات تعني س = ٠

$$م = \int_{0}^{3} (س^2 + 2) \, دس = \left[\frac{س^3}{3} + 2س \right]_{0}^{3}$$

$$= (9 + 6) - (0 + 0)$$

$$= 9 + 6 = 15$$



مثال ⑤

جد المساحة المحصورة بين منحنى الأقتران ق(س) = س³ ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١

الحل

س³ = ٠

س = ٠ تقع بين -٢ ، ١ لذلك نجزئ التكامل

$$م = \int_{-2}^{0} س^3 \, دس + \int_{0}^{1} س^3 \, دس$$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

$$\left[\frac{س^٤}{٤}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{س^٤}{٤}\right]_{٠}^{١}$$

$$|(٠) - (\frac{١٦}{٤})| + |\frac{١}{٤} - \frac{١٦}{٤}| = \frac{١٦}{٤} + \frac{١}{٤}$$

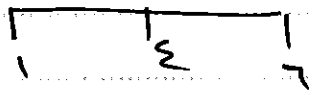
$$= \frac{١٧}{٤}$$

مثال ⑥

اوجد مساحة المحصورة بين الاقتران $ق(س) = ٨ - ٤س$ ومحور السينات في الفترة $[١، ٦]$

الحل

$٨ - ٤س = ٠ \Leftarrow س = ٢ \in (١، ٦)$



$$م = \int_{١}^{٤} |٨ - ٤س| \, دس + \int_{٤}^{٦} |٨ - ٤س| \, دس$$

$$= \left[٨س - \frac{٤س^٢}{٢}\right]_{١}^{٤} + \left[٨س - \frac{٤س^٢}{٢}\right]_{٤}^{٦}$$

$$= (٣٢ - ١٦) - (٨ - ١) + (٤٨ - ٣٦) - (١٦ - ٣٢)$$

$$= |١٦ - ٧| + |١٢ - ١٦|$$

$$= ٩ + ٤ = ١٣$$

مثال ⑦

اوجد مساحة المحصورة بين $ق(س) = ٦$ والمستقيمين $س = -٢$

$س = ٥$

الحل لايقطع محور السينات

$٦ \neq ٠$

$$م = \int_{-٢}^{٥} ٦ \, دس = ٦(٥ - (-٢))$$

$$= ٦ \times ٧ = ٤٢$$

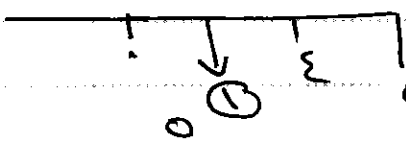
مثال ⑧

جد مساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س) = س^٢ - ٤س$ ومحور السينات على الفترة $[١، ٥]$

الحل

$س^٢ - ٤س = ٠ \Leftarrow س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠ ، ٤ ، س = ٤$



$$م = \int_{١}^{٤} |س^٢ - ٤س| \, دس + \int_{٤}^{٥} |س^٢ - ٤س| \, دس$$

$$= \left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢}\right]_{١}^{٤} + \left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢}\right]_{٤}^{٥}$$

$$|(\frac{٦٤}{٣} - ٣٢) - (\frac{١}{٣} - ٢)| + |(\frac{١٢٥}{٣} - ٥٠) - (\frac{٦٤}{٣} - ٣٢)|$$

$$|\frac{٦٤}{٣} - ٣٢ - \frac{١}{٣} + ٢| + |\frac{١٢٥}{٣} - ٥٠ - \frac{٦٤}{٣} + ٣٢|$$

$$|\frac{٦٢}{٣} - ٣٠| + |\frac{٦١}{٣} - ١٨|$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

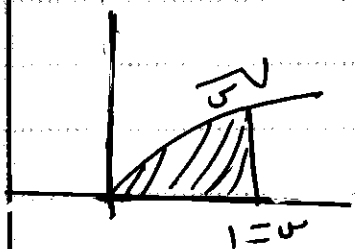
مثال ⑨

اوجد المساحة المحصورة بين
ق(س) = ا س ومحور السينات
والمستقيم س = ١

الحل

ا س = ٠ بالتربيع س = ٠

م = ∫₀¹ ا س د س



= ∫₀¹ س^½ د س

= [٢/٣ س^٣/٢]₀¹

= ٢/٣ - ٠ = ٢/٣

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

خطوات إيجاد المساحة بين اقتران ومحور السينات

طريقة الحل

نجد نقط تقاطع الأقتران مع محور السينات ق(س) = صفر فتكون هي حدود التكامل

مثال ①

اوجد المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ص = ق(س) = ٩ - س² ومحور السينات ؟

الحل

٩ - س² = ٠ ⇐ س² = ٩

س = ± ٣

$$م = \int_{-٣}^{٣} |٩ - س^٢| \, ds$$

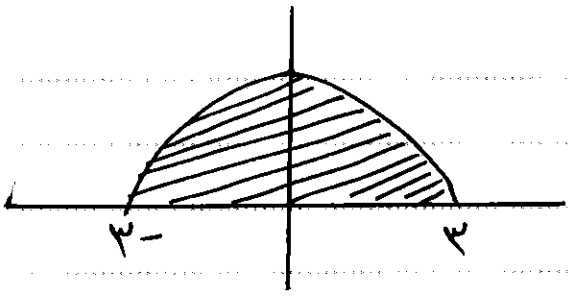
$$= \left[٩س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-٣}^{٣}$$

$$= \left(٩ \times ٣ - \frac{(٣)^٣}{٣} \right) - \left(٩ \times -٣ - \frac{(-٣)^٣}{٣} \right)$$

$$= (٢٧ - ٩) - (-٢٧ + ٩)$$

$$١٨ - (-١٨)$$

$$= ٣٦$$



مثال ②

اوجد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س³ - ٣س² ومحور السينات

الحل

س³ - ٣س² = ٠ ⇐ س²(س - ٣) = ٠

س = ٠ أو س - ٣ = ٠

س = ٣

$$م = \int_{٠}^{٣} |س^٣ - ٣س^٢| \, ds$$

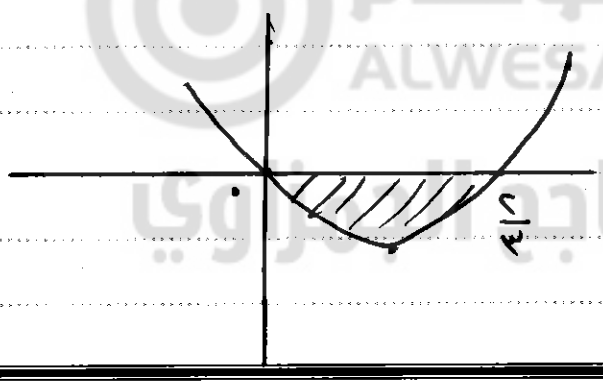
$$= \left[\frac{س^٤}{٤} - \frac{٣س^٣}{٣} \right]_{٠}^{٣}$$

$$= \left[\frac{س^٤}{٤} - س^٣ \right]_{٠}^{٣}$$

$$= \left(\frac{٣}{٢} \right)^٤ - \left(\frac{٣}{٢} \right)^٣ - صفر$$

$$= \frac{٨١}{١٦} - \frac{٢٧}{٨} = \frac{٨١}{١٦} - \frac{٥٤}{١٦}$$

$$= \frac{٢٧}{١٦}$$



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

اذا كان ق(س) = س^{2} - ٤س - ٣
اجد المساحة المحصورة بين منحنى الأقتران ومحور السينات .

الحل

س^{2} - ٤س - ٣ = ٠
(س - ٣) (س + ١) = ٠
س = ٣ ، س = -١

$$م = \int_{-1}^{3} |س^{2} - ٤س - ٣| \, دس$$

$$= \left[\frac{س^{3}}{٣} - س^{2} - ٣س \right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(٩ - ٩ - \frac{٢٧}{٣} \right) - \left(-\frac{١}{٣} + ١ - ٣ \right)$$

$$= \left| -\frac{٣٢}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$$

لانأخذ القيمة المطلقة لأن المساحة سالبة

مثال ④

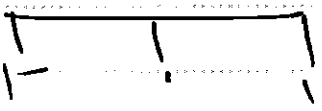
اذا كان ق(س) = ٤س - ٤س^{3}
اجد المساحة المحصورة بين منحنى الأقتران ومحور السينات

الحل

٤س - ٤س^{3} = ٠

٤س (١ - س^{2}) = ٠

س = ٠ ، س^{2} = ١ ⇐ س = ±١



م = م$_{١}$ + م$_{٢}$

$$= \int_{-1}^{0} (٤س - ٤س^{3}) \, دس + \int_{0}^{1} (٤س - ٤س^{3}) \, دس$$

$$= \left[٢س^{2} - س^{4} \right]_{-1}^{0} + \left[٢س^{2} - س^{4} \right]_{0}^{1}$$

= |٠ - (٢ - ١)| + |(٢ - ١) - ٠|
= |-١| + |١| = ١ + ١
= ٢

مثال ⑤

اجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س^{2} - ٤س ومحور السينات

الحل

س^{2} - ٤س = ٠ ⇐ س(س - ٤) = ٠
س = ٠ ، س = ٤

$$م = \int_{0}^{4} |س^{2} - ٤س| \, دس = \left| \left[\frac{س^{3}}{٣} - ٢س^{2} \right]_{0}^{4} \right|$$

$$= \left| \frac{٦٤}{٣} - ٣٢ \right| = \left| \frac{٦٤}{٣} - \frac{٩٦}{٣} \right|$$

$$= \left| -\frac{٣٢}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$$

مكتبة السام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑥
اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $ص = ٥ - ٥س^٢$ ومحور السينات

الحل
$٥ - ٥س^٢ = ٠ \Leftarrow ٥(١ - س^٢) = ٠$
$١ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ١$
$س = \pm ١$

$$م = \int_{-١}^{١} |٥ - ٥س^٢| \, دس$$
$$= \left[٥س - \frac{٥س^٣}{٣} \right]_{-١}^{١}$$
$$= \left| \left(٥ - \frac{٥}{٣} \right) - \left(-٥ + \frac{٥}{٣} \right) \right|$$
$$= \left| ٥ - \frac{٥}{٣} + ٥ - \frac{٥}{٣} \right|$$
$$= \left| ١٠ - \frac{١٠}{٣} \right| = \left| \frac{٣٠}{٣} - \frac{١٠}{٣} \right|$$
$$= \frac{٢٠}{٣}$$

مثال ⑦
اوجد مساحة المحصورة بين $ص = ٤ - \sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات

$٤ - \sqrt{س} = ٠ \Leftarrow \sqrt{س} = ٤$ بالتربيع
$س = ١٦$ اكبر الأول
محور الصادات يعني أن $س = ٠$
الحد الثاني

$$م = \int_{٠}^{١٦} |٤ - \sqrt{س}| \, دس$$
$$= \int_{٠}^{١٦} \left(٤ - س^{\frac{١}{٢}} \right) دس$$
$$= \left[٤س - \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١٦}$$
$$= \left| \left(٦٤ - \frac{٢}{٣} \times ٦٤ \right) - ٠ \right|$$
$$= \left| ٦٤ - \frac{١٢٨}{٣} \right| = \frac{١٩٢}{٣} - \frac{١٢٨}{٣}$$
$$= \frac{٦٤}{٣}$$

مثال ⑧ اوجد المساحة المحصورة بين $ص = س^٣ + س^٢ - ٢س$ ومحور السينات

الحل
$س^٣ + س^٢ - ٢س = ٠$
$س(س^٢ + س - ٢) = ٠ \Leftarrow$
$س(س + ٢)(س - ١) = ٠$
$س = ٠ \quad س = -٢ \quad س = ١$

$$م = \int_{-٢}^{٠} (س^٣ + س^٢ - ٢س) + \int_{٠}^{١} (س^٣ + س^٢ - ٢س)$$
$$= \left[\frac{س^٤}{٤} + \frac{س^٣}{٣} - س^٢ \right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{س^٤}{٤} + \frac{س^٣}{٣} - س^٢ \right]_{٠}^{١}$$
$$= \left| ٠ - \left(٤ - \frac{٨}{٣} - \frac{١٦}{٤} \right) \right| + \left| \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - ١ \right) - ٠ \right|$$
$$= \left| -\left(-٤ - \frac{٨}{٣} \right) \right| + \left| -\frac{٥}{١٢} \right|$$
$$= \frac{٢٠}{٣} + \frac{٥}{١٢} = \left| \frac{١٢ - ٧}{١٢} \right| + \frac{٢٠}{٣}$$

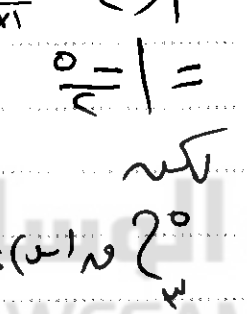
ايجاد التكامل والمساحة من الرسم

ملاحظة هامة

① المساحة دائماً موجبة سواء فوق محور السينات أو تحت محور السينات

② التكامل فوق محور السينات موجب
التكامل تحت محور السينات سالب

مثال ①
جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور واوجد $\int_{-٤}^{٠} ق(س)\,دس$



$$م = \int_{-٤}^{٠} |س + ٤|\,دس$$

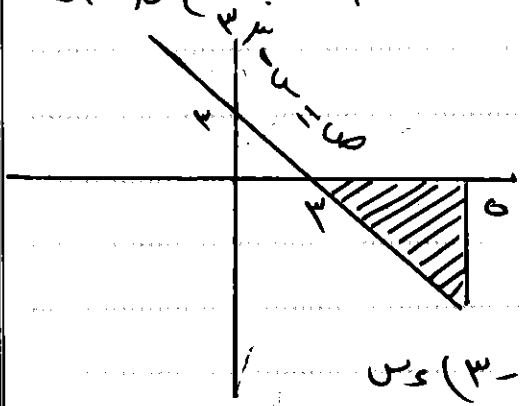
$$= \left[\frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{-٤}^{٠}$$

$$= |(٠ + ٠) - (\frac{١٦}{٢} - ١٦)|$$

$$= |١ - ٨| = ٨$$

$\int_{-٤}^{٠} ق(س)\,دس = ٨$ فوقه محور السينات

مثال ②
جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور ثم اوجد $\int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس$



$$م = \int_{٣}^{٥} (س - ٣)\,دس$$

$$= \left[\frac{س^٢}{٢} - ٣س\right]_{٣}^{٥}$$

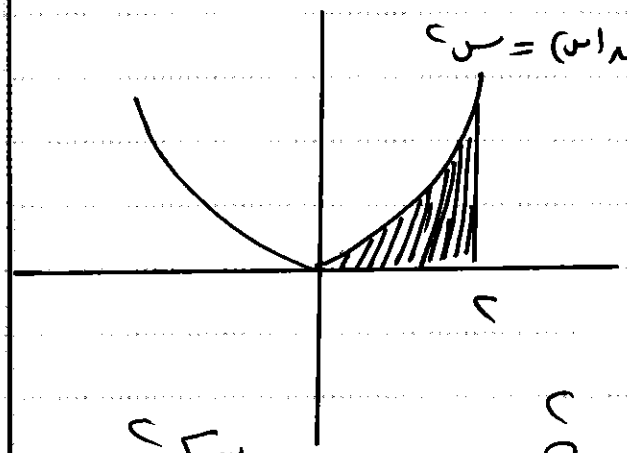
$$= |(\frac{٢٥}{٢} - ١٥) - (\frac{٩}{٢} - ٩)|$$

$$= |-\frac{٥}{٢} + \frac{٩}{٢}| = |\frac{٤}{٢}| = ٢$$

لكن $\int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس = -٢$ لأن
ق(س) يقع تحت محور السينات

مؤسسة الوسام AL WESAM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ③
اوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

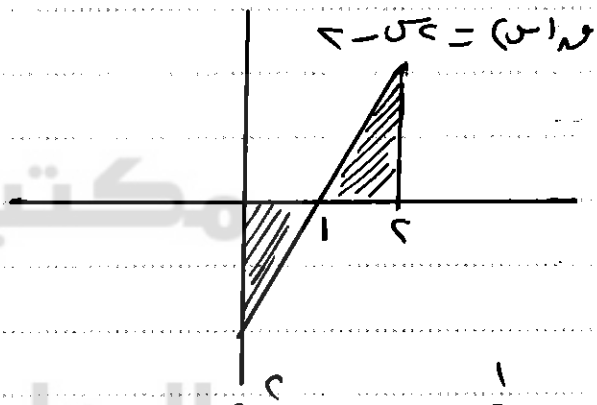


$$م = \int_{0}^{2} س^2 \, ds = \left[\frac{س^3}{3}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{8}{3}$$

مثال ④
اوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

ثم اوجد $\int_{1}^{2} ق(س) \, ds$



$$م = -\int_{1}^{2} (٤س - ٢) \, ds + \int_{2}^{4} (٤س - ٢) \, ds$$

$$= -[٢س^2 - ٢س]_{1}^{2} + [٢س^2 - ٢س]_{2}^{4}$$

$$= -(٨ - ٤) + (٣٢ - ٨) - (٢ - ١)$$

$$= -٤ + ٢٤ - ١ = ١٩$$

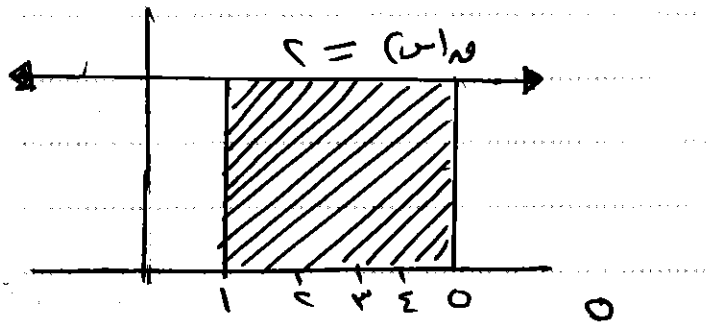
$$\int_{1}^{4} ق(س) \, ds = \int_{1}^{2} (٤س - ٢) \, ds + \int_{2}^{4} (٤س - ٢) \, ds$$

$$= [٢س^2 - ٢س]_{1}^{2} + [٢س^2 - ٢س]_{2}^{4}$$

$$= (٨ - ٤) - (٢ - ١) + (٣٢ - ٨) - (٨ - ٤)$$

$$= ٤ - ١ + ٢٤ - ٤ = ٢٣$$

مثال ⑤
باستخدام التكامل اوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور



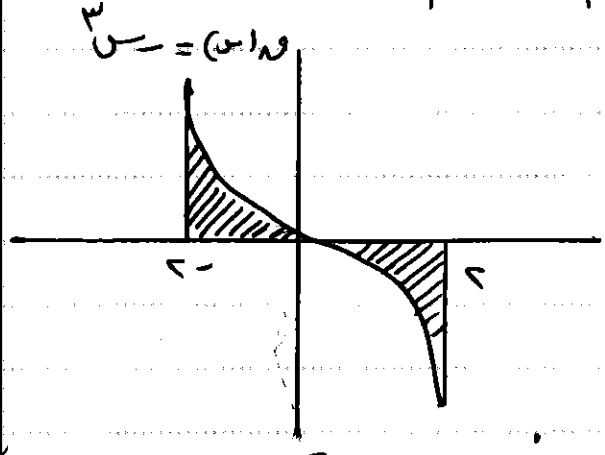
$$م = \int_{1}^{5} ٢ \, ds = ٢(٥ - ١)$$

$$= ٢ \times ٤ = ٨$$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال ٦

احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور



$$م = \int_{-٢}^{٠} |-س^٣| + \int_{٠}^{٢} |-س^٣|$$

$$= \left|-\frac{س^٤}{٤}\right|_{-٢}^{٠} + \left|-\frac{س^٤}{٤}\right|_{٠}^{٢}$$

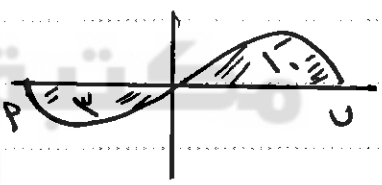
$$= \left|٠ - (-\frac{١٦}{٤})\right| + \left|-\frac{١٦}{٤} - ٠\right|$$

$$= \frac{١٦}{٤} + \frac{١٦}{٤} = ٤ + ٤ = ٨$$

مثال ٧

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [م ، ن]

اوجد مايلي



① $\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس$

② المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في الفترة [م ، ن]

الحل

① $\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = \int_{م}^{ا} ق(س)\,دس + \int_{ا}^{ن} ق(س)\,دس$

$= (-٣) + (١٠) = ٧$

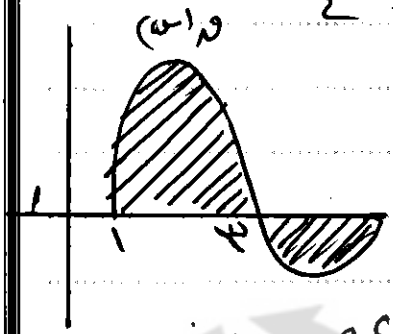
لأن ق تحت محور السينات — لأن ق فوقه محور السينات

② المساحة $= ٣ + ١٠ = ١٣$ وحدة مربعة

مثال ٨

اذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$

$\int_{٣}^{٥} ٢ق(س)\,دس = -٤$



احسب

① $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$

② مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٥

الحل

① $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس$

$= ٦ + \frac{-٤}{٢} = ٦ - ٢ = ٤$

② $\int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس = -٤ \Leftarrow \int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس = \frac{-٤}{٢}$

← يتبع $= -٢$

① $\int_{1}^{5} ق(س)\,د س = \int_{1}^{3} ق(س)\,د س + \int_{3}^{5} ق(س)\,د س$

$= ٦ - ٢ = ٤$

$م = |٦| + |-٢| = ٦ + ٢$

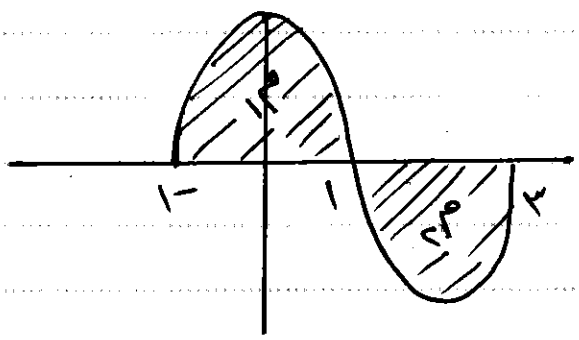
$= ٨$

مثال ⑨

الشكل المجاور يمثل منحنى $ق(س)$ في الفترة $[-١ ، ٣]$

اذا كان $\int_{-١}^{١} ق(س)\,د س = ٥$ ، $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س = -٤$

اوجد مساحة المنطقة المظللة



$م = م١ + م٢$

$= \left| \int_{-١}^{١} ق(س)\,د س \right| + \left| \int_{١}^{٣} ق(س)\,د س \right|$

$= ٥ + ٤ = ٩$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٩٨

جد مساحة المنطقة المحلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي

① ق(س) = ١٢ - ٤س [٣، ١]

الحل

١٢ - ٤س = ٠ ⟸ ٤س = ١٢

← س = ٣ ∉ خارج الفترة

$$م = \int_{1}^{3} (12 - 4س)\, د س$$

$$= [12س - 2س^2]_{1}^{3}$$

$$= (36 - 18) - (12 - 2)$$

$$= 18 - 10 = 8$$

② ق(س) = ٣س² - ١٢س [٥، ٠]

الحل

٣س² - ١٢س = ٠

٣س(س - ٤) = ٠

س = ٠ ∉ ، س = ٤ ∉

$$م = \int_{0}^{5} (3س^2 - 12س)\, د س$$

$$= [س^3 - 6س^2]_{0}^{5}$$

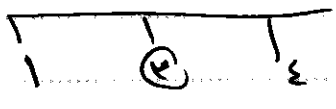
$$= |125 - 150| = |-25| = 25$$

③ ق(س) = ٦ - ٢س [٤، ١]

الحل

٦ - ٢س = ٠ ⟸ ٢س = ٦ ⟸ س = ٣

∈ فترة



$$م = \int_{1}^{3} |6 - 2س|\, د س + \int_{3}^{4} |6 - 2س|\, د س$$

$$= [6س - س^2]_{1}^{3} + [6س - س^2]_{3}^{4}$$

$$= |(18 - 9) - (6 - 1)| + |(16 - 8) - (18 - 9)|$$

$$= |9 - 5| + |8 - 9| = 4 + 1 = 5$$

مكتبة المسلم ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريب ② ص ١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الأقتران ص = ق(س) = س^{٢} - ٤س - ٣ ومحور السينات

الحل

س^{٢} - ٤س - ٣ = ٠

(س - ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣ ، س = -١

$$\int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٤س - ٣)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س \right]_{-١}^{٣}$$

$$|(٩ - ٩ - ٩) - (-\frac{١}{٣} - ١ + ٣)|$$

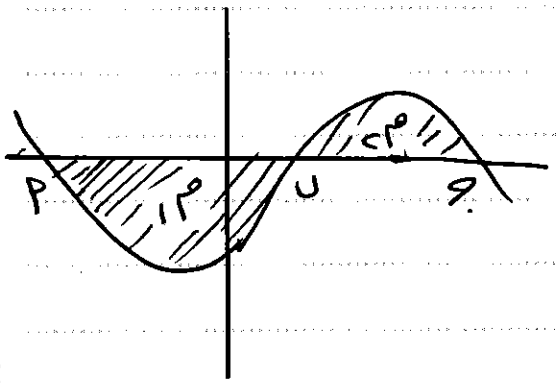
$$= |-٩ - (\frac{١}{٣} + ٤)|$$

$$= |-٩ - (\frac{١٣}{٣})|$$

$$= |-٩ - \frac{١٣}{٣}| = |-\frac{٤٠}{٣}| = \frac{٤٠}{٣}$$

تدريب ③

عيّن الشكل المجاور منحنى الأقتران ص = ق(س) فاذا كانت مساحة م$_{١}$ = ٨ وحدات مربعة ومساحة م$_{٢}$ = ٥ وحدات مربعة جد قيمة كل مما يأتي مبررًا اجابتك



① $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ = -٨ لأن ق(س) تحت محور السينات سالب

② $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\, دس$ = ٥ لأن ق(س) فوق محور السينات موجب

③ $\int_{أ}^{جـ} ق(س)\, دس = \int_{أ}^{ب} + \int_{ب}^{جـ}$ = -٨ + ٥ = -٣

④ مساحة المنطقة المظللة

= م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ٨ + ٥ = ١٣

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الأسئلة

الكتاب ص ٢٠٠

① جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الأقتران ص = ق(س) ومحور السينات والمستقيمين الحددين في كل مما يأتي

(أ) ق(س) = ١٢ س = -١ ، س = ٢

الحل

$$م = \int_{-1}^{2} |١٢| \, دس = ١٢(٢ - (-١))$$
$$= ١٢ \times ٣ = ٣٦$$

(ب) ق(س) = ٥ - ٤س س = -٢ ، ٣

الحل

٥ - ٤س = ٠ ⇐ ٤س = ٥ ⇐ س = $\frac{٥}{٤}$ ∉ فترة التكامل

$$م = \int_{-٢}^{٣} |٥ - ٤س| \, دس$$
$$= \left[٥س - ٢س^{٢} \right]_{-٢}^{٣}$$
$$= |(١٥ - ٤) - (-١٠ - ٤)|$$
$$= |١١ + ١٤| = ٢٥$$

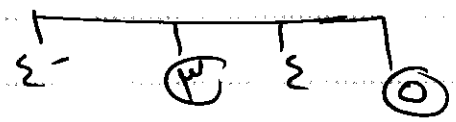
(ج) ق(س) = ٣س^{٢} - ٤٨ [٥ ، ٣]

الحل

٣س^{٢} - ٤٨ = ٠

٣س^{٢} = ٤٨ ⇐ س^{٢} = ١٦

س = ± ٤



$$م = \int_{٣}^{٤} (٣س^{٢} - ٤٨) \, دس + \int_{٤}^{٥} (٣س^{٢} - ٤٨) \, دس$$
$$= \left[س^{٣} - ٤٨س \right]_{٣}^{٤} + \left[س^{٣} - ٤٨س \right]_{٤}^{٥}$$
$$= |(٦٤ - ١٩٢) - (٢٧ - ١٤٤)|$$
$$+ |(١٢٥ - ٢٤٠) - (٦٤ - ١٩٢)|$$
$$= |-١٢٨ + ١١٧| + |-١١٥ + ١١٧|$$
$$= |-١١| + |٢| = ١٣$$

(د) ق(س) = س^{٢} - ٤ [-١ ، ٢]

س^{٢} - ٤ = ٠

س^{٢} = ٤ ⇐ س = ± ٢

$$\int_{-١}^{١} (س^{٢} - ٤) \, دس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٤س \right]_{-١}^{١}$$
$$= \left| \left(\frac{١}{٣} - ٤ \right) - \left(-\frac{١}{٣} + ٤ \right) \right| = \frac{١١}{٣} + \frac{١١}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$$

مكتبة العلم ALILMSAM
العلم ناجح الجمزاوي

③ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ص = و(س)$ ومحور السينات في كل مما يأتي

أ) $و(س) = ٤س - س^٢$

الحل

$٤س - س^٢ = ٠ \Leftarrow س(٤ - س) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٤$

$$م = \int_{٠}^{٤} (٤س - س^٢)\,د س = ٢س^٢ - \frac{س^٣}{٣} \Big]_{٠}^{٤}$$

$$= |(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}) - (٠)|$$

$$= |\frac{١٩٢ - ٩٦}{٣}| = \frac{٣٢}{٣}$$

ب) $و(س) = ٤س^٣ - ١٢س^٢$

الحل

$٤س^٢(س - ٣) = ٠$

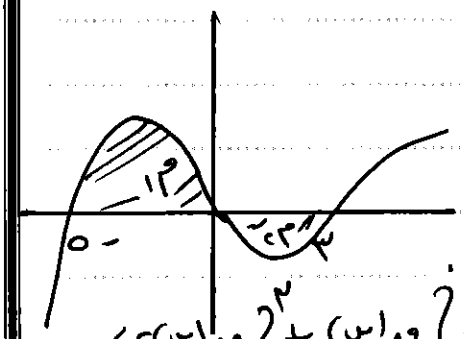
$س = ٠ \quad س = ٣$

$$\int_{٠}^{٣} (٤س^٣ - ١٢س^٢)\,د س$$

$$= س^٤ - ٤س^٣ \Big]_{٠}^{٣}$$

$$= |٨١ - ١٠٨| = ٢٧$$

④ عين الشكل المجاور محصور بين منحنى $ص = و(س)$ فإذا كانت $م_١ = ١٣$ وحدة مربعة ، $م_٢ = ٣$ وحدات مربعة فجد قيمة $\int_{٠}^{٥} و(س)\,د س$

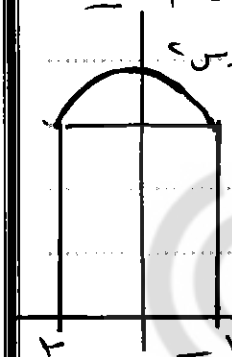


$$\int_{٠}^{٥} و(س)\,د س = \int_{٠}^{٣} و(س)\,د س + \int_{٣}^{٥} و(س)\,د س$$

$= ١٣ - (٣) = ١٠$

لأن تكامل محور السينات السالب

⑤ نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته $٢م$ ، ارتفاعه $١م$ ، يعلوه منحنى قطع بالقاعدة $و(س) = ٢ - س^٢$ ، إذا أردنا وضع زجاج على النافذة وكانت تكلفة المتر المربع الواحد دنانير فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة



مساحة النافذة

= مساحة المستطيل + مساحة تحت المنحنى

$$= ١ \times ٢ + \int_{-١}^{١} (٢ - س^٢)\,د س$$

$$= ٢ + ٢س - \frac{س^٣}{٣} \Big]_{-١}^{١}$$

$$= ٢ + |(٢ - \frac{١}{٣}) - (-٢ + \frac{١}{٣})|$$

$$= ٢ + |\frac{٥}{٣} + \frac{٥}{٣}| = ٢ + (\frac{١٠}{٣}) = \frac{١٦}{٣}$$

تكلفة النافذة $= ٥ \times (\frac{١٦}{٣}) = \frac{٨٠}{٣}$

مكتبة الوسام AWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

جد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى $ق(س) = س^2 - 4س$ ومحور السينات

الحل

نجد حدود التكامل

$س^2 - 4س = 0 \Rightarrow س(س-4) = 0$

$س = 0 \quad س = 4$

$$م = \int_0^4 (س^2 - 4س)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} - 2س^2\right]_0^4 = \left|\frac{64}{3} - 32\right|$$

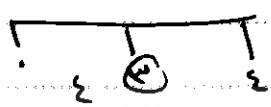
$$= \left|\frac{64}{3} - \frac{96}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

وزارة (٢٠١٠) شتوية

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الأقتران $ق(س) = 6 - 4س$ ومحور السينات في الفترة $[0, 4]$

الحل

$6 - 4س = 0 \Leftarrow 4س = 6 \Leftarrow س = 3$ تقع في الفترة



$$م = \int_0^3 (6 - 4س)\, دس + \int_3^4 (6 - 4س)\, دس$$

$$= \left[6س - 2س^2\right]_0^3 + \left[6س - 2س^2\right]_3^4$$

$$= |(18 - 18)| + |(16 - 24) - (18 - 18)|$$

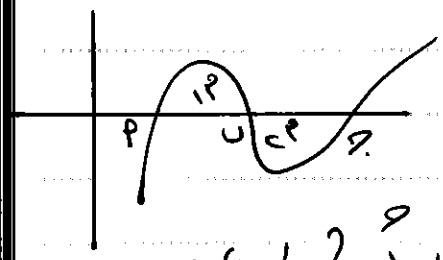
$$= |0| + |-8 - 0|$$

$$= 0 + 8 = 8$$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

بالاعتماد على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى $ق(س)$ إذا كانت $م = 6$ ، $م = 10$

أوجد $\int_م^ن ق(س)\, دس$



الحل

$$\int_م^ن ق(س)\, دس = \int_م^ل ق(س)\, دس + \int_ل^ن ق(س)\, دس$$

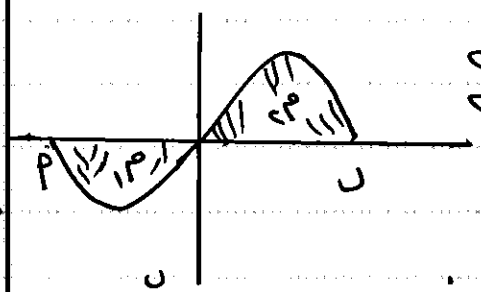
$$= 10 - 6 = 4$$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) صيفية

① عيّل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س)$ ومحور السينات حيث $س \in [م، ن]$ اذا علمت ان $م = ٥$ ، $ن = ٣$

اوجد $\int_{م}^{ن} ق(س)\,د س$



أ) ٨ ب) ٢
ج) -٨ د) -٢

الحل

$$\int_{م}^{ن} ق(س)\,د س = \int_{م}^{ل} ق(س)\,د س + \int_{ل}^{ن} ق(س)\,د س$$

$$= -٥ + ٣ = -٢$$ (د)

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ١ - س^٢$ ومحور السينات

الحل

$$١ - س^٢ = ٠ \leftarrow س^٢ = ١$$

$$س = \pm ١$$

$$م = \int_{-١}^{١} |(١ - س^٢)|\,د س = \left[س - \frac{س^٣}{٣}\right]_{-١}^{١}$$

$$= |(١ - \frac{١}{٣}) - (-١ + \frac{١}{٣})| = \frac{٦}{٣} - \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

وزارة (٢٠١١) شتوية

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٢س + ١$ ومحور السينات والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = ٢$

الحل

$$٢س + ١ = ٠ \leftarrow س = -\frac{١}{٢}$$

لا تقع بين $(٠، ٢)$

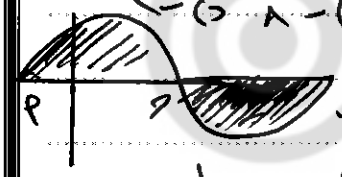
$$م = \int_{٠}^{٢} |(٢س + ١)|\,د س = [س^٢ + س]_{٠}^{٢}$$

$$= ٤ + ٢ = ٦$$

وزارة (٢٠١٢) صيفية

① معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى $ق$ المعرف في $[م، ن]$ اذا علمت ان مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق$ ومحور السينات يساوي ١٤ وحدة مربعة وكان $\int_{م}^{ن} ق(س)\,د س = ٦$ ، فما قيمة $\int_{ل}^{ن} ق(س)\,د س$

أ) ٨ ب) ٢٠ ج) -٨ د) -٢



الحل

$$م = \int_{م}^{ل} |ق(س)|\,د س + \int_{ل}^{ن} |ق(س)|$$

$$١٤ = ٦ + \int_{ل}^{ن} ق(س)$$

$$\int_{ل}^{ن} ق(س) = ١٤ - ٦ = ٨$$

(ج) بكتابة محور السينات $\Leftarrow \int_{ن}^{ل} ق(س) = -٨$

④ احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^2 + 6س$ ومحور السينات في $[0, 3]$.

الحل

$س^2 + 6س = 0 \Leftarrow س = \frac{-6}{2} = -3 \notin [0, 3]$

$م = \int_0^3 (س^2 + 6س)\, دس$

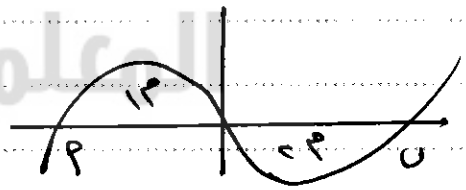
$= \left[\frac{س^3}{3} + 3س^2\right]_0^3$

$= \frac{27}{3} + 3 \times 9 = 9 + 27 = 36$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

يبين الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س)$ ومحور السينات في الفترة $[أ، ب]$ إذا علمت أن $م_1 = 12$ وحدات مربعة، $م_2 = 4$ وحدات مربعة فإن $\int_أ^ب ق(س)\, دس$

أ) -8 ب) -4 ج) 4 د) 8



الحل

$\int_أ^ب ق(س)\, دس = \int_أ^ج ق(س)\, دس + \int_ج^ب ق(س)\, دس$

$= 12 - 4 = 8$

تحت محور السينات

الجواب (ج)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^2 - 4س$ ومحور السينات

الحل

$س^2 - 4س = 0 \Leftarrow س(س - 4) = 0$

$س = 0 ، س = 4$

$م = \int_0^4 (س^2 - 4س)\, دس$

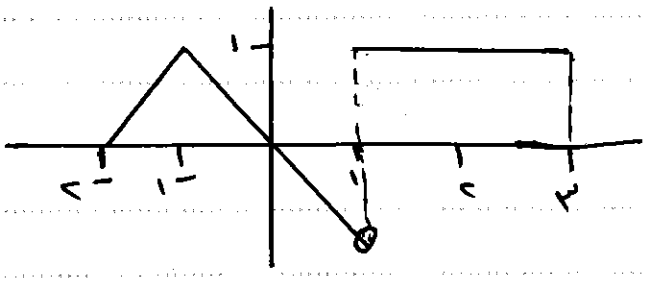
$= \left[\frac{س^3}{3} - 2س^2\right]_0^4$

$= \left|\left(\frac{64}{3} - 32\right)\right| = \frac{32}{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٥) صيفية

① عين الشكل المجاور محصور بين المنحنى لأقتران $ق(س)$ المعرف على $[-٢، ٣]$ اعتمد على الشكل لايجاد قيمة $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\,دس$



المساحة في الفترة $[-٢، ٠]$
= مساحة المثلث
$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مربعة
المساحة في الفترة $[٠، ١]$ = مساحة المستطيل
$= ١ \times ٢ = ٢$ وحدة مربعة
المساحة في الفترة $[١، ٣]$ = مساحة المثلث
$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مربعة

$\int_{-٢}^{٣} ق(س)\,دس = ١ + ٢ - ١ = ٢$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين $ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ - ٦س$ ومحور السينات في الفترة $[-٢، ٤]$

الحل

$٣س^٢ - ٦س = ٠ \Rightarrow س = ٠$
$٣س(س - ٢) = ٠ \Rightarrow س = ٢$

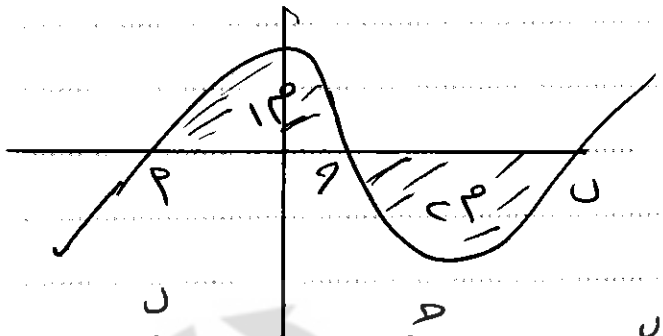
$م = \int_{-٢}^{٠} |س^٣ - ٣س^٢ - ٦س| دس + \int_{٠}^{٤} |س^٣ - ٣س^٢ - ٦س| دس$

$= |[\frac{١}{٤}س^٤ - س^٣ - ٣س^٢]_{-٢}^{٠}| + |[\frac{١}{٤}س^٤ - س^٣ - ٣س^٢]_{٠}^{٤}|$

$= |٠ - (٤ + ٨ - ١٢)| + |(٦٤ - ٦٤ - ٤٨) - ٠|$
$= ٨ + ٤٨ = ٥٦$ وحدة مربعة

وزارة (٢٠١٦) شتوية

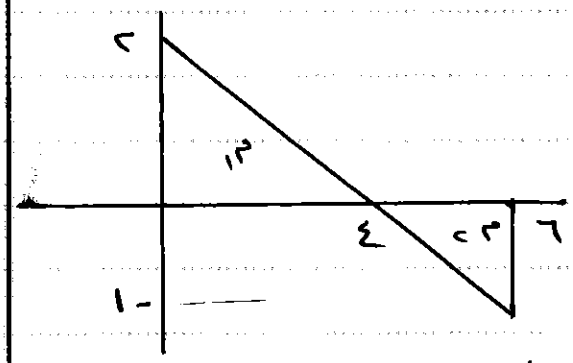
عين الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين $ق$ و $ك$ ومحور السينات في الفترة $[م، ن]$ فاذا علمت ان (١٣) تساوي $\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = -٤$ فجد (م ٢)



$\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = \int_{م}^{و} ق(س)\,دس + \int_{و}^{ن} ق(س)\,دس$
$-٤ = ٦ + \int_{و}^{ن} ق(س)\,دس$
$\Rightarrow \int_{و}^{ن} ق(س)\,دس = -١٠$
م ٢ $= ١ - ١١ = -١٠$ وحدات مربعة

وزارة (٢٠١٧) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $q(س)$ الجزء على $[٠، ٦]$ جد $\int_{٠}^{٦} q(س)\,د س$



$م_١ = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤ = ٨$

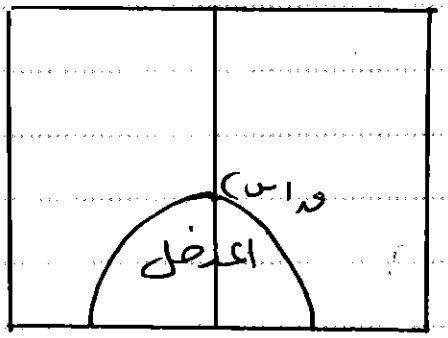
$م_٢ = \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$

$\int_{٠}^{٦} q(س)\,د س = م_١ - م_٢$

$= ٨ - ١ = ٧$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

① يمثل الشكل المجاور الواجهة الامامية لأحد المباني مدخل المبنى يمثله منحنى الاقتران $ق(س) = ٤ - \frac{١}{٢}س^٢$ ، ما تكلفة انشاء باب زجاجي للمدخل اذا علمت ان سعر الوحدة المربعة منه يساوي (٦٠) دينار



الحل

$٤ - \frac{١}{٢}س^٢ = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٢}س^٢ = ٤$

$س^٢ = ٨ \Leftarrow س = \pm ٢\sqrt{٢}$

$م = \int_{-٢\sqrt{٢}}^{٢\sqrt{٢}} (٤ - \frac{١}{٢}س^٢)\,د س$

$= \left[٤س - \frac{س^٣}{٦} \right]_{-٢\sqrt{٢}}^{٢\sqrt{٢}}$

$= |(\frac{٨}{٦} - ٤) - (-٤ + \frac{٨}{٦})|$

$= \frac{٣٢}{٦}$ وحدة مربعة

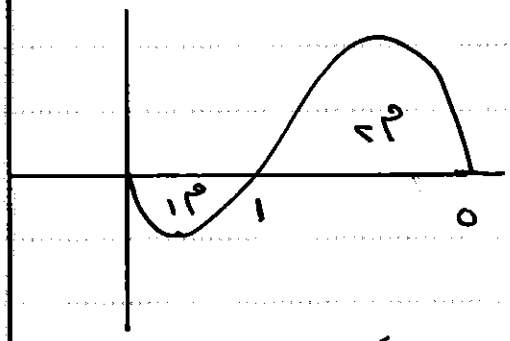
تكلفة الزجاج = المساحة × السعر

$= \frac{٣٢}{٦} \times ٦٠$

$= ٣٢٠$ دينار

② اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س)$ ومحور السينات في الفترة $[٠، ٥]$ اذا علمت ان مساحة المنطقة $م_١$ تساوي (٤) وأن $\int_{٠}^{٥} ٣ق(س)\,د س = ٤$ جد مساحة المنطقة $م_٢$

تابع الحل



$\int_{٠}^{٥} ق(س)\,د س = \frac{٤٣}{٣} = ٨$

$\int_{٠}^{٥} ق(س)\,د س = \int_{٠}^{١} ق(س)\,د س + \int_{١}^{٥} ق(س)\,د س$

$٨ = -٤ + \int_{١}^{٥} ق(س)\,د س$

$\int_{١}^{٥} ق(س)\,د س = ٨ + ٤ = ١٢$

$م٢ = |١٢| = ١٢$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

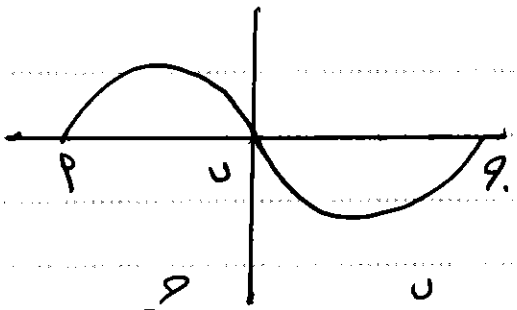
معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)

اذا كان $\int_{م}^{ن} ق(س)\,د س = ٣$

$\int_{ن}^{ح} ق(س)\,د س = -٥$ فما قيمة

$\int_{م}^{ح} ق(س)\,د س$

م) -٢ ب) ٨ ج) ٢ د) -٨



$\int_{م}^{ح} ق(س)\,د س = \int_{م}^{ن} ق(س)\,د س + \int_{ن}^{ح} ق(س)\,د س$

$= ٣ - ٥ = -٢$

الاجابة فرع (م)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجزاوي

النمو والاضمحلال

النمو والاضمحلال هما من التطبيقات العملية للأقترانين اللوغاريتمي الطبيعي ، والأسي الطبيعي .

قيمة الظاهرة المدروسة هي

$$ع(ن) = ع_{.} \times هـ^{م ن}$$

حيث

ع. = ع(٠) = القيمة الابتدائية = نقطة الاستناد

ن = الزمن

م = ثابت التناسب

① م > ٠ (موجبة) اذا كانت ع(ن) تزداد بزيادة الزمن (ن) و ع(ن) تمثل معادلة النمو

م معامل النمو

② م < ٠ (سالبة) اذا كانت ع(ن) تنقص بزيادة الزمن (ن) ع(ن) معادلة الاضمحلال

م معامل الاضمحلال

خطوات الحل

① نجد ع. = ع(٠)
= ع (الزمن الابتدائي)
= ع (القيمة الابتدائية)

② م = معامل الزيادة = معدل الزيادة م موجب

م = معدل النقصان م سالبة

③ ن = الزمن
= الزمن الثاني - الزمن الأول

④ نضع القانون

$$ع(ن) = ع_{.} \times هـ^{م ن}$$

ونعوض فيه ع. ، م ، ن

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كان النمو السكاني في قرية ما يخضع لقانون النمو ، وكان عدد سكان هذه القرية عام ٢٠٠٠م قد بلغ ٣٠٠٠ نسمة واذا كان عدد السكان يزداد بشكل منتظم بمعدل ٤٪ سنويًا ، جد عدد سكان هذه القرية عام ٢٠٢٥م

الحل

ع. = ٣٠٠٠ القيمة الابتدائية

م = ٤/١٠٠ موجبة زيادة

ن = الزمن الثاني - الزمن الأول

= ٢٠٢٥ - ٢٠٠٠ = ٢٥ عام

ع (ن) = ع. هـ^(م ن)

ع (٢٥) = ٣٠٠٠ هـ^(٤/١٠٠ × ٢٥)

= ٣٠٠٠ هـ^(١/١٠٠ × ١٠٠)

= ٣٠٠٠ × هـ^١

= ٣٠٠٠ × ٢,٧

= ٨١٠٠ نسمة

مثال ②

اذا كان عدد سكان بلده ما يخضع لقانون النمو ، ويتزايد بانتظام واستمرار بمعدل ٢٪ سنويًا وكان عدد سكانها ٤٠ الف نسمة عام ١٩٩٠م ، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٤٠م ؟

الحل

ع. = ٤٠٠٠٠

ن = ٢٠٤٠ - ١٩٩٠ = ٥٠ عام

م = ٢/١٠٠ موجبة (نمو) (زيادة)

ع (ن) = ع. هـ^(م ن)

ع (٥٠) = ٤٠٠٠٠ هـ^(٢/١٠٠ × ٥٠)

= ٤٠٠٠٠ هـ^(١/١٠٠)

= ٤٠٠٠٠ × هـ^١

= ٤٠٠٠٠ × ٢,٧

= ١٠٨٠٠٠ نسمة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ③

سيناقص ثمن جهاز حاسوب بمرور الزمن وبشكل منتظم ، يخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال فاذا كان ثمنه الأصلي ٥٤٠ دينار وعدل التناقص في ثمنه يساوي ١٠٪ ، فجد ثمن جهاز الحاسوب بعد مرور ١٠ سنوات

ع. = ٥٤٠ دينار
ن = ١٠ سنوات
م = $\frac{١٠}{١٠٠}$ = ١٠٪ نقصان
ع(ن) = ع. × (١ − م)^ن
ع(١٠) = ٥٤٠ × (١ − $\frac{١٠}{١٠٠}$)^١٠
= ٥٤٠ × $(\frac{٩}{١٠})^{١٠}$
= $\frac{٥٤٠}{(\frac{١٠}{٩})^{١٠}}$ = $\frac{٥٤٠}{٢,٧}$ = ١٦٧ دينار

مثال ④

يزيد سعر الارض بمرور الزمن وتخضع هذه الزيادة لقانون النمو فاذا اشترى فراس قطعة ارض بمبلغ ٤٠٠٠ دينار وبعد مرور ٣ سنوات اصبح سعرها ٤٨٠٠ دينار جد سعر الارض بعد مرور ٦ سنوات

الحل

ملاحظة : هنا معدل الزيادة غير معطى بالسؤال لذلك نجده

ع. = ٤٠٠٠ ن = ٣
ع(٣) = ٤٠٠٠ $(\frac{٤}{٥})^{٣}$
٤٨٠٠ = ٤٠٠٠ $(\frac{٤}{٥})^{٣}$ ⇐ $(\frac{٤}{٥})^{٣}$ = $\frac{٤٨٠٠}{٤٠٠٠}$ = $\frac{٦}{٥}$

المطلوب
ع(٦) = ٤٠٠٠ $(\frac{٤}{٥})^{٦}$
= ٤٠٠٠ $(\frac{٤}{٥})^{٣}$ $(\frac{٤}{٥})^{٣}$
= ٤٠٠٠ × $\frac{٣٦}{٥٠}$
= ١٦٠ × ٣٦
= ٥٧٦٠ دينار

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

يعطي بنك رجاء مركباً مستمراً للمستثمرين لديه بحيث تحسب جملة المبلغ الناتج عن استثمار مبلغ معين حسب قانون النمو فاذا كانت نسبة الربح الذي يقدمها البنك تبلغ ٥٪ سنوياً ووضع مبلغ ١٠٠٠ دينار في البنك فجد جملة المبلغ بعد مرور ٢٠ عاماً

الحل

$ع_0 = 1000$

$م = \frac{5}{100}$

$ن = 20$

$ع(20) = 1000 \times هـ^{\frac{5}{100} \times 20}$

$= 1000 \times هـ^1$

$= 1000 \times 2.718$

$= 2718$ دينار

جملة المبلغ

مثال ⑥

تتحلل مادة مشعة بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال وبمعدل تناقص مقداره ٠,٠٠٢ سنوياً فجد كتلة المادة المشعة المتبقية بعد مرور ٥٠٠٠ سنة علماً بان كتلة المادة الاصلية هي ٥٤٠ غراماً

الحل

كتلة المادة المتبقية $= ع(ن) = ع_0 \times هـ^{-م ن}$

$ع_0 = 540$

$م = \frac{2}{1000}$

$ن = 5000$

$ع(5000) = 540 \times هـ^{-\frac{2}{1000} \times 5000}$

$= 540 \times هـ^{-10}$

$= \frac{540}{هـ^{10}} = \frac{540}{2.718^{10}}$

المادة المتبقية = ٢٠٠ غرام

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص٢١٢

اقترض ايمان مبلغ ١٠٠٠٠ دينار من مصرف يحسب ربحًا مركبا منتظمًا وفقه قانون النمو ، بنسبة ربح مقدارها ٤٪ سنويًا ، جد جملة المبلغ الذي سيدده ايمان للمصرف بعد مرور خمس وعشرون سنه

الحل

ع. = ١٠٠٠٠

م = ٤/١٠٠

ن = ٢٥

جملة المبلغ = ع(ن) = ع. × هـ^(م ن)

= ١٠٠٠٠ × هـ^(٤/١٠٠ × ٢٥)

= ١٠٠٠٠ × هـ^١

= ١٠٠٠٠ × ٢٫٧

= ٢٧٠٠٠ دينار

تدريب ② ص٢١٢

يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن وبصورة مستمرة منتظمه وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥٪ سنويًا ، فاذا كان ثمنه الاصلي ٨٠٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنه بعد مرور ٤٠ سنه ؟

الحل

ع. = ٨٠٠٠٠

م = -٥/١٠٠ ن = ٤٠

ع(٤٠) = ٨٠٠٠٠ × هـ^(-٥/١٠٠ × ٤٠)

= ٨٠٠٠٠ × هـ^-٢

= ٨٠٠٠٠ × (٢٫٧)^-٢

= ٨٠٠٠٠ / (٢٫٧)^٢

= ٩٧٣٫٠ دينار

تقريبًا

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الأسئلة

الكتاب ص٢١٤

① تتكاثر البكتيريا بصوره مستمرة منتظمه وفقا لقانون النمو بنسبة ٢٠٠٪ في الساعة ، احسب عددها بعد نصف ساعة علما بان عددها الابتدائي (٥٠٠٠٠٠)

الحل

عدد البكتيريا = ع(ن) = ع٠ × ك^ن

ع٠ = ٥٠٠٠٠٠ ن = ½ ساعه

ك = ٢٠٠/١٠٠ = ٢

ع(½) = ٥٠٠٠٠٠ × ٢^½

= ٥٠٠٠٠٠ × √٢

= ٥٠٠٠٠٠ × ١٫٤١٤

= ٧٠٧٠٠٠ تقريبا

② سيناقص ثمن سيارة بمرور الزمن وبصورة مستمرة منتظمه وفق قانون الاضمحلال وبمعدل ٨٪ سنويا ، فإذا كان ثمنها الاصلي ١٢٥٨٠ دينارا ، فجد ثمنها بعد مرور ٢٥ سنه

الحل

ثمن السياره = ع(ن) = ع٠ × ك^ن

ع٠ = ١٢٥٨٠ ك = ٨/١٠٠ = ٢

ن = ٢٥

ع(٢٥) = ١٢٥٨٠ × ٢^-٢٥

= ١٢٥٨٠ × ٢^-٢٥

= ١٢٥٨٠ / ٢^٢٥ = ١٢٥٨٠ / ٢^(٢×١٢)

= ١٧٢٥ دينار

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ يذوب ملح في الماء ، وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون ذوبان في الماء لقانون الاضمحلال ، اذا وضعت ١٠ كيلوغرامات من الملح في الماء ، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة جد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة

الحل

ن P
كتلة الملح = ع(ن) = ع٠ ه
ع٠ = ١٠ P = ؟؟ ن = ١/٤
ع (١/٤) = ١٠ ه ١/٤ P

ذوبان سالب ← -P/٤
١٠ ه -P/٤ = ١٠ × ١/٢
١٠ ه -P/٤ ⟵ ه -P/٤ = ١/٢
ه = ٥

المطلوب
ع (٥/٤) = ١٠ ه -٥/٤ P
= ١٠ (ه -P/٤)^٥
= ١٠ (١/٢)^٥
= ١٠/٣٢ = ٠٫٣١٢٥ ه

④ تزايد عدد سكان مدينة ما بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو ، بنسبة مقدارها ٠٫٨ ٪ سنويًا ماذا بلغ عدد سكانها ٦٠٠٠٠ نسمة عام ١٠ق م فكم سيبلغ عدد سكانها عام ١٢٥ م

الحل
ن P
عدد السكان = ع(ن) = ع٠ ه
P = ٠٫٨ ٪ = ٨/١٠٠٠
ن = ١٢٥ - ١٠ق = ١٢٥
ع٠ = ٦٠٠٠٠

ع(ن) = ٦٠٠٠٠ × ه ^(٨/١٠٠٠ × ١٢٥)
= ٦٠٠٠٠ × ه ^١
= ٦٠٠٠٠ × ٢٫٧
= ١٦٢٠٠٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوحدة

ص ١١٥

① جد $\frac{ص}{س}$ في كل مما يأتي

(ب) $ص = \int \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥} \, س$

$\frac{ص}{س} = \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥}$

(ا) $ص = \int_{-١}^{٣} (٣س)(٤س - ٢) \, س$

$\frac{ص}{س} =$ صفر ← تكامل محدود
مشتقته = صفر

(ج) $ص = \int (ظا(٤ + س)) \, س$

$\frac{ص}{س} = ظا(٤ + س)$

(د) $ص = \int_{٢}^{ه} (لو_ه س - \frac{س}{ه}) \, س$

$\frac{ص}{س} =$ صفر

(هـ) $ص =$ لو$(س^٢ + ٦) - ه^{س-١} + س^٣ - ٢$

$\frac{ص}{س} = \frac{س}{٦ + س^٢} - ٢ه^{٢س} + ٣س^٢$

(و) $ص =$ حاس لو$_ه$ س (حاصل ضرب)

$\frac{ص}{س} =$ حاس $\times \frac{١}{س} +$ لو$_ه$ س $\times$ ضاس

② إذا كان ق(س) = $ه^{٤س^٢ - ١}$ ص ق(س)

الحل

ق(س) = $ه^{٤س^٢ - ١}$ ← حاصل ضرب

ق(س) = $٤س \times ه^{٤س^٢ - ١} +$ $ه^{٤س^٢ - ١} \times ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(٣) اذا كان
$ق(س) = \int س(٢-س^{٢})\,دس$
جد $ق'(٢)$

الحل
$ق'(س) = س(٢-س^{٢})$
$= ٢س - س^{٣}$
$ق''(س) = ٢ - ٣س^{٢}$
$ق''(٢) = ٢ - ٣(٢)^{٢}$
$= ٢ - ١٢ = -١٠$

(٤) جد كلاً من التكاملات الآتية

أ) $\int \frac{س^{٢} - ٧س}{س^{٣}}\,دس$

الحل
$= \int \frac{س^{٢}}{س^{٣}} - \frac{٧س}{س^{٣}}\,دس$
$= \int س^{-١} - ٧س^{-٢}\,دس$
$= س^{٠} - ٧س^{-١} + ج$
$= ١ + \frac{٧}{س} + ج$

ب) $\int \frac{٦}{س^{٥}}\,دس$

الحل
$= \int ٦س^{-٥}\,دس = \frac{٦س^{-٦}}{-٦} + ج$
$= -س^{-٦} + ج$

ج) $\int (س-٢)(س+٢)\,دس$

الحل
$= \int (س^{٢}-٤)\,دس$
$= \frac{س^{٣}}{٣} - ٤س + ج$

د) $\int (٣س+٢)^{٢}\,دس$

$= \int (٩س^{٢}+١٢س+٤)\,دس$
$= \frac{٩س^{٣}}{٣} + \frac{١٢س^{٢}}{٢} + ٤س + ج$
$= ٣س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س + ج$

هـ) $\int (٤س-١)(س^{٢}-س)^{٥}\,دس$

$ص = س^{٢}-س \Rightarrow دص = (٢س-١)دس$
$دس = \frac{دص}{٢س-١}$
$= \int (٤س-١)\,ص^{٥} \times \frac{دص}{٤س-١} = \int ص^{٥}\,دص$
$= \frac{ص^{٦}}{٦} + ج = \frac{(س^{٢}-س)^{٦}}{٦} + ج$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

و) $\int \frac{س^2}{\sqrt{1+3س^3}}$ د س س > -١

ص = $1+3س^3$ د ص = $3س^2$ د س

د س = $\frac{د ص}{3س^2}$

$\int \frac{س^2}{\sqrt{ص}} \times \frac{د ص}{3س^2}$

$\frac{1}{3}\int ص^{-\frac{1}{2}}$ د ص = $\frac{2}{3}ص^{\frac{1}{2}} + ج$

$= \frac{2}{3}(1+3س^2)^{\frac{1}{2}} + ج$

ز) $\int (\frac{2}{س} - هـ^{س} + 3)$ د س

الكل

$2 لو|س| - هـ^{س} + 3س + ج$

ح) $\int \frac{12س^3}{3+س^4}$ د س

ص = $3+س^4$ د ص = $4س^3$ د س

د س = $\frac{د ص}{4س^3}$

$\int \frac{12س^3}{ص} \times \frac{د ص}{4س^3}$

$3\int \frac{1}{ص}$ د ص = $3 لو|ص| + ج$

$3 لو|3+س^4| + ج$

ط) $\int 6س هـ^{س^2+5}$ د س

ص = $س^2+5$ د ص = $2س$ د س

د س = $\frac{د ص}{2س}$

$\int 6س هـ^{ص} \times \frac{د ص}{2س}$

$3\int هـ^{ص}$ د ص = $3هـ^{ص} + ج$

$3هـ^{س^2+5} + ج$

ي) $\int \frac{1+3جتا^2}{جا^2(س^2+س)}$ د س

ص = $س^2+س$ د ص = $(2س+1)$ د س

د س = $\frac{د ص}{1+2س}$

$\int \frac{1+3جتا^2}{جا^2ص} \times \frac{د ص}{1+2س}$

$\int \frac{1}{جا^2ص}$ د ص = $\int ظا^2ص$ د ص

$= ظاص + ج$

$= ظا(س^2+س) + ج$

مكتبة الهندسة
AMGSAM
العلم: ناجح الجمزاوي

(٥) اجب قيمة كل من التكاملات الاتية

ب) $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{س}}\, ds$

الحل $\int_{-1}^{8} س^{-\frac{1}{3}}\, ds$

$= \left[\frac{3}{2} س^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{8} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{س}\right)^2\Big]_{-1}^{8}$

$= \frac{3}{2}(4 - 1) = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

ج) $\int_{1}^{4} ه\, ds$ ه : ثابت

$= ه(4-1) = 3ه$

د) $\int_{-1}^{1} \frac{س^3 + 7س + 12}{س + 4}\, ds$

$= \int_{-1}^{1} \frac{(س+4)(س^2+3)}{(س+4)}\, ds$

$= \int_{-1}^{1} (س^2 + 3)\, ds$

$= \left[\frac{س^3}{3} + 3س\right]_{-1}^{1}$

$= (\frac{1}{3} + 3) - (-\frac{1}{3} - 3)$

$= \frac{10}{3} + 2 + \frac{10}{3} + 3 = 6$

هـ) $\int_{3}^{7} \frac{ع}{1 + 3ع}\, ds$

$ص = 1 + 3ع$ ، $ds = ص = ع\, ds$

$س = 3 \leftarrow ص = 7$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$\int_{1}^{7} \frac{ص - 1}{3ص}\, ds$

$\int_{1}^{7} \frac{1}{3ص}\, ds = \left[\frac{1}{3} لو |ص|\right]_{1}^{7}$

$= \frac{1}{3} لو 7 - \frac{1}{3} لو 1$

و) $\int_{4}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{س}} - \frac{1}{س^2}\right) ds$

$= \int_{4}^{\infty} \left(\frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}} - س^{-2}\right) ds$

$= \left[س^{\frac{1}{2}} - \frac{س^{-1}}{-1}\right]_{4}^{\infty}$

$= \left[\sqrt{س} + \frac{1}{س}\right]_{4}^{\infty}$

$= (\sqrt{\infty} + \frac{1}{\infty}) - (\sqrt{4} + \frac{1}{4})$

$= (\infty + 0) - (2 + \frac{1}{4})$

$= \infty - 2 - \frac{1}{4} = \infty - \frac{9}{4}$

$= \infty - \frac{9}{4} = \infty$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

$$\text{ن)} \int_{2}^{6} \frac{10}{\sqrt{5س+6}}\, دس$$

$ص = 5س + 6$ ، $دص = 5 دس$

$س = 2 \leftarrow ص = 16$

$س = 6 \leftarrow ص = 20 + 6 = 36$

$$\int_{16}^{36} \frac{10}{\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{5}$$

$$\int_{16}^{36} 2 ص^{-\frac{1}{2}}\, دص$$

$$= 4 \times 2 \left[ص^{\frac{1}{2}} \right]_{16}^{36}$$

$$= 4 \left[\sqrt{ص} \right]_{16}^{36}$$

$$= 4\sqrt{36} - 4\sqrt{16}$$

$$= 4 \times 6 - 4 \times 4 = 24 - 16$$

$$= 8$$

---

(٦) اذا كان $\int_{-3}^{5} (ق(س)\, دس = صفر$ حيث

$ب^2 + ب$ قيمة ثابتة

الحل

$ب^2 + ب - 3 = 0$

$ب^2 + ب - 3 = 0$

$ب^2 + 3ب - ب - 3 = 0$

$(ب + 3)(ب - 1) = 0$

$ب = -3$ ، $ب = 1$

---

(٧) اذا كان $\int_{1}^{5} (ق(س)\, دس = 4$

$\int_{5}^{0} (ق(س) + 3)\, دس = 20$

فأوجد قيمة كل مما يأتي

أ) $\int_{5}^{0} ق(س)\, دس$

ب) $\int_{1}^{5} ق(س)\, دس$

جـ) $\int_{0}^{5} (3ق(س) - 4س)\, دس$

الحل

$$\int_{5}^{0} (ق(س) + 3)\, دس = 20$$

$$\int_{5}^{0} ق(س)\, دس + 3 \int_{5}^{0} دس = 20$$

$$\int_{5}^{0} ق(س)\, دس + 3(0 - 5) = 20$$

$$\int_{5}^{0} ق(س)\, دس + 18 = 20$$

$$\int_{5}^{0} ق(س)\, دس = 20 - 18$$

$$= 2$$

أ) $\int_{5}^{0} ق(س)\, دس = -2$

ب) $\int_{1}^{5} ق(س)\, دس = -4$

جـ) نتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

① $\int_{1}^{-1} ق(س)\,دس$

$= \int_{1}^{0} ق(س)\,دس + \int_{0}^{-1} ق(س)\,دس$

$= ٤ - ٢ = ٢$

② $\int_{0}^{1} (٣ ق(س) - ٤س)\,دس =$

$= ٣ \int_{0}^{1} ق(س)\,دس - \int_{0}^{1} ٤س\,دس$

$= ٣ \times ٤ - \left[٢س^{٢} \right]_{0}^{1}$

$= ١٢ - (٢ - ٠)$

$= ١٢ - ١ = ١١$

$= ٤٨ + ١٢ = ٦٠$

③ $\int_{٤}^{ب} (س^{٢} - ١)\,دس = صفر$

الحل

$\left[س^{٣} - س \right]_{٤}^{ب} = صفر$

$ب^{٣} - ب - (٦٤ - ٤) = ٠$

$ب^{٣} - ب - ٦٠ = ٠$

$(ب - ٥)(ب + ٤) = ٠$

$ب = ٥ \quad ب = -٤$

④ $\int_{-١}^{٣} (أس^{٢} + ٢س)\,دس = -١٢$

$\left[\frac{أ س^{٣}}{٣} + س^{٢} \right]_{-١}^{٣} = -١٢$

$(٩أ + ٩) - (-\frac{أ}{٣} + ١) = -١٢$

$٩أ + ٨ = -١٢$

$٩أ = -٢٠ \Leftarrow$

$أ = \frac{-٢٠}{٩} = -٢\frac{٢}{٩}$

⑤ جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي

$\int_{-١}^{٣} ٢ب\,دس = ١٢$

الحل

$٢ب(٣ - (-١)) = ١٢$

$٢ب \times ٤ = ١٢$

$٨ب = ١٢ \Leftarrow ب = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

٩) اذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يحقق بالقاعدة (١+س)(٤+٣س)٢ جد قاعدة الدالة علماً بان منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ١-)

الحل

ق'(س) = (١+س)(٤+٣س)٢

= ٤+٣س+٢(٣س+٦س+١)

= ٤+٣س+٦س+٢

= ٦س+٦س+٦

ق(س) = ∫(٦س+٦س+٦)دس

= ٢س+٣س+٦س+ث

ق(٢) = ١- = ٢+٨+١٢+ث

ث = ٢٣-

ق(س) = ٢س+٣س+٦س-٢٣

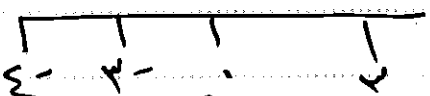
١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ق(س) = ٣س-٧ ومحور السينات في الفترة [-٤ ، ٠]

الحل

٣س-٧ = ٠

٣س = ٧ ⟸ س = ٩

س = ± ٣



م = ∫ من -٤ إلى -٣ (٣س-٧) + ∫ من -٣ إلى ٠ (٧-٣س)

= [س-٧س] من -٤ إلى -٣ + [٧س-س] من -٣ إلى ٠

= |(٨١-٧٧)-(٦٤-٢٨+١)| + ٠-(-٧٧+٨١)

= |٤-٤٥| + |١٥٤-| = ٩٨+٥٤ = ١٥٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم ، تتباعد عن نقطة ثابتة (م) بعد ن ثانية من بدء الحركة حيث ف(ن) = ١٢ن(١-ن) م ، ما نوع الحركة عندما ن = ٢ ثانية ؟

(١٢) يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن وبصورة مستمرة منتظمة وفقه فإذا كان نمو الثمن بنسبة ٥٠٪ سنويًا ، فإذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عامًا ؟

الحل

ثمن التحفة = ع(ن) = ع٠ هـ^{ن ر}

ر = ٥٠ / ١٠٠ = ٥٠ / ١٠٠٠ = ٠٫٥

ن = ٨٠ ، ع٠ = ٣٠٠٠

ع(٨٠) = ٣٠٠٠ × هـ^{٨٠ × ٠٫٥}

= ٣٠٠٠ × هـ^{٤٠}

= ٣٠٠٠ × هـ^{٤} × هـ^{٣٦}

= ٣٠٠٠ × ٥٤ × (٢٫٧)^{٣٦}

= ٢١٨٧٠٠

(٤) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوان من بدء الحركة

ع(ن) = ∫ ت(ن) = ∫ ١٢ن(١-ن)

= ∫ (١٢ن - ١٢ن^{٢}) دن

= ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + جـ

ع(٠) = ٣ ⇐ جـ = ٣

ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣

ع(٤) = ٦(٤)^{٢} - ٤(٤)^{٣} + ٣

= ٩٦ - ٢٥٦ + ٣

= ١٥٧

(١) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣

= ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + جـ

ف(٠) = ٢ ⇐ جـ = ٢

ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + ٢

ف(٢) = ١٦ - ١٦ + ٦ + ٢ = ٨

مكتبة الوسام ALWESAM
الوعلم : ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

امنياتي بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي