الأستاذ ناصر الذينات

التفوق والنجاح هدفنا والمثابرة طريقنا

نسخة الطالب

.....

الرياضيات - العلمي

المستوى الرابع

الوحدة الرابعة
دوسية شاملة

التكامل

(2017)

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
اكاديمية نوبل.....مركز الخوارزمي - البوابة الشمالية لجامعة اليرموك
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

الاقتـــــــــــران البـــــــــدائى

يسمى الاقتران م(س) بدائي للاقتران ق(س) اذا كان

١. ق(س) متصل على [أ ، ب]

٢. مَ(س) = ق(س) لكل س ∈ (أ ، ب)

امثلة :

١.جد الاقتران البدائي للاقتران

ق(س) = ٤س^{٣}

الحل المطلوب ما هو الاقتران الذي مشتقته ٤س^{٣}

ق(س) متصل على مجاله

لا تنسى + جـ مع الاقتران البدائي والتكامل غير المحدود

م(س) = س^{٤} أ و
م(س) = س^{٤} + ٩ أ و
م(س) = س^{٤} + جـ

٢.بين الاقتران الذي قاعدته م (س)= س^{٤}+ جا س

هو بدائي للاقتران ق(س)=٤س^{٣} + جتاس

الحل

ق(س) متصل

مَ (س) = ٤س^{٣} + جتاس = ق(س)

اذن م(س) بدائي للاقتران ق

---

٢ ملاحـــــــــــــظة

يسمى الاقتران البدائي المضاف الية ثابت عشوائي بالتكامل غير المحدود لـِ ق(س) بالنسبة الى س ويرمز له على النحو التالي

∫ ق(س).دس= م(س) + جـ ويقرأ تكامل ق(س)دال س

ملاحـــــــــــــظة :

الصورة العامة للاقتران البدائي للاقتران ق(س) هو

∫ ق(س) . د س = م (س) + جـ

٣. اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين بدائيان للاقتران المتصل ق(س) اوجد (٢م – هـ)َ(س)

ج: مَ(س)=هـَ(س)= ق(س)

(٢م – هـ)َ(س)=٢مَ(س)- هـَ(س)

=٢ق(س)- ق(س)= ق(س)

---

٤. اذا كان م(س)اقتران بدائي للاقتران المتصل ق(س) وكان م(س) = ظتاس+١ اوجد ق(π/٤)

ج: ق(س)= مَ(س)= - قتا^{٢}س

ق(π/٤)=- قتا^{٢} (π/٤) = - ٢

---

٥. اذا كان ∫(لو هـ) قَ (س). دس= س^{٣}+٥س+١ ،

ق (١)=٢ ، اوجد ق (٣) .

الحل

ق(س) + جـ = س^{٣}+ ٥ س + ١

لكن ق (١) = ٢

٢ + جـ = ١ + ٥ + ١ ومنها جـ = ٥

ق(س)= س^{٣}+ ٥ س - ٤

ق(٣) = ٢٧ + ١٥ - ٤

ق(٤) = ٣٨

ملاحظة : (جـ) دائماً يكون مع الجهة التي فيها التكامل ...الا اذا كان التكامل بالطرفين فيكون (جـ) بالطرف الذي يخلو من ق(س) .

قاعـــــــــــــــــــــــدة :

$$\frac{د}{د س}\left(\int ق(س).دس\right) = ق(س)$$

امثلة :

١. اذا كان∫(جا^{٢}س+جا^{٢}س) ق(س).دس= ظاس– ظتاس

اوجد قَ (π/٤)

ج : ق (س) = قا^{٢}س+ قتا^{٢}س

قَ(س)=٢قاس×قاس×ظاس+٢قتاس×قتاس×ظتاس

قَ (س)=٢قا^{٢}س×ظاس+٢قتا^{٢}س×ظتاس

قَ (π/٤) = + =

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢. اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح وكان
أ (ق(س) + ٢) . د س= س^{٣} + م س^{٢} + ٩، وكان
ق(١)=٧ ، فان قيمة الثابت م تساوي :

ج : باخذ المشتقة للطرفين
ق (س) + ٢ = ٣س^{٢} + ٢ م س
لكن ق(١)=٧
٧ + ٢ = ٣ + ٢ م ومنها م = ٣

٣.اذا كان
أ (قَ(س)+ س^{٢}) . د س = ٢س^{٣} + جـ س^{٢} + ٢
وكان قَ (١) = ٤ ، ق (٢) = ٦ اوجد ق(-١)
الحل نشتق الطرفين
قَ(س) + س^{٢} = ٦س^{٢} + ٢ جـ س
قَ(١) + ١ = ٦ + ٢ جـ
٤ + ١ = ٦ + ٢جـ ومنها جـ = -٢/١
أ (قَ(س) + س^{٢}) . د س = ٢س^{٣} -٢/١س^{٢} + ٢
ق(س) + ٣/١س^{٣} + جـ = ٢س^{٣} -٢/١س^{٢} + ٢
ق(٢) + ٣/٨ + جـ = ١٦ -٢+ ٢
٦ + ٣/٨ + جـ = ١٦ -٢+ ٢ ومنها جـ = ٣/٢٢
ق(-١) - ٣/١ + ٣/٢٢ = -٢-٢/١+ ٢
ق(-١) + ٧ = -٢/١
ق(-١) = -٢/١٥

قواعد التكامل غير المحدود

قواعد التكامل غير المحدود	
أ . د س	أ س + جـ
قَ (س). د س	ق(س)+ جـ
(س^{ن}). د س	س$^{ن+١}$ / ن+ ١ + جـ:ن≠-١
جا س. د س	- جتا س+ جـ
جتا س دس	جا س+ جـ
قا^{٢} س .دس	ظا س+ جـ
قتا^{٢} س دس	- ظتا س+ جـ
قا س ظا س.دس	قا س+ جـ
قتا س ظتا س.دس	- قتا س+ جـ

تذكر متطابقات مهمة :

١) جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١
٢) جا٢س= ٢ جا س جتا س
٣) جا(س+ ص) = جاس جتاص + جتاس جاص
٤) جتا٢س= جتا^{٢}س- جا^{٢}س=١ -٢جا^{٢}س=٢جتا^{٢}س-١
٥) جتا(س+ ص) = جتاس جتاص – جاس جاص
٦) ظا^{٢} س = قا^{٢} س - ١
٧) ظتا^{٢}س= قتا^{٢}س - ١
٨) جا^{٢} س = ١/٢ (١ - جتا٢س)
٩) جتا^{٢} س = ١/٢ (١ + جتا ٢ س)
١٠) جتا س جتا ص= ١/٢ (جتا (س + ص) + جتا (س - ص)
١١) جا س جا ص= ١/٢ (جتا (س - ص) - جتا (س + ص))
١٢) جا س جتا ص= ١/٢ (جا (س + ص) + جا (س - ص))
١٣) ١/ جا^{٢}س= قتا^{٢}س
١٤) ١/ جتا^{٢}س= قا^{٢}س

ملاحظة اين ما تجد ظا^{٢} س نستبدلها قا^{٢} س - ١ كذلك ظتا^{٢}س نستبدلها قتا^{٢}س - ١

امثلة :

١. أ^{٥} . د س = ٥ س + جـ

---

٢. أ دس = س + جـ

---

٣. أ ٢/π . د م= ٢/π م + جـ

---

٤. أ جا(٢/π) . د م= م + جـ

---

٥. أ دس / ٥ = ١/٥ س + جـ

---

٦. أ ظا(٤/π) . د س = س + جـ

---

٧. أ د ص = ص + جـ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

$$\text{٨. } \int \frac{س^{٣} + س^{٤} + س^{٥}}{س} \, د س =$$

الحل

$$\int (س^{٢} + س^{٣} + س^{٤}) . د س$$

$$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٥} س^{٥} + جـ$$

مشكلة التكامل الضرب والقسمة فاذا كان السؤال هو تكامل حاصل ضرب او ناتج قسمة يجب التوقف والعمل على حل المشكلة اما مباشر او بالطرق التي سنتعلمها لاحقاً

$$\text{٩. } \int \frac{س^{٢} + ٤ س + ٣}{س + ١} \, د س =$$

الحل

$$\int \frac{(س + ٣)(س + ١)}{س + ١} \, د س$$

$$\int (س+٣) . د س = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٣ س + جـ$$

$$\text{١٠. } \int \frac{س + س^{٢} + ١}{س^{٤}} \, د س =$$

الحل

$$\int س^{-٣} + س^{-٢} + س^{-٤} . د س$$

$$= -\frac{١}{٢ س^{٢}} - \frac{١}{س} - \frac{١}{٣ س^{٣}} + جـ$$

$$\text{١١. } \int (٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٦ س + ٥) . د س =$$

الحل

$$= س^{٤} + س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٥ س + جـ$$

---

١٢. جد الاقتران البدائي للاقتران ق(ك) = ٥

الحل : $\int ٥ \, د ك = ٥ ك + جـ$

الجذر يحول دائماً الى اس كسري

$\sqrt{س} = س^{١/٢}$

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$$\text{١٣. } \int س \sqrt{س} . د س$$

الحل

$$\int س^{٣/٢} . د س = \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + جـ$$

عندما نجمع للكسر ١ يكون الناتج

$$\frac{\text{البسط + المقام}}{\text{المقام}}$$

$$\text{١٤. } \int \frac{س^{٢} \sqrt{س}}{س} \, د س =$$

الحل

$$\int س^{٥/٢} . د س = \frac{٢}{٧} \sqrt{س^{٧}} + جـ$$

يمكن حل السؤال بالضرب بالمرافق كون المقام جذر مضاف

مشكلة التكامل الضرب والقسمة فاذا كان السؤال هو تكامل حاصل ضرب او ناتج قسمة يجب التوقف والعمل على حل المشكلة اما مباشر او بالطرق التي سنتعلمها لاحقاً

$$\text{١٥. } \int \frac{س - ٩}{\sqrt{س} + ٣} \, د س =$$

الحل

$$\int \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} + ٣} \, د س$$

$$\int \sqrt{س} - ٣ . د س = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} - ٣ س + جـ$$

$$\text{١٦. } \int \sqrt{س^{٣}} + \sqrt{س} \, . د س$$

الحل

$$= \int س^{١/٣} + س^{١/٢} . د س = ٣/٤ س^{٤/٣} + ٢/٣ س^{٣/٢} + جـ$$

$$= \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}} + \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + جـ$$

لاحظ داخل التكامل حاصل ضرب

$$\text{١٧. } \int \sqrt{ع} (ع + ع^{٣}) . د ع$$

الحل

$$= \int ع^{٣/٢} + ع^{٧/٢} . د ع = ٢/٥ ع^{٥/٢} + ٢/٩ ع^{٩/٢} + جـ$$

$$= \frac{٢}{٥} \sqrt{ع^{٥}} + \frac{٢}{٩} \sqrt{ع^{٩}} + جـ$$

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

١٨. $\int (س + \sqrt{س})^{٢} \cdot د س$

الحل

$= \int س^{٢} + ٢س \sqrt{س} + س \cdot د س$

$= \int س^{٢} + ٢س^{٣/٢} + س \cdot د س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٤}{٥} س^{٥/٢} + \frac{١}{٢} س^{٢} + جـ$

---

١٩. $\int$ جا س . د س = ـ جتا س + جـ

---

٢٠. $\int$ جان س . د س = $\frac{١}{ن}$ × جتا ن س + جـ

---

٢١. $\int$ جا(أس+ ب). د س= $-\frac{١}{أ}$ ×جتا (أس+ ب)+ جـ

ملاحظة :

امثلة للطالب:

جد التكاملات التالية

١. $\int$ جتا٤س . د س = $\frac{\text{جا ٤ س}}{٤} + جـ$

---

٢. $\int$ ٣جا٤س+ جتا ٥ س. د س =

$= -٣ \frac{\text{جتا ٤س}}{٤} + \frac{\text{جا ٥ س}}{٥} + جـ$

---

٣. $\int$ جا ٤ س جتا ٥ س . د س

$= \frac{١}{٢} \int$ (جا (٤ س + ٥ س) + جا (٤ س – ٥ س)

$= -\frac{\text{جتا ٩ س}}{١٨} + \frac{\text{جتا (- س)}}{٢} + جـ$

---

٤. $\int$ جتا٤س جا٥س.د س= $\int$ جا٥س جتا٤س . د س

$= \frac{١}{٢} \int$ (جا (٥ س + ٤ س) + جا (٥ س – ٤ س)

$= -\frac{\text{جتا ٩ س}}{١٨} + \frac{\text{جتا س}}{٢} + جـ$

---

٥. $\int$ جتا ٤ س جتا ٥ س د س =

$= \frac{١}{٢} \int$ (جتا (٤ س + ٥ س) + جتا (٤ س – ٥ س)

$= \frac{\text{جا ٩ س}}{١٨} - \frac{\text{جا (- س)}}{٢} + جـ$

---

٦. $\int$ جا٤س جا٥س. دس =

جتا- س= جتاس
جا- س = - جا س

$= \frac{١}{٢} \int$ (جتا (٤ س – ٥ س) – جتا (٤ س + ٥ س)

$= -\frac{\text{جا (-س)}}{١٨} - \frac{\text{جا (٩س)}}{٢} + جـ$

---

٧. جد الاقتران البدائي للاقتران

أ) ق(س)=(جاس- جتاس)^{٢}

ب) ق(س)= قتا س (ظتا س - جا س)

---

٨. $\int$ قا^{٢} ٥س. دس = $\frac{\text{ظا ٥ س}}{٥} + جـ$

---

٩. $\int$ جا٢/١س جتا٢/١س. د س

$= ٢/١ \int$ جاس . د س =- ٢/١ جتا س + جـ

---

١٠. $\int$ (ظا^{٢}س+٧) . د س =

$\int$ قا^{٢} س – ١ + ٧ . د س =

$\int$ قا^{٢} س +٦ . د س = ظا س + ٦ س + جـ

لا تنسى المتطابقات المهمة التالية

جا ٢ س = ٢ جا س جتا س

جتا٢ س = ١- ٢ جا^{٢} س

= ٢ جتا^{٢} س – ١ = جتا^{٢} س – جا^{٢} س

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١١. ∫ قتا^{٢} ٥ س . د س =

= $-\frac{\text{ظتا ٥ س}}{٥}$ + جـ

---

١٢. ∫ظتا^{٢} (٣ س + ١) . د س =

∫ قتا^{٢} (٣ س + ١) - ١ . د س =

= $-\frac{\text{ظتا (٣ س + ١)}}{٣}$ - س + جـ

---

١٣. ∫ قا ٣ س ظا ٣ س د س =

= $\frac{\text{قا (٣ س)}}{٣}$ + جـ

---

١٤. ∫ (جتا^{٢} ٢ س – جا^{٢} ٢س) . د س =

∫ جتا ٤ س. د س =

= $\frac{\text{جا (٤ س)}}{٤}$ + جـ

جتا٢س=جتا^{٢}س– جا^{٢} س
= ١- ٢جا^{٢} س
= ٢ جتا^{٢} س - ١

---

١٥. ∫ (٧جتا^{٢} ٢ س +٧ جا^{٢} ٢س) . د س =

∫ ٧. د س =

= ٧س+ جـ

جتا٢س=جتا^{٢}س– جا^{٢} س
= ١- ٢جا^{٢} س
= ٢ جتا^{٢} س - ١

---

١٦. ∫ (جا^{٢} ٢/١س - جتا^{٢} ٢/١س) . د س =

- ∫ جتا س. د س = - جا س + جـ

---

١٧. ∫ قا^{٢} (س/٢ + ٥) . د س =

٢ ظا (س/٢ + ٥) + جـ

---

١٨. ∫ جا^{٢} س . د س =

= $\frac{١}{٢}$ ∫(١ – جتا ٢ س) . د س

= $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{\text{جا ٢ س}}{٢}$) + جـ

١٩. ∫ جا^{٤} س د س

= ∫ (جا^{٢} س)^{٢} . د س

= $\frac{١}{٤}$ ∫ (١ – جتا ٢ س)^{٢} . د س

= $\frac{١}{٤}$ ∫ (١ – ٢جتا ٢ س + جتا^{٢} ٢ س). د س

= $\frac{١}{٤}$ ∫١ – ٢جتا٢ س+ $\frac{١}{٢}$ (١+ جتا ٤ س). د س

= $\frac{١}{٤}$ ∫ $\frac{٣}{٢}$ – ٢جتا٢ س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٤ س. د س

..... يكمل

---

٢٠. ∫ جتا^{٤} ٢ س . د س = واجب

ملاحظة :

لا نستطيع تكامل جا س ، جتا س مباشرة الا اذا كانت قوة الاقتران او الزاوية خطية

اين ما تجد هذه الصورة جا س ، جتا س مضاف اليه قيمة دائماً ضرب بالمرافق

٢١. ∫ $\frac{\text{د س}}{\text{١ + جا س}}$ = ∫ $\frac{١}{\text{١ + جا س}} \times \frac{\text{١ – جاس}}{\text{١ – جاس}}$.د س

= ∫ $\frac{\text{١ – جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ د س

= ∫ قا^{٢} س – قا س ظا س. د س

= ظا س - قا س + جـ

---

٢٢. ∫ جتا^{٢} ٤س . د س =

= $\frac{١}{٢}$ ∫(١ + جتا ٨ س) . د س

= $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{\text{جا ٨ س}}{٨}$) + جـ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٣. $\int \frac{\text{جتا}\ ٢\ س}{\text{جتا}^{٢}\ س\ \text{جا}^{٢}\ س}\ د\ س$

اذا كانت الزوايا في البسط مختلفة عن المقام اولاً نعمل على ان نجعلها متساوية باستخدام المتطابقات التي وردت معنا سابقاً

$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\ س - \text{جا}^{٢}\ س}{\text{جتا}^{٢}\ س\ \text{جا}^{٢}\ س}\ د\ س$

$= \int \left(\frac{١}{\text{جا}^{٢}\ س} - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\ س}\right) د\ س$

$= \int \text{قتا}^{٢}\ س - \text{قا}^{٢}\ س\ .\ د\ س$

$= -\ \text{ظتا}\ س - \text{ظا}\ س + \text{جـ}$

---

٢٤. جد $\int \frac{\text{جتا}\ ٣\ س}{\text{جتا}\ س}\ د\ س$

ج:

$= \int \frac{\text{جتا}\ (س+٢س)}{\text{جتا}\ س}\ د\ س$

$= \int \frac{\text{جتا}\ س\ \text{جتا}٢س - \text{جاس جا}٢س}{\text{جتا}\ س}\ د\ س$

$= \int \frac{\text{جتا}\ س\ \text{جتا}٢س - \text{جاس} \times ٢\ \text{جا}\ س\ \text{جتا}\ س}{\text{جتا}\ س}\ د\ س$

$= \int (\text{جتا}٢س - ٢\text{جا}^{٢}س)\ .\ د\ س$

$= \int (\text{جتا}٢س - ٢(١/٢)(١ - \text{جتا}٢س)\ .\ د\ س$

$= \int (\text{جتا}٢س - ١ + \text{جتا}٢س)\ .\ د\ س$

$= \int (٢\ \text{جتا}٢س - ١)\ .\ د\ س$

$= \int (٢\ \text{جتا}٢س - ١).د\ س = \text{جا}٢س - س + \text{جـ}$

---

٢٥. $\int \frac{١ + \text{جا}\ ٢\ س}{\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س}\ د\ س =$

$= \int \frac{\text{جا}^{٢}س + ٢\text{جاس جتا}\ س + \text{جتا}^{٢}س}{\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س}\ د\ س$

$= \int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})(\text{جاس} + \text{جتاس})}{\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س}\ د\ س$

$= \int (\text{جا}\ س + \text{جتا}\ س).د س$

$= -\ \text{جتا}\ س + \text{جا}\ س + \text{جـ}$

---

٢٦. $\int \sqrt{١ + \text{جا}\ ٢\ س}\ .\ د\ س \quad ٠ \le س \le \pi/٣$

$= -\ \text{جتاس} + \text{جا}\ س + \text{جـ}$

٢٧. $\int \sqrt{١ + \text{جا}\ س}\ .\ د\ س \quad ٠ \le س \le \pi/٢$

$= -\ ٢\text{جتا}٢/١س + ٢\text{جا}\ ٢/١س + \text{جـ}$

التكامـــــــــــل المحـــــــــــدود

التكامل المحدود للاقتران قَ (س) في الفترة [أ،ب] هو $\int_{أ}^{ب} قَ(س)\ .\ د\ س = ق(ب) - ق(أ)$

امثلة :

١. ق(-٢) = -٧ ، ق (٣) = ٥ اوجد $\int_{-٢}^{٣} قَ(س)\ .\ د\ س$

$= ق(س) \Big|_{-٢}^{٣} = ق(٣) - ق(-٢) = ١٢$

---

٢. اذا كان م١ ، م٢ اقترانيين بدائيين لنفس الاقتران ق المتصل على [أ، ب]فاثبت ان م١(س) - م٢(س)= ثابت

الحل :

م١ اقتران بدائي للاقتران ق ومنها مَ١ = ق(س) المتصل على [أ، ب]

م٢اقتران بدائي للاقتران ق ومنها مَ٢ = ق(س) المتصل على [أ، ب]

بالطرح

مَ١ - مَ٢ = ق(س) - ق(س) = صفر

(م١ - م٢)َ = صفر ، على (أ ، ب)

ومنها م١(س) - م٢(س)= ثابت على [أ، ب]

---

٣. اذا كان م(س) ، هـ(س)اقترانيين بدائيين لنفس الاقتران ق

$\int_{١}^{٥} (م(س) - هـ(س))\ .\ د\ س = ٨$

جد $\int_{-١}^{٢} (م(س) - هـ(س))\ .\ د\ س$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

نتيجة :

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على [أ، ب] وكان م(س)أي اقتران بدائي للاقتران ق فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,.\,د س = م(ب) - م(أ)$$

٤.اذا كان م(س)اقتران بدائي للاقتران ق المتصل على [٢، ٣] وكان م(٣) = ١١ ، م(٢) = -١ اوجد

$$\int_{٢}^{٣} (٢ق(س)-٦)\,.\,د س =$$

الحل :

$$٢\int_{٢}^{٣} ق(س)\,.\,د س - |٦ س|_{٢}^{٣} =$$

$$٢(م(٣) - م(٢)) - (٦ \times ٣ - ٦ \times ٢) =$$

$$٢(١١ - (-١)) - (١٨ - ١٢) = ١٨$$

قاعـــــــــــــــــدة

$$\int_{أ}^{ب} جـ\,.\,د س = جـ(ب - أ)$$

امثلة :

١. $\int_{-١}^{٣} ٤\,.\,د س = ٤(٣ - (-١)) = ١٦$

٢. $\int_{٠}^{\pi} (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)\,.\,د س =$

الحل

$$= \int_{٠}^{\pi} ١\,.\,د س = \pi$$

٣. $\int_{أ}^{٦} ٣أ\,.\,د س = ١٢$ **فما قيمة أ ؟**

الحل

٦(٣أ - أ)=١٢ ومنها ١٢أ = ١٢ ومنها أ = ١

---

٤. $\int_{١+أ}^{٢+٣أ} ٥\,.\,د س = ٤٠$ **فما قيمة أ ؟**

الحل

$$٥((٢ + ٣أ) - (١ + أ)) = ٤٠$$

$$٥(١ + ٢أ) = ٤٠$$

١٠ أ = ٣٥ أ= ٣.٥

---

٥. اذا كان $\int_{أ}^{ب} ٥\,.\,د س = ٢٠$ **،** $\int_{أ}^{ب٢} د س = ١٠$ **اوجد قيمة أ ، ب**

ج: أ=٢ ،ب= ٦

---

٦. $\int_{٩}^{٢} أ\,.\,د س = ٤٩$ **فما قيمة أ ؟**

الحل

أ (٢ - ٩) = ٤٩

- ٧أ=٤٩

ومنها أ= -٧

---

٧. $\int_{٢}^{٩} د س = ١(٩ - ٢) = ٧$

ناصر ذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

قاعـــــــــــــــــدة

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن} \, د س = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} \Big|_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+1} - أ^{ن+1}}{ن+1}$$

---

١. اثبت

$$\int_{أ}^{ب} س \, د س = \frac{ب^{٢} - أ^{٢}}{٢}$$

---

٢. اوجد

$$\int_{-١}^{٢} س \, د س = \frac{٢^{٢} - (-١)^{٢}}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

٣.

$$\int_{١}^{٤} ص^{٢} \, د ص = \frac{ص^{٣}}{٣} \Big|_{١}^{٤} = ٢١$$

---

٤. $\int_{١}^{٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} \, د س$

$$\int_{١}^{٨} س^{-١/٣} \, د س = \frac{٣}{٢} س^{٢/٣} \Big|_{١}^{٨} =$$

ج ٢/٩

---

٥. اذا كان

$\int_{١}^{ب} س \, د س = ٤$ ، ب> ٠ جد قيمة ب .

ج: ب=٣ ،ب= -٣ تهمل لان ب> ٠

خـــــواص التكامـــــل المحـــــدود

١) الخاصـــــــية الخطيـــــــة

١) $\int_{أ}^{ب} جـ ق(س) . د س = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س$

٢) $\int_{أ}^{ب} ق(س) \pm هـ(س) . د س = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س) . د س$

٣) $\int_{أ}^{أ} ق(س) . د س = صفر$

٤) $\int_{ب}^{أ} ق(س) . د س = - \int_{أ}^{ب} ق(س) . د س$

امثلة :

١. $\int_{١}^{٢} (٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٤س + ١٢) . د س =$

الحل

$$= س^{٤} + س^{٣} - ٢ س^{٢} + ١٢ س \Big|_{١}^{٢}$$

---

٢. $\int_{٠}^{٤} \sqrt{س} (س + ١) . د س$

الحل

$$\int_{٠}^{٤} (س^{٣/٢} + س^{١/٢}) . د س$$

$$= \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} \Big|_{٠}^{٤} = \frac{٢٧٢}{١٥}$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣. اذا كان $\int_{1}^{5} ق(س).دس = -٤$ ، $\int_{1}^{5} هـ(س).دس = ٩$

أوجد

أ) $\int_{1}^{5} [٣ ق(س) . د س + \int_{1}^{5} ٢ هـ(س) . د س$

ب) $\int_{1}^{5} (٢ ق(س) + هـ(س) + ٣ س^{٢}) . د س$

ت) اذا علمت ان $\int_{1}^{5} (٣ ق(س) + جـ) . د س = ٦$

فما قيمة جـ

الحل

أ) $= (٣ \times -٤) + (٢ \times ٩) = ٦$

ب) $= [(٢ \times -٤) + ٩) + س^{٣}]_{1}^{5}$

$= ١ + (١٢٥ - ١) = ١٢٥$

ت) $(٣ \times -٤) + جـ (٥ - ١) = ٦$

$-١٢ + ٤ جـ = ٦$ .... $جـ = ٤.٥$

---

٤. $\int_{0}^{2} (٤ن + ٣ن^{٢}) . د ن$ ج ١٦

---

٥. $\int_{1}^{4} \frac{س + ١}{\sqrt{س}} . د س$

ج ٥

---

٦. $\int_{0}^{1} (س^{٣} + س)^{٢} . دس$ ج ١٦

---

٧. $\int_{1}^{4} \frac{س + ١}{\sqrt{س}} . د س$

ج ٥

٨. اوجد

$\int_{0}^{1} (٤س - \int_{0}^{2} ٢ص . دص + \int_{0}^{1} ٤ن.دن) . د س$

ج ٦

---

٩. اذا كان

$\int_{0}^{4} (\int_{0}^{جـ} ٢س - ٣ \int_{0}^{م^{٢}} .دم) . د س = ٤٨$ اوجد قيمة جـ .

ج جـ = -٢

---

١٠. اذا كان $\int_{0}^{1} ق(س) = س^{٢} + \int_{0}^{(٥ س - ١)} ٢ص.دص$. د س

اوجد قَ (- ١)

الحل $\int ق(س) = س^{٢} + \int_{0}^{(٥ س - ١)} ١ . د س$

باخذ المشتقة للطرفين

ق(س) = ٢ س + ٥ س – ١ = ٧ س ـــ ١

قَ(س) = ٧

قَ(-١) = ٧

ناتج التكامل المحدود ١

---

١١. اذا كان

$\int_{1}^{ب} ق(س).دس = س^{٢} - ٤س + ٩$ ، وكان

$\int_{-١}^{ب} ق(س).دس = ٧$ فما قيمة ب ،

الحل

$\int_{-١}^{ب} ق(س).دس = [س^{٢} - ٤س + ٩]_{-١}^{ب}$

$((ب)^{٢} - ٤(ب) + ٩) - ((-١)^{٢} - ٤(-١) + ٩) = ٧$

$ب^{٢} - ٤ب - ٥ = ٧$ ومنها $ب^{٢} - ٤ب - ١٢ = ٠$

$(ب - ٦)(ب + ٢) = ٠$ ومنها ب = ٦ ، -٢

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

$\int_{\pi/6}^{\pi/4} (\text{قا س} - \text{ظا س})^2 \cdot \text{د س}$ = ١٢.

الحل

$\int_{\pi/6}^{\pi/4} (\text{قا}^2 \text{س} - 2\text{قا س ظا س} + \text{ظا}^2 \text{س}) \cdot \text{د س}$

$\int_{\pi/6}^{\pi/4} (2\text{قا}^2 \text{س} - 2\text{قا س ظا س} - 1) \cdot \text{د س}$ ($\text{قا}^2 \text{س} - 1$)

= ٢ ظا س − ٢قا س − س $\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$ نعوض

١٣.اذا كان $\int_{1}^{3} 2\text{ق(س)} \cdot \text{دس} = 4$ ، اوجد $\int_{1}^{3} (5\text{ق(س)} + 6\text{س}) \cdot \text{د س}$

ج جـ = ٣٤

---

١٤. اذا كان $\int_{-1}^{5} (2\text{ق(س)} - 8\text{س} + 2) \cdot \text{دس} = 20$ ،اوجد $\int_{-1}^{5} \text{ق(س)} \cdot \text{د س}$

ج جـ = ٥٢

---

١٥. اوجد $\int_{0}^{2} (4\text{ س})^2 \cdot \text{د س} + \int_{1}^{2} 4\text{ن ص} \cdot \text{دص}$

ننفذ التكامل الداخلي اولاً

ج ٦

---

١٦. اذا كان $\int_{0}^{\text{جـ}} (2\text{س} + 4) \cdot \text{دس} =$ صفراً ،اوجد جـ

ج ٠ ، − ٤

---

١٧. اذا كان $\int_{1}^{4} (\text{ق(س)}/2) \cdot \text{دس} = 5$ ،وكان $\int_{1}^{4} (3/2)\text{هـ(س)} \cdot \text{د س} = 4$

اوجد $\int_{1}^{4} (2\text{ق(س)} - 3\text{هـ(س)} + 8) \cdot \text{د س}$

---

٢) خاصية الاضافة

اذا كان ق قابلاً للتكامل على فترة تنتمي اليها الاعداد أ ، ب ، جـ فان

$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \cdot \text{د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \cdot \text{د س} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} \cdot \text{د س}$

ليس شرط ان تقع بين أ ، جـ

١.اذا كان $\int_{1}^{5} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = 13$ ، $\int_{5}^{7} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = 9$

أوجد $\int_{1}^{7} \text{ق(س)} \cdot \text{د س}$

الحل

$\int_{1}^{5} \text{ق(س)} \cdot \text{د س} + \int_{5}^{7} \text{ق(س)} \cdot \text{د س} = 22$

٢.اذا كان $\int_{1}^{4} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = 8$، $\int_{1}^{-8} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = 10$

أوجد $\int_{-8}^{4} (3\text{ق(س)} - 5) \cdot \text{د س}$

الحل

$= 3(\int_{1}^{4} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} + \int_{1}^{-8} \text{ق(س)}) \cdot \text{دس} - 5(4 - -8)$

$= 3(-10 + 8) - 60 = -66$

٣.اذا كان $\int_{1}^{5} \text{ق(س)} \cdot \text{د س} = 5$ ، $\int_{3}^{5} 2/1\ \text{ق(س)} \cdot \text{د س} = 7$

أوجد $\int_{3}^{1} \text{ق(س)} \cdot \text{د س}$

الحل

$= \int_{3}^{5} \text{ق(س)} \cdot \text{د س} + \int_{5}^{1} \text{ق(س)} \cdot \text{د س}$

$= 14 + (-5) = 9$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

خاصية المقارنة

- اذا كان ق(س) ≥ صفر لكل س ∈ [أ ، ب] فان
  $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) . د س ≥ صفر
- اذا كان ق(س) ≤ صفر لكل س ∈ [أ ، ب] فان
  $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) . د س ≤ صفر
- اذا كان ق ، هـ قابلين للتكامل على [أ ، ب] وكان ق(س) ≤ هـ (س) لكل س ∈ [أ ، ب] فان
  $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) . د س ≤ $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) . د س

امثلة :

١.دون اجراء التكامل ايهما اكبر
$\int_{٠}^{١}$ س. د س أم $\int_{٠}^{١}$ س^{٢}. د س

الحل : بما ان س ≥ س^{٢} لكل س ∈ [٠ ، ١]
فان $\int_{٠}^{١}$ س. د س ≥ $\int_{٠}^{١}$ س^{٢}. د س

---

٢. ما اشارة $\int_{-٣}^{-١}$ $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}+٢}$. د س =

الحل :
$\int_{-٣}^{-١}$ $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}+٢}$. د س > ٠ موجب

٣.اذا كان ق اقتراناً محدداً على [١ ، ٥]
وكان ٢- ≤ ق(س) ≤ ٤ فجد (م ، ن)

بحيث ان م ≤ $\int_{١}^{٥}$ ق(س) ≤ ن

ج: م = - ٨ ، ن = ١٦

٤. اذا كان ق اقتراناً محدداً على [٢ ، ٤]
وكان ٣ ≤ ق(س) ≤ ٧ فجد (م ، ن)

بحيث ان م ≤ $\int_{٢}^{٤}$ (٢ق(س)+٣) . دس ≤ ن

ج م= ١٨ ، ن= ٣٤

---

٥ . اذا كان $\int_{١}^{٥}$ ق(س).د س≤٥اوجد اصغر قيمة ممكنة

$\int_{١}^{٥}$ (٣ ق(س) + ٤ س - ١١) . دس

الحل : اصغر قيمة ١٩

٦.بين ان $\int_{-٤}^{٤}$ $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$. د س ينحصر بين ٣٢، ٠
دون ايجاد قيمة علماً بان قابل للتكامل [- ٤ ، ٤]

الحل : نحصر اولاً الاقتران ق(س)= $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$ بين قيمته الصغرى المطلقة وقيمته العظمى المطلقة وذلك عن طريق القيم القصوى (الفصل الاول)

٠ ≤ $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$ ≤ ٤

$\int_{-٤}^{٤}$ ٠ . د س ≤ $\int_{-٤}^{٤}$ $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$. د س ≤ $\int_{-٤}^{٤}$ ٤ . دس

صفر ≤ $\int_{-٤}^{٤}$ $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$. د س ≤ ٣٢

٧.بين ان $\int_{١}^{٤}$ ق(س) . د س ينحصر بين ٦ ، ٢٤

دون اجراء التكامل علماً با ق(س)=٥+٣جا^{٧} $\frac{\pi}{\text{س}}$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

تكامل الاقتران المتشعب

امثلة :

١.اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، \ ١ \leq س < ٣ \\ ٤ س & ، \ ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

اوجد

١) $\int_{١}^{٥} ق(س).دس$ ، ٢) $\int_{٣}^{٥} (٢ق(س) - ٢س).دس$ ،

الحل

١) $\int_{١}^{٥} ق(س).دس = \int_{١}^{٣} ٣س^{٢}.دس + \int_{٣}^{٥} ٤س.دس$ يكمل

٢) $٢(\int_{٣}^{٥} ق(س).دس) - \int_{٣}^{٥} ٢س.دس$

$= ٢(\int_{٣}^{٥} ٤س.دس) - \int_{٣}^{٥} ٢س.دس$

$= ٤س^{٢}|_{٣}^{٥} - س^{٢}|_{٣}^{٥} = (١٠٠-٣٦)-(٢٥-٩) =$

---

٢. $\int_{١}^{٣} [س + ١].دس$

الحل

ملاحظة اعد التعريف بطريقة صحيحة

$= \int_{١}^{٢} ٢.دس + \int_{٢}^{٣} ٣.دس$

$= ٢(٢-١) + ٣(٣-٢) = ٥$

تاكد ان احد حدود التكامل هو نقطة تشعب وذلك بالتعويض اذا كان ناتج التعويض ينتمي الى ص يكون نقطة تشعب والا نساويها بالصفر لمعرفة نقطة

---

٣. $\int_{٠}^{٥} |٢س - ٤|.دس$

$= \int_{٠}^{٢} ٤ - ٢س.دس + \int_{٢}^{٥} ٢س - ٤.دس$

$= ٤(٢-٠) - س^{٢}|_{٠}^{٢} + س^{٢}|_{٢}^{٥} - ٤(٥-٢)$

$= ٨ - ٤ + ٢٥ - ٤ - ١٢ = ١٣$

---

٤. اذا كان $ق(س) = \begin{cases} |٢س - ٢| & ، \ ٠ \leq س \leq ٤ \\ ٢أ & ، \ ٤ < س \leq ٥ \end{cases}$

وكان $\int_{٠}^{٥} ق(س).دس = ٢$ ، اوجد قيمة أ .

الحل

$= \int_{٠}^{١} ٢ - ٢س.دس + \int_{١}^{٤} ٢س - ٢.دس + \int_{٤}^{٥} ٢أ.دس$

$= ٢(١-٠) - س^{٢}|_{٠}^{١} + س^{٢}|_{١}^{٤} - ٢(٤-١) + ٢أ$

$٢ = ٢ - ١ + ١٥ - ٦ + ٢أ$ ..... $أ = -٤$

---

٥. $\int_{٠}^{٥} |٤ - س|.دس$

$= \int_{٠}^{٤} (٤ - س).دس + \int_{٤}^{٥} (س - ٤).دس$

= اكمل ٢/١٧

٦.اذا كان

$\int_{-١}^{جـ} ق(س).دس =$ صفر ، اوجد قيمة جـ

الحل

جـ = -١

اذا كان ما داخل التكامل صعب التكامل بالطرق التي تعلمناها نطبق القاعدة لايجاد قيمة جـ اما اذا كان يكامل حسب الطرق التي تعلمناها فنكامل ثم نجد قيمة جـ ولا تنسى ان احد الحلول يكون حسب القاعدة لكن يمكن ان يكون هناك حلول اخرى حسب التكامل

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٧ . $\int_{1}^{2} [٢س+١] \, . \, د س$

الحل

$= \int_{1}^{1.٥} ٣ \, . \, د س + \int_{1.٥}^{2} ٤ \, . \, د س$

$= ١.٥ + ٢ = ٣.٥$

ملاحظة : في اكبر عدد صحيح اذا كان معامل س موجب عوض في الاصغر.
اما اذا كان معامل س سالب عوض في الاكبر

---

٨. $\int_{1}^{3} [٢ - س] \, . \, د س$

$= \int_{1}^{2} ٠ \, . \, د س + \int_{2}^{3} -١ \, . \, د س$

$= ٠ + (-١) = -١$

---

٩. $\int_{0}^{2} \sqrt{س^{٢} - ٢ س + ١} \, . \, د س$

الحل :

$\int_{0}^{2} |س - ١| \, . \, د س = \int_{0}^{1} ١ - س \, . د س + \int_{1}^{2} س - ١ \, . د س$

اكمل الحل

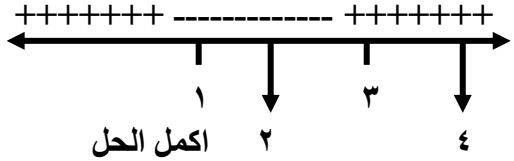
---

١٠. $\int_{2}^{4} \frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س - ١} \, . \, د س$

الحل :

$س^{٢} - ٤ س + ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س - ١) = ٠$ ومنها $س = ١ ، ٣$



اكمل الحل

١١. $\int_{1}^{6} [س/٣] \, . \, د س$

الحل

$= \int_{1}^{3} ٠ \, . \, د س + \int_{3}^{6} ١ \, . \, د س$

$= ٠ + ٣ = ٣$

---

١٢. $\int_{-٣}^{٠} س \, [س / ٢] \, . \, د س$

الحل

$= \int_{-٣}^{-٢} -٢س \, . \, د س + \int_{-٢}^{٠} -س \, . \, د س$

= يكمل الحل ج ٢

---

١٣. $\int_{-١}^{2} |س| + [س/٢] . د س$

---

١٤. ق(س) = $\begin{cases} |س-٢| ، & ٠ \leq س \leq ٤ \\ [٢س] ، & ٤ < س \leq ٥ \end{cases}$

اوجد $\int_{0}^{5} ق(س) \, . \, د س$

الحل

$= \int_{0}^{2} ٢ - س \, . \, د س + \int_{2}^{4} س - ٢ \, . \, د س + \int_{4}^{5} ٨ \, . \, د س$

ج: ٢/٢٥

١٥.اذا كان ق(س)كثير حدود من الدرجة الاولى وكان م(س)اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) بحيثمَ(٢)=٧ ، مَ(٢)=٢ جداً ، ب.

١٥.اذا كان م١(س)، م٢(س) اقترانان بدائيان للاقتران ق(س)وكان هـ(س)= م١(س)- م٢(س) فما قيمة هـَ(٢)

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

تمـــــــــرين عـــــــــــام ١

امثلة :

١. $\int_{١}^{٢} (٣ س^{٢} + ٢ \int_{١}^{٢} ص . دص) . د س$

الحل : = ١٠

---

٢. ما اشارة $\int_{-٣}^{-١} \frac{س}{س^{٤} + ٢} . د س$ =

الحل :

$\int_{-٣}^{-١} \frac{س}{س^{٤} + ٢} . د س$ < ٠

---

٣. اذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢ \int_{٠}^{جـ} ٣م.دم). د س = -٢٠$

فما قيم الثابت جـ ؟

الحل :

$\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - (٣م^{٢} |). د س = -٢٠$

$\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} - ٣جـ^{٢}). د س = -٢٠$

$س^{٣} | - ٣جـ^{٢}(٣--١) = -٢٠$

$(٢٧--١)-١٢جـ^{٢} = -٢٠$ ومنها جـ = $\pm$ ٢

---

٤. اذا كان ق(س) = ٤ – $س^{٢}$ متصلاً على [-٢ ، ٢] وكان

$م \geq \int_{-٢}^{٢} ق (س) . د س \geq ن$ فما قيمة م ، ن ؟

الحل : م= ٠ ، ن = ٨

---

٥. اذا كان ق اقتراناً محدداً على [٠ ، ٣]

وكان ١ < ق(س) < ٣ فجد (م ، ن)

بحيث ان $م \geq \int_{٠}^{٣} ق(س). دس \geq ن$

الحل : م = ٣ ، ن = ٩

---

٧. دون حساب التكامل بين ان

$\int_{٠}^{\pi/٤} جتا^{٣} س . د س \leq ٠$

---

٨. دون حساب التكامل بين ان

اثبت ان ٠ $\leq \int_{٠}^{\pi} جا س . د س \leq \pi$

الحل :

٩.اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين بدائين

للاقتران ق(س)، وكان $\int_{١}^{٥}$(م(س)– هـ(س)).دس=٨

اوجد $\int_{١}^{٥} س م(س).دس + \int_{١}^{٥} س هـ(س).دس.$

---

١٠. اذا كان

ق(س) = { ٣ أ ، س < ٢ ، $٣س^{٢} + ٢$ ، س $\geq$ ٢ } وكان

$\int_{٠}^{٣} ق(س) . د س = -١٢$ ، اوجد قيمة الثابت أ ؟

الحل: أ = - ٨

---

١١. $\int_{٠}^{٤} | س^{٣} - ٤ س^{٢} | . د س =$

---

١٢. $\int_{١}^{٣} [س + ٠.١] . د س =$

الحل : = ٣.٢

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

---

١٣. $\int_{-٢}^{٢} |س^{٢} + ٤ س + ٤| \ . د س =$

الحل :تمرين للطالب

---

١٤. $\int_{١}^{ك} [٢س] . د س = ٢.٥$ ، اوجد قيمة ك : ك>١

الحل : ك = ٢

---

١٥. $\int_{١}^{و} [س/٢] . دس = ٧$ اوجد قيمة و:و>١

الحل : اذن و = ٣/١٩

ملاحظة جرب الاتجاه السالب

١٦.الاقتران ق كثير حدود من الدرجة الاولى يمر بالنقطة (- ١ ، ١) وايضاً

$\int_{٠}^{٢} ق(س) \ . د س = ١٤$ جد قاعدة الاقتران

الحل :

ق(س) = أ س + ب

يمر بالنقطة (- ١ ، ١)

$\int_{٠}^{٢} (أ س + ب) \ . د س = ١٤$

ب = ٤ ، أ = ٣

ق(س) = ٣س + ٤

---

١٧. اذا كان م(س) اقتران بدائياً للاقتران ق(س) المتصل على [٢ ، ٣] وكان م (٣) = ١١ ، م (٢) = - ١ اوجد

$\int_{٢}^{٣} (٢ ق(س) - ٦) . د س = ٢ م(س) - ٦س |_{٢}^{٣}$

الحل = ١٨

١٨. اذا كان م(س) اقتران بدائياً للاقتران ق(س) المتصل على [١ ، ٣] : وكان

م (س)= $س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤س +$ جـ

اوجد قيمة $\int_{١}^{٣} ق(س) . د س$

الحل : $م(س)|_{١}^{٣} = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤س|_{١}^{٣} = ١٨$

---

١٩. اذا كان ق(س)= أ س+ ب وكان م(س) بدائي للاقتران ق : مَ(٢)= ٧ ، مً(٢)=٢

جد قيمة أ ، ب

الحل : أ = ٢ ، ب = ٣

٢٠.اذا كان ق(س) متصلاً على ح وكان

$\int_{أ}^{ب} ق(س) . د س - \int_{٥}^{٣} ق(س) . د س =$

$\int_{٣}^{١} ق(س) . د س$ اوجد قيمة أ ، ب

الحل : ومنها أ = ٥ ، ب = ١

٢١.اذا كان ق(س) متصلاً على ح وكان

$\int_{-٢}^{٢} (م + ق(س)) . د س = ١٥$ وكان

$\int_{-٢}^{٢} ٤ ق(س) . د س = ٨ م$ ، فما قيمة م

الحل : م = ٧.٥

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٢. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - جا^2 س}$. د س

الحل : تمرين للطالب ج : ٢

---

٢٣. اذا كان ق(س) متصلاً على ح وكان

$\int_{1-}^{2} (3ق(س) - 4)$.دس = ٤ ، $\int_{4}^{2} ق(س)$.دس = ٦ اوجد

$\int_{1-}^{4} ق(س)$. د س

الحل : تمرين للطالب ج ـ ٣/٢

---

٢٤. اذا كان $\int_{ب}^{1-} ق(س)$. دس = $س^2 - 2س + 7$ وكان

$\int_{1-}^{ب} ق(س)$. د س = ١٢ اوجد قيمة الثابت ب

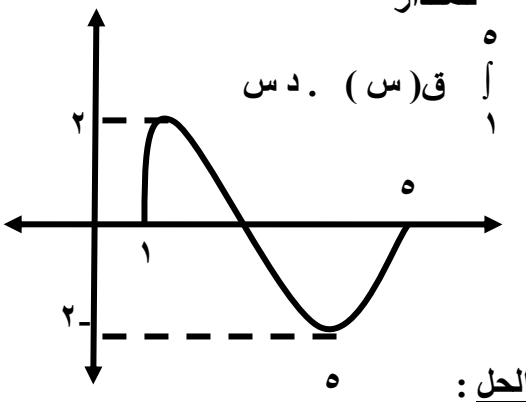
الحل

ب = ٥ ، ـ ٣

---

٢٥. في الشكل المجاور اوجد اكبر قيمة واصغر قيمة للمقدار

$\int_{1}^{5} ق(س)$. د س



الحل :

$-8 \geq \int_{1}^{5} ق(س)$. د س ≥ 8

---

٢٦. $\int_{6/\pi}^{2/\pi} ق تا س ظتا س$. د س = ـ قتا س $\Big|_{6/\pi}^{2/\pi}$

= ـ (قتا $\pi/2$ ـ قتا $\pi/6$) = ـ (١ ـ ٢) = ١

---

٢٧. اذا كان $\int_{0}^{2} (ق(س) - 2س)$. د س = ٢٠

فما قيمة $\int_{0}^{2} 3ق(س)$. د س =

الحل

$\int_{0}^{2} (ق(س) . د س - س^2) \Big|_{0}^{2} = 20$

$\int_{0}^{2} (ق(س)$. د س $- 4) = 20$

$\int_{0}^{2} ق(س)$. د س $= 24$

قيمة $\int_{0}^{2} 3ق(س)$. د س $= 3 \times 24 = 72$

---

٢٨. اذا كان $\int_{1-}^{جـ} س$.دس = صفراً جد قيمة جـ.

الحل: اولاً قيمة جـ = ـ ١ حسب النظرية

ثانياً $2/1 س^2 \Big|_{1-}^{جـ} = 0$

$2/1 جـ^2 - 2/1 = 0$ ومنها جـ = ١

---

٢٩. $\int_{0}^{3} [2 - س]$. د س

$= \int_{0}^{1} 1$. د س $+ \int_{1}^{2} 0$. د س $+ \int_{2}^{3} (-1)$. د س

$= 1 + 0 + (-1) =$ صفر

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣٠. $\int_{1}^{16} \sqrt{س}\ .\ د س = \int_{1}^{16} س^{1/2}\ .\ د س = ٣/٢\ |س^{3/2}|_{1}^{16}$

$= \frac{2}{3}\ |\sqrt{س^3}|_{1}^{16} = ٤٢$

---

٣١. $\int_{2}^{2} (س - ٣)^2\ .\ د س =$ صفر

---

٣٢. $\int_{0}^{\pi/2} (جتاس - جاس).\ د س =$

$= جا س + جتا س\ |_{0}^{\pi/2} = ١ - ١ =$ صفر

---

٣٢. اذا كان $\int_{1}^{3} (٢ق(س) + \frac{١}{س^2} - ٦).\ د س = ١٢$ ،

اوجد $\int_{1}^{3} (\frac{ق(س)}{2} - ٣ س^2)\ .\ د س =$

الحل :

$\int_{1}^{3} ٢ق(س).\ د س - \frac{١}{س}\ |_{1}^{3} - ٦ (٣ - ١) = ١٢$

$\int_{1}^{3} ٢ق(س).\ د س - (\frac{١}{3} - \frac{١}{3}) - ١٢ = ١٢$

$\int_{1}^{3} ٢ق(س).\ د س + \frac{٢٤}{3} = ٢٤$

$\int_{1}^{3} ق(س).\ د س + \frac{١}{3} = ١٢$

$\int_{1}^{3} ق(س).\ د س = \frac{٣٥}{3}$

لكن المطلوب

$\int_{1}^{3} (\frac{ق(س)}{2} - ٣ س^2)\ .\ د س =$

$\int_{1}^{3} (\frac{ق(س)}{2}.\ د س - س^3)\ |_{1}^{3} =$

$\frac{٣٥}{6} - (٢٧ - ١) = \frac{-١٢١}{6}$

---

٣٣ .اذا كان

$ع = \int_{\pi/4}^{\pi/3} قتا^2 س.\ د س$ ، $ل = \int_{\pi/4}^{\pi/3} ظتا^2 س.\ د س$

اوجد قيمة (ع + ل) تساوي

الحل :

$ع + ل = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (قتا^2 س - ظتا^2 س).\ د س$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} (١).\ د س = ١ (\pi/3 - \pi/4) = \pi/2$

---

٣٤. $\int_{1}^{جـ} (٢س^2 + ٦س).\ د س =$ صفر فما قيمة جـ.

الحل :

$= \frac{2}{3} س^3 + ٣ س^2\ |_{1}^{جـ} =$ صفر

$= \frac{2}{3} جـ^3 + ٣ جـ^2 - \frac{11}{3} =$ صفر

$= ٢ جـ^3 + ٩ جـ^2 - ١١ =$ صفر

من

$\int_{1}^{جـ} (٢س^2 + ٦ س).\ د س =$ صفر ومنها جـ = ١

بالقسمة التركيبية

$(جـ - ١)(٢ جـ^2 + ١١ جـ + ١١) =$ صفر

ومنها $جـ = \frac{-١١ \pm \sqrt{٣٣}}{4}$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٣٥. بدون حساب قيمة التكامل $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2}$ د س

بين ان $\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2}$ د س $\leq \frac{\pi}{2}$

ج:

$0 \leq جتا^2س \leq 1$

$0 \leq 3جتا^2س \leq 3$

$2 \leq 3جتا^2س+2 \leq 5$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3جتا^2س+2} \leq \frac{1}{2}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5} .دس \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2} دس \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} .دس$

$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3جتا^2س+2}$ دس $\leq \frac{\pi}{2}$

---

٣٦. اذا كان م(س) ، هـ(س)اقترانيين بدائيين لنفس الاقتران ق(س)

$\int_{-1}^{3} (م(س) - هـ(س)) .د س = ١٢$

جد $\int_{0}^{4} ٢س م(س).دس+\int_{4}^{0} ٢س هـ(س).د س$

الحل :

م(س) – هـ(س)= جـ

$\int_{-1}^{3} جـ.د س = ١٢$ ومنها جـ (٣ - - ١)= ١٢

ومنها جـ = ٣

م(س)–هـ(س)=٤ ومنها م(س)=٤+هـ (س)

$\int_{0}^{4} ٢س(٣+هـ (س)) دس+\int_{0}^{4} ٢س هـ(س).د س$

$\int_{0}^{4} ٦س.دس+\int_{0}^{4} ٢س هـ (س)دس- \int_{0}^{4} ٢س هـ(س).د س$

$= \int_{0}^{4} ٦س.دس = ٣س^2 |_{0}^{4} = ٤٨$

---

٣٧. اذا كان

$\int_{1}^{3} [١/٣س+١]$. دس=١٢،اوجد قيمة جـ :جـ<١

الحل

$\int_{1}^{3} ١ .د س + \int_{3}^{6} ٢ .د س+ \int_{6}^{جـ} ٣.د س =$

٢ + ٦ + ٣ (جـ - ٦) = ١٢

٣ جـ = ١٢ – ٨ + ١٨ ومنها جـ = ٣/٢٢

---

٣٨. اذا كان $\int_{أ}^{2} ٢أ .د س= ٦٠$ ، اوجد قيمة أ

الحل :

٢ أ (٢ – أ) = ٦٠ ومنها ٤ أ – ٢ أ ٢ = ٦٠

أ ٢ – ٢ أ – ٣٠ = ٠

ومنها أ = { ، } القانون العام

٣٩.اذا كان $\int_{1}^{4} (٣ – ٤ ق(س)+٦س).$ دس=٣٤ ،

أ) $\int_{1}^{4} ٢هـ (س).$ د س= - ٨ اوجد

ب) $\int_{1}^{4} ق (س) + هـ (س) . د س =$ ،

جـ) $\int_{1}^{2} ق (س) . د س - \int_{2}^{4} ق (س) . د س =$ ،

الحل

$\int_{1}^{4} (٣ – ٤ ق (س) + ٦ س) . د س = ٣٤$ ،

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat
ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٣(٤ – ١) – ٤ $\int_{1}^{4}$ ق (س) . دس + ٣ س^{٢} $|_{1}^{4}$ = ٣٤

٩ – ٤ $\int_{1}^{4}$ ق (س) . دس + (٤٨ – ٣) = ٣٤

$\int_{1}^{4}$ ق (س) . دس = ٥ كذلك

$\int_{1}^{4}$ ٢هـ (س) . د س= – ٨ ومنها $\int_{1}^{4}$ هـ (س) . د س= – ٤

أ) $\int_{1}^{4}$ ق (س) + هـ (س) . د س = ٥ + (-٤) =١

ب) $\int_{1}^{4}$ ٥هـ (س)+٣ . د س = ٥ × ٤ + ٣(١-٤)= ١١

جـ) $\int_{2}^{1}$ ق (س) . د س – $\int_{2}^{4}$ ق (س) . د س =

$\int_{2}^{1}$ ق(س).د س+$\int_{4}^{2}$ق(س). دس=$\int_{4}^{1}$ ق(س).دس=- ٥

---

٤٠. $\int_{-\pi}^{\pi}$ $\sqrt{١ – جتا^{٢} س}$. د س

الحل :

$\int_{-\pi}^{\pi}$ $\sqrt{جا^{٢} س}$. د س

$\int_{-\pi}^{\pi}$ | جا س | . د س

$\int_{-\pi}^{0}$ – جا س. د س + $\int_{0}^{\pi}$ جا س. د س

جتا س |$_{-\pi}^{0}$ – جتا س |$_{0}^{\pi}$ = (١ – -١)- (-١–١)=٢

---

٤١. $\int_{-\pi}^{\pi}$ $\sqrt{١ – جا^{٢} س}$. د س

الحل : تمرين للطالب

٤٢. $\int_{0}^{ب}$ |٢س–٢|. دس=٥ فجد قيمة ب : ب > ١

الحل :

$\int_{0}^{1}$ ٢ – ٢ س . د س + $\int_{1}^{ب}$ ٢ س – ٢. د س = ٥

٢ (١ – ٠) – س^{٢} $|_{0}^{1}$ + س^{٢} $|_{1}^{ب}$ – ٢ (ب – ١)=٥

٢ – (١ – ٠) + (ب^{٢} – ١) – ٢ ب + ٢ = ٥

٢ – ١ + ب^{٢} – ١ – ٢ ب + ٢ = ٥

ب^{٢} – ٢ب – ٣ = ٠

(ب–٣)(ب+١)=٠ ومنها ب = {٣ ، – ١} مرفوضة

٣٧.بدون حساب قيمة التكامل $\int_{1}^{3}$ $\frac{د س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٧}}$

اذا علمت ان م ≤ $\int_{1}^{3}$ $\frac{د س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٧}}$ ≤ ك

اوجد قيمة م ، ك

ج:

ق(س) = (٢س^{٢} + ٧)$^{-١/٢}$

قَ(س) =-١/٢ (٢س^{٢} + ٧)$^{-٣/٢}$ (٤س) = ٠

س = ٠ لكن ليست ضمن الفترة

ق(١)=٣/١ ، ق(٣) = ٥/١

$\frac{١}{٥}$ ≤ $\frac{١}{\sqrt{٢س^{٢} + ٧}}$ ≤ $\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{٥}$ $\int_{1}^{3}$ د س ≤ $\int_{1}^{3}$ $\frac{د س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٧}}$ ≤ $\frac{١}{٣}$ $\int_{1}^{3}$ د س

$\frac{٢}{٥}$ ≤ $\int_{1}^{3}$ $\frac{د س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٧}}$ ≤ $\frac{٢}{٣}$

اذن م = ٥/٢ ، ك = ٣/٢

---

٣٨. بين ان $\int_{0}^{1}$ س^{ن} .دس+$\int_{0}^{1}$ س $^{ن/١}$.دس= ١

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

الاقتران اللوغاريتمي

تذكر:

ص = لو$_{هـ}$ س ⇔ س = هـ^{ص} : هـ ≈ ٢.٧٢

قوانين اللوغاريتمات

- لو$_{هـ}$ أ × ب = لو$_{هـ}$ أ + لو$_{هـ}$ ب
- لو$_{هـ}$ أ / ب = لو$_{هـ}$ أ – لو$_{هـ}$ ب
- لو$_{هـ}$ أ^{ن} = ن لو$_{هـ}$ أ
- لو$_{هـ}$ ١ = صفر
- لو$_{هـ}$ هـ = ١
- لو$_{هـ}$ هـ$^{ق(س)}$ = ق(س)
-

ملاحظات :

- لو$_{هـ}$ س تعني لوغاريتم س الطبيعي
- اللوغاريتم الطبيعي اساسه هـ
- هـ يسمى العدد النيبيري
- قيمة هـ هي العدد الحقيقي التي تجعل المساحة المحصورة بين منحنى١/س ومحور السينات والمستقيم س=١ هي وحدة واحدة والتي هـ ≈ ٢.٧٢
- الاعداد الموجبة لها لوغاريتم اما السالبة والصفر ليس لها لوغاريتم

ملاحظة :

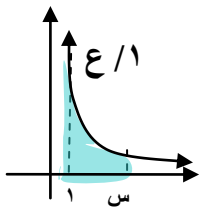
نحن نعلم لو س يكون اللوغاريتم للاساس ١٠ .

لكن اين ما تجد لو اذا لم يحدد الاساس في هذه الدوسية اقصد فيها للاساس هـ

أي لو س اعني فيها لو$_{هـ}$ س: هـ ≈ ٢.٧٢العدد النيبيري .

قاعدة:

$$\int ع^{-١} \cdot دس = \frac{س}{١} \cdot دع = لو_{|هـ|} ع + جـ$$



حيث هـ هي اول عدد الحقيقي التي تجعل المساحة المحصورة بين منحنى١/ ع ومحور السينات والمستقيم س=١ هي وحدة واحدة والتي هـ ≈ ٢.٧٢

بشكل عام

$$\int \frac{أ}{ب\ س + و} \cdot د\ س = \frac{أ}{ب} لو_{|هـ|} ب\ س + و + جـ$$

مثال :

جد الاقتران البدائي للاقتران

$$ق(س) = \frac{١}{س}$$

الحل :

م(س) = لو$_{|هـ|}$ س + جـ

أي

$$\int \frac{\text{ثابت}}{\text{خطي}} \cdot د\ س = \frac{\text{ثابت}}{\text{معامل س}} لو\ |\ المقام\ | + جـ$$

ملاحظـــــــــــــــــــــــة

$$\int \frac{\text{ثابت}}{\text{خطي}} \cdot د\ س$$ دائماً لوغاريتم

بشكـــــــــل عـــــــام

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} د\ س = لو|ق(س)| + جـ$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

نظريـــــــــــــــــــــــــــــة

١. اذا كان ص= لوهـ س ، س > ٠ فان

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{س}$$

الاثبات

$$د ص = \frac{١}{س} د س$$

كامل الطرفين

$$\int \frac{١}{س} د س \leftarrow \int د ص$$

ص = لو|س| + جـ

٢. اذا كان ص = لوهـ ل(س) حيث ل(س) > ٠ فان

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{ل' (س)}{ل(س)}$$

تذكر

$$\int \frac{أ}{ب س + و} د س = \frac{أ}{ب} لوهـ | ب س + و | + جـ$$

امثلة :

١. ص = لو $(س^{٢}+٣)(س^{٣}+٥س)^{١٨}$ ، اوجد صَ

الحل :

ص = لو $(س^{٢}+٣)$ + ١٨لو$(س^{٣}+٥س)$

$$صَ = \frac{٢س}{س^{٢}+٣} + ١٨ \times \frac{٣س^{٢}+٥}{س^{٣}+٥س}$$

٢. اذا كان

$$ص = \frac{لو\ س}{س} \quad ، \text{ اوجد صَ}$$

الحل :

$$صَ = \frac{س \times ١/س - لو\ س \times ١}{س^{٢}}$$

$$صَ = \frac{١ - لو\ س}{س^{٢}}$$

---

٣. ص = لو $\sqrt{س^{٣} + ٣جتا٢س}$ ، اوجد صَ

الحل : واجب

---

٤. $$ص = لوهـ \frac{جتا^{٧}س}{\sqrt[٣]{س^{٣}+٣}}$$

قاعـــــــــــــدة

$$ص = لوهـ ق(س) = ق(س)$$

---

٥. ص = ظتاس لوهـ ، اوجد صَ

الحل :

ص = ظتاس

صَ = - قتا^{٢}س

تذكر

$$\int \frac{\text{ثابت خطي}}{\text{معامل س}} د س = \frac{\text{ثابت}}{\text{معامل س}} لو | المقام | + جـ$$

امثلة :

١. $$\int \frac{٣}{س} د س = ٣لو | س | + جـ$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢. $\int \frac{٣}{٤ - ٢س} \, د س = \frac{-٣}{٢}$ لو |٤ - ٢س| + جـ

٣. $\int \frac{٥}{٣س + ٤} \, د س = \frac{٥}{٣}$ لو|٣س+٤|+جـ

الاقتـــــــران الأســـــــي

لو$_أ$ ص = س : ص > ٠ ← $أ^{س}$ = ص : أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س ، ص ∈ ح

نظرية

اذا كان ص = $هـ^{س}$ فان : هـ ≈ ٢.٧

$$\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}$$

البرهان

ص = $هـ^{س}$

باخذ لو للطرفين للاساس هـ

لو ص = لو $هـ^{س}$

لو ص = س لو هـ لكن لو$_{هـ}$ هـ = ١

لو ص = لو س

باخذ المشتقة للطرفين

$$\frac{١}{ص} \times \frac{د ص}{د س} = ١$$

$$\frac{د ص}{د س} = ص = هـ^{س}$$

بشكـــــــل عـــــــام

اذا كان ص = $هـ^{ق(س)}$ فان

$$\frac{د ص}{د س} = قَ(س) \, هـ^{ق(س)}$$

امثلة :

١. ص = لو$_{هـ}$ $س^{٣}$ + $هـ^{ظاس}$ اوجد صَ

الحل :

ص = ٣لو$_{هـ}$ س + $هـ^{ظاس}$ اوجد صَ

صَ = ٣/س + قا^{٢}س $هـ^{ظاس}$

٢. ص = $هـ^{س^{٢}}$ لو$_{هـ}$ س اوجد صَ

الحل :

صَ = $هـ^{س^{٢}}$ × ١/ س + لو$_{هـ}$ س × ٢س × $هـ^{س^{٢}}$

صَ = ١/ س $هـ^{س^{٢}}$ + ٢س $هـ^{س^{٢}}$ لو س

٣. اذا كان ل(س) = $هـ^{س^{٣}}$ هو الاقتران البدائي للاقتران ق جد قَ (١)

الحل :

ق(س) = لَ(س)

ق(س) = ٣ $س^{٢}$ $هـ^{س^{٣}}$

قَ(س) = ٣$س^{٢}$ × ٣$س^{٢}$ $هـ^{س^{٣}}$ + $هـ^{س^{٣}}$ × ٦ س

قَ(١) = ٩(١)^{٤} $هـ^{(١)^{٣}}$ + ٦(١) $هـ^{(١)^{٣}}$ = ١٥ هـ

قوانين مهمة

١. لو$_{هـ}$ $هـ^{س}$ = س لو$_{هـ}$ هـ = س

٢. $هـ^{لو س}$ = س

٣. لو$_{هـ}$ $هـ^{ق(س)}$ = ق (س)

٤. لو $هـ^{ق(س)}$ = ق (س)

٤. اذا كان ص = لو$_{هـ}$ (جا^{٢}س + جتا س) ،اوجد صَ

٥. ص = $هـ^{٧}$ اوجد صَ

الحل :

صَ = ٠

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٦. ص = س هـ^{س} اوجد صَ

الحل :

صَ = س هـ^{س} + هـ^{س} × ١

---

٧. ص = جاهـ^{س} اوجد صَ

الحل :

صَ = جتا هـ^{س} × هـ^{س}

---

٨. ص = هـ^{جاس} اوجد صَ

الحل :

صَ = جتا س هـ^{جاس}

---

٩. ص = لوهـ هـ^{س} ، اوجدصَ

الحل :

ص = س

صَ = ١

قاعـــــــــــــــــدة :

اذا كان ص = أ$^{ق (س)}$ فان

صَ = قَ (س) أ$^{ق (س)}$ لو أ

---

١٠. اذا كان ص = ٤^{س} ، اوجد صَ

الحل :

صَ = ٤^{س} لوهـ ٤

---

١١. اذا كان ص = س^{س} ، اوجد صَ

الحل :

خذ اللو للطرفين

لوهـ ص = لوهـس^{س}

لوهـ ص = س لوهـس

١/ص صَ = س × ١/ س + لوهـس

صَ = (١ + لوهـ س) ص

صَ = (١ + لوهـ س) س^{س}

---

١٢. ص = هـ$^{٣ لوجاس}$ ، اوجد صَ

الحل :

$$صَ = ٣ \times \frac{جتا\ س}{هـ^{٣\ لوجاس}}$$

$$صَ = ٣\ ظتاس\ هـ^{٣\ لوجاس}$$

---

١٣. اذا كان

ص = ٤^{ظاس} ، اوجد صَ

الحل :

صَ = قا^{٢} س× ٤ ^{ظاس} لوهـ ٤

---

١٤. اذا كان

ص = ٧^{٧} ، اوجد صَ

الحل : صَ = صفر

---

١٥. ص = هـ^{قاس} ، اوجد صَ

---

١٦. ص=هـ^{س}(جاس+جتاس)، اوجد صَ

---

١٧. اذا كان ص=هـ$^{أ س}$ فجد قيمة أ التي تحقق

صً _ ٥ صَ + ٦ ص = ٠

الحل :

صَ = أ^{أس} هـ

صً = أ^{٢} هـ^{أس}

أ^{٢} هـ$^{أ س}$ ـ ٥ أهـ$^{أ س}$ + ٦ هـ$^{أ س}$ = ٠

هـ^{أس} (أ^{٢} _ ٥ أ + ٦) = ٠

هـ^{أس} ≠ ٠ لكن أ^{٢} _ ٥ أ + ٦= ٠

(أ _ ٣)(أ _ ٢) = ٠ ومنها أ = ٣ ، ٢

---

١٨. س هـ^{ص} + جا س = ص^{٢} ، وجد صَ

---

١٩. ص = جا هـ^{س} ، اوجد صَ

---

٢٠. ص = هـ$^{٤ س^{٢}}$ ، اوجد صَ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢١. اذا كان ص = لو$_{هـ}$ جا س ، اوجد صَ

٢٢. اذا كان ص = أ $^{ب س}$: أ ، ب ∈ ح وكان صً = ص فما قيمة أ

ج: ب = ± ١ ، قيمة أ ∈ ح – {٠}

قاعـــــــــــــــــدة

$$\int هـ^{أس+ب} . د س = \frac{هـ^{أس+ب}}{أ} + جـ$$

امثلة :

١. $\int هـ^{٢س} د س = \frac{هـ^{٢س}}{٢} + جـ$

٢. $\int \frac{١}{هـ^{س}} . د س = \int هـ^{-س} . د س = \int هـ^{-١/٢ س} . د س$
$= -٢ هـ^{-١/٢ س} + جـ$

٣. $\int \frac{١}{\sqrt{هـ^{س}}} . د س$

الحل :
$= \int هـ^{-١/٢ س} . د س = -٢ هـ^{-١/٢ س} + جـ$

٤. $\int هـ^{-٤س} . د س = هـ^{-٤س} + جـ$

٥. $\int ٢^{س} . د س = \int هـ^{س لو ٢} . د س = \int هـ^{س لو ٢} . دس$
$= \frac{هـ^{س لو ٢}}{لو هـ ٢} + جـ$

٦. $\int ٢ س هـ^{٣س} . د س$

الحل :
$\int (٢ هـ^{٣})^{س} . د س$

ويمكن $٢^{س}$
$\int هـ^{لو هـ ٢ × ٣س} . د س = \int هـ^{(س لو هـ ٢ + ٣س)} . د س$

التكامـــــــــل بالتعويـــــــــض

اذا كان داخل التكامل حاصل ضرب اقترانين احداهما ناتج من مشتقة الاخر أو على الاقل الجزء المتغير من المشتقة فاننا نلجا الي التعويض وهناك ثلاث حالات

١. اقتران × اقتران احداهما مرفوع لقوة
٢. اقتران × اقتران دائري او ما يعامل معاملة الدائري وهنا تكون الزاوية ليست خطية
٣. قسمة اقترانين حيث قوة المقام (١) ومشتقة المقام موجودة في البسط

الحالـــــــــــة الاولـــــــــــى :

اقتران × اقتران احداهما مرفوع لقوة
وهنا نفرض ما داخل القوس بـ ص

امثلة :

١. $\int س(س^{٢}+٥)^{١٨} . د س$

الحل :
نفرض ص = $س^{٢} + ٥$

$د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$\int س \times ص^{١٨} \frac{د ص}{٢ س}$

$= \frac{١}{٢} \int ص^{١٨} . د ص = \frac{ص^{١٩}}{٣٨} + جـ$

$= \frac{(س^{٢} + ٥)^{١٩}}{٣٨} + جـ$

لاحظ حاصل ضرب اقترانين احداهما مرفوع لقوة عالية

٢. $\int جا^{٥} س \, جتا س . د س$

الحل :
نفرض ص = جا س

$د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$\int جتا س \, ص^{٥} \frac{د ص}{جتا س}$

$\int ص^{٥} . د ص = \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= \frac{جا^{٦} س}{٦} + جـ$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣. $\int_{0}^{1} \frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٦ س + ٩}}$. دس

الحل :

$\int (س^{٢} + ٦ س + ٩)^{-١/٢} . (س + ٣)$ دس

نفرض ص = $س^{٢} + ٦س + ٩$

عندما س = ١ فان ص = ٤

عندما س = ٠ فان ص = ٣

$د س = \frac{د ص}{٢ س + ٦}$

$= \int_{٣}^{٤} (س + ٣) ص^{-١/٢} \frac{د ص}{٢(س + ٣)}$

$= \int_{٣}^{٤} ١/٢ ص^{-١/٢} . د ص = ص^{١/٢} |_{٣}^{٤}$

$= \sqrt{٤} - \sqrt{٣}$

---

٤. $\int ظا^{٣} س \, قا^{٢} س$. دس

الحل :

نفرض ص = ظا س

$د س = \frac{د ص}{قا^{٢} س}$

$\int ص^{٣} قا^{٢} س \frac{د ص}{قا^{٢} س}$

$\int ص^{٣} . د ص = \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{ظا^{٤} س}{٤} + جـ$

الشيخ القاطع اذا كان اسه زوجي نفرض ص = ظا س بدون تفكير اما اذا كان فردي فنفرض ص = قا س بدون تفكير لاحظ السؤال قا س اسه زوجي فنفرض ص= ظا س

---

٥. $\int (س + جاس) \sqrt{\frac{١}{٢} س^{٢} - جتاس}$ دس

الحل :واجب

---

٦. $\int_{٠}^{\pi/٢} جا^{٣} س \, جتا س$. دس

الحل :

$\int جا^{ن} س \, جتا^{م} س$. د س
←اذا كانت احدى الاسس(١) نفرض الاخرى ص

نفرض ص = جا س

$د س = \frac{د ص}{جتا س}$

عندما س = $\pi/٢$ فان ص = ١

عندما س = ٠ فان ص = ٠

$\int_{٠}^{١} \frac{ص^{٣} جتا س \, د ص}{جتا س}$

$= \int_{٠}^{١} ص^{٣} . د ص$

$= \frac{ص^{٤}}{٤} |_{٠}^{١} = \frac{١}{٤}$

---

٧. $\int \frac{(\sqrt{س} + ٥)^{٩}}{\sqrt{س}}$. دس

الحل :

نفرض ص = $\sqrt{س} + ٥$

$د ص = \frac{١}{٢\sqrt{س}} د س$

$\int \frac{ص^{٩}}{\sqrt{س}} \times ٢\sqrt{س} . د ص$

$= \frac{٢ ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{٢ (\sqrt{س} + ٥)^{١٠}}{١٠} + جـ$

لاحظ حاصل ضرب اقترانين احداهما مرفوع لقوة عالية علماً انه اذا كان $جا^{م} س \, جتا^{ن} س$ وكان م أو ن يساوي واحد نفرض ما داخل صاحب الاس العالي ص بدون تفكير ولا تنسى بدون الاس أي ص=جاس

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية

٨. $\int (س + هـ^{س})^{٥}(١ + هـ^{س}).$ د س

الحل :

ص= س + $هـ^{س}$

$$د س = \frac{د ص}{١ + هـ^{س}}$$

$$\int ص^{٥}(١ + هـ^{س}).\frac{د ص}{١ + هـ^{س}}$$

$$\int ص^{٥}.د ص = \frac{١}{٦} ص^{٦} + جـ$$

$$= \frac{١}{٦}(١ + هـ^{س})^{٦} + جـ$$

---

٩ . $\int \frac{١}{س}(١ + لو_{هـ} س)^{٢٠٠}.$ د س

الحل :

ص= ١ + لو $_{هـ}$ س

د س = س. د ص

$$\int \frac{١}{س} \times ص^{٢٠٠} \times س \, د ص$$

$$= \int ص^{٢٠٠}.د ص$$

$$= \frac{١}{٢٠١} ص^{٢٠١} + جـ$$

$$= \frac{١}{٢٠١}(١ + لو_{هـ} س)^{٢٠١} + جـ$$

---

١٠. $\int \frac{س \, جا \, س^{٢}}{جتا^{٢} س^{٢}}$. دس

---

١١ . $\int \frac{لو_{هـ} س}{س}$. د س

الحل :

ص= لو $_{هـ}$ س

د س = س. د ص

$$\int \frac{١}{س} \times ص \times س \, د ص$$

$$= \int ص.د ص$$

$$= \frac{١}{٢} ص^{٢} + جـ$$

$$= \frac{١}{٢}(لو_{هـ} س)^{٢} + جـ$$

---

١٢. $\int \frac{جا \, س \, جتا س}{(١ - ٢ \, جا^{٢} س)^{٣}}$. دس

الحل :

نفرض ص = ١ - ٢جا^{٢} س

د ص

د س = $\frac{}{-٤ جا \, س \, جتا \, س}$

$$\int \frac{جا \, س \, جتا \, س}{ص^{٣}} \times \frac{د ص}{-٤ جا \, س \, جتا \, س}$$

$$\int \frac{١}{-٤ ص^{٣}} د ص$$

$$\int \frac{١}{-٤} ص^{-٣}.د ص$$

$$= \frac{١}{٨ ص^{٢}} + جـ$$

$$= \frac{١}{٨(١ - ٢ \, جا^{٢} س)^{٢}} + جـ$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٣. $\int \frac{\text{جا س جتاس}}{\text{١ + جتا}^{٢}\text{ س}}$. دس

الحل : ص = ١ + جتا ٢ س

---

١٤. $\int$ قتا$^{-٦}$ س ظتا س . د س

---

١٥. $\int$ قا^{٢}س ظا س . د س

حـــــــالات خاصـــــــــــة

١. $\int$ جتا^{٣} س جا^{٢} س . دس

الحل :

نفرض ص = جا س

$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \text{جتا}^{٣}\text{ س ص}^{٢} \frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \text{جتا}^{٢}\text{ س ص}^{٢}\ \text{د ص}$$

لكن جتا^{٢} س = ١ – جا^{٢} س

$$= \int \text{ص}^{٢}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\ \text{د ص}$$

$$= \int \text{ص}^{٢}(١ - \text{ص}^{٢})\ \text{د ص}$$

$$= \int (\text{ص}^{٢} - \text{ص}^{٤})\ \text{د ص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} - \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣} - \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$$

لاحظ حاصل ضرب جا^{م} س جتا^{ن} س وكان احداهما فردي والاخر زوجي نفرض ما داخل الزوجي بدون تفكير

---

٢. $\int$ جتا^{٣} ٢ س جا^{٣} ٢س.دس

الحل :

نفرض ص = جا س

---

٣. $\int$ جا^{٥} س . دس =

الحل :

$\int$ جا س جا^{٤}س . د س

$\int$ جا س (جا^{٢}س)^{٢} . د س

$\int$ جا س (١ - جتا^{٢}س)^{٢} . د س

نفرض ص = جتا س

$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{- جا س}}$$

$$\int \text{جا س}\ (١ - \text{ص}^{٢})^{٢}\ \frac{\text{د ص}}{\text{- جا س}}$$

لاحظ حاصل ضرب جا^{م} س جتا^{ن} س وكان الاثنين اسهما فردي نفرض ما داخل ايٍّ منهما ويفضل الاعلى اس

جتـــا^{ن} س وَ ن فردي دائماً يفصل على الشكل التالي

جا س جا$^{ن-١}$ س

مثال

جا^{٥} س = جا س جا^{٤} س

جتا^{٧} س = جتا س جتا^{٦} س

= - $\int$ ١ – ٢ ص^{٢} + ص^{٤} . د ص

= - ص + ٢ ص^{٣}/٣ - ص^{٥} / ٥ + جـ

= - جتاس+٢جتا^{٣} س/٣ - جتا^{٥}س/٥ + جـ

---

٤. $\int$ قتا^{٣} س ظتا^{٣} س . دس

الحل :

$\int$ قتا^{ن} س ظتا^{م} س . د س

←اذا كانت ن زوجية نفرض ص = ظتا س

←اذا كانت ن ، م فرديتان نفرض اي منهم← ص = قتا س

نفرض ص = قتا س

$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{- قتا س ظتا س}}$$

$$\int \text{ص}^{٣}\ \text{ظتا}^{٣}\text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{- قتا س ظتا س}}$$

$$\int \text{ص}^{٣}\ \text{ظتا}^{٢}\text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{- قتا س}}$$

$$\int \text{ص}^{٣}\ (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\ \frac{\text{د ص}}{\text{- قتا س}}$$

$$\int \text{ص}^{٣}\ (\text{ص}^{٢} - ١)\ \frac{\text{د ص}}{\text{- ص}}$$ اكمل الحل

---

٥. $\int$ قا^{٥}س ظاس.دس

الحل :

الشيخ القاطع لاحظ اسه فردي نفرض ص = قا س بدون تفكير

$\int$ قا^{٥} س ظا س دس = $\int$ قا^{٤}س قا س ظا س دس

نفرض ص = قا س

$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$$

$$= \int \text{قا}^{٤}\text{س قا س ظا س}\ \text{دس}\ \frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$$

$$\int \text{ص}^{٤}\ \text{قا س ظا س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{قا س ظا س}}$$

$$\int \text{ص}^{٤}\ .\ \text{د ص} = \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٦. $\int$ قا^{٥} س جا س دس

الحل :

$\int$ قا^{٥} س جا س دس $= \int$ جتا$^{-٥}$ س جا س دس

نفرض ص = جتا س

$$د س = \frac{د ص}{- جا س}$$

$$\int ص^{-٥} جا س \frac{د ص}{- جا س}$$

$$= - \int ص^{-٥} . د ص = \frac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ$$

$$= \frac{١}{- ٤ جتا^{٤} س} + جـ$$

لاحظ حاصل ضرب اقترانين احداهما مرفوع لقوة عالية والاخر اسه واحد

---

٧ $\int$ $\frac{د س}{(جا س + جتاس)^{٢}}$

الحل :

$\int$ $\frac{د س}{جا^{٢}س + ٢ جاس جتا س + جتا^{٢}س}$

$\int$ $\frac{د س}{١ + جا٢س}$ نضرب بالمرافق

لاحظ الزاوية ليست خطية ولذلك نفرض الزاوية = ص بدون تفكير

---

٨. $\int$ $\frac{}{\sqrt{جا٢س}}$. دس

جتا^{٢}س – جا^{٢}س

---

٩. اذا كان م(س) بدائي للاقتران ق(س) جد

أم(س)ق(س).دس

بشكل عام

$$\int \frac{(ق(س))^{و} \times ق(س)}{(ق(س))^{و+١}} . دس = \frac{}{و+١}$$

الحالة الثانية :

اقتران × اقتران دائري او ما يعامل معاملة الدائر والزاوية ليست خطية

---

١. $\int$ (س + ٣) جتا (س^{٢} + ٦ س + ٥) . دس

الحل :

نفرض ص = س^{٢} + ٦ س + ٥

$$د س = \frac{د ص}{٢ س + ٦}$$

$$= \int (س + ٣) جتا ص \frac{د ص}{٢(س + ٣)}$$

$$= \int ٢/١ جتا ص . د ص = ٢/١ جا ص + جـ$$

$$= ٢/١ جا (س^{٢} + ٦ س + ٥) + جـ$$

لاحظ الزاوية ليست خطية ولذلك نفرض الزاوية = ص بدون تفكير

---

٢. $\int$ $\frac{١}{\sqrt{س+٥}}$ جا $\sqrt{س+٥}$. دس

الحل :

نفرض ص = $\sqrt{س + ٥}$

$$د ص = \frac{١ \ د س}{٢\sqrt{س + ٥}}$$

$$\int \frac{جا ص}{ص} \times ٢ ص . د ص$$

$$= ٢ جا ص . د ص = - ٢ جتا ص + جـ$$

$$= - ٢ جتا \sqrt{س + ٥} + جـ$$

لاحظ الزاوية ليست خطية ولذلك نفرض الزاوية = ص بدون تفكير

---

٣ . $\int$ $\frac{١}{\sqrt{س}}$ × قتا^{٢} $\sqrt{س}$. دس

الحل :

نفرض ص = $\sqrt{س}$

ص^{٢} = س

٢ ص .د ص = د س

$$\int \frac{قتا^{٢} ص}{ص} \times ٢ ص . د ص$$

$$٢ \int قتا^{٢} ص . د ص = - ٢ ظتا ص + جـ$$

$$= - ٢ ظتا \sqrt{س} + جـ$$

اذا كان الاقتران على صورة ق(هـ (س))فتعامل معاملة الاقترانات الدائرية ونفرض هـ(س) = ص لاحظ هـ (س) ليس خطي ولذلك نفرض هـ(س) = ص بدون تفكير

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٤. $\int_{0}^{1} ١٠ س قَ(س^{٢}+٥)$. دس

الحل :

نفرض ص = $س^{٢} + ٥$

$د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$= \int ١٠ س قَ(ص) \frac{د ص}{٢ س}$

$= \int ٥ قَ(ص) . د ص$

$= ٥ ق(ص) + جـ$

$= ٥ ق(س^{٢} + ٥) + جـ$

---

٥. اذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س-١)$. دس=٦جد $\int_{١}^{٣} ٢ق(س+٢)+٤س$.دس

الحل :

$\int_{-١}^{٠} ٢ ق(س + ٢) . د س + \int_{١}^{٠} ٤ س$. دس

نفرض ص= س+ ٢ ومنها د س = د ص

عندما س= ٠ فان ص= ٢، عندما س= -١ فان ص= ١

$= \int_{١}^{٢} ٢ ق(ص) . د ص + ٢س^{٢} |_{-١}^{٠}$

$= \int_{١}^{٢} ٢ ق(ص) . د ص + ٢س^{٢} |_{-١}^{٠}$

لكن $\int_{١}^{٢} ق(س-١)$. دس= ٦ومنها $\int_{١}^{٢} ق(س)$. دس = ٦

$= \int_{١}^{٢} ٢ق(ص) . د ص + ٢س^{٢} |_{-١}^{٠} = ٦ \times ٢ + (٠ - ٢) = ١٠$

---

٦. $\int قَ(٣- س)$. دس = - ق(٣- س) + جـ

---

٧. $\int س ظا س^{٢} قا س^{٢}$.د س

الحل :

ص = $س^{٢}$

$= ١/٢ قا س^{٢} + جـ$

٨. $\int \frac{س جتا \sqrt{س^{٢} + ١}}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$. دس

---

٩. $\int قا^{٢}س هـ^{ظاس}$. د س

الحل :

نفرض ص = ظاس

$د س = \frac{د ص}{قا^{٢}س}$

$= \int قا^{٢}س هـ^{ص} . \frac{د ص}{قا^{٢}س}$

$= \int هـ^{ص} . د ص = هـ^{ص} + جـ = هـ^{ظاس} + جـ$

---

١٠. $\int \frac{قَ(\sqrt{س})}{\sqrt{س}}$. دس

---

١١. $\int \frac{هـ^{\sqrt{ص}}}{\sqrt{س}}$. دس

---

١٢. $\int_{س}^{١} جا(لوهـ س)$. دس

لاحظ الزاوية ليست خطية ولذلك نفرض الزاوية = ص بدون تفكير

لا تنسـى :

$\int جا(أ س + ب)$. دس = $\frac{-جتا(أ س + ب)}{أ}$

ملاحظة : ما ينطبق على جا ينطبق على جميع الاقترانات الدائرية

---

١٣. $\int جا(٦ س + ٥)$. دس

الحل :

$= -١/٦ جتا(٦ س + ٥) + جـ$

---

١٤. $\int س هـ^{س^{٢}+١}$. د س

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

الحالة الثالثة :

قسمة اقترانين حيث قوة المقام (١) ومشتقة المقام موجودة في البسط

١. $\int \frac{٤ س^{٣}}{س^{٤} + ١٢}$. د س = لو| $س^{٤} + ١٢$ | + جـ

الاثبات :

نفرض ص = $س^{٤} + ١٢$

$د ص = ٤ س^{٣}$ د س

$د س = \frac{د ص}{٤ س^{٣}}$

$\int \frac{٤ س^{٣}}{ص} \times \frac{١}{٤ س^{٣}}$. د ص = $\int \frac{١}{ص}$. د ص

= لو| ص | + جـ

= لو| $س^{٤} + ١٢$ | + جـ

قوة المقام ١
مشتقة المقام موجودة في البسط -----
تعويض لو

٢. $\int \frac{جا ٢ س}{١ + جا^{٢} س}$. د س

الحل :

$\int \frac{٢ جاس جتاس}{١ + جا^{٢} س}$. د س =

ص = $١ + جا^{٢} س$

$د ص = ٢ جا س جتاس . د س$

$د س = \frac{١}{٢ جا س جتاس}$. دص

$\int \frac{٢ جاس جتاس}{ص} \times \frac{١}{٢جاس جتا س}$. د ص =

$\int \frac{١}{ص}$. د ص = لو| ص | + جـ

= لو| $١ + جا^{٢} س$ | + جـ

٣ . $\int \frac{١ + ظتا^{٢} س}{ظتا س}$. د س

الحل :

$\int \frac{١ + ظتا^{٢} س}{ظتا س}$. د س = $\int \frac{١ + قتا^{٢} س - ١}{ظتا س}$. د س

= - لو | ظتا س | + جـ ؟ ؟ ؟

بشكل عام

$\int \frac{ق' (س)}{ق (س)}$ د س= لو| ق(س) | + جـ

٤. $\int \frac{جا س}{جتا س}$. د س = - لو| جتا س | + جـ

٥. $\int$ جا س قا س . د س = - لو| جتا س | + جـ

٦. $\int$ ظا س . د س = - لو| جتا س | + جـ ؟؟؟؟؟

٧. $\int \frac{جتا س}{جا س}$. د س= لو| جا س | + جـ

٨. $\int$ ظتا س. د س = لو| جا س | + جـ ؟؟؟؟؟

٩. اثبت $\int$ قتا س. د س = لو | قتا س – ظتا س | + جـ

١٠. اثبت $\int$ قا س. د س = لو | قا س + ظا س | + جـ

١١. $\int \frac{جتا ٢ س}{جتا س + جا س - ١}$. د س

الحل : ملاحظة الزوايا ليست متشابهه

$\int \frac{جتا^{٢} س - جا^{٢} س}{جتا س + جا س - ١}$. د س اكمل الحل .....

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد

لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

١٢. ∫ جتا٢س جتاس. د س
الحل : تمرين للطالب

---

١٣. ∫ ظا٣س. د س
الحل : تمرين للطالب

---

١٤. ∫ $\frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}$. د س = لو|١ + $هـ^{س}$ | + جـ

قوة المقام ١
مشتقة المقام موجودة في البسط ----- تعويض لو

الاثبات :
نفرض ص = ١ + $هـ^{س}$
د ص = $هـ^{س}$ د س
∫ $\frac{هـ^{س}}{ص}$ × $\frac{د س}{هـ^{س}}$ = ∫ $\frac{١}{ص}$. د ص
= لو$_{هـ}$ | ١ + $هـ^{س}$ | + جـ

---

١٥. ∫ $\frac{١}{س \text{ لو } س}$. د س
الحل :
نفرض ص = لو س
د ص = ١ / س . د س ومنها د س = س . د ص
∫ $\frac{١}{س ص}$ × س . د ص = لو| ص| + جـ
= لو| لوس| + جـ

---

١٦. ∫ $\frac{١}{\sqrt{س}\ (\sqrt{س} + ١)}$. دس

---

١٧. ∫ $\frac{٣ س^{٢} + جتا س}{س^{٣} + جا س}$ د س= لو|س^{٣}+جاس|+ جـ

---

١٨. ∫(ظاس+ ظتاس).دس=- لو|جتاس|+لو|جاس|+جـ
= لو | ظاس | + جـ ؟؟؟؟

١٩. ∫ $\frac{جا ٢ س}{جتا^{٣} س}$. د س
الحل :
∫ $\frac{٢ \text{ جاس جتاس}}{جتا^{٣} س}$. د س =
∫ $\frac{٢ \text{ جاس}}{جتا^{٢} س}$. د س =
ص = جتا س
د ص = - جا س . دس
∫ $\frac{٢ جاس}{ص^{٢}}$ × $\frac{١}{- جاس}$. د ص =
∫ $\frac{٢}{ص^{٢}}$. د ص = ٢ص$^{-١}$ + جـ
= $\frac{٢}{جتا س}$ + جـ

---

٢٠. ∫ $\frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ - س \sqrt{س}}$. د س
الحل:
نفرض ص^{٣} = س
٣ ص^{٢} .دص = د س
∫ $\frac{ص}{٥ - ص^{٣} \times ص}$ × ٣ ص^{٢} .دص =
∫ $\frac{٣ ص^{٣}}{٥ - ص^{٤}}$.دص = - $\frac{٣}{٤}$ لو (٥ - ص^{٤}) + جـ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٢١.اثبت ان ∫ ظتا (لوس) / س دس= لو|جا لوس|+جـ

الحل :
ص = لو س ومنها د س = س دص

∫ ظتا ص / س × س دص = ∫ ظتا ص .د ص

∫ جتا ص / جا ص دص

= لو |جا ص | + جـ = لو |جا لوس | + جـ

حـــــــــالات خاصـــــــــــة

أ- خطي مرفوع لقوة

∫ (أ س + ب)^و دس = (أ س + ب)^(و+١) / (أ) × (و + ١) + جـ

١. ∫ √(٥ س + ٤) . دس

الحل :
نفرض ص = ٥ س + ٤
د ص = ٥ د س
∫ ص^(١/٢) × ٥/١ . د ص = ٥/١ ∫ ص^(١/٢) . د ص
= ٥/١ × ٣/٢ ص^(٣/٢) + جـ
= ١٥/٢ √((٥ س + ٤)^٣) + جـ

٢. ∫ ١٥ ص^١٦ (٣/ص^٥ − ٥/ص) ^٨ . د ص

الحل : ص^١٦ = (ص^٢)^٨

٣. ∫ (٢ س − ٥)^٧ دس = (٢س−٥)^٨ / ٢ × ٨ + جـ

٤. ∫ √(٤ − س) . دس =
= ∫(٤- ٢س)^(١/٢) . د س
= ٣/١- (٤- ٢س)^٣ + جـ

٥. ∫ (س^٢+٢س+١)^٨ . دس= ∫ (س+١)^١٦ . دس

٦. ∫ ٣ / (س^٢-٦س+٩) . دس

ج:

ب. دمج قوى

١. ∫ (٢ س + ١)^٦ / س^٨ . دس

ج:

∫ (٢ س + ١)^٦ / س^٢ س^٦ . دس

∫ ١/س^٢ (٢ + ١/س)^٦ . دس

ص = ٢ + ١/س

يكمل الحل

٢. ∫ √((س + ١)^٧ / س^١١) . دس

جـ. متغير + ثابت

١. ∫ س^٢ √(٣ س − ١) . دس
نفرض ص = ٣ س -١
د س = د ص
= ∫ س^٢ ص^(٢/١) د ص
لكن س^٢ = (ص+١)^٢
= ∫ (ص+١)^٢ ص^(٣/١) د ص
= ∫ (ص^٢ +٢ص + ١)ص^(٣/١) د ص
= ∫ (ص^(٣/٧) +٢ص^(٣/٤) + ص^(٣/١)) د ص
= ٣/١٠ ص^(٣/١٠) + ٦/٧ص^(٣/٧) + ٣/٤ ص^(٣/٤) + جـ
نعوض ص بقيمتها

٢. ∫ س^٥ √(س^٣+ ١) . دس

٣ . ∫س^٣ √(س^٢ + ١) . دس

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٤ . $\int \sqrt{٣س^{٤}-٥س^{٢}}$.دس

ج:

$\int$ س $\sqrt{٣ س^{٢} - ٥}$. دس

ص=٣س^{٢}–٥.

---

٥. $\int ١٥ ص^{١٦} (\frac{٣}{ص^{٢}} - \frac{٥}{ص})^{٨}$. د ص

الحل : تمرين للطالب

---

٦. $\int ٣ \sqrt{٢س^{٥}-٥س^{٣}}$. دس

ج:

$\int ٣ \sqrt{س^{٣}(٢س^{٢} - ٥)}$. دس

ص = ٢س^{٢} – ٥.

يكمل الحل

٧.

$\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{٢ س + ١}{س}}$. دس

ج:

$\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{٢ + \frac{١}{س}}$. دس

ص = ٢ + $\frac{١}{س}$

---

٨. $\int \sqrt[٣]{\frac{س - س^{٣}}{س^{٤}}}$. دس

ج:

$\int \frac{١}{س^{٣}} \sqrt{١ - \frac{١}{س^{٢}}}$. دس

ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ - ١

٩. $\int \frac{\sqrt{س^{٤} - س^{٢}}}{س^{٥}}$. دس

ج:

$\int \frac{١}{س^{٣}} \sqrt{١ - \frac{١}{س^{٢}}}$. دس

ص = ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$

---

١٠. $\int (س^{٥} - ٣ س)^{٣}$. دس

ج:

$\int (س(س^{٤} - ٣))^{٣}$. دس

$\int س^{٣}(س^{٤} - ٣)^{٣}$. دس

ص = س^{٤} – ٣

يكمل الحل

تمـــــــــرين عـــــــــام ٢

١. $\int \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٧}}$. دس

ج:

$\int \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٢} س^{٥}}$. دس

$\int \frac{١}{س^{٢}} (١ + \frac{١}{س})^{٥}$. دس

ص = ١ + $\frac{١}{س}$

يكمل الحل

٢.اذا كان م (س) اقتران بدائي للاقتران ق في الفترة [٣ ، ٥] اوجد

$\int_{١}^{٢} (ق(٢س+ ١) + ٣).$ دس

اذا كان م (٣) = ٢ ، م (٥) = ٩

ج: ٢/١٣

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣. اذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\,د س = ٤$ ، فما قيمة $\int_{0}^{2} (ق(س+١) - ٢س + ٣)\,د س$

٤. اذا كان $\int_{2}^{7} (ق(٢س - ٢)\,د س = ١٠$ ، فما قيمة $\int_{1}^{11} (ق(س+١) + ٣)\,د س$

ج: ٥٠

٥. $\int س^{٣}(س^{٢}-١)^{٣}(س^{٢}+١)^{٣}\,د س$

الحل :

$\int س^{٣}((س^{٢}-١)(س^{٢}+١))^{٣}\,د س$

٦. $\int س^{١٠}(س^{٢} + \frac{٢}{س})^{٥}\,د س$

٧. $\int \frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^{٥}}}\,د س$

٨. $\int \sqrt{\frac{٢س+١}{س^{٥}}}\,د س$

٩. $\int \frac{ص^{٣}}{(ص^{٢}+١)^{٧}}\,د ص$

١٠. $\int \frac{١}{س^{٤}} \sqrt[٣]{س - س^{٣}}\,د س$

١١. $\int جتا س\ جا^{٢}(جاس)\,د س$

١٢. $\int ٣\ جا س\ جتا^{٢}(جتا س)\,د س$

١٣. $\int \frac{س - ١}{(س^{٢} - ٢س + ٣)^{٣}}\,د س$

١٤. اذا كان الاقتران ق (س) متصلاً على ح اثبت ان

$\int_{أ}^{٢أ} ق(س)\,د س = \int_{0}^{أ} ق(٢أ - س)\,د س$

١٥. $\int قا^{٢} س\ ظا^{٤} س\,د س$

الحل :

نفرض ص = ظاس

$د س = \frac{د ص}{قا^{٢} س}$

$\int ص^{٤} قا^{٢} س \frac{د ص}{قا^{٢} س}$

$\int ص^{٤}\,د ص = \frac{ص^{٥}}{٥} + جـ$

$= \frac{ظا^{٥} س}{٥} + جـ$

١٦. $\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧} - س^{٣}}\,د س$

$= \int س^{٣} \sqrt[٣]{س^{٤} - ١}\,د س$

ص = $س^{٤} - ١$

$د س = \frac{د ص}{٤س^{٣}}$

$= \int س^{٣} ص^{١/٣} \frac{د ص}{٤س^{٣}}$

$= \int \frac{١}{٤} ص^{١/٣}\,د ص$

$= \frac{٣}{١٦} ص^{٤/٣} + جـ = \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(س^{٤} - ١)^{٤}} + جـ$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

١٧ . $\int_{\pi/٤}^{\pi/٢}$ جا٢س $\sqrt{}$جتا ٢ س + ٢ . د س

---

١٨ . $\int_{-١}^{٠}$ س^{٣} $\sqrt{}$ س^{٢} + ٢ . دس

---

١٩. $\int$ ظاس قا^{٢}س. دس

---

٢٠ . $\int$ قا^{٤}س. د س

---

٢١. $\int$ س^{٨} ($\frac{١}{س}$ − $\frac{٣}{س^{٢}}$)^{٤} . دس

---

٢٢ $\int$ س^{٨} ($\frac{١}{س^{٢}}$ - $\frac{٣}{س^{٤}}$)^{٥} . دس

قاعـــــــــــــــــدة

ع ن = $\int$ ظا^{ن} س . د س اثبت ان

ع ن = $\frac{١}{ن - ١}$ ظا$^{ن-١}$ س − ع ن − ٢

ع ن = $\int$ قا^{ن} س . د س اثبت ان

ع ن = $\frac{١}{ن - ١}$ ظا س قا$^{ن-٢}$ س + $\frac{(ن - ٢)}{(ن - ١)}$ ع ن − ٢

---

٢٣. اذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل على ح ،

وكان ق(٨) = ٨ ، ق (١) = ٣ فما قيمة

$\int_{١}^{٢}$ ٣ س^{٢} قَ (س^{٣}) . دس

---

٣٧. $\int_{١}^{٠}$ $\sqrt{}$س^{٢} - ٤س + ٤ . دس

تمـــــــــــرين عـــــــــــام ٣

١. $\int_{٠}^{\pi}$ (١ + جا ٢ س) جتا^{٢} س . د س

ج:

$\int$ (جتا^{٢} س + ٢جا س جتا^{٣} س) . د س

ص = جتا س

د ص

دس = ـــــ

- جا س

د ص

$\int$ جتا^{٢} س . دس + ٢$\int$ جا س ص^{٣} . ـــــ

- جا س

٢/١$\int$(١+ جتا ٢ س).دس- ٢$\int$ص^{٣}.د ص

٢/١ س + ١/٤جا٢س- ٢/١ص^{٤}

٢/١ س + ١/٤جا٢س – ٢/١ جتا^{٤}س $\Big|_{٠}^{\pi}$

٢/١ (π)– ٢/١ - (-٢/١) = $\frac{\pi}{٢}$

٢.. اذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة [١ ، ٢] ، وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤

اوجد قيمة $\int_{١}^{٢}$ ٣ قَ(س) $\sqrt{}$ق(س). دس

الحل :

= ١٦ – ٢ = ١٤

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

$\pi/2$

٣ . $\int_{\pi/4}^{\pi/2}$ جا ٢ س جتاس .د س

ج:

$\int_{\pi/4}^{\pi/2}$ ٢جا س جتا^{٢}س .د س

ص = جتا س

دس = $\frac{\text{د ص}}{-\text{ جا س}}$

$\int$ جا س ص^{٢} .$\frac{\text{د ص}}{-\text{ جا س}}$ = -$\int$ ص^{٢}.دص

= -$\frac{-٢\text{ جتا}^{٣}\text{س}}{٣}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$ = -$\frac{-٢}{٣}\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^{٣}$

= -٢/٣ ص^{٣} = -$\frac{٢}{٣}\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^{٣}$

---

٤. $\int$ قا^{٤} (٣س) ظا^{٣}(٣س). دس

الحل :

$\int$ قا^{٢} (٣س) قا^{٢} (٣س) ظا^{٣}(٣س). دس

$\int$ قا^{٢} (٣س) (ظا^{٢}(٣س) +١) ظا^{٣}(٣س). دس

$\int$ قا^{٢} (٣س) (ظا^{٥}(٣س) + ظا^{٣}(٣س)). دس

نفرض ص = ظا٣س

د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{٣قا}^{٢}\text{ ٣س}}$

= $\int$ قا^{٢} (٣س) (ص^{٥}+ ص^{٣}). $\frac{\text{د ص}}{\text{٣قا}^{٢}\text{ ٣س}}$

= $\frac{١}{٣}\int$ (ص^{٥}+ ص^{٣}).د ص =

= $\frac{١}{٣}\left(\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}+\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}\right)$ + جـ

= $\frac{١}{٣}\left(\frac{(\text{ظا٣س})^{٦}}{٦}+\frac{(\text{ظا٣س})^{٤}}{٤}\right)$ + جـ

٥. $\int_{٠}^{٤}\frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٢}+٩)^{\frac{٣}{٢}}}$.د س =

ج:

ص = س^{٢} + ٩

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

= $\int_{٩}^{٢٥}$ س^{٣} ص$^{-٣/٢}$.$\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

= $\int_{٩}^{٢٥}$ س^{٢} ص$^{-٣/٢}$.$\frac{\text{دص}}{٢}$

= $\int_{٩}^{٢٥}$ (ص-٩) ص$^{-٣/٢}$.$\frac{\text{دص}}{٢}$

= $\int_{٩}^{٢٥}$ ص$^{-١/٢}$-٩ ص$^{-٣/٢}$.$\frac{\text{دص}}{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ (٢ص$^{١/٢}$+٢ ×٩ص$^{-١/٢}$)$\Big|_{٩}^{٢٥}$

= ص$^{١/٢}$+ ٩ص$^{-١/٢}\Big|_{٩}^{٢٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

٦.

ج:

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}+\frac{١}{٢}\text{جا ٢س}}$ د س =

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س + جا س جتا}^{٢}\text{س}}$ د س =

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س(١ + جا س)}}$ د س =

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{(١+\text{جا س})}\,|\text{جتاس}|$ د س =

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

$\int_{\pi/4}^{\pi/2}$ جتاس ١+ جاس.دس+$\int_{\pi/2}^{\pi}$- جتاس ١+ جاس. دس

ص = ١+ جاس

دس = د ص / جتاس

$\int_{1}^{2}$ جتاس ص × د ص / جتا س ٢ +$\int_{1}^{2}$- جتاس ص × د ص / جتا س

$\int_{1}^{2}$ ص دص +$\int_{1}^{2}$- ص دص

$= \frac{2}{3}$ ص$^{٢/٣}$ | - $\frac{2}{3}$ ص$^{٢/٣}$ |

نعوض

٧.

اذا كان$\int_{-1}^{2}$(٣ق(س)+٢س- ٤)دس= ٣

، $\int_{-1}^{1}$(ق(س+١) - ٣س^{٢})دس= ٢٧

فجد قيمة $\int_{-1}^{4}$ ق(س). د س ؟

الحل:

** ٣$\int_{-1}^{2}$(ق(س).دس + س^{٢} | - ٤(٢+١) = ٣

** ٣$\int_{-1}^{2}$(ق(س).دس + (٤-١) - ١٢ = ٣

** ٣$\int_{-1}^{2}$(ق(س).دس = ٣ + ٩

$\int_{-1}^{2}$ ق(س).دس = ٤

** $\int_{-1}^{1}$(ق(س+١) - ٣س^{٢})دس= ٢٧

ص = س+١ ومنها دس = دص

عندما س=١ فان ص = ٢

عندما س=٣ فان ص = ٤

$\int_{1}^{2}$(ق(ص).دص - س^{٣} | = ٢٧

$\int_{1}^{2}$(ق(ص).دص - (٢٧-١) = ٢٧

$\int_{1}^{2}$(ق(ص).دص = ٢٧ - ٢٦ =١

$\int_{-1}^{4}$ ق(س).دس= $\int_{-1}^{2}$ق(س).دس+ $\int_{2}^{4}$ ق(س).دس

= ٤- ١ = ٣

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

التكامل بالاجزاء

١. اذا وجدنا اقترانين احداهما مشتقة للاخر
تكامل بالتعويض

٢. اذا وجدنا اقترانين احداهما ليس مشتقة للاخر
تكامل بالاجزاء
باستخدام القانون التالي

$\int$ ق . د هـ = ق . هـ - $\int$ هـ . د ق

احد المقدارين نسميه ق والاخر مع د س نسميه د هـ
الذي نسميه ق نفاضله والذي نسميه د هـ نكامله ثم نطبق القاعده

مثال : $\int$ س جا س . دس

ملاحظة :

- الذي نسميه ق هو الذي تنتهي مشتقته ولو بعد حين
- اما اذا كانت مشتقة الاقترانين منتهية فالذي تنتهي مشتقته اولاً هي ق
- اذا كانت مشتقة المقدارين غير منتهية نلجأ الى التجربة

امثلة :

١. اثبت قانون الاجزاء

$\int$ ق . د هـ = ق . هـ - $\int$ هـ . د ق

الحل :

د/دس(ق×هـ)=دق/دس ×هـ + دهـ/دس×ق

نضرب بـ د س

د (ق×هـ)= هـ× د ق + ق×دهـ

$\int$ د (ق×هـ)= $\int$ هـ× د ق + $\int$ ق×دهـ

$\int$ ق . د هـ = ق . هـ - $\int$ هـ . د ق

---

٢. $\int$ س (٢س+٣)^{٥} . د س

الحل :

ق = س ، د هـ = (٢ س + ٣)^{٥} . د س

$\int$ - ×

د ق = د س ، هـ = $\frac{(٢ س + ٣)^{٦}}{١٢}$

$= س \frac{(٢ س + ٣)^{٦}}{١٢} - \int \frac{(٢ س + ٣)^{٦}}{١٢} . د س$

$= س \frac{(٢ س + ٣)^{٦}}{١٢} - \frac{(٢ س + ٣)^{٧}}{١٢ \times ١٤} + جـ$

---

٣. $\int \frac{٣س}{\sqrt[٣]{٢س + ١}} . دس$

الحل :

ملاحظة : المقام مرفوع لقوة نرفعه الى اعلى بدون تفكير

$\int ٣ س (٢ س + ١)^{-٣/١} . د س$

ق = ٣س ، د هـ = $(٢ س + ١)^{-٣/١} . د س$

$\int$ - ×

د ق =٣ د س ، هـ = $\frac{٣(٢ س + ١)^{٣/٢}}{٢ \times ٢}$

$= ٩س \frac{(٢س+١)^{٣/٢}}{٤} - \int ٩ \frac{(٢س+١)^{٣/٢}}{٤} . د س$

$= ٩ س \frac{(٢س+١)^{٣/٢}}{٤} - \frac{(٢س+١)^{٣/٥}}{٤ \times ٢ \times ٥} + جـ$

---

٤. اذا كان (ق.هـ)(٤)=٦(ق.هـ)(٢)=١٢
وكان $\int_{٢}^{٤} هـ . د ق = ٢$ ، اوجد $\int_{٢}^{٤} ق . دهـ$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٥. ∫ س هـ^س . د س

الحل : ق = س د هـ = هـ^س . د س

× ∫ -

د ق = د س هـ = هـ^س

= س هـ^س -- ∫ هـ^س . د س = س هـ^س -- هـ^س + جـ

---

٦. $\int_{0}^{\pi/٢} \frac{٨س}{قتا س}$. دس

ج: ٨

---

٧. ∫ س قَ (٢ س + ٣) . د س

ج:

= ٢/١ س قَ (٢س+٣) - ٢/١ ∫ قَ(٢س+٣) د س

= ٢/١ س قَ (٢س+٣) - ٢/١ × ٢/١ قَ(٢س+٣) + جـ

= ٢/١ س قَ (٢س+٣) - ٤/١ قَ(٢س+٣) + جـ

---

٨. ∫ س^٢ جا س . د س

الحل :

ق = س^٢ د هـ = جا س . د س

× ∫ -

د ق = ٢س د س هـ = - جتا س

= - س^٢ جتا س + ∫ ٢ س جتا س . د س

ق = ٢س د هـ = جتا س . د س

× ∫ -

د ق = ٢ د س هـ = جا س

= - س^٢ جتا س + ٢س جا س - ∫ ٢ جا س . د س

= - س^٢ جتا س + ٢س جا س + ٢ جتا س + جـ

---

١١. ∫ جا√س . دس

الحل :

ملاحظة : الزاوية ليست خطية

ص = √س

ص^٢ = س

٢ ص . د ص = د س

∫ جا ص (٢ ص . د ص)

١٢. ∫ جتا ٢ √س . دس

١٣. ∫ $\frac{س جا س}{جتا^{٣} س}$. دس

الحل :

∫ س ظا س قا^٢ س . دس

ق = س د هـ = ظا س قا^٢ س . دس

× ∫ -

د ق = د س هـ = ٢/١ ظا^٢ س

= ٢/١ س ظا^٢ س - ٢/١ ∫ ظا^٢ س . د س

= ٢/١ س ظا^٢ س - ٢/١ ∫ (قا^٢ س - ١) . د س

= ٢/١ س ظا^٢ س - ٢/١ ظا س + ٢/١ س + جـ

---

١٤. ∫ س قا^٢ س . د س

الحل : تمرين للطالب

= س ظاس + لو|هـ |جتاس|+ جـ

---

١٥. ∫ قا^٢س . د س

الحل : تمرين للطالب

---

١٦. ∫ هـ^{س + لو س} . د س

الحل : تمرين

---

١٧. ∫ س √هـ^س . د س = ∫ س هـ^{س/٢} . د س

الحل : تمرين

---

١٨. ∫ س^٢ هـ^{س + لو س} . د س = ∫ س^٣ هـ^س . د س

الحل : تمرين

---

١٩. ∫ هـ^√س . د س =

---

٢٠. ∫ $\frac{هـ^{س}}{قتا س}$ د س

ج:

= ∫ هـ^س جا س . د س

ق = هـ^س د هـ = جا س . د س

× ∫ -

د ق = هـ^س د س هـ = - جتا س

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

= - هـ^س جتا س + ∫ هـ^س جتا س . د س
ق = هـ^س د هـ = جتا س . د س
× ∫ -
د ق = هـ^س د س هـ = جا س
= - هـ^س جتا س + هـ^س جا س - ∫هـ^س جا س . د س
٢ ∫هـ^س جا س . د س = - هـ^س جتا س + هـ^س جا س
= ١/٢ هـ^س (جا س - جتا س) + جـ

---

٢١. ∫ جا (لو س) . د س

---

٢٢. ∫ هـ^(جا س + لو جتا س) . د س

---

٢٣. ∫ هـ^س جا س . د س

---

٢٤. ∫ س ظاس قا^٢س . د س

---

٢٥. ∫ س^ن لو س . د س

الحل : ق = لو س د هـ = س^ن . د س
× ∫ -
د ق = ١/ س د س هـ = س^(ن+١) / (ن+١)

= س^(ن+١)/(ن+١) لو س - ١/(ن+١) ∫ س^ن . د س
= س^(ن+١)/(ن+١) لو س - ١/(ن+١)^٢ س^(ن+١) + جـ
اكمل الحل

---

٢٦. ∫ (لو س)^٢ . د س
الحل :
ق = (لو س)^٢ د هـ = د س
× ∫ -
د ق = ٢/س لو س د س هـ = س

= س(لو س)^٢ -- ٢∫لوس. د س
ق = لو س د هـ = د س
× ∫ -
د ق = ١/ س د س هـ = س
= س(لو س)^٢ -- ٢(س لوس - ∫ د س)
= س(لو س)^٢ -- ٢ س لوس + ٢س + جـ

---

٢٧. ∫ س (لو س)^٢ . د س

الحل :
ق = (لو س)^٢ د هـ = س. د س
× ∫ -
د ق = ٢/س لو س د س هـ = س^٢/٢

= ١/٢س^٢ (لو س)^٢ -- ∫ س لوس. د س
ق = لو س د هـ = س د س
× ∫ -
د ق = ١/ س د س هـ = س^٢/٢

---

٢٨. ∫ لو س^٧ . د س

---

٢٩. ∫√(س لو س . د س)

---

٣٥. ∫ س^٢ / (√(٢س + ٣) - √(س + ٣)) . دس

الحل :
ملاحظة : بما ان ما تحت الجذر مختلفة
∫ س^٢/(√(٢س+٣) - √(س+٣)) × (√(٢س+٣) + √(س + ٣))/(√(٢س+٣) + √(س + ٣)) .دس
∫ س^٢ (√(٢س+٣) + √(س + ٣)) / (٢س+٣ - س-٣) .دس
اكمل الحل

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

س هـ س
٣٦. ∫ ـــــــــــ . د س
(س + ١)٢

الحل :

ق = س هـ س د هـ =(س+١)-٢ . د س

× ∫ -

د ق = س هـ س + هـ س د س هـ = -(س+١)-١

= - س هـ س(س+١)-١ + ∫ هـ س . د س ؟؟؟؟

= - س هـ س(س+١)-١ + هـ س + جـ

---

٣٧. ∫ قا٣س . د س

س + جا س
٣٨.∫ ـــــــــــ . دس
١ + جتا س

التكامـــــــل بالكســـــــور الجزئيـــــــة

١. اذا وجدنا كسر بسطة مشتقة لمقامه
فالتكامل = لو | المقام |

٢. اذا وجدنا كسر بسطة كثير حدود ومقامه كثير حدود وقوة المقام ≠١ وبسطة ليس مشتقة لمقامه والمقام يتحلل نلجأ الى تجزئة الكسر

هنـــــــــــاك حالتـــــــــــان

١. درجة البسط > من درجة المقام

نجزئ الكسر ثم نكامل مباشرةً

امثلة :

١. ∫ ٣س - ٢ / (٣ - س)(س-٢) . دس

ج:

٣س – ٢ = أ / (٣ - س) + ب / (س-٢)

∫ ـــــــــــ . د س = ∫ ـــــ + ـــــ . د س
(٣ - س)(س-٢) ٣ - س س-٢

= - أ لو | ٣ - س| + ب لو | س- ٢ | + جـ

٣س-٢= أ (س - ٢) + ب(٣- س)

عندما س = ٢ ومنها ب =٤

عندما س = ٣ ومنها أ =٧

= -٧لو|٣- س|+٤ لو | س- ٢ | + جـ

٢. ∫ ١ / (س + ١) (س – ٣) . د س

الحل :

---

٣. ∫ ١٢ / س٢ -٤ . د س =

الحل :

١٢ = أ / (س -٢)(س+٢) + ب / س+٢

∫ ـــــــــــ . د س = ∫ ـــــ + ـــــ . د س
(س -٢)(س+٢) س-٢ س+٢

= أ لو | س-٢| + ب لو | س+ ٢ | + جـ

١٢= أ (س + ٢) + ب(س- ٢)

عندما س = -٢ ومنها ب = -٣

عندما س = ٢ ومنها أ = ٣

= ٣ لو | س-٢| -٣ لو | س+ ٢ | + جـ

---

٤. ∫ ٣ / س٢ – ٥ س . دس

ج:

٣ = أ / س + ب / س- ٥

∫ ـــــــــــ . د س = ∫ ـــــ + ـــــ . د س
س(س -٥) س س- ٥

= أ لو | س| + ب لو | س-٥| + جـ

٣= أ (س - ٥) + ب(س)

عندما س = ٥ ومنها ب = ٥/٣

عندما س = ٠ ومنها أ = -٥/٣

= -٥/٣ لو | س| + ٥/٣ لو | س-٥| + جـ

---

٥ . ∫ ٢ س + ١ / س٣ - س . د س

ج :

-٣لو|س|+٢/٣لو|س-١|+٢/٣لو|س+١|+جـ

ناصر ذينات 0788241724 ثانوية اربد

حالات خاصة (المربع الكامل)

٦. $\int \frac{٧}{س^{٢} + ٤ س + ٤} \, د س$

ج : مباشر

$\int \frac{٧}{(س+٢)(س+٢)} \, د س = \int \frac{٧}{(س+٢)^{٢}} \, د س$

$= \int ٧ (س + ٢)^{-٢} \, د س$

$= -٧ (س + ٢)^{-١} + جـ$

$= \frac{-٧}{س + ٢} + جـ$

---

٧. $\int \frac{س}{س^{٢} - ٢س + ١} \, د س$

ج : مباشر

$\int \frac{س}{(س-١)(س-١)} \, د س = \int \frac{س}{(س-١)^{٢}} \, د س$

$= \int س (س-١)^{-٢} \, د س$

ق = س د هـ = $(س-١)^{-٢} د س$

$\int$ ×

د ق = د س هـ = $-(س-١)^{-١}$

$= -س(س-١)^{-١} + \int (س-١)^{-١} د س$ ؟؟؟؟؟

$= -س(س-١)^{-١} - (س - ١)^{-١} + جـ$

$= \frac{-س}{س - ١} - \frac{١}{س - ١} + جـ$

---

٨. $\int \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٦س + ٩} \, د س$

٩. $\int \frac{٧س}{٢س^{٢} - ٥ س - ٣} \, د س$

ج:

$\int \frac{٧ س}{(٢س - ٣)(س-١)} \, د س = \int \frac{أ}{٢س-٣} + \frac{ب}{س-١}$

$= أ لو | ٢س-٣| + ب لو | س- ١ | + جـ$

$٣س-٢ = أ (س - ١) + ب(٢س- ٣)$

عندما س = ١ ومنها ب = -١

عندما س = ٢/٣ ومنها أ =

$= أ لو | ٢س-٣| - ١ لو | س- ١ | + جـ$

---

٢. درجة البسط ≥ من درجة المقام

نقسم البسط على المقام قسمة طويلة ثم نجزئ الكسر اذا لزم الامر ثم نكامل مباشرةً

امثلة :

١. $\int \frac{س + ٣}{س + ٩} \, د س$ اقسم طويلة

الحل:

$\int (١ - \frac{٦}{س + ٩}) \, د س$

$= س - ٦ لو|س+٩| + جـ$

---

٢. $\int \frac{س^{٢} + ٣}{س - ٣} \, د س$ اقسم طويلة

الحل:

$\int (س+٣ + \frac{١٢}{س - ٣}) . د س$

$\int (س+٣) . د س + \int \frac{١٢}{س - ٣} \, د س$

$= ٢/١ س^{٢} + ٣س + ١٢ لو|س-٣| + جـ$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

$$\int \frac{س^3 + 2س}{س^3 - س} \, د س$$

الحل: حلل واختصر

$$\int \frac{س(س^2 + 2)}{س(س^2 - 1)} \, د س$$

$$\int \frac{س^2 + 2}{س^2 - 1} \, د س$$

$$\int (1 + \frac{3}{س^2 - 1}) \, د س$$

$$\int 1 . د س + \int \frac{3}{س^2 - 1} \, د س$$

$$\int \frac{2 س^2}{1 - س^2} \, د س$$

ج:

$$\int \frac{2 - 2}{(1 - س)(1 + س)} \, د س$$

$$\int \frac{2}{(1 - س)(1 + س)} \, د س = \int \frac{أ}{1 - س} + \frac{ب}{1 + س} \, د س$$

$= أ لو | 1 - س | + ب لو | 1 + س | + جـ$

$-2 = أ (1 + س) + ب (1 - س)$

عندما س = -1 ومنها ب = -1

عندما س = 1 ومنها أ = -1

$= 2س + أ لو | 1 - س | + لو | 1 + س | + جـ$ ----

$$\int \frac{16 \sqrt{س}}{9 \quad س - 4} \, د س$$

الحل :

$ص^2 = س$

$2 ص . د ص = د س$

$$= \int \frac{4}{3} \frac{2 ص \times ص}{ص^2 - 4} \, د ص$$

$$= \int \frac{4}{3} \frac{2ص^2}{ص^2 - 4} \, د ص$$

$$= \int \frac{4}{3} 2 + \frac{8}{ص^2 - 4} \, د ص$$

$$= \int \frac{4}{3} 2 . د ص + \int \frac{4}{3} \frac{8}{ص^2 - 4} . د ص = \int \frac{4}{3} 2 . د ص + \int \frac{4}{3} \frac{أ}{ص - 2} + \frac{ب}{ص + 2} . د ص$$

$$= 2(4 - 3) + \left| أ لو | ص - 2 | + ب لو | ص + 2 | \right|_3^4$$

لكن

$8 = أ (ص + 2) + ب (ص - 2)$

عندما ص = -2 ومنها ب = -2

عندما ص = 2 ومنها أ = 2

$$= 2 + \left| 2 لو | ص - 2 | - 2 لو | ص + 2 | \right|_3^4$$

$= 2 + 2 لو 2 + -2 لو 6 + 2 لو 5$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

تمـــــــــــرين عـــــــــــام ٤

١. $\int \frac{١}{١ + هـ^{س}} \, د س$

الحل :

$ص = ١ + هـ^{س}$

$د س = \frac{د ص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{ص} \cdot \frac{د ص}{ص - ١}$

$= \int \frac{١}{ص (ص - ١)} \, د ص$

$\int \frac{١}{ص (ص - ١)} \, د ص = \int \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص - ١} \, د ص$

$= أ \, لو_{هـ} |ص| + ب \, لو_{هـ} |ص - ١| + جـ$

$١ = أ (ص - ١) + ب (ص)$

عندما ص = ١ ومنها ب = ١

عندما ص = ٠ ومنها أ = -١

$= لو_{هـ} |١ + هـ^{س}| - لو_{هـ} |هـ^{س}| + جـ$

$= لو_{هـ} |١ + هـ^{س}| - س + جـ$

---

٢. $\int \frac{هـ^{٢س} + ٣ هـ^{س} + ٢}{هـ^{س} + ١} \, د س$

الحل :

$\int \frac{(هـ^{س} + ١)(هـ^{س} + ٢)}{هـ^{س} + ١} \, د س$

$\int (هـ^{س} + ٢) \, د س = هـ^{س} + ٢س + جـ$

---

٣. $\int \frac{١}{س} \, لو_{س} \, د س$

الحل :

$ص = لو_{س} \frac{١}{اكمل} = -٢/١ (لو ١/س)^{٢} + جـ$

٤. اذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق على ح وكان ق(٢)=٣ وكان

$\int_{٠}^{٢} س^{ن} ق'(س) \, د س + ن \int_{٠}^{٢} س^{ن-١} ق(س) \, د س = ٩٦$

فما قيمة ن .

$ق = س^{ن}$ $د هـ = ق'(س) \, د س$

$د ق = ن س^{ن-١} \, د س$ $هـ = ق(س)$

$= س^{ن} ق(س) |_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ن س^{ن-١} ق(س) \, د س + ن \int_{٠}^{٢} س^{ن-١} ق(س) \, د س$

$س^{ن} ق(س) |_{٠}^{٢} = ٩٦$

$(٢)^{ن} ق(٢) - (٠)^{ن} ق(٠) = ٩٦$

$(٢)^{ن} \times ٣ = ٩٦$ ومنها $(٢)^{ن} = ٣٢$ ومنها ن=٥

---

٥. $\int ظا^{٣} س \, د س$

الحل :

$\int ظا س \, ظا^{٢} س \, د س$

$\int ظاس (قا^{٢} س - ١) \, د س$

$\int ظاس \, قا^{٢} س - \int ظاس \, د س$

نفرض ان ص= ظاس

$د س = \frac{د ص}{قا^{٢} س}$

$= \int ص \, قا^{٢} س \frac{د ص}{قا^{٢} س} - \int ظاس \, د س$

$= \int ص \, د ص + لو |جتاس| + جـ$

$= ٢/١ ص^{٢} + لو |جتاس| + جـ$

$= ٢/١ ظا^{٢} س + لو |جتاس| + جـ$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٦. $\int$ قا^{٤} س . د س
الحل :
$\int$ قا^{٢} س قا^{٢} س . د س
$\int$ قا^{٢}س (ظا^{٢}س +١). د س
نفرض ان ص= ظاس
$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$
$$= \int (\text{ص}^{٢}+١)\times \text{قا}^{٢}\text{س} \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$
$$= \int (\text{ص}^{٢}+١)\ \text{د ص}$$
$$= \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} + \text{ص} + \text{جـ}$$
$$= \frac{١}{٣}\ \text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{ظاس} + \text{جـ}$$

---

٧ . اذا كان لو$_{٢}$ ص + لوص$^{٢/٣}$ = س اوجد صَ
الحل :
$$\frac{٢}{١}\text{لو ص} + \frac{٢}{٣}\text{لوص} = \text{س}$$
$$٢\text{لو ص} = \text{س}$$
$$٢ \times \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = ١ \text{ ومنها صَ} = \frac{\text{ص}}{٢}$$

---

٨. اذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن} هـ^{س}. د س
١. اثبت ان ع$_{ن}$ = س^{ن} هـ^{س} – ن ع$_{ن-١}$
٢. اذا كان ع$_{٠}$ = هـ^{س} اوجد ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$

---

٩ . اذا كان ص = هـ$^{\text{أ س}}$ فجد قيمة أ التي تحقق المعادلة صً- ٥ صَ+ ٦ ص = ٠
الحل: صَ = أ هـ$^{\text{أ س}}$
صً = أ^{٢} هـ$^{\text{أ س}}$
صً- ٥ صَ+ ٦ ص = ٠
أ^{٢} هـ$^{\text{أ س}}$ - ٥ أ هـ$^{\text{أ س}}$ + ٦ هـ$^{\text{أ س}}$ = ٠
(أ^{٢} – ٥ أ + ٦) هـ$^{\text{أ س}}$ = ٠
أ^{٢} – ٥ أ + ٦=٠
(أ -٣)(أ- ٢)=٠ ومنها أ = ٣ ، ٢

١٠. اذا كان هـ$^{\text{س ص}}$ = س + ص اثبت ان
$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = - \frac{\text{ص}^{٢} + \text{س ص} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$$
الحل
(ص + س صَ) هـ$^{\text{س ص}}$ = ١ + صَ
ص هـ$^{\text{س ص}}$ + س صَ هـ$^{\text{س ص}}$ = ١ + صَ
صَ(س هـ$^{\text{س ص}}$ – ١) = ١ - ص هـ$^{\text{س ص}}$
$$\text{صَ} = \frac{١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١}$$
$$\text{صَ} = \frac{١ - \text{ص (س + ص)}}{\text{س (س + ص)} - ١}$$
$$\text{صَ} = \frac{١ - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$$

---

١١. اذا كان
$$\int_{١}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ق (س)}\ .\ \text{د س} = ٤$$ فما قيمة
$$\int_{١}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ق (هـ}^{\text{س}}\text{)}\ .\ \text{د س}$$
الحل :
ص = هـ$^{\text{س}}$
ج:٨

---

١١. اذا كان ص = ٢ $^{٣^{\text{س}}}$ ، جد صَ

---

١٢. اذا كان ص = هـ$^{٣\text{لو هـ جاس}}$ ، جد صَ

---

١٣. اذا كان أ ، ب > ٠ اثبت ان
$$\int \frac{\text{أ ب}}{\text{أ}^{\text{س}}}\ .\ \text{د س} = \int \frac{١}{\text{أ}^{\text{ص}}}\ .\ \text{د ص} + \int \frac{١}{\text{ب}^{\text{أ ص}}}\ .\ \text{د ص}$$
الحل : تمرين للطالب

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٤. اذا كان أ ، ب > ٠

$\int_{-١}^{٤}$ ق (س) . د س = ٢٠

وكان م (س) = س ٢ + جـ س بدائي ل ق على [- ١ ، ٤] جد الثابت جـ

الحل :

$\int_{-١}^{٤}$ ق (س) . د س = م(٤)- م(-١)

٢٠ = ١٦ +٤جـ - (١ + - جـ)

٥ = ٥ جـ ومنها جـ = ١

---

١٥. $\int$ س جا٢ س . د س

الحل : تمرين للطالب

---

١٦ . $\int \frac{١}{س^{٨} - س}$. د س

---

١٧ . $\int \frac{س^{٢} + ٢}{(س + ١)^{٣} (س - ٢)}$. د س

---

١٨. $\int \frac{١}{١ - هـ^{-س}}$. د س

---

١٩. $\int \frac{هـ^{٢س} + ٣ هـ^{س} + ٢}{هـ^{س} + ١}$. د س

---

٢٠. $\int \frac{٢}{هـ^{٢س} - ٣ هـ^{س} - ٤}$. د س

---

٢١. $\int \frac{١ - هـ^{-س}}{١ + هـ^{-س}}$. د س

---

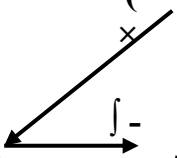
٢٢. $\int \frac{جا ٢ س}{جا^{٢} س - ٣ جا س + ٢}$. د س

---

٢٣. $\int$ لو(٣ س٢ – ٩ س + ٦) . د س

الحل :

ق = لو(٣ س٢ – ٩ س + ٦) د هـ = د س



٦ س – ٩

د ق = ——————— د س هـ = س

٣س٢ – ٩س+ ٦

---

٢٤. $\int \frac{\sqrt[٣]{س^{-١}}}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}}$. د س

ج :

ص ٣ = س

٣ ص٢ . د ص = د س

$= \int ٣ ص^{٢} \frac{ص^{-١}}{ص^{٢} - ٤}$. د ص

$= \int \frac{٣ص^{٣} - ٣ص^{٢}}{ص^{٢} - ٤}$. د ص

$= \int ٣ص - ٣ \int \frac{١٢ ص - ١٢}{(ص - ٢)(ص + ٢)}$. د ص

$= ٣/٢ص^{٢} - ٣ص + \int \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ٢}$. د س

$= ٣/٢ص^{٢} - ٣ص + أ$ لو | ص - ٢ | + ب لو | ص + ٢ | + جـ

١٢ ص - ١٢ = أ (ص+٢) + ب(ص-٢)

عندما ص = - ٢ ومنها ب = ٩

عندما ص = ٢ ومنها أ = ٣

$= ٣/٢ص^{٢} - ٣ص + ٣$لو|ص-٢| + ٩لو|ص+٢| + جـ

نعوض بد ل ص بقيمتها

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٥. $\int \frac{\text{قا}^{٢}\ \text{س}}{\text{٥ ظا}^{٢}\ \text{س} - ٣\ \text{ظاس} - ٢}\ .\ \text{د س}$

ج :

ص= ظاس

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^{٢}\ \text{س}$

$\int \frac{\text{قا}^{٢}\ \text{س}}{\text{٥ ص}^{٢} - ٣\ \text{ص} - ٢} \times \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\ \text{س}}$

$\int \frac{١}{\text{٥ ص}^{٢} - ٣\ \text{ص} - ٢}\ .\ \text{د ص}$

$= \int \frac{١}{(\text{٥ ص} + ٢)(\text{ص} - ١)}\ .\ \text{د ص}$

أ ب

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{٥ ص} + ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١}\ .\ \text{د س}$

= أ/٥ لو | ٥ ص + ٢|+ ب لو | ص- ١ |+جـ

١ = أ (ص- ١) + ب(٥ ص + ٢)

عندما ص = -٢/٥ ومنها أ = -٧/٥

عندما ص = ١ ومنها ب = ٧/١

= -٧/١ لو | ٥ ص + ٢|+ ٧/١ لو | ص- ١ |+جـ

نعوض بدل ص بقيمتها

---

٢٦. $\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢} + ١}{\sqrt{\text{س}-٢} - ١}\ .\ \text{د س}$

ج :

ص ^{٢} = س - ٢

٢ ص . د ص = د س

$= \int ٢\ \text{ص} \frac{\text{ص} + ١}{\text{ص} - ١}\ .\ \text{د ص}$

$= \int ٢\ \text{ص} + ٤ + \frac{٤}{\text{ص} - ١}\ .\ \text{د ص}$

= ص^{٢} + ٤ ص + ٤ لو | ص – ١ | + جـ

= س-٢+٤ $\sqrt{\text{س}-٢}$+٤ لو | $\sqrt{\text{س}-٢}$ – ١ | + جـ

معـــــــــــادلات

هي معادلة تحتوي على مشتقات او تفاضلات

قَ (س) ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، تسمى مشتقات

د ص تسمى تفاضلة ص ، د س تسمى تفاضلة س

حل المعادلة التفاضلية

ايجاد علاقة تربط بين المتغير س والمتغير ص تخلو من التفاضلات والمشتقات

١. فصل السينات مع تفاضلتها عن الصادات مع تفاضلتها

٢. نكامل الطرفين

امثلة :

١. جد ص بدلالة س اذا كان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{ص}^{٤}}$

الحل :

ص^{٤} . د ص = س^{٣} . د س

$\int$ ص^{٤} . د ص = $\int$ س ^{٣} . د س

$\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} = \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$

---

٢. $\sqrt{\text{س}}$. د ص = $\sqrt[٣]{\text{ص}}$ د س

جد ص بدلالة س عند (١ ، ١)

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{ص}^{-٣/١}} = \frac{\text{د س}}{\text{س}^{-٢/١}}$

ص$^{-٣/١}$. دص = س$^{-٢/١}$. د س

$\int$ ص$^{-٣/١}$. دص = $\int$ س$^{-٢/١}$. د س

٢/٣ ص $^{٣/٢}$ = ٢ س $^{٢/١}$ + جـ

لايجاد قيمة جـ نعوض في (١ ، ١)

٣/ ٢ = ٢ + جـ ومنها جـ = -٢/١

٢/٣ ص $^{٣/٢}$ = ٢ س $^{٢/١}$ – ٢/١

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣. حل المعادلة التفاضلية

$$ص^{٢}\frac{د ص}{د س} = \sqrt[٣]{س^{٣} + س^{٤}}$$

الحل :

$$ص^{٢}\ د ص = \sqrt[٣]{س^{٣}(١ + س)}.دس$$

$$ص^{٢}\ د ص = س\sqrt[٣]{(١ + س)}.دس$$

$$\int ص^{٢}\ د ص = \int س \sqrt[٣]{١ + س}\ .\ دس$$

اكمل الحل

لا تنسى ذكر الله

لا تنسى (تذكر)

د ف / د ن = ع(ن)

د ع / د ن = ت (ن)

ف (ن) = $\int$ ع(ن) . د ن ≠ $\int$ ع . د ع

ع (ن) = $\int$ ت(ن) . د ن

ق (س) = $\int$ قَ(س) . د س

قَ (س) = $\int$ قً(س) . د س

$ق^{(ن-١)}(س) = \int ق^{(ن)}(س).دس$

---

٤. اذا كان ميل الاقتران ق(س)= ص عند أي نقطة (س ، ص) يساوي ٢س ، اوجد قاعدة الاقتران ق(س) ، علماً بان منحنى ق يمر بالنقطة (٣ ، ٩).

ج:

قَ(س)= ٢س

$\int$ قَ(س) = $\int$ ٢س. دس

ق(س)= $س^{٢}$ + جـ

لكن ق(٣)= ٩

٩= ٩+ جـ ومنها جـ = صفر

$ق(س) = س^{٢}$

٥.اذا كانت المشتقة الثانية قً (س) = ٢ عند اي نقطة (س ، ص) وكان ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ٣) يساوي ١٠ جد قاعدة الاقتران ق

الحل :

الحل :

قَ(س)=$\int$ قً(س) = $\int$ ٢. دس

قَ(س)= ٢س + جـ

لكن قَ(١)= ١٠

١٠= ٢+ جـ ومنها جـ = ٨

ق(س)=$\int$ قَ(س).دس= $\int$(٢س + ٨).دس

ق(س)= $س^{٢}$+٨س + جـ

ق(١)= ٣

٣= ١+ ٨ + جـ ومنها جـ =-٦

ق(س) = $س^{٢}$ + ٨ س - ٦

٦.اذا كانت قً (س)=٣س+١ ،(١،٠) نقطة حرجة جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل :

الحل :

قَ(س)=$\int$ قً(س)=$\int$(٣س+١). دس

قَ(س)= + جـ

لكن قَ(٠)= صفر ؟؟؟؟؟؟؟؟؟

ومنها جـ = صفر

ق(س)=$\int$ قَ(س).دس= $\int$( ).دس

ق(س)= + جـ

ق(٠)= ١

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ $س^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ + ١ ومنها جـ =١

٧.اذا كانت المشتقة الاولى للاقتران ق هي ٢س-٢ وكانت القيمة الصغرى المحلية له (-٧) جد قاعدة الاقتران

الحل :

ق(س) = $س^{٢}$ – ٢ س -٦ لماذا ؟

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat
ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٨.اذا كان م هو ميل المنحنى ص عند اي نقطة وكان

$\frac{د م}{د س} = \frac{٢}{\sqrt{س}}$ ، س > ٠

فاذا مر منحنى ص بالنقطة (٤ ، ٣/٦٤) بحيث كان ميله عندها ١١ جد معادلة المنحنى

الحل :

$\frac{د م}{د س} = \frac{٢}{\sqrt{س}}$

$م د س = \int \frac{٢}{\sqrt{س}} د س$ اكمل الحل وانتبه للحل

ص = ٣/٨ $س^{٢/٣}$ + ٣س - ١٢

٩.اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ص هو

$\frac{٣ ص^{٢}}{(٢ س + ١)^{٣}}$

جد ص اذا كان منحنى ص يمر (٠ ، ١)

الحل :

$\frac{٣ ص^{٢}}{(٢ س + ١)^{٣}} \times \frac{د ص}{د س} = -١$

$\int ٣ص^{٢} . د ص = \int -(٢ س + ١)^{-٣} . د س$

$ص^{٣} = -٨/١ (٢ س + ١)^{-٢} + جـ$

يمر (٠ ، ١)

$١ = -٨/١ + جـ$ ومنها $جـ = ٨/٩$

$ص^{٣} = -٨/١ (٢ س + ١)^{-٢} + ٨/٩$

---

١٠. اذا كان تسارع جسيم ت بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ت = ٦ ن + ٤ فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٣ ث من بدء الحركة علماً بان السرعة الابتدائية للجسم ٢ م / ث وانه قطع مسافة ٢١م في ثانيتين .

الحل :

ت = ٦ن+٤ ، ع(٠)= ٢ م/ ث ، ف(٢)=٢١

$\frac{د ع}{د ن} = ٦ن+٤$

$\int د ع = \int (٦ ن + ٤) . د ن$

$ع = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + جـ_{١}$

لكن ع(٠) = ٢ ومنها $جـ_{١} = ٢$

$\int أ ع = \frac{د ف}{د ن} = \int (٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٢) . د ن$

$ف = ن^{٣} + ٢ ن^{٢} + ٢ن + جـ_{٢}$

لكن ف(٢) = ٢١ ومنها $جـ_{٢} = ١$

اذن ف(ن)= $ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ١$

ف(٣)= ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١ = ٥٢ م

١١.سقط جسيم من السكون من ارتفاع ١٠٠ م بتسارع - ١٠ م/ $ث^{٢}$ احسب سرعته عندما يكون على ارتفاع ٥٥ م من سطح الارض

الحل :

$ت = \frac{د ع}{د ن} = -١٠ \leftarrow \int د ع = \int -١٠ . د ن$

$ع(ن) = -١٠ن + جـ$

لكن ع $|_{ن=٠}$ = ٠

ع(ن) = -١٠ن

$ع = \frac{د ف}{د ن} = -١٠ن \leftarrow \int د ف = \int -١٠ن . د ن$

$ف(ن) = -٥ن^{٢} + جـ$

لكن ف $|_{ن=٠}$ = ١٠٠م

$١٠٠ = -٥(٠)^{٢} + جـ$ ومنها جـ = ١٠٠

$ف(ن) = -٥ن^{٢} + ١٠٠$

عندما ف(ن) =٥٥ فان $٥٥ = -٥ن^{٢} + ١٠٠$ ومنها

$ن^{٢} = ٩$ ومنها ن= ٣

ع(٣) = -١٠×٣ = -٣٠م/ث

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٢.قذف حجر راسياً للاسفل بسرعة ٦٠ قدم / ث من منطاد ساكن على ارتفاع ١٠٠٠٠ قدم من سطح الارض جد ارتفاع الحجر بعد ٢٠ ثانية حيث ت = - ٣٢ قدم / ث ^{٢}

الحل :

$$ت = \frac{د ع}{د ن} = -٣٢ \leftarrow \int د ع = \int -٣٢ . د ن$$

ع(ن) = -٣٢ن + جـ

لكن ع $|_{ن=٠}$ = -٦٠

-٦٠ = -٣٢ × ٠ + جـ ومنها جـ = -٦٠

ع(ن) = -٣٢ن - ٦٠

$$ع = \frac{د ف}{د ن} = ع(ن) = -٣٢ن - ٦٠$$

$$\leftarrow \int د ف = \int (-٣٢ن - ٦٠) . دن$$

ف(ن) = -١٦ن^{٢} - ٦٠ن + جـ

لكن ف $|_{ن=٠}$ = ١٠٠٠٠

١٠٠٠٠ = -١٦(٠)^{٢} - ٦٠(٠) + جـ ومنها جـ = ١٠٠٠٠

ف(ن) = -١٦ن^{٢} - ٦٠ن + ١٠٠٠٠

ف(٢٠) = -١٦(٢٠)^{٢} - ٦٠(٢٠) + ١٠٠٠٠ = ٢٤٠٠

١٣.قذفت كرة للاعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ث من على ارتفاع ٨٠ قدم جد معادلة الحركة لهذه الكرة اذا علمت ان تسارع الكرة يساوي – ٣٢ قدم/ث^{٢}

---

١٤. انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة أ ، فاذا كانت سرعته ع م/ ث بعد زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة

$$ع = \begin{cases} ٣ن^{٢} & ، ٠ \leq ن \geq ٢ \\ ١٦ - ٢ن & ، ٢ < ن \leq ٨ \end{cases}$$

جد بعد الجسيم عن النقطة أ عندما ن = ٥ ث .

الحل

$$ف(ن) = \int_{٠}^{٢} ٣ن^{٢} . د ن + \int_{٢}^{٥} ١٦ - ٢ن . دن$$

$$= ن^{٣} |_{٠}^{٢} + ١٦ (٥ - ٢) - ن^{٢} |_{٢}^{٥}$$

$$= ٨ + ٤٨ - ٢١ = ٣٥$$

---

١٥. جد ك بدلالة ل اذا كان $\frac{د ك}{د ل} = \sqrt[٣]{\frac{ل}{ك}}$: ل، ك > ٠

الحل :

$$\int ك^{٣/١} . د ك = \int ل^{٣/١} . د ل$$

$$٤/٣ ك^{٣/٤} = ٤/٣ ل^{٣/٤} + جـ_{١}$$

$$ك^{٣/٤} = ل^{٣/٤} + جـ \quad : \quad جـ = ٣/٤ جـ_{١}$$

$$ك^{٤} = (ل^{٣/٤} + جـ)^{٣}$$

١٦.يزداد عدد سكان مدينة بمعدل ٠.٠٢ من عددهم سنوياً فاذا كان عدد سكان المدينة الان هو ١٠٠٠٠٠ فجد عدد سكان المدينة بعد ٢٠ سنة .

الحل:

$$\frac{د ع}{د ن} = (٠.٠٢)ع$$

$$\frac{د ع}{ع} = (٠.٠٢) د ن$$

$$\int \frac{١}{ع} د ع = \int (٠.٠٢) د ن$$

لوهـ ع = (٠.٠٢) ن + جـ

لكن ع(٠) = ١٠٠٠٠٠

لوهـ (١٠٠٠٠٠) = (٠.٠٢) × ٠ + جـ

جـ = لوهـ (١٠٠٠٠٠)

ع(ن) = هـ$^{((٠.٠٢) ن + لوهـ (١٠٠٠٠٠))}$

ع(٢٠) = هـ$^{((٠.٠٢) × ٢٠ + لوهـ (١٠٠٠٠٠))}$

ع(٢٠) = هـ$^{(٠.٤ + لوهـ (١٠٠٠٠٠))}$

ع(٢٠) = هـ$^{٠.٤}$ × هـ$^{لوهـ (١٠٠٠٠٠)}$

ع(٢٠) = ١٠٠٠٠٠ × هـ$^{٠.٤}$

ناصر الذينات ٠٧٨٨٢٤١٧٢٤ ثانوية اربد

١٧ اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عندالنقطة (س،ص) يساوي ٢س ص فجد (قيم) ص عند س=٣ ، علماً بان منحنى العلاقة يمر ب النقطة(٢،١) .

ج: $\frac{د ص}{د س} = ٢ س ص$

$\frac{د ص}{ص} = ٢ س . د س$

$\int \frac{د ص}{ص} = \int ٢ س . د س$

لو$_{هـ}$ |ص| = س^{٢} + جـ

لكن يمر بالنقطة (٢ ، ١) .

لو$_{هـ}$ ١ = ٤ + جـ ومنها جـ = -٤

عندما س = ٣ فان لو$_{هـ}$ |ص| = ٥

|ص| = هـ^{٥} ومنها ص = ± هـ^{٥}

---

١٨. ٥جا^{٢}س.دص = - ص^{٢}.دس + ٥دص

الحل :

٥ جا^{٢} س . د ص - ٥ د ص = - ص^{٢} . د س

(٥ جا^{٢} س - ٥) د ص = - ص^{٢} . د س

$\frac{د ص}{-ص^{٢}} = \frac{د س}{٥(جا^{٢} س - ١)}$

$\int \frac{د ص}{-ص^{٢}} = \int \frac{د س}{-٥جتا^{٢} س}$

$\int -ص^{-٢} = -١/٥ \int قا^{٢} س . د س$ اكمل الحل

---

١٩. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عندالنقطة (س،ص) يساوي $\frac{٢ ص^{٣}}{(٣ س + ٥)^{٣/٢}}$

فجد قاعدة العلاقة علماً بأن محناه يمر بالنقطة (٥،١).

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ ص^{٣}}{(٣ س + ٥)^{٣/٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د س}{(٣ س + ٥)^{٣/٢}}$

$\int ص^{-٣} د ص = \int (٣ س + ٥)^{-٣/٢} . د س$

$-١/٢ ص^{-٢} = (٣س + ٥)^{-١/٢} + جـ$

$\frac{-١}{٤ ص^{٢}} = \sqrt{٣س + ٥} + جـ$

عند (١ ، ٥)

$\frac{-١}{١٠٠} = ٢ + جـ$

$\frac{-١}{٤ ص^{٢}} = ٣س + ٥ - \frac{٢٠١}{١٠٠}$

---

١٩. اذا كان $\frac{د ص}{د س} = ٣ص س + ص + ٣س + ١$

جد ص بدلالة س

الحل :

د ص = (٣ س + ١)(ص + ١). د س

$\int \frac{١}{ص + ١} . د ص = \int ٣ س + ١ . د س$

لو |ص + ١| = ٢/٣ س^{٢} + س + جـ

---

٢٠. يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

ت = أ ع$^{٣/١}$ ، حيث ع > ٠

اذا تحرك الجسيم من السكون ، فجد قيمة الثابت أ ، التي تجعل سرعته ٨سم/ ث بعد ٣ ث من بدء حركته .

الحل :

$ت = \frac{د ع}{د ن} = أ ع^{٣/١}$ ومنها $ع^{-٣/١} . د ع = أ د ن$

$\int ع^{-٣/١} . د ع = \int أ . د ن \leftarrow$

٢/٣ ع$^{٣/٢}$ = أ ن + جـ

لكن ن = ٠ ، ع(٠) = ٠ ومنها جـ = ٠

٢/٣ ع$^{٣/٢}$ = أ ن

سرعته ٨سم/ ث بعد ٣ ث

٢/٣ (٨)$^{٣/٢}$ = أ (٣) ومنها أ = ٢

ناصر الذينات ثانوية اربد 0788241724

٢١.قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) متراً عن سطح الارض الى اعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (-١٠)م/ث^{٢} . جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود الى سطح الارض .

الحل :

$$ت = \frac{دع}{دن} = -١٠$$

$$\int دع = \int (-١٠)\ .دن$$

$$ع(ن) = -١٠ ن + جـ$$

لكن ع(٠)= ٤٠

$$٤٠ = -١٠ \times ٠ + جـ \text{ ومنها } جـ = ٤٠$$

$$ع = \frac{دف}{دن} = -١٠ ن + ٤٠$$

$$\int دف = \int (-١٠ ن + ٤٠)\ .دن$$

$$ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ ن + جـ$$

لكن ف(٠) = ٤٥ ومنها

$$٤٥ = -٥(٠)^{٢} + ٤٠ (٠) + جـ \text{ ومنها } جـ = ٤٥$$

$$ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥$$

حتى تعود الكرة الى سطح الارض ف(ن)= ٠

$$-٥ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥ = ٠$$

$$ن^{٢} - ٨ ن - ٩ = ٠$$

$$(ن - ٩)(ن+ ١) = ٠ \text{ ومنها } ن = ٩ \text{ ث}$$

---

٢٢. اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية ، وكان ق(٠)= ق(١) = صفر

، $\int_{٠}^{١} ق(س).\ د س = ١$ ، فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل :

ق(س)= أ س^{٢} + ب س + جـ

ق(٠) = ٠ ومنها جـ = ٠

ق(١) = ٠ ومنها أ + ب = ٠.....(١)

$$\int_{٠}^{١} (أ س^{٢} + ب س).\ د س = ١ .$$

$$أ/٣ س^{٣} + ب/٢ س^{٢} \Big|_{٠}^{١} = ١$$

٢أ + ٣ب = ٦ .....(٢)

من (١) ،(٢)

-٢(أ + ب = ٠)

٢ أ + ٣ب = ٦

ب = ٦

بالتعويض في (١) قيمة أ = - ٦

قاعدة الاقتران

ق(س)= -٦ س^{٢} + ٦ س

---

٢٣. اذا كان قً(س)= جا س وكان قَ(π) = -١

، ق(π)= صفر فجد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل :

$$\int ق'(س) = \int جاس.\ دس$$

قَ(س)= - جتاس + جـ

لكن قَ(π)= - ١

-١= - جتا π + جـ ومنها جـ = -٢

$$\int ق'(س).دس = \int (- جتاس - ٢).دس$$

ق(س)= - جاس - ٢س + جـ

ق(π)= صفر

صفر= - جا π - ٢ π + جـ ومنها جـ = ٢ π

ق(س)= - جاس - ٢س + ٢ π

---

٢٤. تحركت كرة من السكون على خط مستقيم بتسارع مقداره ($\frac{٢}{\sqrt{ن}}$ + ن) م /ث^{٢} ، حيث ن الزمن بالثواني فاذا علمت ان سرعة الكرة (٥٠)م/ ث عندما ن = ٩ ثانية ، وان الكرة قطعت مسافة مقدارها (٢٢) متراً بعد (٤)ثواني من بدء الحركة . جد المسافة التي قطعتها الكرة بعد (٩)ثواني من بدء حركتها .

الحل :

$$ت = \frac{دع}{دن} = \frac{٢}{\sqrt{ن}} + ن$$

$$دع = (\frac{٢}{\sqrt{ن}} + ن).دن$$

$$\leftarrow \int دع = \int (٢ ن^{-١/٢} + ن)\ .دن$$

$$ع(ن) = ٤ ن^{١/٢} + ٢/١ ن^{٢} + جـ$$

لكن ن= ٩ ، ع(٩) = ٥٠

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٥٠ = ٤(٩)$^{٢/١}$ + ٢/١(٩)^{٢} + جـ، ومنها جـ = -٢/٥
ع(ن) = ٤ ن$^{٢/١}$ + ٢/١ ن^{٢} -٢/٥
دف = (٤ ن$^{٢/١}$ + ٢/١ ن^{٢} -٢/٥).د ن
∫دف = ∫(٤ ن$^{٢/١}$ + ٢/١ن^{٢} – ٢/٥).د ن
ف(ن) = ٣/٨ ن$^{٢/٣}$ + ٦/١ ن^{٣} - ٢/٥ن + جـ
لكن ف(٤) = ٢٢
٢٢ = ٣/٨ (٤)$^{٢/٣}$ + ٦/١ (٤)^{٣} - ٢/٥(٤) + جـ
٢٢ = ٣/٦٤+٣/٣٢ -١٠+ جـ ومنها جـ = صفر
ف(ن) = ٣/٨ ن$^{٢/٣}$+ ٦/١ ن^{٣} -٢/٥ن٠
ف(٩) = ٣/٨ (٩)$^{٢/٣}$+ ٦/١ (٩)^{٣} - ٢/٥(٩) = ١٧١

٢٥.يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = |ع| حيث ع > ٠ ، اذا علمت ان السرعة الابتدائية للجسيم (٩) م / ث وقطع مسافة (٨٠) م في (٤)ثوان، فجد المسافة التي قطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء حركته
الحل:

ت = د ع / د ن = ع$^{٢/١}$ ← ∫ ع$^{-٢/١}$ د ع = ∫ ١. د ن
٢ع$^{٢/١}$ = ن + جـ
لكن ع(٠) = ٩ ومنها جـ = ٦
ع = د ف / د ن = (٢/١ن + ٣)^{٢}
∫ د ف = ∫(٢/١ن + ٣)^{٢}. د ن
ف = ٣/٢ (٢/١ن+ ٣)^{٣} + جـ
لكن ف(٤) = ٨٠
ومنها ٨٠=٣/٢(٢+ ٣)^{٣} + جـ ومنها جـ=-٣/١٠
ف(ن) = ٣/٢ (٢/١ن+ ٣)^{٣} -٣/١٠
ف(٢) = ٣/٢ (١+ ٣)^{٣} -٣/١٠= ٣/١١٨

---

٢٦. جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
ص= (س-١)هـ^{س}+ ٣لوهـ س+٢ عند النقطة (١، ٢)
الحل:

م = صَ = هـ^{س} + (س – ١) هـ^{س} + ٣/س
ومنها م = صَ | = هـ + ٣
س = ١
معادلة المماس هي ص – ٢ = (هـ + ٣) (س – ١)
ص = (هـ + ٣) س – هـ - ١

٢٧.اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عندالنقطة (س،ص) يساوي هـ^{ص} / جتا^{٢}س فجد قاعدة العلاقة علماً بان النقطة (٤/π ، ٠) تقع على منحناه .
ج:

د ص / د س = هـ^{ص} / جا^{٢}س
د ص / هـ^{ص} = ١ / جا^{٢}س . د س
∫ هـ$^{-٢/١ ص}$. د ص = ∫ قتا^{٢}س. د س
-٢ هـ$^{-٢/١ ص}$ = - ظتاس + جـ،
هـ$^{-٢/١ ص}$ = ٢/١ظتاس + ٢/١جـ، : ٢/١جـ، = جـ
هـ$^{-٢/١ ص}$ = ٢/١ظتاس + جـ
المنحنى يمر بالنقطة (٤/π ، ٠)
هـ^{٠} = ٢/١ظتا ٤/π + جـ
١ = ٢/١+ جـ ومنها جـ = ٢/١
هـ$^{-٢/١ ص}$ = ٢/١ظتاس + ٢/١
-٢/١ ص = لوهـ ٢/١(ظتاس + ١)
ص = -٢لوهـ ٢/١(ظتاس + ١)

٢٨.حل المعادلة التفاضلية التالية
س / (س^{٢} – ١) د ص / دس = هـ$^{-ص}$ (س + ٢)
ج:

هـ^{ص} د ص = (س + ٢)(س^{٢} – ١) / س د س
هـ^{ص} د ص = (س^{٣} – س + ٢س^{٢} -٢) / س د س
هـ^{ص} د ص = س^{٢} - ١ + ٢ س - ٢/س . د س
∫هـ^{ص} د ص = ∫ س^{٢} - ١ + ٢ س - ٢/س . د س
هـ^{ص} = س^{٣}/٣ – س + س^{٢} – ٢ لو | س |+ جـ

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat
ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٩. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عندالنقطة (س،ص) = $\frac{هـ^{-ص}(س+٤)(س-٣)}{س^{٢}-٣س}$

فجد قاعدة العلاقة علماً بان النقطة (١ ، ٠) تقع على منحناه

ج: $\frac{(س+٤)(س-٣)}{س(س-٣)^{٤}}$

$هـ^{ص}$ د ص = $\int \frac{١}{س}$ د س

$هـ^{ص} = س + ٤ لو |س| + جـ$

يمر بالنقطة (١ ، ٠)

١ = ١ + ٤ لو ١ + جـ ومنها جـ = ٠

ص = لو(س + ٤ لو |س|)

٣٠.اذا كان قَ (س)= جا س + $هـ^{٢س}$ ، وكان قَ(٠)= ٤/١ ، قَ(٠)= ٢/١

فجد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل :

$\int$ قَ(س) = $\int$ (جا س + $هـ^{٢س}$) . دس

قَ(س)= - جتاس +٢/١ $هـ^{٢س}$ + جـ

لكن قَ(٠)=٢/١

٢/١=- جتا٠ +٢/١ $هـ^{٠}$ + جـ

٢/١=- ١ +٢/١ + جـ ومنها جـ = ١

$\int$ قَ(س).دس= $\int$(- جتاس +٢/١ $هـ^{٢س}$ +١).دس

ق(س)= - جاس - ٤/١ $هـ^{٢س}$ + س + جـ

ق(٠)= ٤/١

٤/١= - جا(٠) - ٤/١ $هـ^{٠}$ + ٠ + جـ ومنها جـ=٢/١

ق(س)= - جاس - ٤/١ $هـ^{٢س}$ + س + ٢/١

---

٣١. حل المعادلة التفاضلية التالية

$\frac{ص}{د س} = \frac{قتا^{٤} س \, ظتا^{٢} س}{د ص}$

---

٣٢. اذا كان $\frac{د ص}{د س} = هـ^{٢ س - ص}$ جد ص بدلالة س

٣٣.اذا كان

$\frac{د ص}{د س} = س\sqrt{٣ س^{٢} - ١٤ ص + ٧س^{٢} ص - ٦}$

جد ص بدلالة س

٣٤.اذا كان

$(٤ + ٤ ظا س + ظا^{٢} س)^{٣} \frac{د ص}{د س} = ٧ + ٧ ظا^{٢} س$

جد ص بدلالة س

---

٣٥. تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة

$\frac{د ت}{د ن} = ٥ ن^{٤} + ٢٠ ن$

حيث ت : عدد البكتيريا ، ن الزمن بالثواني اذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي ٣٠ فجد عددها بعد ٣ ث

الحل :

$\int$ د ت = $\int$ (٥ $ن^{٤}$ + ٢٠ ن) . د ن

ت = $ن^{٥}$ + ١٠ $ن^{٢}$ + جـ

لكن ت(١) = ٣٠

٣٠ = ١ + ١٠ + جـ ومنها جـ = ١٩

ت(٣) = (٣)^{٥} + ١٠(٣)^{٢} + ١٩ = ٤٥٢

---

٣٦. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند لنقطة (س ، ص) = $\frac{جا س - قا^{٢} س}{٣ ص^{٢}}$

فجد قاعدة العلاقة علماً بان النقطة (π / ٤ ، ٤) تقع على منحناه

الحل :

٣ $ص^{٢}$. د ص = (جا س – $قا^{٢}$ س) . د س

$\int$ ٣ $ص^{٢}$. د ص = $\int$ (جا س – $قا^{٢}$ س) . د س

$ص^{٣}$ = - جتا س – ظا س + جـ

لكن ق (٤/π) = ٤ اكمل الحل

٣٧.اذا كان $\frac{د ص}{د س} = ٤$ ، $\frac{د ع}{د س} = ٢ص$ جد ع بدلالة س

حيث ع=٣ص=١٢ عندما س= ١

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣٨. اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند اي نقطة يعطى بالعلاقة التالية $\frac{١}{س - ٥}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٦،٣) اكتب قاعدة الاقتران

الحل :

$م = صَ$

$د ص = \frac{١}{س - ٥} . دس$

باخذ التكامل للطرفين

$\int د ص = \int \frac{١}{س - ٥} . دس$

$ص = لو | س - ٥ | + جـ$

---

٣٩. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عندالنقطة (س،ص) يساوي $\frac{- ص (س^{٢}-١)}{س^{٢}}$ فجد قاعدة العلاقة علماً بان النقطة (١ ، -١) تقع على منحناه .

ج:

$\frac{د ص}{د س} = \frac{- ص (س^{٢}-١)}{س^{٢}}$

$\frac{د ص}{ص} = \frac{- (س^{٢}-١)}{س^{٢}} . د س$

$\int \frac{د ص}{ص} = \int - ١ + س^{-٢} . د س$

لو |ص| = - س - $\frac{١}{س}$ + جـ

يمر بالنقطة (١ ، -١)

لو |-١| = - ١ - ١ + جـ ومنها جـ = ٢

لو |ص| = - س - $\frac{١}{س}$ + ٢

---

٤٠. اذا كان الماء يتدفق من انبوبة ماء داخل ارض زراعية بمعدل ٣% من مساحة (م) التي غطتها المياه .اوجد المساحة التي تكون قد غطتها بعد ٣ ساعات من اكتشاف تدفق .علماً بان الماء كان يغطي ٢٠٠م٢ عند اكتشاف التدفق

الحل : دم/دن =٠.٠٣ ومنها دم/م = ٠.٠٣دن

$\int$ دم/م=$\int$ ٠.٠٣ دن

لو|م|= ٠.٠٣ن + جـ اكمل الحل

---

٤١. حل المعادلة التفاضلية التالية

جا^{٢}س دص + ص دس = د ص

الحل :

جا^{٢}س دص - دص =- ص دس

دص(جا^{٢}س – ١) =- ص دس

$\frac{دص}{ص} = \frac{- د س}{جا^{٢}س - ١}$

$\int \frac{دص}{ص} = \int \frac{دس}{جتا^{٢}س}$

لو |ص| = $\int$ قا^{٢}س د س

لو |ص| = ظاس+ جـ

---

٤٢. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عندالنقطة (س،ص) يساوي $\frac{١}{س\sqrt{٣ + لوس}}$: س> ٠

فجد قاعدة العلاقة علماً بان محناه يمر بالنقطة (هـ ، ٤) ، هـ العدد النيبيري.

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{س(٣ + لوس)^{٢/١}}$

$\int دص = \int \frac{١}{س} (٣ + لوس)^{-٢/١} . د س$

م = ٣ + لو$_{هـ}$س

$\frac{د م}{د س} = \frac{١}{س}$ ومنها دس = س .دم

$\int دص = \int \frac{١}{س} م^{-٢/١} \times س . د م$

$\int دص = \int م^{-٢/١} . د م$

ص = ٢م$^{٢/١}$ + جـ

ص = ٢(٣ + لو$_{هـ}$س)$^{٢/١}$ + جـ

عند (هـ ، ٤)

٤ = ٢(٣ + لو$_{هـ}$ هـ)$^{٢/١}$ + جـ

٤ = ٢×٢ + جـ ومنها جـ = ٠

قاعدة الاقتران ص =٢ $\sqrt{٣ + لوس}$

---

٤٣. نقطة متحركة بدأت من السكون وكان تسارعها ٢أ-٦ب ن ،أ، ب ثابتان ، فقطعت ١٢ ، ١٦ قدماً في الثانيتين الاوليين من حركتها جد أ ، ب .

ج : أ = ٢٠ ، ب = ٨

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

المساحـــــــــــــــــــــات

وهـــــــي اربـــــــع حـــــــــــالات

الحالـــــــــــــــة الاولـــــــــــــى

**يطلب في السؤال المساحة بين اقتران ومستقيمين س= س١ ، س= س٢ أو ([س١ ، س٢]) ومحور السينات ...دون زيادة او نقصان

طريقة الحل

نطبق القانون التالي لنضمن جزء من العلامة

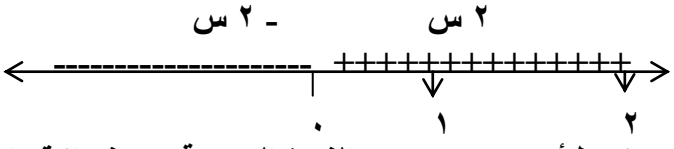
$$م = \int_{س_1}^{س_2} | ق(س) | \ . د س$$

١.احسب المساحة المحصورة بين ق (س) = ٢س ومحور السينات والمستقيمين س= ١ ، س = ٢

الحل :

$$م = \int_{1}^{2} |٢ س| \ . د س =$$

٢ س = ٠ ومنها س= ٠



..لاحظ أن ١ ، ٢ ضمن الفترة الموجبة و صفر الاقتران ليس ضمن الفترة

$$م = \int_{1}^{2} ٢ س \ . د س = س^{٢} |_{1}^{2} = ٤ - ١ = ٣$$

٢.احسب المساحة المحصورة بين ق(س)= هـ ^{٢س} ومحور السينات في الفترة [-١ ، ٢]

الحل :

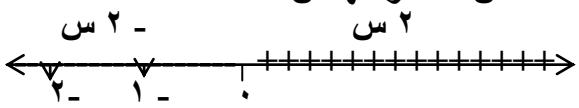
:

٤.احسب المساحة المحصورة بين ق (س)= ٢س ومحور السينات على [-٢ ، - ١]

الحل :

$$م = \int_{-2}^{-1} |٢ س| \ . د س =$$

٢ س = ٠ ومنها س= ٠



..لاحظ أن -١ ، -٢ ضمن الفترة السالبة .. و صفر الاقتران ليس ضمن الفترة

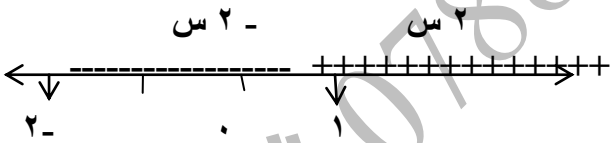
$$م = \int_{-2}^{-1} -٢ س \ . د س = - س^{٢} |_{-2}^{-1} = - ١ - - ٤ = ٣$$

٥.احسب المساحة المحصورة بين ق (س) = ٢ س ،والمستقيمين س=١، س= -٢ ومحور السينات

الحل :

$$م = \int_{-2}^{1} |٢س| \ . د س =$$

٢س = ٠ ومنها س= ٠



لاحظ ان الصفر بين -٢ ، ١ لذلك يجب ان يجزء التكامل

$$م = \int_{-2}^{0} - ٢ س \ . د س + \int_{0}^{1} ٢س \ . د س =$$

٦.احسب المساحة المحصورة بين ق(س)= س^{٣}-١ ومحور السينات في الفترة [-٢ ، ٢]

الحل :

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

الحالة الثانية

** المساحة بين اقتران ومحور السينات

طريقة الحل

١) نجد (الفترة)وذلك بمساوةالاقتران بالصفر

٢) نطبق القاعدة كما تعلمناها بالطريقة الاولى

$$م = \int_{س_1}^{س_2} |\ ق(س)\ |\ .د\ س$$

١.احسب المساحة المحصورة بين

ق (س) = ٩ - $س^2$ ومحور السينات

الحل : ٩ - $س^2$ = ٠ ومنها س = ٣ ، - ٣

$$م = \int_{-3}^{3} |\ ٩ - س^2\ |\ .د\ س$$

نلاحظ ان ٩ – $س^2$ على الفترة [- ٣ ، ٣] دائماً موجب فنهمل القيمة المطلقة

$$م = \int_{-3}^{3} (٩ - س^2)\ .د\ س = ٩(٣ - -٣) - \left(\frac{س^3}{3}\right)_{-3}^{3}$$

$$= ٥٤ - (٩ - -٩) = ٥٤ - ١٨ = ٣٦$$

٢.احسب المساحة المحصورة بين

ق (س) = $س^3$ - ٤ س ومحور السينات

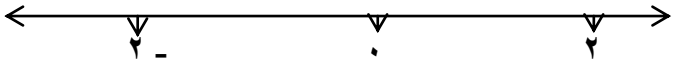
الحل :

$س^3$ - ٤ س = ٠

س ($س^2$ - ٤) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٢ ، - ٢

٤ س – $س^3$ $س^3$ - ٤ س

---------- ++++++++++



$$م = \int_{-2}^{0} (س^3 - ٤ س)\ .د\ س + \int_{0}^{2} (٤ س - س^3)\ .د\ س$$

الحالة الثالثة

** المساحة بين اقترانين

طريقة الحل

١)نجد الفترة وذلك بمساوة الاقترانين ببعض ونجد قيم س

٢) نكامل الاكبر – الاصغر حسب الفترات

لتحديد الاكبر ناخذ قيمة ضمن قيم س الناتجة ونعوض في كلاً منهما ونقارن بين النواتج

احسب المساحة المحصورة بين

ق(س)= ٦س ، هـ(س)=$٣س^2$

الحل :

نجد الفترة وذلك بمساوات الاقترانيين ببعض

$٣س^2$ = ٦ س ومنها $٣س^2$ - ٦ س = ٠

س(٣س - ٦) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٢

لتحديد الاكبر نختار رقم مثل ١ ضمن الفترة ثم نعوض

ق(١) = ٦ ، هـ (١) = ٣ نلاحظ ان ق > هـ ضمنهذه الفترة

$$م = \int_{0}^{2} (٦ س - ٣ س^2)\ .د\ س$$

---

٢. جد مساحة المحصورة ق(س)= $\sqrt{س}$ ، هـ(س)= س

ج ٦/١

٣.جد مساحة المحصورة ق(س)= $س^3$ ، هـ(س)= س

ج ٢/١

---

٤. جد مساحة المحصورة ق(س)= $س^3$ + $س^2$ ، هـ(س)= $س^3$+١

---

٥. جد مساحة المحصورة ق(س)=٢س- $س^2$ ، هـ(س)= -٣

ج ٣/٣٢

---

٦. جد مساحة المحصورة ق(س)=٢- $س^2$ ، هـ(س)= - س

ج ٣/٩

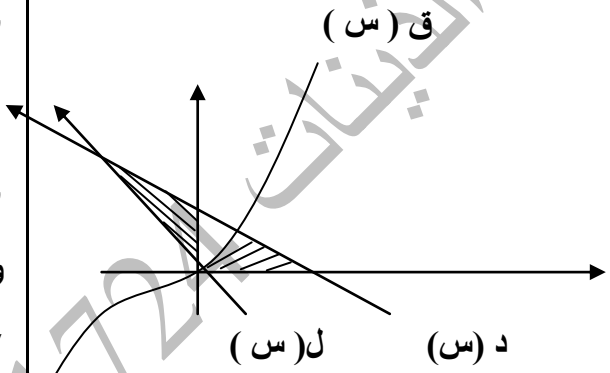
ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

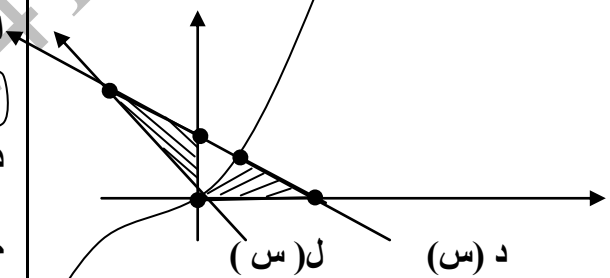
الحالـــــــــــة الرابعـــــــــــة
وهي الاهم كون اكثر الاسئلة عليها
المساحة لاكثر من اقترانين فالرسم اجباري
اســـــئلة الرســـــم نـــــوعين

النوع الاول سؤال الرسم فيه جاهز ويطلب من الطالب اوجد المساحة للمنطقة المظللة

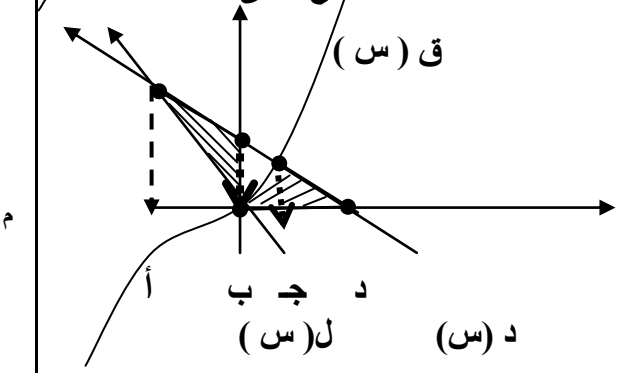
١.احسب مساحة المنطقة المظلله المبيه في الشكل المجاور ق (س) = ٢س^{٣} ، د (س) = ٣- س ، ل(س) = - ٢س



اولاً نحدد نقط التقاطع



ثانياً : نسقط اعمده من نقط التقاطع على محور السينات



ملاحظات :

١. اذا اسقط العمود واصطدم بنقطة اخرى يعتبر نقطة واحدة

٢. اذا كانت احدى نقاط التقاطع واقعة على محور السينات تعتبر احدى النقاط

٣.

$$م = \int_{أ}^{ب} (الاعلى - الاسفل) + \int_{ب}^{جـ} (الاعلى - الاسفل) + \int_{جـ}^{د} (الاعلى - الاسفل) .$$

٤. نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة الاقترانين المتقاطعين في بعض

أ ناتجة من تقاطع د(س)،ل(س)

د(س) = ل(س)

٣- س=-٢س ومنها٣=-٢س+ س ومنها س=-٣

ب واضحة = صفر

جـ ناتجة من تقاطع د(س)، ق(س)

٣- س=٢س^{٣} ومنها ٢س^{٣}+ س -٣= ٠

ومنها س = ١ لان معاملات ٣ هي ٣ ، ١ ،-١ ، -٣

عند تعويض ١ يكون الناتج صفر ونهمل السالب لان المنطقة المطلوبة في الربع الاول ونهمل ٣ لان ناتج التعويض ليس صفر

د ناتجة من تقاطع د(س) ومحور السينات

د(س)= ٠ ومنها ٣ – س = ٠ ومنها س = ٣

$$م = \int_{-٣}^{٠} (د(س) - ل(س)) + \int_{٠}^{١} (ق(س) - صفر) + \int_{١}^{٣} (د(س) - صفر) .$$

اصفار لان الاسفل هو محور السينات ومحور السينات معادلته ص = ٠

$$م = \int_{-٣}^{٠} (٣- س) - (-٢س) .د س + \int_{٠}^{١} ٢س^{٣} .د س \int_{١}^{٣} (٣- س) .د س$$

أ.ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

النوع الثاني من الاسئلة يكون المطلوب اوجد المساحة المحصورة بين الاقترانات التالية وتكون اكثر من اقترانين والاقترانات غير مرسوم

******* لرسم أي اقتران افضل طريقة*******

١. نجد نقاط تقاطع الاقتران مع المحورين السيني والصادي وذلك بفرض مرة س= ٠ ونجد قيمة ص ثم نفرض ، ص= ٠ ونجد قيمة س ويمكن ان لاتظهر الا نقطة واحدة .
٢. نجد نقط التقاطع بين كل اقترانين ثم نعينها على الرسم ويمكن ان نحتاج قيم اضافية .

مثال

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات التالية ومحور السينات ق (س) = ٢س^{٣} ، د(س)= ٣- س، ل(س) = - ٢س

الحل :

١. نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة كل اقترانين مع بعض د(س)،ل(س)

د(س) = ل(س)

٣- س=-٢س ومنها ٣=ـ ٢س+ س

ومنها س= -٣

٢. ناتجة من تقاطع د(س)، ق(س)

د(س) = ق(س)

٣- س=٢س^{٣} ومنها ٢س^{٣}+ س -٣= ٠

ومنها س=١ لان معاملات٣هي١،٣،-١،-٣

وعند تعويض ١ تحقق المعادلة

٣. ناتجة من تقاطع ل(س)، ق(س)

ل(س) = ق(س)

- ٢س=٢س^{٣} ومنها ٢س^{٣}+ ٢س = ٠

٢س(س^{٢}+١)=٠

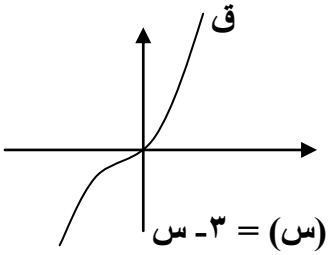
ومنها س= ٠

٤. نجد نقاط تقاطع الاقتران مع المحورين السيني والصادي وذلك بفرض مرة س= ٠ ونجد قيمة ص ثم نفرض ، ص= ٠ ونجد قيمة س ويمكن ان لاتظهر الا نقطة واحدة

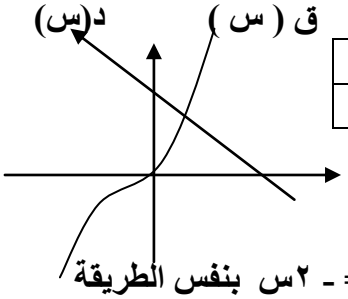
الحل :

نرسم ق(س) لا بد ان ناخذ قيم س= ٠، الناتجة من تقاطع ق(س) مع ل(س) وكذلك س= ١ ، الناتجة من تقاطع ق(س) مع د(س).

١	٠	١-
٢	٠	٢-



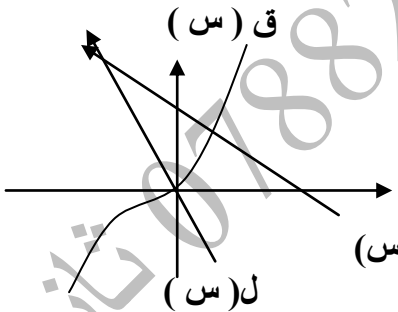
نرسم د (س) = ٣- س



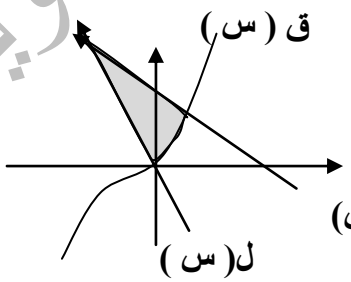
٣-	١	٣
٦	٢	٠

نرسم ل(س) = - ٢س بنفس الطريقة

٣-	٠
٦	٠

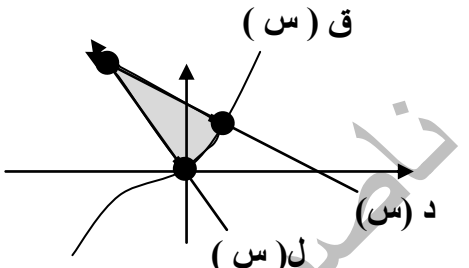


نحدد المنطقة المظللة

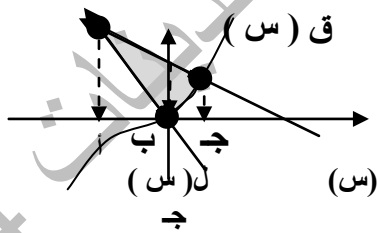


ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

ثم نتبع ما تعلمناه سابقاً
اولاً نحدد نقط التقاطع



ثانياً : نسقط اعمده من نقط التقاطع على محور السينات



$$م = \int_{أ}^{ب} (الاعلى - الاسفل)\ .د\ س + \int_{ب}^{جـ} (الاعلى - الاسفل)\ .د\ س$$

٥. نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة الاقترانين المتقاطعين في بعض

أ) ناتجة من تقاطع د(س)،ل(س) س= -٣

ب) واضحة = صفر

جـ) ناتجة من تقاطع د(س)،ق(س) س=١

$$م = \int_{-٣}^{٠} (د(س) - ل(س))\ .دس + \int_{٠}^{١} (د(س) - ق(س))\ .دس$$

$$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ - س + ٢س)\ .دس + \int_{٠}^{١} (٣ - س - ٢س^{٣})\ .د\ س$$

$$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ + س)\ د\ س + \int_{٠}^{١} (٣ - س - ٢س^{٣})\ .د\ س$$

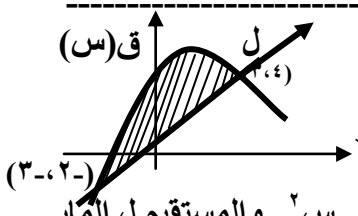
---

١. احسب المساحة المحصورة بين
هـ (س)=٥س ، ق(س)= ٤س^{٢} – ٣س
الحل :
نجد الفترة وذلك بمساوات الاقترانيين ببعض
٤ س^{٢} – ٣ س = ٥س ومنها ٤ س^{٢} – ٨ س = ٠
٤س(س - ٢) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٢
لتحديد الاكبر نختار رقم مثل ١ ضمن الفترة ثم نعوض
ق(١) = ١ ، هـ (١) = ٥ نلاحظ ان هـ > ق ضمن هذه الفترة

$$م = \int_{٠}^{٢} (٥س - (٤س^{٢} - ٣س))\ .د\ س =$$

$$م = \int_{٠}^{٢} (٨س - ٤س^{٢})\ .د\ س = ٤س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{٣} \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= ١٦ - \frac{٣٢}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$



٢. حسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور المحصورة بين منحنى ق (س) = ٧ + ٣ س – س^{٢} والمستقيم ل المار بالنقطتين (-٢ ، - ٣) ، (٤ ، ٣) ،
الحل :

$$\text{ميل المماس} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٦}{٦} = ١$$

ص – ص$_{١}$ = م (س – س $_{١}$)
ص + ٣ = س + ٢
ومنها ص = س - ١

$$م = \int_{-٢}^{٤} (٧ + ٣ س - س^{٢}) - (س - ١)\ .د\ س$$

$$م = \int_{-٢}^{٤} (٨ + ٢ س - س^{٢})\ .د\ س$$

$$= ٨(٤ - -٢) + س^{٢} \Big|_{-٢}^{٤} - ٣/١ س^{٣} \Big|_{-٢}^{٤}$$

$$= ٤٨ + (١٦ - ٤) - (٣/٦٤ + ٣/٨)$$

$$= ٤٨ + ١٢ - ٣/٤٨ = ٤٤$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٣.احسب مساحة المنطقة الواقعةفي الربع الاول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الاقترانات التالية ق(س)= س^{٢} -١ ،هـ (س) = ٥- س ، ل(س)=١ - س

الحل :

نجد نقاط التقاطع ، لاحظ ان هـ(س) ، ل(س) متوازين

ق = هـ

س^{٢} -١= ٥ - س

س^{٢} + س- ٦= ٠

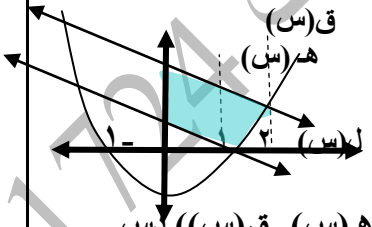
(س – ٢)(س+٣)= ٠ ومنها س = ٢ ، -٣

ق = ل

س^{٢} -١= ١ - س

س^{٢} + س- ٢= ٠

(س – ١)(س+٢)= ٠ ومنها س = ١ ، -٢



$$م=\int_{٠}^{١}(هـ(س)-ل(س))\,دس+\int_{١}^{٢}(هـ(س)-ق(س))\,دس$$

$$م=\int_{٠}^{١}(٥-س)-(١-س)\,دس+\int_{١}^{٢}((٥-س)-(س^{٢}-١))\,دس$$

$$م=\int_{٠}^{١}(٤)\,د\,س+\int_{١}^{٢}(٦-س-س^{٢})\,د\,س$$

$$=٤س\Big|_{٠}^{١}+(٦س-٢/١\,س^{٢}-٣/١\,س^{٣})\Big|_{١}^{٢}$$

$$=٤+(١٢-٢-٣/٨)-(٦-٢/١-٣/١)$$

$$=٦/٣٧$$

---

٤. اذا كان ق (س) = - س^{٣} ، د (س) = ٨

ل(س) = س فجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة.

الحل :

نجد نقاط التقاطع

ق = ل

- س^{٣} = س

- س^{٣} – س= ٠

- س(س^{٢} + ١)= ٠ ومنها س = ٠

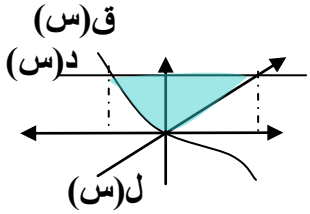
ق = د

- س^{٣} – ٨= ٠

- (س+٢)(س^{٢} -٢س+ ٤)= ٠

ومنها س = -٢

ل = د ومنها س = ٨



$$م=\int_{-٢}^{٠}(د(س)-ق(س))\,دس+\int_{٠}^{٨}(د(س)-هـ(س))\,دس$$

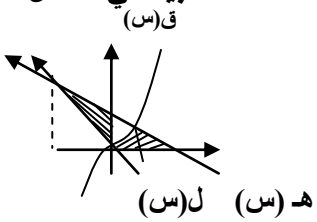
$$م=\int_{٠}^{٨}(٨+س^{٣})\,دس+\int_{٠}^{٨}(٨-س)\,دس$$

$$=٨(٠--٢)+\frac{س^{٤}}{٤}\Big|_{٠}^{٢}+٨(٨-٠)-\frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{٨}$$

$$=١٦-٤+٦٤-٣٢=٤٤\ \text{وحدة مربعة}$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٥.احسب مساحة المنطقة المظلله المبيه في الشكل المجاور ق (س)=٢س^{٣} ، هـ (س)=٣- س ، ل(س) = - ٢س



الحل:

هـ(س) = ل(س)

٣- س=-٢س ومنها٣=-٢س+ س ومنها س= -٣

ناتجة من تقاطع هـ(س)= ق(س)

٣- س=٢س^{٣} ومنها ٢س^{٣}+ س -٣= ٠

ومنها س = ١

نقاط تقاطع هـ(س) ومحور السينات

هـ(س)= ٠ ومنها ٣ – س = ٠ ومنها س = ٣

$$م = \int_{-٣}^{٠} (هـ(س) - ل(س)) + \int_{٠}^{١} (ق(س) - صفر) + \int_{١}^{٣} (هـ(س) - صفر)$$

اصفار لان الاسفل هو محور السينات ومحور السينات

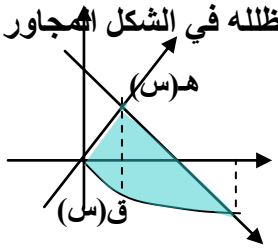
معادلته ص = ٠

$$م = \int_{-٣}^{١} (٣- س) - (- ٢س) \, .دس + \int_{٠}^{١} ٢س^{٣} .د س + \int_{١}^{٣} (٣- س) .د س$$

$$= |(٣س + ٢/١ س^{٢})|_{-٣}^{٠} + |٢/١ س^{٤}|_{٠}^{١} + |(٣س - ٢/١ س^{٢})|_{١}^{٣}$$

= ٧ وحدات

٦.جد مساحة المنطقة المظلله في الشكل المجاور



ق(س)= - $\sqrt{س}$ ،

هـ (س) = س ،

ل(س) = ٦ - ٢س

الحل :

نجد نقاط التقاطع

ق = ل

- $\sqrt{س}$ = ٦ - ٢س

س = ٣٦ - ٢٤س + ٤س^{٢}

٤س^{٢} - ٢٥س + ٣٦ = ٠

(٤س -٩)(س - ٤)= ٠ ومنها س = ٤ ، ٤/٩

ق = هـ

- $\sqrt{س}$ = س

س = س^{٢}

س^{٢} - س = ٠

س(س -١)= ٠ ومنها س = ١ ، ٠

هـ = ل

٦ - ٢س= س

ومنها س = ٢

$$م = \int_{٠}^{٢} (هـ(س) - ق(س)) \, .دس + \int_{٢}^{٤} (ل(س) - ق(س)) \, .دس$$

$$م = \int_{٠}^{٢} (س + س^{٢/١}) \, .دس + \int_{٢}^{٤} (٦ - ٢س + س^{٢/١}) \, .دس$$

$$= |\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{٣} س^{٣/٢}|_{٠}^{٢} + ٦(٤-٢) - |س^{٢} + \frac{٢}{٣} س^{٣/٢}|_{٢}^{٤}$$

$$= ٢ + \frac{٨\sqrt{٢}}{٣} + ١٢ - ١٢ + \frac{٢ \times ٨}{٣} - \frac{٨\sqrt{٢}}{٣}$$

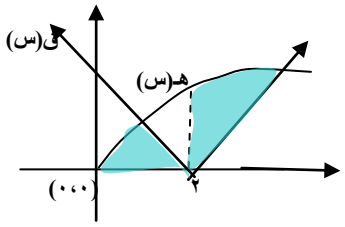
$$= ٧\frac{١}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

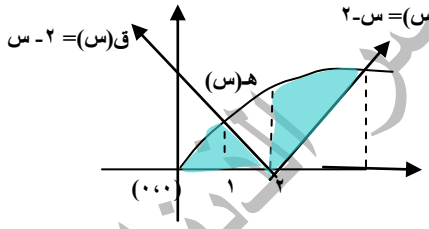
١٠. جد مساحة المنطقة المظلله في الشكل المجاور

ق(س)= | س -٢|

هـ (س)= |س|



الحل :



،

هـ = ق

|س| = ٢ - س

س = ٤ - ٤س + س^{٢}

س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠

(س - ١)(س - ٤)= ٠ ومنها س = ✕ ، ١

هـ = ق

|س| = س - ٢

س = س^{٢} - ٤س + ٤

س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠

(س - ١)(س - ٤)= ٠ ومنها س = ٤ ، ١✕

$$م=\int_{٠}^{١}|س|.دس+\int_{١}^{٢}(٢-س).دس+\int_{٢}^{٤}|س-(س-٢)|.دس$$

$$م=\int_{٠}^{١}|س|.دس+\int_{١}^{٢}(٢-س).دس+\int_{٢}^{٤}|س-س+٢|.دس$$

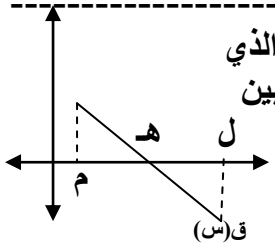
$$=\left|\frac{س^{٣}}{٣}+٢س-\frac{س^{٢}}{٢}\right|_{٠}^{١}+\left|\frac{س^{٢}}{٢}-\frac{س^{٣}}{٣}+٢س\right|_{٢}^{٤}$$

$$=\frac{٧}{٦}+\frac{١٦-٤\sqrt{٢}}{٣}$$

$$=\frac{٢٧-٨\sqrt{٢}}{٦}$$

---

١١. في الشكل المجاور التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)ومحور السينات والمستقيمين س= م ، س = ل هو :



أ) $\int_{م}^{ل}$ ق(س).دس

ب) $\int_{م}^{ل}$ - ق(س).دس

ج) $\int_{م}^{ل}$ |ق(س)|.دس

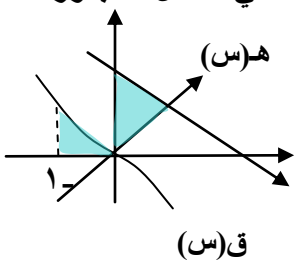
د) $\int_{م}^{ل}$ |ق(س)|^{٢}.دس

١٢.جد مساحة المنطقة المظلله في الشكل المجاور

ق(س)= - س^{٣} ،

هـ (س) = س ،

ل(س) = ٣ - ٢س



الحل : نجد نقاط التقاطع

هـ = ل

س = ٣ - ٢س

٣س = ٣ ومنها س = ١

ومنها س = ٢

$$م=\int_{٠}^{١}(ق(س)-٠).دس+\int_{١}^{٢}(ل(س)-هـ(س)).دس$$

$$م=\int_{-١}^{٠}-س^{٣}.دس+\int_{٠}^{١}(٣-٢س-س).دس$$

$$م=\int_{-١}^{٠}-س^{٣}.دس+\int_{٠}^{١}(٣-٣س).دس$$

$$=\left|-\frac{س^{٤}}{٤}\right|_{-١}^{٠}+\left|٣(١-٠)-\frac{٣س^{٢}}{٢}\right|_{٠}^{١}$$

$$=\frac{١}{٤}+٣-\frac{٣}{٢}=\frac{١+١٢-٦}{٤}=\frac{٧}{٤}$$ وحدة مربعة

ناصر ذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٣.في الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [هـ ، و] ،وكانت
م ١ = ٤ وحدات مربعة
م٢ = ٣ وحدات مربعة فان
هـ
أ ق (س) . د س يساوي
و
أ) ٧ ب) -٧ ج) ١ د) - ١

١٤.جد مساحة المنطقة المظلله في الشكل المجاور

ق(س)= س٢ ، ل(س)
١
هـ (س) = ـــــ ،
س٢
ل(س) = ٤

الحل : نجد نقاط التقاطع

هـ = ل
١
ـــــ = ٤ ومنها س = ±٢/١ يهمل السالب
س٢
هـ = ق
١
ـــــ = س٢ ومنها س = ±١ يهمل السالب
س٢

٢/١ ١
م=أ(ل(س)- ق(س)).دس + أ (هـ(س)- ق(س)) .دس
٠ ٢/١

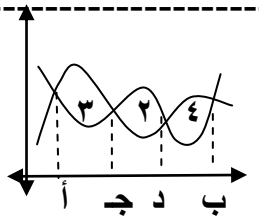
٢/١ ١
م=أ(٤- س٢).دس + أ (س-٢- س٢) .دس
٠ ٢/١

٢/١ ١ ١
م= ٤س - ٣/١ س٣ | + (ـــــ - ٣/١س٣)|
٠ س ٢/١

١ ١ ١
=-٢ ـــــ + (-١ - ـــــ) – (-٢ - ـــــ)
٢٤ ٣ ٢٤

٨
= ـــــ وحدة مربعة
٣

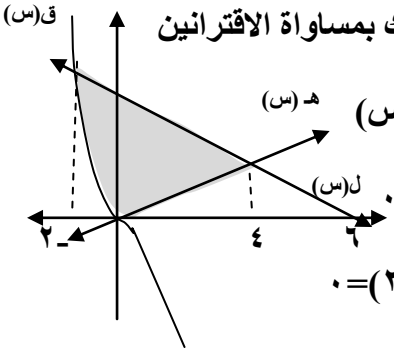
١٥.اذا كان ق، هـ اقترانين متصلين في الفترة [أ ، ب] وكانت مساحات المناطق بين الاقترانيين كما هو مبين في الشكل المجاور فان



ب
أ (ق(س)– هـ(س)).د س يساوي
جـ
أ) ٦ ب) -٢ ج) ٢ د) - ٥

١٦.احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات التالية ق(س)=- س٣ ،هـ(س)=٢/١س
ل(س)=٦- س

الحل :



نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة الاقترانين المتقاطعين في بعض
*** ق(س) = هـ(س)
- س٣=٢/١س
ومنها س٣+ ٢/١س=٠
ومنها س(س٢+ ٢/١)=٠
ومنها س=٠
*** ل(س)= ق(س)
٦- س=٢/١ س ومنها٢/٣س=٦ ومنها س =٤
*** ل(س)= هـ(س)
٦- س=- س٣ ومنها س٣ - س +٦= ٠
ومنها(س-٢)(س٢-٢س +٣)=٠ ومنها س=- ٢

٤
م=أ(ل(س)- ق(س)).دس + أ (ل(س)- هـ (س)) .دس
٠ ٢-

٤
م=أ(٦- س+ س٣). دس+أ(٦- س)-٢/١س. د س
٠ ٢-

٤
م=أ(٦- س+ س٣). دس+أ(٦- ٢/٣س)·د س
٠ ٢-

٤
م=٦ س- ٢/١س٢+ ٤/١س٤ |+ ٦س- ٤/٣س٣ |
٠ ٢-

= (٠) - (-١٢-٢+٤)+ (٢٤ – ١٢) – (٠)
= ١٠ + ١٢ = ٢٢

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

١٧.احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات التالية

ق (س) = س^{٣} ، هـ (س) = س^{٢} + ٤

ل(س) = - ٤ س

الحل :

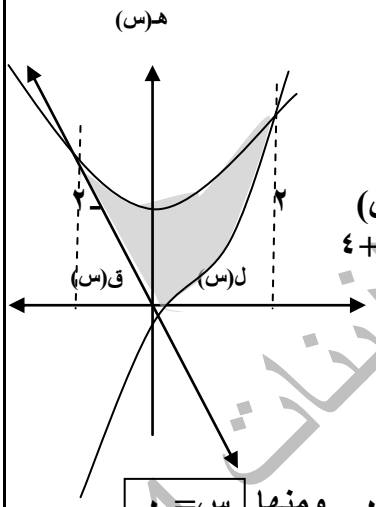
نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة الاقترانين المتقاطعين في بعض

*** ق(س) = هـ(س)

س^{٣} = س^{٢} + ٤

ومنها س^{٣} - س^{٢} - ٤ = ٠

ومنها س = ٢



*** ل(س) = ق(س)

- ٤س = س^{٣}

س(س^{٢} + ٤) = ٠ ومنها س = ٠

*** ل(س) = هـ(س)

- ٤س = س^{٢} + ٤ ومنها س^{٢} + ٤ س + ٤ = ٠

ومنها (س+٢)(س +٢)= ٠ ومنها س = -٢

$$م = \int_{-٢}^{٠} (هـ(س) - ل(س))\,دس + \int_{٠}^{٢} (هـ(س) - ق(س))\,دس$$

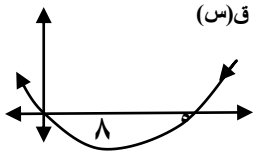
$$م = \int_{-٢}^{٠} (س^{٢} + ٤ + ٤س)\,دس + \int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ٤ - س^{٣})\,دس$$

$$م = \left| ١/٣ س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س \right|_{-٢}^{٠} + \left| ٤س + ١/٤ س^{٤} - ١/٣ س^{٣} \right|_{٠}^{٢}$$

$$= -(-٨ + ٣/٨ - ٨) + (٨ - ٤ + ٣/٨)$$

$$= ٣/٨ + ١٦ = ٣/٢٨ \text{ وحدة مربعة}$$

١٨.في الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) اذا كانت المساحة (م) المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات تساوي (٨) وحدات مربعة فان



$$\int_{٠}^{٥} (١ - ق(س))\,.\,د س \text{ يساوي}$$

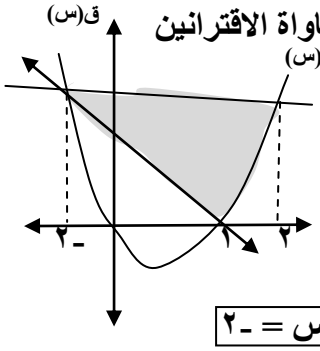
أ) -٣ ب) ٣ ج) ٢ د) ٤

١٩.احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات التالية ق (س) = س^{٢} - ١ ، هـ (س) = ١ - س

ل(س) = ٣

الحل :

نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة الاقترانين المتقاطعين في بعض



*** ق(س) = هـ(س)

س^{٢} - ١ = ١ - س

ومنها س^{٢} + س - ٢ = ٠

ومنها (س-١)(س+ ٢)= ٠

ومنها س = ١ ، س = -٢

*** ل(س) = ق(س)

٣ = س^{٢} - ١ ومنها س = ± ٢

*** ل(س) = هـ(س)

٣ = ١ - س ومنها س = -٢

$$م = \int_{-٢}^{١} (ل(س) - هـ(س))\,دس + \int_{١}^{٢} (ل(س) - ق(س))\,دس$$

$$م = \int_{-٢}^{١} (٣ + س - ١)\,دس + \int_{١}^{٢} (٣ - س^{٢} + ١)\,دس$$

$$م = \int_{-٢}^{١} (٢ + س)\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - س^{٢})\,دس$$

$$م = \left| ٢ س + ١/٢ س^{٢} \right|_{-٢}^{١} + \left| ٤س - ١/٢ س^{٢} \right|_{١}^{٢}$$

$$= (٢ + ٢/٣ + ٦) + (٦ - ٢/٧)$$

$$= ١٢ - ٢ = ١٠ \text{ وحدات مربعة}$$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٠.جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق = جتا(πس) ومحور السينات بالفترة [٠ ، ٢]
الحل :

$$م = \int_{٠}^{٢} |\ جتا(\pi س)\ |\ .\ دس$$

جتا(πس) = ٠ ومنها πس = π/٢ ، ٣π/٢
ومنها س = ١/٢ ، ٣/٢

$$م = \int_{٠}^{١/٢} جتا(\pi س).دس - \int_{١/٢}^{٣/٢} جتا(\pi س).دس + \int_{٣/٢}^{٢} جتا(\pi س).دس$$

$$م = \left|\frac{جا(\pi س)}{\pi}\right|_{٠}^{١/٢} - \left|\frac{جا(\pi س)}{\pi}\right|_{١/٢}^{٣/٢} + \left|\frac{جا(\pi س)}{\pi}\right|_{٣/٢}^{٢}$$

م = ١/π + (١/π + ١/π) + ١/π = ٤/π

٢١.جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات التالية : ق(س)= س^{٢} ، هـ (س)=٤س ، ل(س)=١٦

الحل : نجد نقاط التقاطع

**** ق = هـ

س^{٢} = ٤س

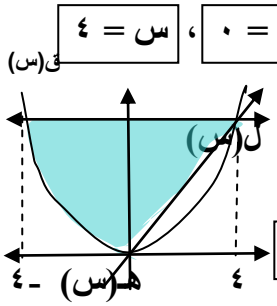
س(س-٤)=٠ ومنها [س = ٠] ، [س = ٤]

*** ق = ل

س^{٢} = ١٦ ومنها [س = ±٤]

** هـ = ل

٤س = ١٦ ومنها [س=٤]



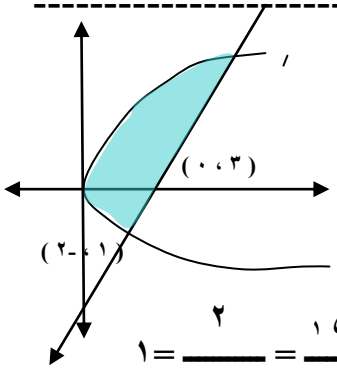
$$م = \int_{-٤}^{٤} (ل(س) - ق(س)).دس + \int_{٤}^{٤} (ل(س) - هـ(س))\ .دس$$

$$م = \int_{-٤}^{٤} (١٦ - س^{٢}).دس + \int_{٤}^{٤} (١٦ - ٤س)\ .دس$$

$$م = \left|١٦س - \frac{١}{٣}س^{٣}\right|_{-٤}^{٤} + \left|١٦س - ٢س^{٢}\right|_{٤}^{٤}$$

م=(٠)- (-٦٤+٦٤/٣)+(٦٤- ٣٢) = ٣/٢٢٤ وحدة مربعة

٢٢.احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور المحصورة بين منحنى ص^{٢} = ٤ س والمستقيم ل انظر الشكل.



الحل :

$$\text{ميل المماس} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)
ص = س – ٣

نجد نقاط التقاطع

(س – ٣)^{٢} = ٤ س
س^{٢} – ٦س + ٩ = ٤ س
س^{٢} – ١٠س +٩ = ٠
(س -٩)(س-١)= ٠ ومنها س= ١ ، ٩

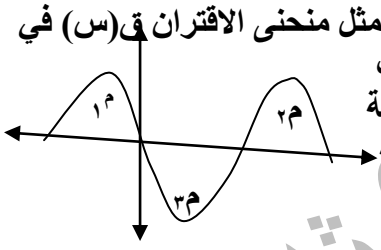
$$م = \int_{١}^{٩} ٤(س)^{١/٢}.دس + \int_{١}^{٩} ٢(س)^{١/٢} - (س-٣)\ .د\ س$$

$$م = \left|٣/٨(س)^{٣/٢} + (٣/٤)(س)^{٣/٢} - ١/٢س^{٢} + ٣س\right|_{١}^{٩}$$

م =(٣/٨) + (٣٦ – ٢/٨١ +٢٧)-(٣/٤ -١/٢ +٣)
= ٣/٦٤ وحدة مربعة

---

٢٣. في الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [-٤ ، ٥] ،وكانت
م$_{١}$ = ٧ وحدات مربعة
م$_{٢}$ = ٤ وحدات مربعة
م$_{٣}$= ٥ وحدات مربعة



جد ما يلي

١) $\int_{-٤}^{٥} ق(س)\ .د\ س = \int_{-٤}^{٢} ق(س).د\ س + \int_{٢}^{٥} ق(س).د\ س$

= ١/٢ (٧ - ٤) = -١.٥

٢) جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات بالفترة [-٤ ، ٥]

$$م = \int_{-٤}^{٥} |\ ق(س)\ |\ .دس = ٧ + ٤ + ٥ = ١٦$$

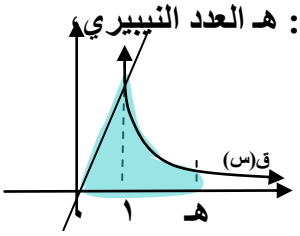
ناصر ذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٤. جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران

ق (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، والمستقيم ٢س- ص=٠

، والمستقيم س – هـ = ٠ : هـ العدد النيبيري

ومحور السينات



الحل :

نجد نقاط التقاطع

ص = ق

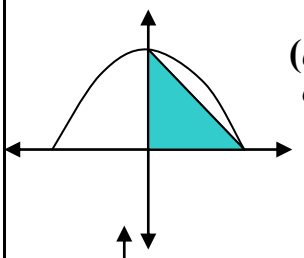
$\frac{١}{س^{٢}}$ = ٢س ومنها س = ±١ يهمل السالب

م=$\int_{٠}^{١}$(٢س).دس + $\int_{١}^{هـ}$ $\frac{١}{س}$.دس

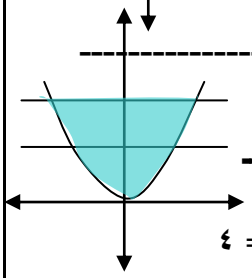
م= $|س^{٢}|_{٠}^{١}$ + ٢لو$|س|_{١}^{هـ}$

=(١- ٠) + (٢ - ٠) = ٣

مثال : ق(س) =(١+س)(جـ - س) الذي يمثله الرسم المجاور ،وكانت مساحة المثلث المظلل ٨ وحدات مربعة ، جد المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات



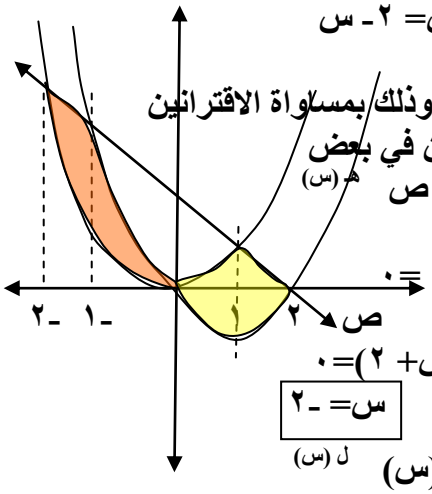
مثال : في الرسم المجاور جد قيمة جـ التي تجعل ص= جـ تنصف المساحة المحصورة بين ق(س)= $س^{٢}$ ، ص= ٤



٢٥.احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات التالية

ق (س) = $س^{٢}$ ، هـ (س) = $س^{٢}$ - ٢س

ص= ٢- س



الحل :

نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة الاقترانين المتقاطعين في بعض

*** ق(س) = ص

$س^{٢}$ =٢ - س

ومنها $س^{٢}$+ س-٢ =٠

ومنها (س-١)(س+ ٢)=٠

س= ١ ، س=-٢

*** ق(س) = هـ(س)

$س^{٢}$ = $س^{٢}$ - ٢س

ومنها ٢س=٠

ومنها س= ٠

*** ص = هـ(س)

٢- س = $س^{٢}$ - ٢س

ومنها $س^{٢}$ - س-٢ =٠

ومنها (س+١)(س- ٢)=٠

س=-١ ، س=٢

م=$\int_{-٢}^{١}$(ل(س)- هـ(س)).دس + $\int_{١}^{٢}$ (ل(س)- ق (س)) .دس

م=$\int_{-٢}^{١}$(٣+ س-١).دس + $\int_{١}^{٢}$ (٣– $س^{٢}$ +١) .دس

م=$\int_{-٢}^{١}$(٢+ س).دس + $\int_{١}^{٢}$ (٤– $س^{٢}$) .دس

م= ٢ س- ٢/١$س^{٢}$ $|_{-٢}^{١}$+ ٤س- ٢/١$س^{٢}$ $|_{١}^{٢}$

= (٢/٣ +٦)+ (٦ – ٢/٧)

= ١٢ – ٢ = ١٠ وحدات مربعة

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

٢٦.احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين

ق(س)=١+جاس، هـ(س)=١+ جتا س

في الفترة [$\pi/2$ ، $\pi/2$ ٣]

الحل : لا يحتاج الى رسم

نجد نقط التقاطع وذلك بمساواة

*** ق(س) = هـ (س)

١+جاس =١+ جتا س

ومنها جاس= جتا س

ومنها س= $\pi/4$ خارج الفترة ، ٥ $\pi/4$

$\pi/2$ ٣ $\pi/4$ ٥

م=$\int$(جا س - جتاس).دس + $\int$ (جتاس – جا س) .دس

$\pi/4$ ٥ $\pi/2$

$\pi/2$ ٣ $\pi/4$ ٥ $\pi/4$ ٥

م=- جتاس- جاس |+ جاس+ جتاس|

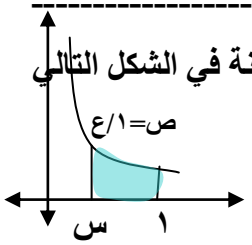
$\pi/2$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (-1-0) + (0+1-) - (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \frac{4}{\sqrt{2}}$

---

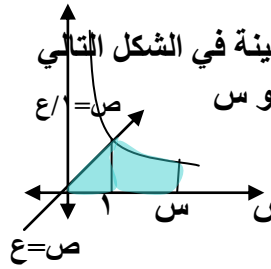
٢٧. مساحة المنطقة المظللة المبينة في الشكل التالي



أ) - لوس ب) لو س

ج) هـ^{س} د) – هـ$^{-س}$

٢٨.مساحة المنطقة المظللة المبينة في الشكل التالي



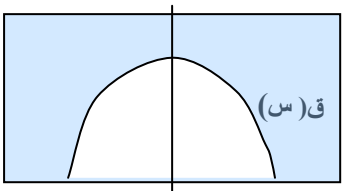
أ)٢/١ - لوس ب)٢/١+ لو س

ج)١+ لوس د) -١+ لوس

اسئلـــــــــــــــة اضافيـــــــــــــــة

١. يمثل الشكل واجهة مبنى ، مدخل المبنى يمثله المنحنى ق(س) = ٨ – ٢/١ س^{٢} ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة ، اذا علمت ان سعر دهان الوحدة المربعة ٤٠ قرش ؟

١٤ وحدة ١٤ وحدة



١٢ وحدة

---

٢. احسب المساحة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين منحنى ق (س) =| س- ٢| ، هـ (س) = ١٠ - س^{٢} ومحور الصادات

---

٣. احسب المساحة المحصورة بين ق(س)=١/٤س^{٢}،والمستقيمين ص=١، ص=٩

---

٤. جد قيمة أ بحيث أن المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين المحنى س ^{٢} = ص، والمستقيم س= ٢، ومحور السينات إلى قسمين متساويين

---

٥. احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتا س والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠ ، ١) ، ($\pi/2$ ، ٠)

---

٦. احسب المساحة المحصورة بين ق(س)= س ، س^{٢} = ٤ ص

---

٧. احسب المساحة المحصورة بين منحنى ق (س)= س^{٢}+١ ، ومحور السينات والمستقيمين س = - ٢ ، س = ٢

---

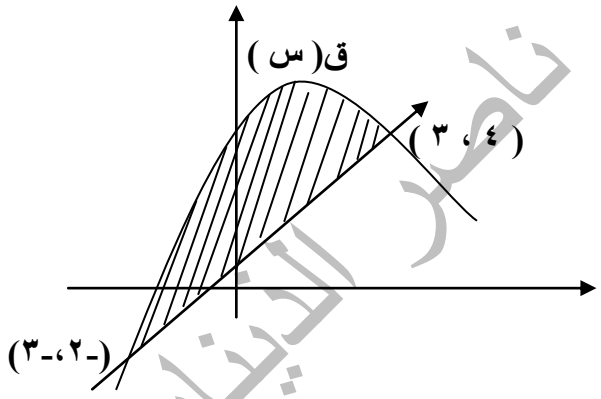
٨. احسب المساحة المحصورة بين ص^{٢} = ٤س ، والمستقيم س – ص = ٣

---

٩. احسب المساحة المحصورة بين منحنى ص^{٢}=٢٤– ٨س ، ومحور السينات الواقعة في الربع الاول

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٠. احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور المحصورة بين منحنى
ق (س) = ٧ + ٣ س– س^{٢}
والمستقيمين (-٢ ، - ٣) ، (٤ ، ٣) ،

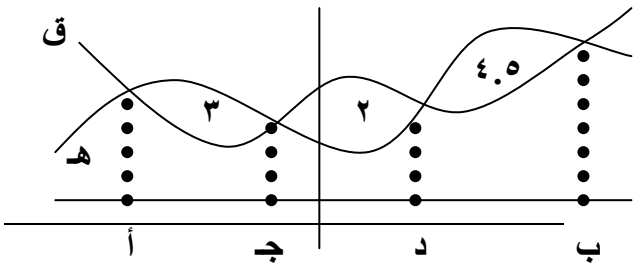


---

١١. احسب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الاقترانات ق (س) = س^{٢} – ١ ،
د (س) = ٥- س ، ل(س) = ١- س

---

١٢. في الشكل المجاور اوجد
ب
أ (ق (س) – هـ (س)) . د س علماً بان
جـ
الارقام تمثل المساحة بين ق ، هـ



ج : -٢.٥

---

١٣. في الشكل السابق اوجد
المساحة المحصورة بين ق ، هـ في الفترة [جـ ، ب]

ج : ٦.٥

اسئلـــــــــــــــة اضافيـــــــــــــــة

احسب المساحة المحصورة بين

١. ق (س) = ٤ - س ^{٢}، هـ (س) = ١٢
والمستقيمين س = - ١٤، س = ١٤

٢. اذا كانت المساحة المحصورة بين
ق(س)= س^{٢} ، هـ (س)= أ س ، أ > ٠
تساوي ٣/٤ جد قيمة أ

٣. ق (س)=١ – س^{٢} والمستقيم ص– س=٢
و محوري السينات والصادات

٤. ق(س)=٩- س^{٢} ، - ١ ≤ س ≤ ١

٥. ص= ١٦ (س – ١)^{٣} والمستقيم
ص = ٢ – ٢/١ س ومحور السينات

٦. ص = جا س ، ص = جتا س ومحور الصادات
في الفترة [٠ ، π/٤]

٧. ق(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ والمستقيم س + ٦ ص = ٥

٨. ص = جتا س والمستقيم ص= $\frac{١}{٢}$
، (π/٦ ، ٥ π/٦) ومحور السينات

٩. ص^{٢}= س ، ص= س-٢ ومحور السينات في الربع الأول

١٠. ص= س^{٢} ، ص= ١ ، ص= ٨-٢س الواقعة في الربع الأول

١١. ص^{٢}=٤س ، والمستقيم ٣ص=٨-٢س ومحور السينات في الربع الرابع

١٢. ص س=١ ، هـ(س) = س ، ق(س) = ٣

١٣. ص=١- س^{٢} ، ص= ٤- س ومحور السينات والصادات

١٤. ص(س+١)=١، هـ(س)= (٦/١) س والمستقيم ص=٢

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٥. ق(س)= هـ^{٢س} ،س=-١ ، س= ٢ ومحور السينات
١٦. إذا كانت المساحة المحصورة بين ص^{٢} = س والمستقيم ص= ٢ ومحور الصادات تساوي مثلي المساحة المحصورة بين ص^{٢} = س والمستقيم ص= أ ومحور الصادات) ٠ < أ < ٢ اوجد قيمة أ
١٧. استخدم فكرة التكامل في حساب مساحة المثلث الذي رؤوسه (٠، ٠) ،(٤، ٠) ، (٤، ٣)
١٨. اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين ص^{٢} = ٤س والمستقيم ٣ص = ٨- ٢س ومحور السينات والواقعة في الربع الرابع
١٩. ص= لوس ، س=هـ ومحور السينات
٢٠. ص س =٤ ، س= ١ ، س= ٢ ، ص= ١ حول محور الصادات
٢١. ق(س)= جا س ، هـ(س)= جتا س ، ص= ١في الفترة [٠ ، ٢/π]
٢٢. ص = هـ ^{س} ، ص = هـ$^{-س}$ ومحور السينات والمستقيم س= ١ ، س= -١
٢٣. ق(س)= س ^{٣} ، ص = ١ ، ص= ٨ ومحور الصادات
٢٤. اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = س + ٦ ، ص = س^{٣} ، ص =-١/٢س
٢٥. احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين

ق(س)=جاس،هـ(س)=جتا س

في الفترة [٤/π ، ٥ ٤/π]

٢٦. اوجد المساحة المحصورة بين محور السينات السالب ومحور الصادات والمستقيم ص= ١٦

والمنحنى ق(س)= س^{٢}+٢س-٨

المراجعة

السؤال الاول :

أ) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٤س + ١}\ .د س = \int_{٢}^{٣} (٤س + ١)^{١/٢}\ .د س$

$= ١٢/٢\ (٤س + ١)^{٣/٢}\ |_{٢}^{٣} = ٦/١\ \sqrt{(١٣)^{٣}} - ٢٧$

ب) $\int_{١}^{١} \frac{(١ + س)^{٧}}{س^{٢}\ س^{٧}}\ .دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} (\frac{١}{س} + ١)^{٧}\ .دس$

$ص = -\frac{١}{س} + ١$

$دص = \frac{١}{س^{٢}}\ .دس$

$-س^{٢}\ .د ص = د س$

$\int_{٢}^{٤} \frac{١}{س^{٢}} (ص)^{٧} \times -س^{٢}\ .د ص$

$\int_{٢}^{٤} -ص^{٧}\ .د ص = \frac{-ص^{٨}}{٨}\ |_{٢}^{٤} = -١/٨((٤)^{٨} - (٢)^{٨})$

جـ) $\int_{١}^{٤} |س^{٢} - ٩|\ .د س$

$= \int_{١}^{٣} (٩ - س^{٢})\ .د س + \int_{٣}^{٤} (س^{٢} - ٩)\ .د س$

$= ٩(٣-١) - \frac{س^{٣}}{٣}\ |_{١}^{٣} + \frac{س^{٣}}{٣}\ |_{٣}^{٤} = ٣/٣٨$

د) $\int_{١}^{٧} [١/٣ س - ٢]\ .د س$

$= \int_{١}^{٣} -٢\ .د س + \int_{٣}^{٦} -١.د س + \int_{٦}^{٧} صفر.د س = -٧$

ناصر ذينات ثانوية اربد 0788241724

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

هـ) ∫ هـ$^{٣/٢س}$. د س = ٢/٣ هـ$^{٣/٢س}$ + جـ

و) ∫ $\frac{١}{١ + \sqrt[٣]{س}}$. د س

الحل : ص^{٣} = س

٣ ص^{٢} . د ص = د س

= ∫ $\frac{١}{١ + ص}$ ٣ ص^{٢} . د ص

= ∫ (٣ص-٣) + $\frac{٣}{١ + ص}$. د ص

= ٢/٣ص^{٢} – ٣ص + ٣ لو | ١ + ص | + جـ

عوض قيمة ص

ز) ∫ هـ^{س} جا س . د س

الحل :

ق = هـ^{س} د هـ = جا س . د س

× ∫ -

د ق = هـ^{س} د س ← هـ = - جتا س

= - هـ^{س} جتا س + ∫ هـ^{س} جتا س. د س

ق = هـ^{س} د هـ = جتا س . د س

× ∫ -

د ق = هـ^{س} د س ← هـ = جا س

∫هـ^{س} جاس.دس=- هـ^{س} جتاس+هـ^{س}جاس- ∫ هـ^{س} جاس.دس

∫هـ^{س} جاس.دس=١/٢ (- هـ^{س} جتاس+هـ^{س}جاس) +جـ

ح) ∫ قا^{٢}س لو ظا^{٢}س. د س

الحل :

ق =٢لو ظاس د هـ = قا^{٢}س. د س

× ∫ -

قا^{٢}س ← د س ـــــ هـ = ظاس

د ق =٢ × ـــــ

ظاس

= ٢ظاس لو ظاس - ٢ ∫ قا^{٢}س . د س

= ٢ظاس لو ظاس - ٢ظاس + جـ

ط) ∫ $\frac{\text{لو } \sqrt{س + ٢}}{س + ٢}$. د س

ص^{٢} = س + ٢

٢ص . د ص = د س

∫ $\frac{٢ص \text{ لو ص}}{ص^{٢}}$. د ص = ٢ ∫ $\frac{\text{لو ص}}{ص}$. د ص

ع = لو ص

ص. دع = دص

= ٢ ∫ ص . $\frac{ع}{ص}$. د ع

= ٢ ∫ ع . د ع = ع^{٢} + جـ

= (لو $\sqrt{س + ٢}$)^{٢} + جـ

ي) ∫ $\frac{١}{س (س^{٩} + ١)}$. د س

الحل : ص = س^{٩} + ١

د ص

د س = ـــــ

٩س^{٨}

∫ $\frac{١}{٩س^{٩}(ص)}$. د ص

∫ $\frac{١}{٩ (ص)(ص - ١)}$. د ص

$\frac{١}{ص(ص - ١)} = \frac{أ}{٩ص} + \frac{ب}{ص - ١}$

١ = أ (ص- ١) + ب(٩ص)

عندما ص = ١ ومنها ب = ١/٩

عندما ص = ٠ ومنها أ = -١

∫ $\frac{١}{٩ص(ص - ١)}$. د ص = ∫ $\frac{-١}{٩ص}$ + ∫ $\frac{٩/١}{ص - ١}$. د ص

= -١ لو | ٩ص | + ٩/١ لو | ص- ١ | + جـ

= -١ لو | ٩س^{٢} + ٩| + ٢/١ لو | س^{٩} | + جـ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

ك) $\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}$. دس

ج:

$\int \frac{١}{س^{٣}} \sqrt{\frac{١}{س^{٢}} - ١}$. دس

$ص = \frac{١}{س^{٢}} - ١$

$- ٢ س$

$دص = \frac{}{س^{٤}}$. دس

$دس = -٢/١ س^{٣}$. دص

$\int \frac{١}{س^{٣}} ص^{٢/١} \times (-٢/١ س^{٣})$. دص

$-٢/١ \int ص^{٢/١}$. دص $= -٣/١ ص^{٢/٣} + جـ$

$= \frac{-١}{٣} \sqrt{(\frac{١}{س^{٢}} - ١)^{٣}} + جـ$

السؤال الثاني :

ا) ق(س) $= ٢ س - ٢$

قَ (س) $= ٢$

ب) $\int_{٣}^{١}$ (هـ (س) -٢ق(س)$+ ٢ س - ٤$). د س

$= \int_{٣}^{١}$ هـ(س).دس $-٢ \int_{٣}^{١}$ق(س).دس $+ س^{٢}|_{-٣}^{١} - ٤(١-٣)$

$= -٥ - ٢ \times -٦ + ١ - ٩ + ٨ = -٥ + ١٢ = ٧$

السؤال الثالث :

افرض كثير حدود ق(س)= أس + ب

$\int_{-١}^{١}$ (أ س + ب). د س $= ٤$

$\frac{أ}{٢} س^{٢} + ٢ ب = ٤$

أ / ٢ (١ – ١) + ٢ ب = ٤ ومنها ب = ٢

$\int_{١}^{٣}$ (أ س + ٢). د س $= ٢$

$\frac{أ}{٢} س^{٢} + ٢(٣-١) = ٢$

أ / ٢ (٩ – ١) + ٤ = ٢ ومنها أ $= -٢/١$

اذن ق(س)$= -٢/١ س + ٢$

السؤال الرابع :

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{س}$

$\int \frac{د ص}{ص} = \int \frac{دس}{س}$

لو | ص | = لو | س | + جـ

ص = هـ (لو | س | + جـ)

السؤال الخامس :

ا) $ص^{٢} =$ لو س ص $- هـ^{س^{٢}}$

$٢ص صَ = \frac{١ \times ص + س \times صَ}{س ص} - ٢ س هـ^{س^{٢}}$

$٢س ص^{٢} صَ = ١ \times ص + س \times صَ - ٢س^{٢} ص هـ^{س^{٢}}$

$٢س ص^{٢} صَ - س \times صَ = ص - ٢ س^{٢} ص هـ^{س^{٢}}$

صَ (٢س $ص^{٢}$ - س) $=$ ص - ٢ $س^{٢}$ ص $هـ^{س^{٢}}$

$صَ = \frac{ص - ٢س^{٢} ص هـ^{س^{٢}}}{٢س ص^{٢} - س}$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

ب) ص = أ ق(س)
لوص = ق(س) لو أ
١
ـــــ × صَ = قَ(س) لو أ
ص
صَ = ص قَ(س) لو أ

صَ = قَ(س) أ ق(س) لو أ

السؤال السادس :

ق(س) = ص
هـ س = ٢
س = لو ٢
لو٢ لو٢
م = ∫ (٢ – هـ س) . دس = ٢(لو٢- ٠) –هـس|
٠ ٠
= لو٤ - ٢ وحدة مساحة

اختبـــــــــار ذاتـــــــــى

السؤال الاول :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
جـ	د	أ	د	ب	أ	ب	أ	جـ	ب

السؤال الثاني :

أ) ∫ س ن لو س٣ . د س

الحل :

ق = لو س د هـ = ٣ س ن . د س

× ٣ س ن +١
د ق = ١/ س د س - ∫ هـ = ـــــــ
ن+١

٣ س ن +١ ٣
= ـــــــ لو س -- ـــــ ∫ س ن . د س
ن+١ ن + ١

س ن +١ ٣
= ـــــــ لو س- ـــــــ س ن+١ + جـ
ن+١ (ن + ١)٢

ب) ∫ ١ / √(١ + س) . د س
ص = ١ + √س
(ص – ١)٢ = س
٢ (ص – ١) دص = د س
٢ (ص – ١) دص
∫ ـــــــــــ
√ص
∫ ٢ص-١/٢ (ص – ١) دص
∫ (٢ص١/٢ – ٢ص-١/٢) دص
٣/٤ ص٣/٢ - ٤ ص١/٢ + جـ
= ٣/٤ (١+√س)- ٤(١ + √س) + جـ

جـ) ∫ قا٤ س / ظا٢س - ظا س - ٢ . د س
ص = ظا س
د ص
د س = ـــــــ
قا٢س
قا٢ س
∫ ـــــــــــ . د ص
ص٢ - ص-٢
لكن قا٢س = ظا٢س + ١
ص٢ + ١
∫ ـــــــــــ . د ص
ص٢ - ص-٢
ص + ٣
∫ ١ + ـــــــــــ . د ص
(ص -٢)(ص+١)
أ ب
ص + ∫ ـــــ + ـــــ . د ص
(ص -٢) (ص+١)
= ص + أ لو | ص -٢| + ب لو | ص+١| + جـ
لكن أ (ص + ١) + ب (ص – ٢) = ص + ٣
عندما ص = ٢ فان أ = ٣/٥
عندما ص = -١ فان ب =-٣/٢
= ظاس+٣/٥لو|ظاس-٢|-٣/٢ لو|ظاس+١|+جـ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

د) ∫ (لو س)^{٢} . د س

الحل :

ق = (لو س)^{٢} ، د هـ = د س

د ق = $\frac{٢}{س}$ لو س د س ، هـ = س

= س(لو س)^{٢} − ٢∫ لوس. د س

ق = لو س ، د هـ = د س

د ق = ١/س د س ، هـ = س

= س(لو س)^{٢} − ٢(س لوس − ∫ د س)

= س(لو س)^{٢} − ٢ س لوس + ٢س + جـ

السؤال الثالث :

$\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) . د س = $\int_{-٢}^{٠}$ − س. د س + $\int_{٠}^{٣}$ (٣س^{٢} + ١). د س

$= -\frac{١}{٢}س^{٢}\Big|_{-٢}^{٠} + س^{٣} + س\Big|_{٠}^{٣} = ٢٨$

السؤال الرابع :

ق(س) = ٢ س هـ$^{س^{٢}}$ + $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

= ٢ س هـ$^{س^{٢}}$ + ظتا س

قَ(س) = ٢ هـ$^{س^{٢}}$ + ٤س^{٢} هـ$^{س^{٢}}$ − قتا^{٢} س

السؤال الخامس :

س − ٢ = ١٠ − س^{٢}

س^{٢} + س − ١٢ = صفر

$\frac{٢}{}$

م = ∫ (١٠ − س^{٢}) − (٢ − س) . د س

$\frac{٠}{}$

$\frac{٣}{}$

+ ∫ (١٠ − س^{٢}) − (س − ٢) . د س

$\frac{١}{}$

$\frac{٢}{}$ $\frac{٣}{}$

= ∫ (٨ + س − س^{٢}) + ∫ (١٢ − س − س^{٢}) . د س

$\frac{٠}{}$ $\frac{١}{}$

تمـــــــــرين عـــــــــام ٥

طرق التكامل

جد التكاملات التالية

١. ∫(قا س + ظاس)^{٢} . د س

٢. ∫ قا^{٢}س قا^{٢}(ظاس). د س

٣. ∫ (س^{١١} − ٣س)^{٩} . د س

٤. ∫ ٤س^{٧} جا س^{٤} . د س

٥. ∫(١ + $\sqrt{٢س - ١}$)^{٥} . د س

٦. ∫ س^{٧} هـ$^{س^{٤}+١}$. د س

٧. ∫ $\frac{٥ \quad س+٢}{٣ \quad س|س-١|}$. د س

٨. ∫ $\frac{س^{٢}-٤}{س^{٢} - ٤س+٣}$. د س

٩. ∫ $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^{٢}س - ١}$. د س

١٠. ∫ $\frac{١}{س - ٢\sqrt{س-٣}}$. د س

١١. ∫ $\frac{١}{س(\sqrt{س}-١)}$. د س

١٢. ∫ $\frac{١}{\sqrt{٢س-١} + ٢س-٣}$. د س

١٣. ∫ $\frac{\sqrt[٣]{(س + ٥)^{٢}}}{\sqrt[٣]{س^{٨}}}$. د س

١٤. ∫ $\sqrt{١ - هـ^{س}}$. د س

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

١٥. $\int \frac{٢ س هـ^{س^٢}}{(هـ^{س^٢}-١)(هـ^{س^٢}+ ٤)}$. د س

١٦. $\int س^{٥}(لو_{هـ} س)^{٢}$. د س

١٧. $\int ٦ جا٣س(جتا٢س جتاس – جا٢س جاس)$. د س

١٨. $\int جتا^{٣} ٤س(جتا٣س جاس–جتا٢س جا٣س)$.دس

١٩. $\int جت^{٣}س(جتا٢س جتاس – جا٢س جاس)$. د س

٢٠. $\int جت٤س(جتا٤س جتاس – جا٤ جاس)$. د س

٢١. $\int س(جتا٥س جتا٣س – ٢/١ جتا٨س)$. د س

٢٢. $\int \frac{٢جا٣س جاس + جتا٤ س}{١ + جا٢ س}$. د س

٢٣. اذا علمت ان قَ(س)= $\frac{(٣+لو_{هـ} س)^{٣}}{س^{٢}}$ ، ق(١)=١

ق(هـ)=١٢ ، جد $\int_{١}^{هـ}$ ق(س) . د س

٢٤. بدون اجراء عملية التكامل جد ما يلي

١. أ + ب ٢. ب - أ ٣. ب – أ

اذا علمت ان

أ = $\int_{-\pi}^{\pi} جا^{٢}س$. د س ، ب = $\int_{-\pi}^{\pi} جتا^{٢}س$. د س

التطبيقات الهندسية والفيزيائية والمادلات التفاضلية

٢٥. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة ما عند النقطة

(س ، ص) يساوي $\frac{جاس – قا^{٢}س}{٣ص^{٢}}$ جد قاعدة

العلاقة علماً بان النقطة (π/٤ ، ٤)تقع على منحناها.

٢٦. اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة ما عند النقطة

(س ، ص) يساوي $\frac{٢ص^{٣}}{(٣س + ٥)^{٣/٢}}$ جد قاعدة

العلاقة علماً بان النقطة (١، ٥)تقع على منحناها.

٢٧. تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة

$\frac{د ت}{د ن}$ = ٥ ن ^٤ + ٢٠ ن

حيث ت : عدد البكتيريا ، ن الزمن بالثواني اذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي ٣٠ فجد عددها بعد ٣ ث

٢٨. اذا كان تسارع جسيم ت بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ت = ٦ ن + ٤ فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٣ ث من بدء الحركة علماً بان السرعة الابتدائية للجسم ٢ م / ث وانه قطع مسافة ٢١م في ثانيتين

٢٩. اذا علمت ان ع=ع.+ جـ ن اثبت ان

ف=ع. ن + ٢/١ جـ ن^٢ حيث ع. السرعة الابتدائية ، جـ التسارع ، ف المسافة .

٣٠. حل المعادلة ص هـ^س دص=هـ^س.دس–٥ص دص

خواص التكامل المحدود

٣١. اذا كان $\int_{١}^{٨}$ ٤ق(س).دس=٦٠، $\int_{٥}^{٨}$ ٢/١ق(س). دس=٧

أوجد $\int_{٥}^{١}$ (ق(س)+٢) . د س

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣٢. أوجد $\int_{0}^{4} \sqrt{(٦-٢س)^{٢}}$. د س

٣٣. أوجد $\int_{١}^{٤} [٢/١ س + ١]$. د س

٣٤. أوجد $\int_{١}^{٤} [٢ - ٣/١ س]$. د س

٣٥. اذا كان ق(س)= س^{٢} – ٥ اوجد اصغر قيمة $\int_{-١}^{٥} ق(س)$. دس

٣٦. أوجد $\int_{لوهـ ٢}^{لوهـ ٥} هـ^{٢س}$. د س

٣٧. $\int_{١}^{هـ} \frac{هـ^{لوهـ س}}{س^{٣}}$. د س

٣٨. .اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح وكان $\int$ (قتا^{٢}س- ظتا^{٢}س)ق(س).دس=جتا^{٢}س -٢س+جـ ، جد قَ$(\pi/٢)$.

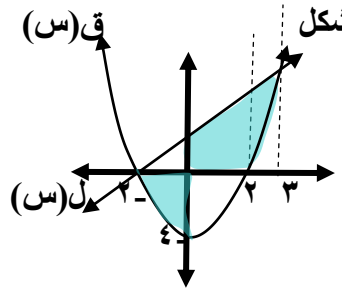
٣٩. إذا كان ق اقتران محدود في الفترة [-١ ، ٢] حيث ٢ ≥ ق(س) ≥ ٣ جد العددين أ ، ب حيث $\int_{٣}^{٣}$ أ + م ≥ $\int_{-١}^{٢}$ ق(س).دس ≥ ن+٤

٤٠. معتمداً على الشكل البياني الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)= | ٢س – ٦|

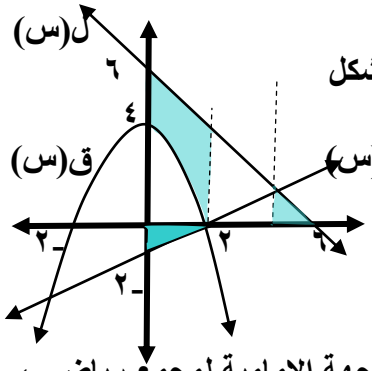
جد $\int_{٢}^{٥} ق(س).دس$

المساحات

٤١. معتمداً على الشكل المجاور جد مساحة المنطقة المظللة حيث ق(س)= س^{٢}-٤

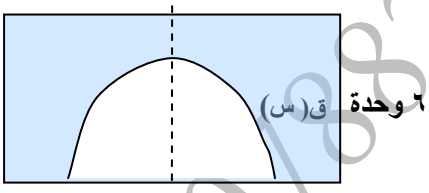


٤٢. معتمداً على الشكل المجاور جد مساحة المنطقة المظللة هـ(س) حيث ق(س)= س^{٢}-٤



٤٣. يمثل الشكل الواجهة الامامية لمجمع رياضي ، مدخل المجمع يمثله المنحنى ق(س)=٤ – س^{٢} ما تكلفة انشاء باب حديدي للمدخل ، اذا كان سعر الوحدة المربعة منه ٣٠ دينار ؟

١٠ وحدة ١٠ وحدة



٤٤. في السؤال السابق جد تكلفة دهان الحائط اذا كان سعر المتر المربع منه يساوي دينارين.

٤٥. اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ل(س)=٤ ، ق(س)=٢- س ، هـ(س)= س^{٢}.

٤٦. اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص- س=٦ ، ٢ص+ س=٠ ، ص= س^{٣}.

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

اسئلة عامة على التكاملات

٤٧. جد $\int \frac{\text{جا س}}{\text{١-٣جتاس – جتا٢س}}$. د س

٤٨. جد قاعدة الاقتران ق(س) كثير الحدود اذا كان

قً(س)= صفر ، ق(٠)=٥ ،

$\int_{١}^{٢}$ ق(س). د س= ٣.

٤٩. اذا كانت سرعة جسيم في اللحظة ن تعطى بالقاعدة ع(ن) ٠= جتا٢ن وكان الجسيم على بعد ٤ أمتار عن بدء الحركة جد بعد هذا الجسيم عند ن= π/٤.

٥٠. اذا كان $\int_{١}^{٥}$ ٢ ق(س). د س= ٨ جد .

$\int_{٠}^{٤}$ (ق(س+١).+٢س) د س.

٥١. حل المعادلة

$\frac{١}{٢}$ [ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ٦س -١=٠

٥٢. جد ∫جتا٣س جا٥س د س .

٥٣. جد ∫جا٣س جتا٤س د س .

٥٤. جد $\int \frac{هـ^{\text{س+ لو س}}}{(\text{س+١})^{٢}}$. د س

٥٥. جد ∫٢جا٢س لوهـ جاس. د س .

٥٦. $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤} - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٥}}$. د س

٥٧. إذا كان ١≥ ق(س) ≥ ٥ ∀ س ∈ [١ ، ٣]

وكان أ≥ ∫$_{١}^{٣}$(ق(س)+٢). دس≥ ب جد قيمة أ ، ب

٥٨. اذا كان قً(س)=٦س-٤ وكان للاقتران ص=ق(س)قيمة صغرى محلية تساوي ٥ عند س=١ جد قاعدة هذا الاقتران.

٥٩. اذا كان م(س) ، هـ(س)اقترانيين بدائيين لنفس الاقتران ق

$\int_{١}^{٥}$ (م(س)–هـ(س)).دس =٨

جد $\int_{-١}^{٢}$ (م(س)–هـ(س)).دس

٦٠. اذا كان

ص= أ هـ$^{\text{ص}}$ + جا(لوهـ س) + $\int_{٠}^{\pi/٢}$ $\frac{١}{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}$. دس

حيث أ ثابت وكان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ | $_{\text{دس س=١}}$ = ٥هـ^{٣} + ١ جد قيمة أ٠

٦١. استخدم فكرة التكامل في حساب مساحة المثلث الذي رؤوسه أ(٥، ١) ،ب(١، ٣) ، جـ (-١، ٢) .

٦٢. اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيين

ص= $\sqrt{\text{أ س}}$ ، ص = $\frac{١}{\text{أ}}$ س^{٢} ، أ> صفر تساوي ١٢ وحدة مربعة فما قيمة أ .

٦٣. اذا كان ق(س)=قَ(س) ، ق(س)≠ صفروكان ق(س)يمر بالنقطة (٥ ، هـ)حيث هـ العدد النيبيري جد قاعدة الاقتران ق(س).

٦٤. اذا كان (ق.هـ)(٤)=٦(ق.هـ)(٢)=١٢ وكان $\int_{٢}^{٤}$ هـ .د ق = ٢ ، اوجد $\int_{٢}^{٤}$ ق.دهـ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

تمـــــــــرين عـــــــــــام ٦

١. اذا كان أ ، ب > ٠

$\int_{-1}^{4} ق(س) \, د س = ٢٠$

وكان م(س) = س^{٢} + جـ س بدائي ل ق على [-١ ، ٤] جد الثابت جـ

الحل : تمرين للطالب

---

٢. اذا كان $ق^{(ن)}(س) = \frac{(-١)^{ن-١} (ن-١)!}{(س+٨)^{ن}}$

: س > -٨ ، $ق^{(ن)}(س)$ هي المشتقة النونية للاقتران ق(س) ، فجد قاعدة الاقتران

---

٣. اذا كان

$\int_{١}^{أ} ٢س \, د س = \int_{١}^{هـ} ٤ س لو س \, . د س$ ، أ > ١ اوجد أ

الحل : تمرين للطالب

---

٣. اوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)= س^{٣} والمماس لمنحنى الاقتران ق عند (١،١)

---

٤. اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فما هي مجموعة قيم ن التي تجعل المساواة التالية صحيحة دائماً

$\int_{٠}^{١} س^{ن} \, . د س = ٢ \int_{-١}^{١} س^{ن} \, . د س$

الحل

$\frac{١}{ن+١} س^{ن+١} \Big|_{٠}^{١} = ٢ \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} \Big|_{-١}^{١}$

$\frac{١}{ن+١} = ٢ \left(\frac{١}{ن+١} - \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} \right)$

$\frac{١}{ن+١} = \frac{٢}{ن+١} - \frac{٢(-١)^{ن+١}}{ن+١}$

$\frac{٢(-١)^{ن+١}}{ن+١} = \frac{١}{ن+١}$ ومنها $(-١)^{ن+١} = -١$

ن + ١ فردي ..... ∴ ن زوجي

---

٥ . اوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الاصل وينصف المنطقة المحصورة بين ق(س)=٣س^{٢} والمستقيم ص= ٣ ومحور الصادات في الربع الاول .

---

٦. ق(س)= أ س + ب ، وكان م(س)اقتران بدائي للاقتران ق حيث مَ(٢)=٧ مَ(٢)=٢ جد قيمة أ ، ب .

---

٧. اذا كان ق(س). دس = $\frac{٣}{س^{٢}+٢}$ ، جد قَ(١)

---

٨. $\int_{-٢}^{٢} (أ + ق(س))$. دس=١٥ وكان

$\int_{-٢}^{٢} ٤ ق(س) \, . د س = ٨ أ$ فما قيمة أ

ج أ = ٧.٥

---

٩. اذا كان م(س) هو اقتران بدائي للاقتران ق(س) على [١ ، ٣] حيث ق متصل وكان م(س)= س^{٣}-٢س^{٢}+٤س+ جـ حيث جـ ثابت جد

$\int_{١}^{٣} (٣ق(س)-٢س) \, . د س$

---

١٠. $\int \frac{س - ٩}{\sqrt{س}+٣} \, . د س$

---

١١. $\int_{-١}^{٣} \sqrt{٩ - ٦س + س^{٢}} \, . د س$

أ

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

١٢. $\int_{0}^{أ} |٢س - ٢| . د س$ ، جد قيمة أ ، أ > ١

١٣. $\int \frac{١}{جا س \, جتا س} . د س$

١٤. $\int \frac{١}{جا^{٢} س \, جتا^{٢} س} . د س$ ج:- ٢ظتا٢س + جـ

١٥. $\int \frac{١}{جتا^{٢}س - جتا^{٤} س} . د س$ ج:- ٢ظتا٢س + جـ

١٦. $\int \frac{جا^{٢} ٣س + ٢ جا ٣س + ١}{قا ٣س} . د س$

١٧. $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - هـ^{-س}} . د س$ ج: ١/٢ لو|هـ^{٢س} - ١| + جـ

١٨. $\int \sqrt{١ + هـ^{س}} . د س$

١٩. $\int \sqrt{\frac{(س + ١)^{٧}}{س^{١١}}} . د س$

٢٠. $\int \frac{د س}{(جتا س + جا س)^{٢}}$

٢١. $\int \frac{١ + \sqrt{هـ^{س}}}{هـ^{س}} . د س$

٢٢. $\int \sqrt{١ - جتا٢س} . د س$ ، ٠ ≤ س ≤ ٢/π

٢٣. $\int \frac{س هـ^{س}}{(س + ١)^{٢}} . د س$

٢٤. $\int \frac{١}{س \sqrt{لو س}} . د س$

٢٥. $\int س (لو س)^{٢} . د س$

٢٦. $\int \frac{١ - جا^{٣}س}{١ - جا س} . د س$

٢٧. $\int س^{٣} هـ^{س^{٢}} . د س$

٢٨. $\int س^{٢} \times ٣^{س^{٣}} . د س$

٢٩. $\int جا٣س \, جتا٦س . د س$

٣٠. $\int هـ^{جاس + لو جتاس} . د س$

٣١. $\int ظاس \, لو_{هـ} جتاس . د س$

٣٢. $\int \frac{هـ^{٢س} - ١}{هـ^{س} - ١} . د س$

٣٣. $\int \frac{جتاس}{جا س \, لو_{هـ} جا س} . د س$

٣٤. $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س}} . د س$

٣٥. $\int س \, لو(س+١) . د س$

ناصر الذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

٣٦. $\int$ لوهـ (٣س^{٢} - ٩س +٦). د س

٣٧. $\int \frac{١}{\text{قا س - ظا س}}$. د س

٣٨. $\int$ س^{٣}قا^{٢} س^{٢} . د س

٣٩. $\int$ (١ - $\sqrt{\text{س}}$)$^{\circ}$. د س

٤٠. $\int \left(\frac{\text{س - ١}}{\text{س+١}}\right)^{٢}$. د س

٤١. $\int$ س$^{\circ}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}$. د س

٤٢. $\int$ جا لوس . د س

٤٣. $\int$ قا^{٣}س . د س

٤٤. اذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن} جتا س . د س
وكان ع$_{٠}$ = جاس جد ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$،ع$_{٣}$

٤٥. اثبت ان $\int_{-١}^{٢} \text{س}^{ن}$ د س = $\frac{١ \quad ن+١}{٢}$

ق(س)= { ١ ، ن زوجي ؛ صفر ، ن فردي }
ومحوري الاحداثيان

٤٦. اوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران
ق(س) = { ٥ ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ ٩ - س^{٢} ، ٢ ≤ س ≤ ٣ }
ومحوري الاحداثيان

٤٧. $\int \frac{\text{٢س}^{٣}+\text{٢س}^{٢}+١}{\text{س}^{٢}-\text{س}}$. د س

٤٨. $\int \frac{\text{س}^{٢}+٨\text{ س}}{(\text{س}+٤)^{٥}}$. د س

٤٩. $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}$. د س

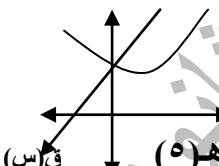
٥٠. اذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ (لوس)^{ن} جتا س . د س
اثبت ان ع$_{ن}$ = س(لوس)^{ن} – ن ع$_{ن-١}$
وكان ع$_{٠}$ = جاس جد ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$،ع$_{٣}$

٥١. اذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن} هـ^{س} . د س
اثبت ان ع$_{ن}$ = س^{ن} هـ^{س} – ن ع$_{ن-١}$
واذا كان ع$_{٠}$ = هـ^{س} اوجد ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$

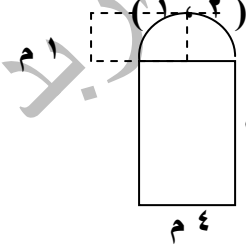
٥٢. اذا كان ق قابلاً للاشتقاق على ح ، وكان
ق(٩)=٨ ،
ق(٤)=٣ فما قيمة $\int_{٢}^{٣}$ ٢ س قَ (س^{٢}). دس

٥٣. اذا كان ق(س)=٣هـ^{٤س}+ لو(٢س^{٢}+١)، س>-١/٢ ، حيث هـ العدد النيبري ، اوجد قَ(٠) =

٥٤. في الشكل المجاور هـ(س) يمثل بياني الاقترانين ق ، هـ اذا علمت ان ق(س)=٣س+٤ ، هـَ(س)=٢س-٣ ، فما قيمة هـ(٥)
ج : ١٤



٥٥. الشكل المجاور مستطيل يعلوه قطع مكافئ جد مساحة الشكل



الحل :

ناصر ذينات 0788241724 ثانوية اربد

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
ثانوية اربد
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

π ٣ ٢/

٥٦. $\int_{0}^{\pi}$ | جاس | .دس تساوي

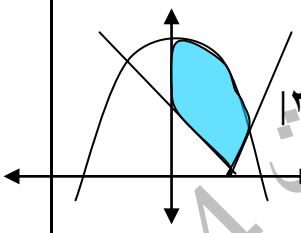
ج ١

٢ ن

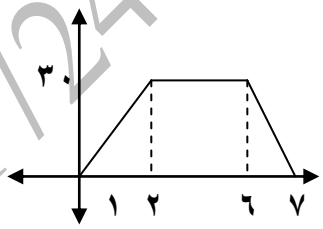
٥٧. ما قيمة $\int_{0}^{\cdot}$ [س/ن] .دس : ن عدد طبيعي

ج ن

٥٨. $\int$ (س^{٢}+ ١) جتا (س^{٣} + ٣ س + ١). دس



٥٩. احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور هـ(س)= | س-٢| ومنحنى ق(س)= ١٠ – س^{٢} .



٦٠. يمثل الشكل المرسوم العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم ، جد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧]

٦١. $\int$ س ظا^{٢}س. دس

٦٢. اذا كان هـ(س) متصلاً على الفترة [أ ، ب] وكان قَ(س)= هـ (س) لكل س ∈ (أ ، ب)

ب

اوجد $\int_{أ}$ هـ(س). دس

أ

٦٥. $\int$ $\frac{٦ \text{ جتا س}}{(٢\text{جاس} - ٢)(\text{جا س} + ١)}$. دس

٦٦. $\int$ س (جا س + جتاس)^{٢}. دس

لا تنسى ذكر الله .... لا تنسى ان تدعو لنا

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
أتمنى أن تكون قد نالت إعجابك

ناصر ذينات 0788241724 ثانوية اربد