الوحدة الأولى

التكامــل

" العلمي"

المستوى الرابع

الأستاذ : عماد مسك

٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

التحـــدّي

* الاقتران البدائي :

سنتعرف على العملية المعاكسة للاشتقاق وهي إذا علمت مشتقة الاقتران. فكيف علينا أن نجد الاقتران الأصلي؟

ومعنى $\int$ ٢س + ٣ دس هو ايجاد الاقتران الذي مشتقته هي ٢س + ٣

دس تعني أن التكامل بدلالة المتغير س :

$\int$ ٢س + ٣ دس = $س^{٢}$ + ٣س + جـ حيث جـ ثابت التكامل

وأخيراً هذا يسمى بالاقتران البدائي حيث أن م'(س) = ق(س)

---

* **تعريف** : اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله فإن م(س) اقتران بدائي لـ ق(س)
إذا كان : م'(س) = ق(س)

مثال: بين أن م الذي قاعدته م(س) = $٢س^{٢}$ + ١ اقتراناً بدائياً للاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ٤س

الحل: م'(س) = ٤س ∴ م اقتران بدائي لـ ق

مثال: جد الاقتران البدائي للاقتران ق(س) = جتاس

الحل: نبحث عن الاقتران الذي مشتقته جتاس ⟸ م(س) = جاس + جـ

مثال: جد اقتراناً بدائياً للاقتران الذي قاعدته ق(س) = $٤س^{٣}$ + $قا^{٢}س$

الحل: م(س) = $س^{٤}$ + ظاس + جـ

مثال: اذا كان م(س) = $س^{٣}$ - $س^{٢}$ + ٥س + جـ اقتران بدائي للاقتران ق(س)
جد ق(٢) .

الحل: م'(س) = ق(س) = $٣س^{٢}$ - ٢س + ٥

∴ ق(٢) = $٣(٢)^{٢}$ - ٢(٢) + ٥

= ١٣

سؤال: جد الاقتران البدائي للاقتران ق(س) = ٢س + ٦

مثال: بين أن م(س) = $\sqrt{\text{س}^2+6\text{س}}$ هو اقتران بدائي للاقتران ق = $\dfrac{\text{س}+3}{\sqrt{\text{س}^2+6\text{س}}}$

الحل: $\text{م}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س}+6}{2\sqrt{\text{س}^2+6\text{س}}} = \dfrac{\text{س}+3}{\sqrt{\text{س}^2+6\text{س}}}$

مثال: جد اقتران بدائي م للاقتران ل(س) = $\dfrac{1}{\text{س}^2}$ ، س ≠ ٠ ، م(٣) = ١

الحل: م(س) = $\dfrac{1}{\text{س}}$ + جـ

م(٣) = $\dfrac{1}{3}$ + جـ ⟸ $\dfrac{1}{3}$ + جـ = ١ ⟸ جـ = $\dfrac{2}{3}$

∴ م(س) = $\dfrac{1}{\text{س}} + \dfrac{2}{3}$

---

* يسمى الاقتران البدائي م(س) بالتكامل غير المحدود لـ ق(س)

∫ ق(س) دس وهو تكامل الاقتران ق(س) بالنسبة للمتغير س

---

* **متطابقات هامة يجب مراعاتها:**

1) جتا²س + جا²س = ١
2) ظا²س = قا²س − ١
3) جا²س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا٢س)
4) جتا²س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س)
5) جا٢س = ٢جاس جتاس
6) جتا٢س = جتا²س − جا²س
   = ٢جتا²س − ١
   = ١ − ٢جا²س
7) جتاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ [جتا(أ+ب) + جتا(أ−ب)]
8) جاأ جاب = $\frac{1}{2}$ [جتا(أ−ب) − جتا(أ+ب)]
9) جاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ [جا(أ−ب) + جا(أ+ب)]

* نجهز الجذور إلى أبسط نسبة
* فك الأقواس في حالة الضرب
* توزيع البسط على المقام إن أمكن
* الضرب بالمرافق عند وجود ١ ± جاس أو ١ ± جتاس
* نحاول رفع المقام إن أمكن

* قواعد التكامل غير المحدود :

١) $\int$ أ ءس = أس + جـ حيث أ ثابت

٢) $\int$ س^{ن} ءس = $\dfrac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

٣) $\int$ جاس ءس = − جتاس + جـ

٤) $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ

٥) $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + جـ

٦) $\int$ قتاس ظتاس ءس = − قتاس + جـ

٧) $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ

٨) $\int$ قتا^{٢}س ءس = − ظتاس + جـ

مثال : جد كلاً من التكاملات التالية :

١) $\int$ ٤ ءس = ٤س + جـ

٢) $\int$ ءس = س + جـ

٣) $\int$(س^{٣} + ٢س − ٨) ءس = $\dfrac{\text{س}^{٤}}{٤}$ + $\dfrac{٢\text{س}^{٢}}{٢}$ − ٨س + جـ

٤) $\int$ ع ءع = $\dfrac{\text{ع}^{٢}}{٢}$ + جـ

٥) $\int$(س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ٦) ءس = $\dfrac{\text{س}^{٤}}{٤}$ + $\dfrac{٣\text{س}^{٣}}{٣}$ + $\dfrac{٢\text{س}^{٢}}{٢}$ + ٦س + جـ

= $\dfrac{\text{س}^{٤}}{٤}$ + س^{٣} + س^{٢} + ٦س + جـ

٦) $\int \frac{1}{\text{س}^2}\, d\text{س}$ نقوم بتجهيزها أولاً

$\Leftarrow \int \frac{1}{\text{س}^2}\, d\text{س} = \int \text{س}^{-2}\, d\text{س} = \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ} = \frac{-1}{\text{س}} + \text{جـ}$

٧) $\int \sqrt{\text{س}}\, d\text{س} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}}\, d\text{س} = \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{جـ} = \frac{2\sqrt{\text{س}^3}}{3} + \text{جـ}$

٨) $\int (\text{س}^4 + 1)\, d\text{س} = \frac{\text{س}^5}{5} + \text{س} + \text{جـ}$

٩) $\int (1 + \text{ظا}^2\text{س})\, d\text{س}$ نستخدم متطابقة حيث: $\text{قا}^2\text{س} = 1 + \text{ظا}^2\text{س}$

$\Leftarrow \int \text{قا}^2\text{س}\, d\text{س} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

١٠) $\int (\sqrt{\text{س}} + 3)^2\, d\text{س} = \int (\text{س} + 6\sqrt{\text{س}} + 9)\, d\text{س} = \int (\text{س} + 6\text{س}^{\frac{1}{2}} + 9)\, d\text{س}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} + \frac{6\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 9\text{س} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} + 4\text{س}^{\frac{3}{2}} + 9\text{س} + \text{جـ}$

١١) $\int \sqrt{\text{س}}\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{7}{\sqrt{\text{س}}}\right) d\text{س} = \int (\text{س} + 7)\, d\text{س} = \frac{\text{س}^2}{2} + 7\text{س} + \text{جـ}$

١٢) $\int \frac{7\text{س}^2 - 5}{\text{س}^2}\, d\text{س} = \int \left(7 - \frac{5}{\text{س}^2}\right) d\text{س} = \int (7 - 5\text{س}^{-2})\, d\text{س}$

$= 7\text{س} - \frac{5\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ} = 7\text{س} + \frac{5}{\text{س}} + \text{جـ}$

سؤال ٤: جد $\int \frac{\text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2}\, d\text{س}$

$\int \frac{2\text{س}^2 - 3\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\, d\text{س}$

* جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \frac{دس}{٥} = \int \frac{١}{٥} دس = \frac{١}{٥} س + جـ$

٢) $\int (٣س^{٣} - ١)^{٢} دس = \int ٩س^{٦} - ٦س^{٣} + ١ \; دس$

$= \frac{٩س^{٧}}{٧} - \frac{٦س^{٤}}{٤} + س + جـ$

٣) $\int (\frac{١}{٢}س - ٥)^{٧} دس$ ⇐ في حالة أن يكون ما داخل القوس خطي نكامل القوس فقط ثم نقسم على معامل س

⇐ $\int (\frac{١}{٢}س - ٥)^{٧} دس = \frac{(\frac{١}{٢}س - ٥)^{٨}}{٨ \times \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٤}(\frac{١}{٢}س - ٥)^{٨} + جـ$

٤) $\int (٢س - ١)^{٦} دس$ ⇐ ما داخل القوس خطي

⇐ $\int (٢س - ١)^{٦} دس = \frac{(٢س - ١)^{٧}}{٧ \times ٢} + جـ = \frac{١}{١٤}(٢س - ١)^{٧} + جـ$

٥) $\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣} دس$ ⇐ نحلل البسط $= \int \frac{(س - ٢)\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{س - ٣}} دس$

$= \int (س - ٢) دس = \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + جـ$

٦) $\int (٣ - \pi س^{٢} + \frac{١}{س^{-٣}}) دس = \int (٣ - \pi س^{٢} + س^{٣}) دس$

$= ٣س - \frac{\pi}{٣}س^{٣} + \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

٧) $\int (قتاس \, ظتاس + ١) دس = - قتاس + س + جـ$

٨) $\int \frac{١}{جا^{٢}س} دس = \int قتا^{٢}س \, دس = - ظتاس + جـ$

⑨ $\int$ قا²٣س دس = $\frac{1}{٣}$ ظا٣س + جـ (يجب التشابه للزاوية)

⑩ $\int$ (قتا٥س ظتا٥س) دس = $-\frac{1}{٥}$ قتا٥س + جـ

⑪ $\int$ ٢س - ٣ ظتا²س دس = $\int$ ٢س - ٣(قتا²س - ١) دس
متطابقة

= $\int$ ٢س - ٣قتا²س + ٣ دس

= س² + ٣ظتاس + ٣س + جـ

سؤال: جد كلاً من التكاملات التالية:

أ) $\int$ (جاس - ٣جتاس) دس

ب) $\int$ (قا²س - ظا²س) دس
متطابقة

جـ) $\int$ (قتاس ظتاس + ٣س² - ٥) دس

١٢) $\int \frac{\text{دس}}{١ + \text{جاس}}$ ⇐ نضرب بالمرافق $\int \frac{\text{دس}}{١ + \text{جاس}} \times \frac{١ - \text{جاس}}{١ - \text{جاس}}$

= $\int \frac{١ - \text{جاس}}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}$ دس = $\int \frac{١ - \text{جاس}}{\text{جتا}^٢\text{س}}$ دس

= $\int \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس جتاس}}$ دس

= $\int$ (قا²س - ظاس قاس) دس

= ظاس - قاس + جـ

سؤال: جد $\int \sqrt[٣]{\text{س}^٢} + \frac{٤}{\text{س}^٥} - ١$ دس

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① $\int \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} \; \text{دس} = \int 1 \; \text{دس} = \text{س} + \text{جـ}$

② $\int \text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس}) \; \text{دس} = \int \text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس} \; \text{دس}$

$= \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$

③ $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^2 \; \text{دس} = \int \text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س} \; \text{دس}$

$= \int (1 + 2\,\text{جاس جتاس}) \; \text{دس} = \int (1 + \text{جا}2\text{س}) \; \text{دس}$

$= \text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س} + \text{جـ}$

④ $\int \frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}} \; \text{دس} = \int \text{قاس} \times \text{قاس} \; \text{دس} = \int \text{قا}^2\text{س} \; \text{دس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

⑤ $\int \text{جا}(2\text{س}) \; \text{دس} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س} + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{جتا}(4\text{س} + 1) \; \text{دس} = \frac{1}{4}\,\text{جا}(4\text{س} + 1) + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{قا}2\text{س ظا}2\text{س} \; \text{دس} = \frac{1}{2}\,\text{قا}2\text{س} + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{جا}^3\text{س} \times \text{جتاس}} \; \text{دس} = \int \frac{2\,\cancel{\text{جاس}}\,\cancel{\text{جتاس}}}{\text{جا}^3\text{س} \times \cancel{\text{جتاس}}} \; \text{دس} = \int \frac{2}{\text{جا}^2\text{س}} \; \text{دس}$

$= \int 2\,\text{قتا}^2\text{س} \; \text{دس}$

$= -2\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$

⑨ $\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1 - \text{جتاس}} \; \text{دس} = \int \frac{1 - \text{جتا}^2\text{س}}{1 - \text{جتاس}} \; \text{دس} = \int \frac{\cancel{(1 - \text{جتاس})}(1 + \text{جتاس})}{\cancel{1 - \text{جتاس}}} \; \text{دس}$

$= \int 1 + \text{جتاس} \; \text{دس}$

$= \text{س} + \text{جاس} + \text{جـ}$

١٠) $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\times\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}-\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}}{\text{جا}^2\text{س}\,\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}} - \frac{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}}{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{قتا}^2\text{س} - \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} = -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

١١) $\int \frac{1-\text{جا}٢\text{س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{دس} = \int \frac{\overbrace{\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}-2\,\text{جاس جتاس}}^{\text{نعيد ترتيب}}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}^2\text{س} - 2\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{دس} = \int \frac{\cancel{(\text{جاس}-\text{جتاس})}(\text{جاس}-\text{جتاس})}{\cancel{\text{جاس}-\text{جتاس}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جاس} - \text{جتاس}\,\text{دس} = -\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$

١٢) $\int \frac{\text{جا}^3\text{س}-4}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جا}^3\text{س}-4}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{4}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جاس} - 4\,\text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس} = -\text{جتاس} + 4\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$

١٣) $\int \frac{2}{1-\text{جتا}٢\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{2}{1-(1-2\,\text{جا}^2\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{2}{2\,\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس} = -\text{ظتاس} + \text{جـ}$

---

* **ملاحظة**: عندما نجد أن ظا²س أو ظتا²س لوحدها في التكامل يفضل استخدام المتطابقة: $\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$ ، $\text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س} - 1$

مثال ٤ جد التكاملات التالية:

١) $\int 5\,\text{ظا}^2\text{س}\,\text{دس} = \int 5(\text{قا}^2\text{س}-1)\,\text{دس} = \int 5\,\text{قا}^2\text{س} - 5\,\text{دس}$

$= 5\,\text{ظاس} - 5\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int 5\text{س}^2 - 3\,\text{ظتا}^2\text{س}\,\text{دس} = \int 5\text{س}^2 - 3(\text{قتا}^2\text{س}-1)\,\text{دس} = \int 5\text{س}^2 - 3\,\text{قتا}^2\text{س} + 3\,\text{دس}$

$= \frac{5\text{س}^3}{3} + 3\,\text{ظتاس} + 3\text{س} + \text{جـ}$

③ $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^2 \, \text{دس} = \int \text{قا}^2\text{س} + 2\,\text{قاس ظاس} + \text{ظا}^2\text{س} \, \text{دس}$

$= \int \text{قا}^2\text{س} + 2\,\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س} - 1 \, \text{دس}$

$= \int 2\,\text{قا}^2\text{س} + 2\,\text{قاس ظاس} - 1 \, \text{دس}$

$= 2\,\text{ظاس} + 2\,\text{قاس} - \text{س} + \text{جـ}$

④ $\int \frac{1}{1 - \text{جتاس}} \, \text{دس}$ ضرب المرافق $\Leftarrow \int \frac{1}{1 - \text{جتاس}} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{1 + \text{جتاس}}{1 - \text{جتا}^2\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{1 + \text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س} + \text{قتاس ظتاس} \, \text{دس} = -\text{ظتاس} - \text{قتاس} + \text{جـ}$

سؤال: جد: ① $\int \frac{1}{1 + \text{جاس}} \, \text{دس}$ ② $\int \frac{1}{1 - \text{جاس}} \, \text{دس}$ ③ $\int \frac{1}{1 + \text{جتاس}} \, \text{دس}$

* ملاحظة: عند وجود $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س} \, \text{دس}$ أو $\int \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س} \, \text{دس}$ حيث ن زوجي نستخدم المتطابقات $\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})$ ، $\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})$

مثال: جد التكاملات التالية:-

① $\int \text{جا}^2\text{س} \, \text{دس} = \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س}) \, \text{دس} = \frac{1}{2}\left(\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س}\right) + \text{جـ}$

② $\int \text{جتا}^2 3\text{س} \, \text{دس} = \int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}6\text{س}) \, \text{دس} = \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{1}{6}\,\text{جا}6\text{س}\right) + \text{جـ}$

③ $\int \text{جتا}^4\text{س} \, \text{دس} = \int (\text{جتا}^2\text{س})^2 \, \text{دس} = \int \left(\frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})\right)^2 \, \text{دس}$

$= \int \frac{1}{4}(1 + 2\,\text{جتا}2\text{س} + \text{جتا}^2 2\text{س}) \, \text{دس} = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}4\text{س})\right) \text{دس}$

$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}4\text{س} \, \text{دس} = \frac{1}{4}\int \frac{3}{2} + 2\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}4\text{س} \, \text{دس}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\,\text{س} + \text{جا}2\text{س} + \frac{1}{8}\,\text{جا}4\text{س}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{3}{8}\,\text{س} + \frac{1}{4}\,\text{جا}2\text{س} + \frac{1}{32}\,\text{جا}4\text{س} + \text{جـ}$

④ ∫ ٥ / قتا²س دس = ∫ ٥ جا²س دس = ∫ ٥ × $\frac{1}{2}$ (١ - جتا٤س) دس

= $\frac{5}{2}$ (س - $\frac{1}{4}$ جا٤س) + جـ

* ملاحظة: في حالات وجود تكامل لحالة ضرب بين جا، جتا نستخدم المتطابقات:

* جاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ [جا(أ - ب) + جا(أ + ب)]
* جتاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ [جتا(أ - ب) + جتا(أ + ب)]
* جاأ جاب = $\frac{1}{2}$ [جتا(أ - ب) - جتا(أ + ب)]

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① ∫ جا٥س جتا٢س دس = ∫ $\frac{1}{2}$ [جا(٥س - ٢س) + جا(٥س + ٢س)] دس

= ∫ $\frac{1}{2}$ (جا٣س + جا٧س) دس

= $\frac{1}{2}$ (- $\frac{1}{3}$ جتا٣س - $\frac{1}{7}$ جتا٧س) + جـ

② ∫ جا٧س جا٣س دس = ∫ $\frac{1}{2}$ [جتا(٧س - ٣س) - جتا(٧س + ٣س)] دس

= ∫ $\frac{1}{2}$ (جتا٤س - جتا١٠س) دس

= $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ جا٤س - $\frac{1}{10}$ جا١٠س) + جـ

③ ∫ جتا٦س جتا٢س دس = ∫ $\frac{1}{2}$ [جتا(٦س + ٢س) + جتا(٦س - ٢س)] دس

= ∫ $\frac{1}{2}$ (جتا٨س + جتا٤س) دس

= $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{8}$ جا٨س + $\frac{1}{4}$ جا٤س) + جـ

مثال: اذا كانت $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤$ وكان $ق(س)$ يمر بالنقطة $(١ ، ٧)$، جد قاعدة الاقتران $ق(س)$.

الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int ٣س^{٢} + ٤\, دس = س^{٣} + ٤س + جـ$

ولايجاد جـ $\Leftarrow ق(١) = ٧$

$\Leftarrow ٧ = (١)^{٣} + ٤(١) + جـ \Leftarrow ٧ = ٥ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٢}$

$\therefore ق(س) = س^{٣} + ٤س + ٢$ قاعدة الاقتران

مثال: اذا كانت $ق'(س) = ٤س^{٣} + ٦س$ نجد $ق(٢) - ق(١)$

الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int ٤س^{٣} + ٦س\, دس = س^{٤} + ٣س^{٢} + جـ$

$\Leftarrow ق(٢) - ق(١) = (١٦ + ١٢ + جـ) - (١ + ٣ + جـ) = ٢٨ - ٤ = ٢٤$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ يعطى بالعلاقة $٦س^{٢} + ٨س$ وكان $ق(٠) = ٣$ نجد $ق(س)$.

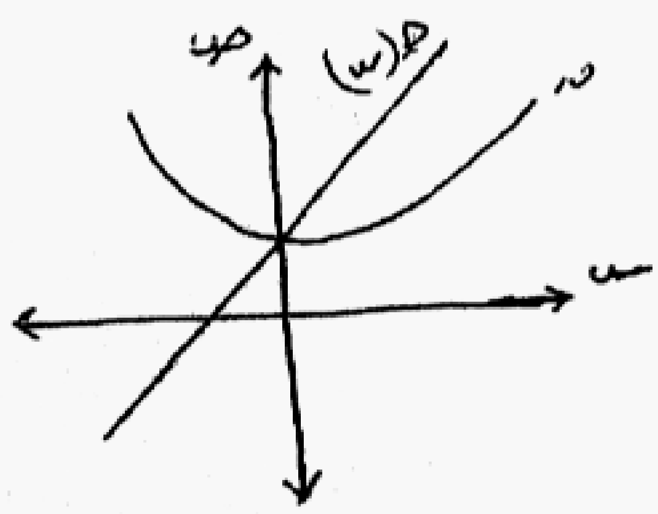
الحل: ميل المماس $= ق'(س) = ٦س^{٢} + ٨س$

$\Leftarrow ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int ٦س^{٢} + ٨س\, دس = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + جـ$

لكن: $ق(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ٠ + ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٣}$

$\therefore ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٣$

مثال: بالاعتماد على الشكل المجاور اذا كان $هـ(س) = ٣س + ٥$ وكانت $ق'(س) = ٢س + ٢$ نجد $ق(٢)$.



الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int ٢س + ٢\, دس$

$= س^{٢} + ٢س + جـ$

$ق(٠) = هـ(٠) = ٥$

$\Leftarrow ٥ = ٠ + ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٥$

$\therefore ق(س) = س^{٢} + ٢س + ٥ \Leftarrow ق(٢) = ٤ + ٤ + ٥ = ١٣$

مثال: اذا كان $\int \left(ق'(س) + ٣س^{٢}\right) دس = س^{٤} + أس^{٣} + ١٢$ ، وكان $ق'(١) = ٧$ ، $ق(١) = ٣$ جد ① قيمة أ ② $ق'(٢)$ ③ $ق(٢)$

الحل: $\int \left(ق'(س) + ٣س^{٢}\right) دس = س^{٤} + أس^{٣} + ١٢$ نشتق الطرفين

$\Leftarrow ق'(س) + ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٣أس^{٢}$ نضع $\boxed{س = ١}$

$\Leftarrow ق'(١) + ٣ = ٤ + ٣أ \Leftarrow ٧ + ٣ = ٤ + ٣أ \Leftarrow ١٠ = ٤ + ٣أ$

$\Leftarrow ٣أ = ٦ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

② $ق'(س) + ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} \Leftarrow ق'(س) = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٣س^{٢}$
$= ٤س^{٣} + ٣س^{٢}$

$\Leftarrow ق'(٢) = ٤(٢)^{٣} + ٣(٢)^{٢} = ٣٢ + ١٢ = ٤٤$

③ $ق(س) = \int ق'(س) دس = \int \left(٤س^{٣} + ٣س^{٢}\right) دس = س^{٤} + س^{٣} + جـ$

لكن: $ق(١) = ٣ \Leftarrow ٣ = ١ + ١ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ١}$

$\Leftarrow ق(س) = س^{٤} + س^{٣} + ١ \Leftarrow ق(٢) = ١٦ + ٨ + ١ = ٢٥$

مثال: اذا كان $\int ق(س) دس = ٥س^{٢} + جا٢س + جـ$ جد $ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: $ق(س) دس = ١٠س + \underbrace{٢جاس جتاس}_{متطابقة}$

$ق(س) دس = ١٠س + جا٢س$

$ق'(س) = ١٠ + ٢جتا٢س$

$ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ١٠ + ٢جتا\frac{\pi}{٢} = ١٠ + ٠ = ١٠$

مثال: اذا كان $\int ق(س) دس = ٣جاس - ٤جتاس + جـ$ جد $ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) - ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل: $ق(س) = ٣جتاس + ٤جاس$

$ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٣(٠) + ٤(١) = ٤$

$ق'(س) = -٣جاس + ٤جتاس$

$ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -٣(١) + ٤(٠) = -٣$

$\Leftarrow ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) - ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٤ - (-٣) = ٤ + ٣ = ٧$

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية :-

١) $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س جا}^٢\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{(\text{جتاس جاس})^٢}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{(\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س})^٢}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\frac{١}{٤}\text{جا}^٢٢\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{٤\,\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^٢٢\text{س}}\,\text{دس} = ٤\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{جا}٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= ٤\int \text{ظتا}٢\text{س} \times \text{قتا}٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{-٤\,\text{قتا}٢\text{س}}{\cancel{٢}} + \text{جـ} = -٢\,\text{قتا}٢\text{س} + \text{جـ}$

---

٢) $\int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}\,\text{دس}$ نضرب بالمرافق للمقام $= \int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} \times \frac{١ - \text{جتاس}}{١ - \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{(١ - \text{جتاس})^٢}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{١ - ٢\,\text{جتاس} + \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$ نوزع البسط على المقام

$= \int \frac{١}{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس} - \int \frac{٢\,\text{جتاس}}{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس} + \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{قتا}^٢\text{س}\,\text{دس} - ٢\int \text{ظتاس قتاس}\,\text{دس} + \int \text{ظتا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$= -\text{ظتاس} + ٢\,\text{قتاس} + \int (\text{قتا}^٢\text{س} - ١)\,\text{دس}$

$= -\text{ظتاس} + ٢\,\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

$= -٢\,\text{ظتاس} + ٢\,\text{قتاس} - \text{س} + \text{جـ}$　نعيد الترتيب

---

٣) $\int \frac{١ - \text{جا}٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{دس}$ (متطابقات) $= \int \frac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}^٢\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{دس} = \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^٢}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int (\text{جاس} - \text{جتاس})\,\text{دس} = -\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$

* التكامل المحدود:

قاعدة: $\int_{م}^{ب} جـ \, دس = جـ(ب - م)$ حيث جـ ثابت

مثال: $\int_{٢}^{٤} ٧ \, دس = ٧(٤-٢) = ١٤$ ، $\int_{-٣}^{١} ٥ \, دس = ٥(١+٣) = ٢٠$

مثال: جد قيمة م اذا كان $\int_{٢م+٢}^{٤م+٣} ٨ \, دس = ٥٦$

الحل: $٨\left(٤م+٣ - (٢م+٢)\right) = ٥٦ \Leftarrow ٨(٤م+٣-٢-٢م) = ٥٦$

$\Leftarrow ٨(٢م+١) = ٥٦ \Leftarrow ١٦م + ٨ = ٥٦ \Leftarrow ١٦م = ٤٨ \Leftarrow \boxed{م = ٣}$

مثال: اذا كان $\int_{م}^{٥} ٣م \, دس = ١٨$ جد م

الحل: $٣م(٥ - م) = ١٨ \Leftarrow ١٥م - ٣م^٢ = ١٨$

$\Leftarrow ٣م^٢ - ١٥م + ١٨ = ٠ \xLeftarrow{\div ٣} م^٢ - ٥م + ٦ = ٠$

$\Leftarrow (م - ٣)(م - ٢) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{م = ٣}$ أو $\boxed{م = ٢}$

خاصية: $\int_{م}^{م} ق(س) \, دس = صفر$

$\int_{م}^{ب} ق(س) \, دس = - \int_{ب}^{م} ق(س) \, دس$

مثال: $\int_{٤}^{٤} \frac{٦ص^٤}{س^٣+٢} \, دس = صفر$ ، $\int_{١}^{١} \sqrt{س^٢ - ٣} \, دس = صفر$

مثال: اذا كان $\int_{٢}^{٣} ق(س) \, دس = -٢١$ فإن $\int_{٣}^{٢} ق(س) \, دس = ٢١$

$\int_{-٢}^{٥} ق(س) \, دس = ١٣$ فإن $\int_{٥}^{-٢} ق(س) \, دس = -١٣$

مثال: اذا كان $\int_{1}^{جـ} (س^2+4س)\, دس = صفر$ جد قيمة جـ

الحل: احدى قيم جـ هي (1) لذلك نبحث عن قيم أخرى إن وجدت

$$\int_{1}^{جـ} (س^2+4س)\, دس = \frac{س^3}{3} + 2س^2 \Big|_{1}^{جـ} = \left(\frac{جـ^3}{3} + 2جـ^2\right) - \left(\frac{1}{3} + 2\right) = صفر$$

$= \frac{جـ^3}{3} + 2جـ^2 - \frac{7}{3} = 0$ بالضرب في (3) $\Leftarrow جـ^3 + 6جـ^2 - 7 = 0$

وعند جـ = 1 فإن $1 + 6 - 7 = 7 - 7 = صفر$

∴ نقسم على (جـ − 1) ← عامل فينتج $جـ^2 + 7جـ + 7 = 0$ نحل بالقانون العام

$جـ = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}$ ∴ جـ هي $\left\{1 ، \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$

---

* **الخاصية الخطية:** $\int_{أ}^{ب} جـ\, ق(س)\, دس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$

$$\int_{أ}^{ب} (ق \pm هـ)\, دس = \int_{أ}^{ب} ق\, دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ\, دس$$

مثال: اذا كان $\int_{1}^{4} ق(س)\, دس = 10$ ، $\int_{1}^{4} هـ(س)\, دس = -12$ جد ما يلي:

1) $\int_{1}^{4} ق(س) + هـ(س)\, دس = 10 + -12 = -2$

2) $\int_{1}^{4} \left(3ق(س) - 2هـ(س)\right) دس = 3(10) - 2(-12) = 30 + 24 = 54$

3) $\int_{1}^{4} \left(2ق(س) + 2س\right) دس = 2(10) + س^2 \Big|_{1}^{4} = 20 + (16 - 1) = 35$

4) $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{2}هـ(س) - 7\right) دس = \frac{1}{2}(-12) - 7(4-1) = -6 - 21 = -27$

5) $\int_{1}^{4} \left(4ق(س) - \frac{1}{2}هـ(س)\right) دس = 4(10) - \frac{1}{2}(-12)$

$= 40 + 6$

$= 46$

مثال٤: اذا كان $\int_{1}^{3} \left(٢\text{م}(س) - ٤س\right) دس = -٤$ جد $\int_{1}^{3} \left(٣\text{م}(س) + ١\right) دس$

الحل: $\int_{1}^{3} ٢\text{م}(س)\, دس - \int_{1}^{3} ٤س\, دس = -٤ \Leftarrow \int_{1}^{3} ٢\text{م}(س)\, دس - ٢س^{٢}\Big|_{1}^{3} = -٤$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ٢\text{م}(س)\, دس - [١٨ - ٢] = -٤ \Leftarrow \int_{1}^{3} ٢\text{م}(س)\, دس - ١٦ = -٤$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ٢\text{م}(س)\, دس = -٤ + ١٦ \Leftarrow \int_{1}^{3} ٢\text{م}(س)\, دس = ١٢ \Leftarrow \int_{1}^{3} \text{م}(س)\, دس = ٦$

$\therefore \int_{1}^{3} \left(٣\text{م}(س) + ١\right) دس = ٣(٦) + ١(٣ - ١) = ١٨ + ٢ = ٢٠$

مثال٥: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(٥\text{جا}س + ٤\text{جتا}س\right) دس = -٥\text{جتا}س + ٤\text{جا}س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-٥(٠) + ٤(١)\right) - \left(-٥(١) + ٤(٠)\right) = ٤ + ٥ = ٩$

٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(٣ + ٣\text{ظا}^{٢}س\right) دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ٣\left(١ + \text{ظا}^{٢}س\right) دس = ٣\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^{٢}س\, دس = ٣\text{ظا}س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= ٣(١ - ٠) = ٣$

٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{١ + \text{جا}٢س}\, دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س + ٢\text{جا}س\,\text{جتا}س}\, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^{٢}س + ٢\text{جا}س\,\text{جتا}س + \text{جتا}^{٢}س}\, دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\text{جا}س + \text{جتا}س\right)^{٢}}\, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left|\text{جا}س + \text{جتا}س\right| دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{جا}س + \text{جتا}س\right) دس$ وذلك لأن س زاوية تقع في الربع الأول

$= -\text{جتا}س + \text{جا}س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (٠ + ١) - (-١ + ٠) = ٢$

④ $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\text{جتا}2\text{س}}{2}}\,\text{دس} = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+(2\text{جتا}^2\text{س}-1)}{2}}\,\text{دس} = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{\cancel{2}\text{جتا}^2\text{س}}{\cancel{2}}}\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int_{0}^{\pi} |\text{جتاس}|\,\text{دس}$

جتاس: + + + ، −جتاس: − − −

$0 \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \pi$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتاس}\,\text{دس} = \text{جاس}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \text{جاس}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= (1-0) - (0-1) = 1+1 = 2$

⑤ $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\text{جتا}2\text{س}}{2}}\,\text{دس} = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1-(1-2\text{جا}^2\text{س})}{2}}\,\text{دس} = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{2\text{جا}^2\text{س}}{2}}\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int_{0}^{2\pi} |\text{جاس}|\,\text{دس}$

جاس: + + + ، −جاس: − − −

$0 \qquad \pi \qquad 2\pi$

$= \int_{0}^{\pi} \text{جاس}\,\text{دس} + \int_{\pi}^{2\pi} -\text{جاس}\,\text{دس} = -\text{جتاس}\Big|_{0}^{\pi} + \text{جتاس}\Big|_{\pi}^{2\pi}$

$= -((-1)-1) + (1-(-1)) = 2+2 = 4$

مثال: اذا كانت $\text{م} = \int_{0}^{\pi} \text{جا}^2\text{س}\,\text{دس}$ ، $\text{ن} = \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\,\text{دس}$ جد م + ن

الحل: $\text{م} + \text{ن} = \int_{0}^{\pi} \text{جا}^2\text{س}\,\text{دس} + \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{\pi} (\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})\,\text{دس} = \int_{0}^{\pi} 1\,\text{دس} = \pi$

مثال: اذا كانت $\text{م} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$ ، $\text{ب} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2\text{س}\,\text{دس}$ جد م − ب

الحل: $\text{م} - \text{ب} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2\text{س}\,\text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1\,\text{دس} = \frac{\pi}{4}$

خاصية الإضافة:

اذا كان ق قابلاً للتكامل على فترة تنتمي إليها الأعداد أ ، ب ، جـ فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

وليس شرطاً أن تقع جـ بين أ ، ب

مثال: اذا كان $\int_{1}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 30$ ، $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 12$ جد $\int_{3}^{7} 2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{3}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{3}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -12 + 30 = 18$

$\therefore \int_{3}^{7} 2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 2 \times 18 = 36$

مثال: اذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \frac{1}{3}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 6$ ، $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} 4\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 20$ جد $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} 3\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \frac{1}{3}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 6 \Leftarrow \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 6 \times 3 = 18$

$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} 4\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 20 \Leftarrow \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{20}{4} = 5$

$\Leftarrow \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 18 + (-5) = 13$

$\therefore \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} 3\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 3(13) = 39$

ملاحظة: تستخدم خاصية الإضافة في إيجاد تكاملات الاقترانات المتشعبة

١) اقتران المطلق والصحيح.

سؤال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & ، 1 \le \text{س} < 3 \\ 3\text{س} - 1 & ، 3 \le \text{س} < 6 \end{cases}$ جد $\int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية :

١) $\int_{0}^{2} |2\text{س}+1| \, d\text{س}$ نعيد تعريف $|2\text{س}+1|$ ، $2\text{س}+1=0 \Rightarrow \boxed{\text{س} = -\frac{1}{2}}$

$2\text{س}-1 \quad 2\text{س}+1$ ، $- - - - \; + + \; + + +$ ، $-\frac{1}{2} \quad 0 \quad 2$

$\Rightarrow \int_{0}^{2} (2\text{س}+1) \, d\text{س} = \text{س}^2+\text{س} \Big|_{0}^{2} = (4+2) - 0 = 6$

---

٢) $\int_{0}^{5} |2\text{س}-2| \, d\text{س}$ نعيد تعريف $|\;|$ $\Rightarrow 2\text{س}-2=0 \Rightarrow \boxed{\text{س}=1}$

$2-2\text{س} \quad 2\text{س}-2$ ، $- - - \; + + +$ ، $0 \quad 1 \quad 5$

$\Rightarrow \int_{0}^{1} (2-2\text{س}) \, d\text{س} + \int_{1}^{5} (2\text{س}-2) \, d\text{س}$

$= 2\text{س}-\text{س}^2 \Big|_{0}^{1} + \text{س}^2-2\text{س} \Big|_{1}^{5}$

$= (2-1)-(0)+(25-10)-(1-2)$

$= 1+15+1 = 17$

---

٣) $\int_{-1}^{1} \text{س}^2 \times |\text{س}| \, d\text{س}$ $\boxed{\text{س}=0}$

$-\text{س} \quad \text{س}$ ، $- - - \; + + +$ ، $-1 \quad 0 \quad 1$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \text{س}^2 \times -\text{س} \, d\text{س} + \int_{0}^{1} \text{س}^2 \times \text{س} \, d\text{س} = \int_{-1}^{0} -\text{س}^3 \, d\text{س} + \int_{0}^{1} \text{س}^3 \, d\text{س}$

$= \frac{-\text{س}^4}{4} \Big|_{-1}^{0} + \frac{\text{س}^4}{4} \Big|_{0}^{1} = \left(0-\left(\frac{-1}{4}\right)\right) + \left(\frac{1}{4}\right)-(0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

---

٤) $\int_{0}^{6} \sqrt{\text{س}^2-4\text{س}+4} \, d\text{س} = \int_{0}^{6} \sqrt{(\text{س}-2)^2} \, d\text{س}$

$2-\text{س} \quad \text{س}-2$ ، $- - - \; + + +$ ، $0 \quad 2 \quad 6$

$\Rightarrow = \int_{0}^{6} |\text{س}-2| \, d\text{س}$ ، $\text{س}-2=0 \Rightarrow \boxed{\text{س}=2}$

$= \int_{0}^{2} (2-\text{س}) \, d\text{س} + \int_{2}^{6} (\text{س}-2) \, d\text{س} = 2\text{س}-\frac{\text{س}^2}{2} \Big|_{0}^{2} + \frac{\text{س}^2}{2}-2\text{س} \Big|_{2}^{6}$

$= (4-2)-(0)+(18-12)-(2-4)$

$= 2+6+2 = 10$

سؤال: $\int_{0}^{\pi} |\text{جتاس}| \, d\text{س}$ $\boxed{\text{س}=\frac{\pi}{2}}$

جتاس　-جتاس ، $+ + + \; - - -$ ، $0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi$

الإجابة (٢)

مثال: جد التكاملات التالية:

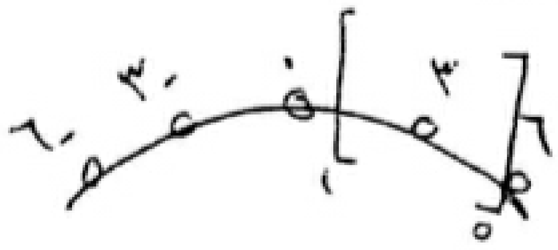
① $\int_{٣}^{٥} [٥ - س] \, دس$ نعيد تعريف $[٥ - س]$ طول الدرجة $= \frac{١}{|-١|} = ١$

$$[٥ - س] = \begin{cases} ١ \,،\, ٣ < س \le ٤ \\ ٠ \,،\, ٤ < س \le ٥ \end{cases}$$

$\Leftarrow \int_{٣}^{٥} [٥ - س] \, دس = \int_{٣}^{٤} ١ \, دس + \int_{٤}^{٥} صفر \, دس = ١(٤ - ٣) + ٠ = ١$

---

② $\int_{١}^{٥} [\frac{١}{٣}س + ١] \, دس$ $ل = \frac{١}{|\frac{١}{٣}|} = ٣$

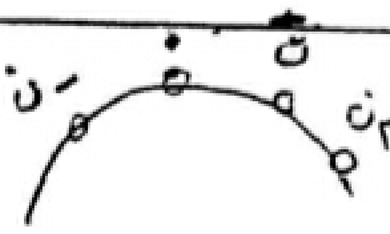


$$\Leftarrow [\frac{١}{٣}س + ١] = \begin{cases} ١ \,،\, ٠ \le س < ٣ \\ ٢ \,،\, ٣ \le س < ٦ \end{cases}$$

$\Leftarrow \int_{١}^{٥} [\frac{١}{٣}س + ١] \, دس = \int_{١}^{٣} ١ \, دس + \int_{٣}^{٥} ٢ \, دس = ٢ + ٤ = ٦$

---

③ $\int_{ن}^{٢ن} [\frac{س}{ن}] \, دس$ حيث ن عدد صحيح موجب $ل = \frac{١}{|\frac{١}{ن}|} = ن$



$[\frac{س}{ن}] = \begin{cases} ٠ \,،\, ٠ \le س < ن \\ ١ \,،\, ن \le س < ٢ن \end{cases} \Leftarrow \int_{ن}^{٢ن} [\frac{س}{ن}] \, دس = \int_{ن}^{ن} ٠ \, دس + \int_{ن}^{٢ن} ١ \, دس$

$= ٠ + ١(٢ن - ن) = ن$

مثال: اذا كان $\int_{١}^{جـ} [\frac{١}{٢}س + ١] \, دس = ١٧$. جد قيمة جـ حيث جـ > ١

الحل: $ل = ٢$

$$[\frac{١}{٢}س + ١] = \begin{cases} ١ \,،\, ٠ \le س < ٢ \\ ٢ \,،\, ٢ \le س < ٤ \\ ٣ \,،\, ٤ \le س < ٦ \\ ٤ \,،\, ٦ \le س < ٨ \\ ٥ \,،\, ٨ \le س < ١٠ \end{cases}$$

$\int_{١}^{٢} ١ \, دس + \int_{٢}^{٤} ٢ \, دس + \int_{٤}^{٦} ٣ \, دس + \int_{٦}^{جـ} ٤ \, دس = ١٧$

$= ١ + ٤ + ٦ + ٤(جـ - ٦) = ١٧ \Leftarrow ١١ + ٤جـ - ٢٤ = ١٧ \Leftarrow ٤جـ = ١٧ + ١٣ = ٣٠$

$\Leftarrow جـ = \frac{٣٠}{٤} = ٧,٥$

* خاصية المقارنة:

إذا كان م ، هـ قابلين للتكامل على [أ ، ب] وكان م(س) ≤ هـ(س) في [أ ، ب]

فإن: $\int_{أ}^{ب}$ م(س) دس ≤ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس ونستنتج:

① اذا كان م(س) ≤ ٠ في [أ ، ب] فإن $\int_{أ}^{ب}$ م(س) دس ≤ صفر

② اذا كان م(س) ≥ ٠ في [أ ، ب] فإن $\int_{أ}^{ب}$ م(س) دس ≥ صفر

هذا يعني أنه تكامل الاقتران الموجب يكون موجباً والاقتران السالب سالباً

مثال: دون أن تجد التكامل ما إشارة:

① $\int_{٢}^{٥} \frac{٣ - س^٢}{٦س^٢ + ١}$ دس ② $\int_{-٤}^{-١}$ س$^٤ \sqrt{س^٢ + ٥}$ دس

الحل: ① $\frac{٣ - س^٢}{٦س^٢ + ١}$ < ٠ ⟸ $\int_{٢}^{٥} \frac{٣ - س^٢}{٦س^٢ + ١}$ دس < صفر

② س$^٤ \sqrt{س^٢ + ٥}$ > ٠ في [-٤ ، -١] ⟸ $\int_{-٤}^{-١}$ س$^٤ \sqrt{س^٢ + ٥}$ دس > صفر

مثال: بين أن $\int_{١}^{٣}$ جا$^٢ \frac{\pi}{س}$ دس ≤ $\int_{١}^{٣}$ س$^٢ \sqrt{س^٤ + ١}$ دس

الحل: بما أن جا$^٢ \frac{\pi}{س}$ ≤ س$^٢ \sqrt{س^٤ + ١}$ في [١ ، ٣]

∴ $\int_{١}^{٣}$ جا$^٢ \frac{\pi}{س}$ دس ≤ $\int_{١}^{٣}$ س$^٢ \sqrt{س^٤ + ١}$ دس

مثال: اذا كان م(س) ≥ ٨ في [١ ، ٦] جد أصغر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{١}^{٦}$ م(س) دس

الحل: م(س) ≥ ٨ في [١ ، ٦] ⟸ $\int_{١}^{٦}$ م(س) دس ≥ $\int_{١}^{٦}$ ٨ دس

≥ ٤٠

∴ أصغر قيمة هي ٤٠

مثال: اذا كان م(س) $\le$ ٧ في [١، ٥] نجد أكبر قيمة ممكنة للمقدار
$\int_{١}^{٥}$ (٣م(س) + ٤) دس

الحل: م(س) $\le$ ٧ بالضرب في ٣ $\Leftarrow$ ٣م(س) $\le$ ٢١ نجمع ٤

$\Leftarrow$ ٣م(س) + ٤ $\le$ ٢٥ نأخذ التكامل

$\Leftarrow$ $\int_{١}^{٥}$ (٣م(س) + ٤) دس $\le$ $\int_{١}^{٥}$ ٢٥ دس

$\le$ ١٠٠   ∴ أكبر قيمة هي ١٠٠

مثال: اذا كان -٢ $\le$ م(س) $\le$ ٦ في [١، ٦] وكان م $\le$ $\int_{١}^{٦}$ م(س) دس $\le$ ن جد م، ن

الحل: -٢ $\le$ م(س) $\le$ ٦ نأخذ التكامل في $\int_{١}^{٦}$

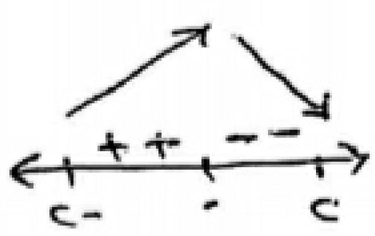
$\Leftarrow$ $\int_{١}^{٦}$ -٢ دس $\le$ $\int_{١}^{٦}$ م(س) دس $\le$ $\int_{١}^{٦}$ ٦ دس $\Leftarrow$ -١٠ $\le$ $\int_{١}^{٦}$ م(س) دس $\le$ ٣٠

$\Leftarrow$ م = -١٠ ، ن = ٣٠

مثال: م(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ بين أن $\int_{-٢}^{٢}$ م(س) دس ينحصر بين صفر، ٨

الحل: نجد القيم الصغرى والعظمى للاقتران م(س)

م'(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^٢}}$ $\Leftarrow$ م'(س) = ٠ $\Leftarrow$ -٢س = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{س = ٠}$



م' غير موجودة عند س = -٢، ٢ أطراف فترة

م(٠) = $\sqrt{٤ - ٠}$ = ٢ عظمى   (٠، ٢) نقطة عظمى

م(-٢) = ٠
م(٢) = ٠   القيمة الصغرى هي صفر

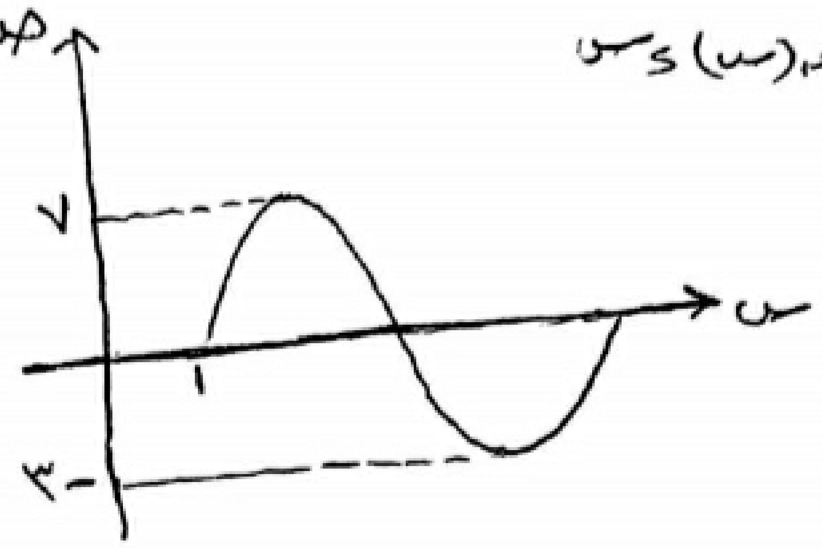
$\Leftarrow$ ٠ $\le$ م(س) $\le$ ٢ في [-٢، ٢]

∴ $\int_{-٢}^{٢}$ صفر دس $\le$ $\int_{-٢}^{٢}$ م(س) دس $\le$ $\int_{-٢}^{٢}$ ٢ دس

صفر $\le$ $\int_{-٢}^{٢}$ م(س) دس $\le$ ٨

"الإرادة تصنع التفوق"

مثال: بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل ق(س)، جد القيمة العظمى والصغرى للمقدار $\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$



الحل: القيمة العظمى للاقتران هي ٧ $\Leftarrow$ العظمى للتكامل $\int_{1}^{5} 7\,\text{دس} = 28$

أصغر قيمة للاقتران هي -٣ $\Leftarrow$ أصغر = $\int_{1}^{5} -3\,\text{دس} = -12$

سؤال: اذا كان $\int_{1}^{\text{أ}} (2\text{س}+7)\,\text{دس} = 52$ جد أ ــــــ الإجابة $\boxed{\text{أ} = -12 ،\ 5}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} ، & 0 \le \text{س} \le \text{أ} \\ \text{أ} \times \dfrac{(1-\text{س})}{1-\text{أ}} ، & \text{أ} < \text{س} \le 1 \end{cases}$ حيث $0 < \text{أ} < 1$ جد $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{س}\,\text{دس} + \int_{\text{أ}}^{1} \text{أ} \times \dfrac{(1-\text{س})}{1-\text{أ}}\,\text{دس}$

$$= \frac{\text{س}^2}{2}\Big|_{0}^{\text{أ}} + \frac{\text{أ}}{1-\text{أ}}\left(\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}\right)\Big|_{\text{أ}}^{1} = \left(\frac{\text{أ}^2}{2} - 0\right) + \frac{\text{أ}}{1-\text{أ}} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\text{أ} - \frac{\text{أ}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\text{أ}^2}{2} + \frac{\text{أ}}{1-\text{أ}}\left(\frac{1}{2} - \text{أ} + \frac{\text{أ}^2}{2}\right) = \frac{\text{أ}^2}{2} + \frac{\text{أ}}{1-\text{أ}} \times \frac{1}{2}\left(\text{أ}^2 - 2\text{أ} + 1\right)$$

$$= \frac{\text{أ}^2}{2} + \frac{\text{أ}}{\cancel{1-\text{أ}}} \times \frac{1}{2} \times \overset{-1}{\cancel{(\text{أ}-1)}}(\text{أ}-1) = \frac{\text{أ}^2}{2} - \frac{\text{أ}}{2}(\text{أ}-1)$$

$$= \frac{\text{أ}^2}{2} - \frac{\text{أ}^2}{2} + \frac{\text{أ}}{2} = \frac{\text{أ}}{2}$$

مثال: بيّن أن $\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} + \int_{0}^{1} \text{س}^{\frac{1}{\text{ن}}}\,\text{دس} = 1$

الحل: $\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} + \int_{0}^{1} \text{س}^{\frac{1}{\text{ن}}}\,\text{دس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\Big|_{0}^{1} + \dfrac{\text{س}^{\frac{1}{\text{ن}}+1}}{\frac{1}{\text{ن}}+1}\Big|_{0}^{1}$

$$= \left(\frac{1}{\text{ن}+1} - 0\right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{\text{ن}}+1} - 0\right) = \frac{1}{\text{ن}+1} + \frac{1}{\frac{1+\text{ن}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}+1} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} = \frac{1+\text{ن}}{\text{ن}+1} = 1$$

مثال: اذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً أثبت أن:

$$\frac{\text{ن}+1}{2}\int_{-1}^{1}\text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = \begin{cases} 1 & \text{ن زوجية} \\ \text{صفر} & \text{ن فردية} \end{cases}$$

الحل: $\frac{\text{ن}+1}{2}\int_{-1}^{1}\text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{\text{ن}+1}{2}\times\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\text{س}^{\text{ن}+1}\Big|_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{2}\left((1)^{\text{ن}+1} - (-1)^{\text{ن}+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-(-1)) = \frac{1}{2}\times 2 = 1 & \text{حيث ن زوجية} \\ \frac{1}{2}(1-1) = \frac{1}{2}\times\text{صفر} = \text{صفر} & \text{حيث ن فردية} \end{cases}$$

مثال: اذا كان م(س)، هـ(س) اقترانان بدائيان للاقتران ق(س) وكان $\int_{0}^{7}(\text{م(س)}-\text{هـ(س)})\,\text{دس} = 28$

جد $\int_{1}^{5}\text{س}(\text{م(س)}-\text{هـ(س)})\,\text{دس}$

الحل: م(س) − هـ(س) = ج ثابت

$\therefore \int_{0}^{7}(\text{م(س)}-\text{هـ(س)})\,\text{دس} = \int_{0}^{7}\text{ج}\,\text{دس} = 28 \Leftarrow 7\text{ج} = 28 \Leftarrow \boxed{\text{ج} = 4}$

$\Leftarrow \int_{1}^{5}\text{س}(\text{م(س)}-\text{هـ(س)})\,\text{دس} = \int_{1}^{5}\text{س}\times 4\,\text{دس} = 2\text{س}^2\Big|_{1}^{5} = 50 - 2 = 48$

مثال: أوجد كثير حدود من الدرجة الأولى ق(س) حيث $\int_{1}^{2}\text{ق(س)}\,\text{دس} = 6$ ، ق(1) = 5

الحل: نفرض ق(س) = أس + ب

$\int_{1}^{2}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = \frac{\text{أس}^2}{2} + \text{بس}\Big|_{1}^{2} = (2\text{أ}+2\text{ب}) - (\frac{1}{2}\text{أ}+\text{ب})$

$= \boxed{\frac{3}{2}\text{أ} + \text{ب} = 6}$

ق(1) = $\boxed{\text{أ} + \text{ب} = 5}$

وبالطرح ⇐ $\frac{1}{2}$ أ = 1 ⇐ $\boxed{\text{أ} = 2}$

نعوض ⇐ 2 + ب = 5 ⇐ $\boxed{\text{ب} = 3}$

∴ ق(س) = 2س + 3

سؤال ٤ جد ق′(٢) فيما يلي :

١) ق(س) = $\int_{1}^{5}$ (س² + ١٠س) دس

ق′(س) = صفر لأنه تكامل محدود

ق′(٢) = صفر

---

٢) ق(س) = $\int$ (س² + ٧س) دس

ق′(س) = س² + ٧س

ق′(٢) = ٤ + ١٤ = ١٨

---

٣) ق(س) = $\int$ (٣س² + $\int_{1}^{3}$ ٢س دس) دس

الحل: $\int_{1}^{3}$ ٢س دس = س² $\Big|_{1}^{3}$ = ٩ − ١ = ٨

ق(س) = $\int$ (٣س² + ٨) دس

ق′(س) = ٣س² + ٨ $\Leftarrow$ ق′(٢) = ١٢ + ٨ = ٢٠

---

٤) $\int$ ق(س) دس = س³ + س² + جـ

ق(س) = ٣س² + ٢س

ق′(س) = ٦س + ٢ $\Leftarrow$ ق′(٢) = ٦(٢) + ٢ = ١٤

الأستاذ: عماد مسك
0795153669

* المعادلات التفاضلية:

هي معادلة تحتوي على مشتقات وحلها يعني ايجاد علاقة تربط بين المتغير ص والمتغير س ويتم ذلك بفصل المتغير س مع تفاضله (دس) عن المتغير ص مع تفاضله (دص) فتصبح: هـ(ص) دص = ل(س) دس ثم $\int$ هـ(ص) دص = $\int$ ل(س) دس

مثال: حل المعادلة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢س} + ٥}{\text{٣ص}^٢}$ علماً بأن ص = ٣ عندما س = ٢

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢س} + ٥}{\text{٣ص}^٢} \Leftarrow \text{٣ص}^٢ \text{ دص} = (\text{٢س} + ٥) \text{ دس}$

$\Leftarrow \int \text{٣ص}^٢ \text{ دص} = \int (\text{٢س} + ٥) \text{ دس} \Leftarrow \text{ص}^٣ = \text{س}^٢ + \text{٥س} + \text{جـ}$

ص = ٣ عند س = ٢ $\Leftarrow (٣)^٣ = (٢)^٢ + ٥(٢) + \text{جـ}$

$\Leftarrow ٢٧ = ١٤ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١٣}$ $\therefore \text{ص}^٣ = \text{س}^٢ + \text{٥س} + ١٣$

$\Leftarrow \text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^٢ + \text{٥س} + ١٣}$

مثال: حل المعادلة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س ص}}$ حيث س > ٠ ، ص > ٠

الحل: $\text{دص} = \text{س}^{\frac{1}{2}} \text{ص}^{\frac{1}{2}} \text{ دس}$ بالقسمة على $\text{ص}^{\frac{1}{2}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}} = \text{س}^{\frac{1}{2}} \text{ دس} \Leftarrow \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{ دص} = \text{س}^{\frac{1}{2}} \text{ دس}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{ دص} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}} \text{ دس} \Leftarrow \frac{\text{٢ص}^{\frac{1}{2}}}{١} = \frac{\text{٢س}^{\frac{3}{2}}}{٣} + \text{جـ}$

سؤال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}^٢} = \frac{\text{دس}}{\text{س}^٣}$ ——— الاجابة: $\frac{-١}{\text{ص}} = \frac{-١}{\text{٢س}^٢} + \text{جـ}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $س^2 دس - ص^2 دص = جاص دص + 8س دس$

الحل: $-ص^2 دص - جاص دص = 8س دس - س^2 دس$

⇐ $(-ص^2 - جاص) دص = (8س - س^2) دس$

⇐ $\int (-ص^2 - جاص) دص = \int (8س - س^2) دس$

⇐ $-\frac{ص^3}{3} + جتاص = 4س^2 - \frac{س^3}{3} + جـ$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = جتا^2ص جا3س$

الحل: $دص = جتا^2ص جا3س دس$　نقسم على $جتا^2ص$

$\frac{دص}{جتا^2ص} = جا3س دس$ ⇐ $قا^2ص دص = جا3س دس$

⇐ $\int قا^2ص دص = \int جا3س دس$ ⇐ $ظاص = -\frac{1}{3} جتا3س + جـ$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $3دص = ص^3 دس + 3 جتا^2س دص$

الحل: $3دص - 3جتا^2س دص = ص^3 دس$

⇐ $(3 - 3جتا^2س) دص = ص^3 دس$ ⇐ $\frac{دص}{ص^3} = \frac{دس}{3 - 3جتا^2س}$

$ص^{-3} دص = \frac{دس}{3(1 - جتا^2س)}$ ⇐ $ص^{-3} دص = \frac{دس}{3جا^2س}$

$ص^{-3} دص = \frac{1}{3} قتا^2س دس$ ⇐ $\int ص^{-3} دص = \int \frac{1}{3} قتا^2س دس$

⇐ $\frac{ص^{-2}}{-2} = -\frac{1}{3} ظتاس + جـ$

⇐ $-\frac{1}{2ص^2} = -\frac{1}{3} ظتاس + جـ$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة هو $٥س^٤ + ٦س$ وكان ق(٠) = ٣ جد ق(س).

الحل: $ق'(س) = ٥س^٤ + ٦س \Leftarrow ق(س) = \int (٥س^٤ + ٦س)\, دس$

$\Leftarrow ق(س) = س^٥ + ٣س^٢ + ج$ لكن: $ق(٠) = ٠ + ٠ + ج \Leftarrow \boxed{ج = ٣}$

$\therefore ق(س) = س^٥ + ٣س^٢ + ٣$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة (س، ص) هو $\frac{٤س^٣ + ٢س}{٢ص}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١، ٣) جد معادلة هذا المنحنى.

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س^٣ + ٢س}{٢ص} \Leftarrow ٢ص\, دص = (٤س^٣ + ٢س)\, دس$

$\Leftarrow \int ٢ص\, دص = \int (٤س^٣ + ٢س)\, دس \Leftarrow ص^٢ = س^٤ + س^٢ + ج$

يمر بالنقطة (١، ٣) $\Leftarrow ٩ = ١ + ١ + ج \Leftarrow \boxed{ج = ٧}$

$\therefore ص^٢ = س^٤ + س^٢ + ٧$

مثال: اذا كانت النقطة (١، ٧) نقطة حرجة لكثير الحدود ق(س) وكانت $ق''(س) = ١٢س - ١٠$ جد ق(س)

الحل: $ق'(س) = \int ق''(س)\, دس \Leftarrow ق'(س) = \int (١٢س - ١٠)\, دس = ٦س^٢ - ١٠س + ج$

لكن: (١، ٧) نقطة حرجة $\Leftarrow ق'(١) = صفر$

$\Leftarrow صفر = ٦ - ١٠ + ج \Leftarrow \boxed{ج = ٤}$

$\Leftarrow ق'(س) = ٦س^٢ - ١٠س + ٤ \Leftarrow ق(س) = \int ق'(س)\, دس$

$\Leftarrow ق(س) = \int (٦س^٢ - ١٠س + ٤)\, دس = ٢س^٣ - ٥س^٢ + ٤س + ج$

لكن: ق تمر بـ (١، ٧) $\Leftarrow ق(١) = ٧ \Leftarrow ٧ = ٢ - ٥ + ٤ + ج$

$\Leftarrow ج = ٧ - ١ = ٦ \quad \boxed{ج = ٦}$

$\therefore ق(س) = ٢س^٣ - ٥س^٢ + ٤س + ٦$

مثال: اذا كان تسارع جسم هو ت = ٦ن + ٦ ، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين علماً بأن السرعة الابتدائية هي ٣ م/ث والجسم قطع مسافة ١٥م بعد ١ث .

الحل: ت = ٦ن + ٦ ⟸ ع = $\int$(٦ن + ٦) دن = ٣ن^{٢} + ٦ن + جـ

لكن ع(٠) = ٣ ⟸ ٣ = ٠ + ٠ + جـ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = ٣}$

∴ ع = ٣ن^{٢} + ٦ن + ٣

ف = $\int$(٣ن^{٢} + ٦ن + ٣) دن = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٣ن + جـ

لكن : ف(١) = ١٥ ⟸ ١ + ٣ + ٣ + جـ = ١٥ ⟸ ٧ + جـ = ١٥ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = ٨}$

∴ ف = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٣ن + ٨ ⟸ ف(٢) = ٨ + ١٢ + ٦ + ٨ = ٣٤

مثال: قذف جسم رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٥٠ م/ث بتسارع مقداره -١٠ م/ث^{٢} وكان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة يساوي ٧٠م . جد معادلة الحركة.

الحل: ت = -١٠ ⟸ ع = $\int$-١٠ دن = -١٠ن + جـ

لكن ع(٠) = ٥٠ ⟸ ٥٠ = ٠ + جـ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = ٥٠}$

ع = -١٠ن + ٥٠

ف = $\int$(-١٠ن + ٥٠) دن = -٥ن^{٢} + ٥٠ن + جـ

ف(١) = ٧٠ ⟸ ٧٠ = -٥ + ٥٠ + جـ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = ٢٥}$

∴ ف = -٥ن^{٢} + ٥٠ن + ٢٥

سؤال: جد حلاً للمعادلة التفاضلية ٢س - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ حيث س = ٢

عندما ص = -١

-- المعادلة : ص = س^{٢} - ٥س + ٥

مثال: يسير جسيم بحيث أن $ت = \frac{1}{ع}$ ، حيث $ع > ٠$. اذا تحرك الجسم من السكون وقطع مسافة $١٠\sqrt{٢}$ بعد مرور ٤ ثواني فجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة .

الحل: $ت = \frac{دع}{دن} = \frac{1}{ع} \Leftarrow ع\,دع = دن \Leftarrow \int ع\,دع = \int دن$

$\Leftarrow \frac{1}{2}ع^2 = ن + جـ$

تحرك من السكون $\Leftarrow ع(٠) = ٠ \Leftarrow ٠ = ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٠}$

$\therefore \frac{1}{2}ع^2 = ن \Leftarrow ع^2 = ٢ن \Leftarrow ع = \sqrt{٢ن} \Leftarrow ع = \sqrt{٢} \times \sqrt{ن}$

$ع = \frac{دف}{دن} = \sqrt{٢}\sqrt{ن} \Leftarrow دف = \sqrt{٢}\sqrt{ن}\,دن \Leftarrow \int دف = \int \sqrt{٢}\sqrt{ن}\,دن$

$\Leftarrow ف = \sqrt{٢}\int ن^{\frac{1}{2}}\,دن \Leftarrow ف = \sqrt{٢} \times \frac{٢ن^{\frac{3}{2}}}{٣} + جـ$

لكن: $ف(٤) = ١٠\sqrt{٢}$

$\therefore ف(٤) = \frac{٢\sqrt{٢}\,(٤)^{\frac{3}{2}}}{٣} + جـ = ١٠\sqrt{٢} \Leftarrow \frac{٢\sqrt{٢} \times ٨}{٣} + جـ = ١٠\sqrt{٢}$

$\Leftarrow جـ = ١٠\sqrt{٢} - \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢} = \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$

$\boxed{جـ = \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}}$

$ف(ن) = \frac{٢\sqrt{٢}\,ن^{\frac{3}{2}}}{٣} + \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣} \Leftarrow ف(١) = \frac{٢\sqrt{٢} \times ١}{٣} + \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{١٦\sqrt{٢}}{٣}$

أسئلة سنوات سابقة:

١) قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ث من على ارتفاع ٨٠ قدماً . جد معادلة الحركة لهذه الكرة اذا علمت أن تسارع الكرة يساوي −٣٢ قدم/ث² .

٢) اذا كان $ق(س) = \sqrt{٩ - س^2}$ قابلاً للتكامل في [−٣، ٣] ، فبين دون اجراء التكامل أنه:
$\int_{-٣}^{٣} ق(س)\,دس$ تنحصر بين صفر، ١٨ ـــــ نستخدم نجد أصغر وأكبر قيمة ثم نكامل

٣) اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً ، فما هي مجموعة قيم ن التي تجعل المساواة
$\int_{-١}^{١} س^ن\,دس = ٢\int_{٠}^{١} س^ن\,دس$ ـــ ـــ نكامل الطرفين

* التكامل بالتعويض: نلجأ للتكامل بالتعويض عندما نلاحظ مشتقها غير مألوفة (ليس من الدرجة الأولى (غير خطي) في الزاوية أو الأس أو تحت الجذر أو داخل قوس أو داخل اقتران أو في المقام.

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int (\text{٣س}^2 + ٥)(\text{س}^3 + \text{٥س})^7 \, \text{دس}$

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^3 + \text{٥س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^2 + ٥ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^2 + ٥}$

$$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٣س}^2+٥)} \, \text{ص}^7 \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٣س}^2+٥}} = \int \text{ص}^7 \, \text{دص} = \frac{\text{ص}^8}{٨} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^3 + \text{٥س})^8}{٨} + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{س}^3 + ٥}{\sqrt[3]{\text{س}^4 + \text{٢٠س}}} \, \text{دس} = \int (\text{س}^3 + ٥)(\text{س}^4 + \text{٢٠س})^{-\frac{1}{3}} \, \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^4 + \text{٢٠س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^3 + ٢٠$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٤(\text{س}^3 + ٥)}$

$$\Leftarrow \int \cancel{(\text{س}^3+٥)} (\text{ص})^{-\frac{1}{3}} \frac{\text{دص}}{٤\cancel{(\text{س}^3+٥)}}$$

$$= \int \frac{\text{ص}^{-\frac{1}{3}}}{٤} \, \text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{\text{ص}^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3}{8} \text{ص}^{\frac{2}{3}} + \text{جـ} = \frac{3}{8} (\text{س}^4 + \text{٢٠س})^{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$$

٣) $\int (\text{س}^2 + ١) \, \text{جتا}(\text{س}^3 + \text{٣س} + ١) \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + \text{٣س} + ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^2 + ٣$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣(\text{س}^2 + ١)}$

$$\Leftarrow \int \cancel{(\text{س}^2+١)} \, \text{جتا ص} \frac{\text{دص}}{٣\cancel{(\text{س}^2+١)}}$$

$$= \frac{1}{3} \int \text{جتا ص دص} = \frac{1}{3} \text{جا ص} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{3} \text{جا}(\text{س}^3 + \text{٣س} + ١) + \text{جـ}$$

④ $\int \frac{\text{س}\ \text{قتا}^2\sqrt{\text{س}^2+1}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{قتا}^2\ \text{ص}}{\cancel{\sqrt{\text{س}^2+1}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}^2+1}}}{\cancel{\text{س}}}\ \text{دص}$

$= \int \text{قتا}^2\text{ص}\ \text{دص} = -\text{ظتا}\ \text{ص} + \text{جـ}$

$= -\text{ظتا}\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{\text{س}^2+1}}$

$\text{دس} = \frac{\sqrt{\text{س}^2+1}}{\text{س}}\ \text{دص}$

---

* ملاحظة: اذا كان التكامل محدود نقوم بتغيير حدود التكامل

---

⑤ $\int_0^4 \frac{4\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+9}}\ \text{دس} = \int_0^4 4\text{س}(\text{س}^2+9)^{-\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow \int_9^{25} 4\cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} = \int_9^{25} 2\ \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دص}$

$= 2\ \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_9^{25} = 4\sqrt{\text{ص}}\ \Big|_9^{25} = 4(5-3) = 8$

$\text{ص} = \text{س}^2+9$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

عندما س = ٠ فإن ص = ٩

س = ٤ ⟸ ص = ٢٥

⑥ $\int_0^1 6\text{س}^2(\text{س}^3+1)^3\ \text{دس} = \int_1^2 \cancel{6}^{\,2}\ \cancel{\text{س}^2}\ \text{ص}^3 \frac{\text{دص}}{\cancel{3}\cancel{\text{س}^2}}$

$= \int_1^2 2\ \text{ص}^3\ \text{دص} = \frac{1}{2}\text{ص}^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(16-1) = \frac{15}{2}$

$\text{ص} = \text{س}^3+1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

عندما س = ٠ ⟸ ص = ١

س = ١ ⟸ ص = ٢

⑦ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظا}^4\text{س}\ \text{دس} = \int_0^1 \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{ص}^4 \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int_0^1 \text{ص}^4\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

عندما س = ٠ ⟸ ص = ٠

$\text{س} = \frac{\pi}{4}$ ⟸ ص = ١

سؤال: $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$ ——— نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\boxed{\text{الاجابة}\ \ -4}$

٨) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس جتاس $(1+$ جا^{2}س$)^{-\frac{1}{2}}$ دس

ص = ١ + جا^{2}س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جاس جتاس

دس = $\frac{دص}{٢ جاس جتاس}$

عندما س = ٠ ⟸ ص = ١

س = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ ص = ٢

$= \int_{1}^{2}$ جاس ~~جتاس~~ ص$^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{دص}{\cancel{٢ جاس جتاس}}$

$= \frac{1}{2}\int_{1}^{2}$ ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{2} \cdot \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{2} = \sqrt{ص}\Big|_{1}^{2}$

$= \sqrt{2} - 1$

* ملاحظة: لا يجوز التكامل بوجود أكثر من متغير داخل التكامل الواحد، وإذا بقي أكثر من متغير نستفيد من الفرض الأصلي أو باستخدام إحدى المتطابقات لتوحيد المتغير.

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \frac{س^3}{\sqrt{1+س^2}}$ دس $= \int$ س$^3 (1+س^2)^{-\frac{1}{2}}$ دس

ص = ١ + س^2

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س

دس = $\frac{دص}{٢س}$

$= \int$ س^3 ص$^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{دص}{٢س}$ $= \frac{1}{2}\int$ س^2 ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص

للتخلص من س^2 نستفيد من ١ + س^2 = ص

⟸ س^2 = ص − ١

⟸ $\frac{1}{2}\int ($ص − ١$)$ ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{2}\int$ ص$^{\frac{1}{2}}$ − ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{2}\left(\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)$ + جـ

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} - ٢ص^{\frac{1}{2}}\right)$ + جـ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(1+س^2)^{\frac{3}{2}} - ٢(1+س^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ + جـ

٢) $\int$ س^5 (س^3 + ٤)$^{\frac{1}{2}}$ دس $= \int$ س^5 ص$^{\frac{1}{2}}$ $\frac{دص}{٣س^2}$

ص = س^3 + ٤

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ س^2

دس = $\frac{دص}{٣س^2}$

$= \frac{1}{3}\int$ س^3 ص$^{\frac{1}{2}}$ دص

لكن: س^3 = ص − ٤ (من الفرض)

$= \frac{1}{3}\int ($ص − ٤$)$ ص$^{\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{3}\int$ ص$^{\frac{3}{2}}$ − ٤ص$^{\frac{1}{2}}$ دص

$= \frac{1}{3}\left(\frac{٢ص^{\frac{5}{2}}}{٥} - \frac{٤\times٢ص^{\frac{3}{2}}}{٣}\right)$ + جـ $= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}(س^3+٤)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(س^3+٤)^{\frac{3}{2}}\right)$ + جـ

③ $\int$ س° (س^٢ + ١)^{١/٢} دس ـــــ الحل

مثال: اذا كان م(١) = ٣ ، م(٩) = ١٠ جد $\int_{١}^{٢}$ ٦س^٢ م′(س^٣ + ١) دس

الحل: نفرض ص = س^٣ + ١ ⟸ دص/دس = ٣س^٢ ⟸ دس = دص/٣س^٢

عندما س = ٠ ⟸ ص = ١
س = ٢ ⟸ ص = ٩

⟸ $\int_{١}^{٩}$ ٦س^٢ م′(ص) دص/٣س^٢ = ٢ $\int_{١}^{٩}$ م′(ص) دص

= ٢ م(ص) $|_{١}^{٩}$ = ٢ (م(٩) − م(١)) = ٢ (١٠ − ٣) = ١٤

سؤال: اذا كان م(٠) = ٢ ، م(١) = ٦ جد $\int$^{ط/٢} جتاس م′(جاس) دس

$\boxed{\text{الإجابة: ٤}}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int$ ١/س^٢ ظا^٢ ١/س دس = $\int$ ١/س^٢ ظا^٢ص × −س^٢ دص

= −$\int$ ظا^٢ص دص = −$\int$ (قا^٢ص − ١) دص

= −(ظاص − ص) + جـ = −(ظا ١/س − ١/س) + جـ

ص = ١/س
دص/دس = −١/س^٢
دس = −س^٢ دص

② $\int$ (٢س − ١)/ظا^٢(س^٢ − س + ٢) دس

= $\int$ $\cancel{(٢س − ١)}$/ظا^٢ص × دص/$\cancel{(٢س − ١)}$ = $\int$ ظتا^٢ص دص

= $\int$ قتا^٢ص − ١ دص = −ظتاص − ص + جـ

= −ظتا(س^٢ − س + ٢) − (س^٢ − س + ٢) + جـ

ص = س^٢ − س + ٢
دص/دس = ٢س − ١
دس = دص/(٢س − ١)

سؤال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$ ——— نفرض ص = جتا س

٢) $\int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جتا}^7\text{س}}\ \text{دس}$ ——— نفرض ص = ظا س

$= \int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جتا}^3\text{س}\ \text{جتا}^4\text{س}}\ \text{دس}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \text{جتا}^3\text{س دس} = \int \text{جتا}^2\text{س جتا س دس} = \int (1 - \text{جا}^2\text{س})\ \text{جتا س دس}$

نفرض ص = جا س $\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$= \int (1 - \text{ص}^2)\ \cancel{\text{جتا س}}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا س}}} = \int 1 - \text{ص}^2\ \text{دص} = \text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج}$

$= \text{جا س} - \frac{\text{جا}^3\text{س}}{3} + \text{ج}$

---

٢) $\int \text{جا س} \left(\text{ظتا س} + \frac{1}{\text{قتا}^2\text{س}}\right) \text{دس} = \int \text{جا س} \left(\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} + \text{جا}^2\text{س}\right) \text{دس}$

$= \int \text{جتا س} + \text{جا}^3\text{س دس} = \int \text{جتا س دس} + \int \text{جا}^3\text{س دس} = \text{جا س} + \int \text{جا}^2\text{س جا س دس}$

نفرض ص = جتا س $\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جا س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جا س}}$

$= \text{جا س} + \int (1 - \text{جتا}^2\text{س})\ \text{جا س دس} = \text{جا س} + \int (1 - \text{ص}^2)\ \cancel{\text{جا س}}\ \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جا س}}}$

$= \text{جا س} + \int -1 + \text{ص}^2\ \text{دص} = \text{جا س} - \text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج}$

$= \text{جا س} - \text{جتا س} + \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{3} + \text{ج}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\sqrt{\text{جا}2\text{س}}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\sqrt{\text{جا}2\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جتا}2\text{س}\,(\text{جا}2\text{س})^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جتا}2\text{س}}\ \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \frac{\text{دص}}{2\,\cancel{\text{جتا}2\text{س}}} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

$= \sqrt{\text{ص}} + \text{ج} = \sqrt{\text{جا}2\text{س}} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{جتا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{جتا}2\text{س}}$

---

٢) $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\,(1-\text{جا}^2\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{(\text{جاس}\,\text{جتاس})^2}\,\text{دس}$

متطابقة

$= \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{(\frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س})^2}\,\text{دس} = \int \frac{\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}{\text{ص}^2}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^{-2}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{ج} = \frac{-1}{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \frac{-1}{\frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س}} + \text{ج} = \frac{-2}{\text{جا}2\text{س}} + \text{ج}$

$\text{ص} = \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}2\text{س}}$

---

* **ملاحظات هامة:**

عند وجود $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{جتا}^{\text{م}}\text{س}\ \text{دس}$ حيث ن، م أعداد صحيحة موجبة نوجد الحالات التالية:

١) اذا كانت احدى الأسس (١) نفرض الأخرى ص

٢) اذا كانت احدى الأسس زوجية والأخرى فردية نفرض الزوجية

٣) اذا كانت ن، م فرديتان نفرض أي منهما ويفضل الكبرى

٤) اذا كانت ن، م زوجيتان نستخدم المتطابقات

مثال : جد كلاً من التكاملات التالية :

① $\int$ جا^{4}س جتا^{3}س دس

ص = جاس ، $\frac{دص}{دس}$ = جتاس ، دس = $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ ص^4 جتا^{3}س $\frac{دص}{جتاس}$ = $\int$ ص^4 جتا^{2}س دص

= $\int$ ص^4 (١ - جا^{2}س) دص = $\int$ ص^4 (١ - ص^2) دص

= $\int$ ص^4 - ص^6 دص = $\frac{ص^5}{5}$ - $\frac{ص^7}{7}$ + جـ = $\frac{جا^5س}{5}$ - $\frac{جا^7س}{7}$ + جـ

② $\int$ جا^{3}س جتا^{3}س دس

ص = جاس ، $\frac{دص}{دس}$ = جتاس ، دس = $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ ص^3 جتا^{3}س $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ ص^3 جتا^{2}س دص = $\int$ ص^3 (١ - جا^{2}س) دص

= $\int$ ص^3 (١ - ص^2) دص = $\int$ ص^3 - ص^5 دص = $\frac{ص^4}{4}$ - $\frac{ص^6}{6}$ + جـ

= $\frac{جا^4س}{4}$ - $\frac{جا^6س}{6}$ + جـ

③ $\int$ جا^{2}س جتا^{2}س دس = $\int \frac{1}{2}$ (١ - جتا٢س) × $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س) دس

= $\frac{1}{4} \int$ ١ - جتا^{2}٢س دس = $\frac{1}{4} \int$ (١ - $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٤س)) دس

= $\frac{1}{4} \int$ ١ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جتا٤س دس = $\frac{1}{4} \int \frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ جتا٤س دس

= $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2}$س - $\frac{1}{8}$ جا٤س) + جـ

= $\frac{1}{8}$س - $\frac{1}{32}$ جا٤س + جـ

"الإرادة تصنع التفوق"

* ملاحظات هامة:

عند وجود $\int \text{قا}^{ن}\text{س}\ \text{ظا}^{م}\text{س}\ \text{دس}$ حيث ن ، م أعداد صحيحة موجبة يوجد أحد الحالات الآتية:

1) اذا كانت ن زوجية نفرض ص = ظاس
2) اذا كانت ن ، م فرديتان نفرض ص = قاس

مثال: جد التكاملات التالية:

1) $\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ظا}^{5}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ص}^{5}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$= \int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ص}^{5}\ \text{دص} = \int (1+\text{ظا}^{2}\text{س})\ \text{ص}^{5}\ \text{دص}$

$= \int (1+\text{ص}^{2})\ \text{ص}^{5}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{5}+\text{ص}^{7}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{6}}{6} + \frac{\text{ص}^{8}}{8} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{6}\text{س}}{6} + \frac{\text{ظا}^{8}\text{س}}{8} + \text{جـ}$

ص = ظاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{2}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

2) $\int \text{قا}^{5}\text{س}\ \text{ظا}^{3}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{ص}^{5}\ \text{ظا}^{3}\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

$= \int \text{ص}^{4}\ \text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{4}(\text{قا}^{2}\text{س}-1)\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{4}(\text{ص}^{2}-1)\ \text{دص} = \int \text{ص}^{6}-\text{ص}^{4}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{7}}{7} - \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{جـ} = \frac{\text{قا}^{7}\text{س}}{7} - \frac{\text{قا}^{5}\text{س}}{5} + \text{جـ}$

ص = قاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

* ملاحظة: نفس الطريقة السابقة عند استخدام $\int \text{قتا}^{ن}\text{س}\ \text{ظتا}^{م}\text{س}\ \text{دس}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int$ جاس جتا^2(جتاس) دس $= \int$ جاس جتا^{2}ص $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

ص = جتاس ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − جاس ، دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= -\int$ جتا^{2}ص دص $= -\frac{1}{2}\int (1 +$ جتا٢ص$)$ دص

$= -\frac{1}{2}\left(\text{ص} + \frac{1}{2}\text{جا٢ص}\right) +$ جـ

$= -\frac{1}{2}\left(\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{جا}(\text{٢جتاس})\right) +$ جـ

٢) $\int$ س جاس^2 ظا^2(جتاس^2) دس

ص = جتاس^2 ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − جاس^2 × ٢س ، دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{٢س جاس}^2}$

$= \int$ س جاس^2 ظا^{2}ص $\frac{\text{دص}}{-\text{٢س جاس}^2}$

$= -\frac{1}{2}\int$ ظا^{2}ص دص $= -\frac{1}{2}\int$ قا^{2}ص − ١ دص

$= -\frac{1}{2}\left(\text{ظاص} - \text{ص}\right) +$ جـ

$= -\frac{1}{2}\left(\text{ظا}(\text{جتاس}^2) - \text{جتاس}^2\right) +$ جـ

مثال: جد $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}$ دس

ص = أس + ب ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ ، دس = $\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}} \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{1}{\text{أ}}\int \text{ص}^{\text{ن}}$ دص

$= \frac{1}{\text{أ}} \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} +$ جـ

$= \frac{1}{\text{أ}} \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} +$ جـ

• ملاحظة: يمكن اعتبار المثال السابق نتيجة لإيجاد تكاملات متشابهة

مثال: ١) $\int (\text{٣س} - ٢)^6$ دس $= \frac{1}{3}\frac{(\text{٣س}-٢)^7}{7} +$ جـ

٢) $\int ٦(\text{٢س} - ١)^{-4}$ دس $= \frac{6}{2}\frac{(\text{٢س}-١)^{-3}}{-3} +$ جـ $= \frac{-1}{(\text{٢س}-٣)^3} +$ جـ

③ $\int (4\text{س}^2+4\text{س}+1)^6 \, \text{ء}\text{س} = \int \left((2\text{س}+1)^2\right)^6 \, \text{ء}\text{س} = \int (2\text{س}+1)^{12} \, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{1}{2} \, \frac{(2\text{س}+1)^{13}}{13} + \text{ج}$

---

④ $\int \frac{1}{\text{س}^2+10\text{س}+25} \, \text{ء}\text{س} = \int \frac{1}{(\text{س}+5)^2} \, \text{ء}\text{س} = \int (\text{س}+5)^{-2} \, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{1}{1} \, \frac{(\text{س}+5)^{-1}}{-1} + \text{ج} = \frac{-1}{\text{س}+5} + \text{ج}$

---

⑤ $\int \text{س}^8 \left(\frac{3}{\text{س}} - \frac{2}{\text{س}^2}\right)^4 \text{ء}\text{س} = \int \text{س}^8 \left(\frac{3\text{س}-2}{\text{س}^2}\right)^4 \text{ء}\text{س}$

$= \int \text{س}^8 \, \frac{(3\text{س}-2)^4}{\text{س}^8} \, \text{ء}\text{س} = \int (3\text{س}-2)^4 \, \text{ء}\text{س} = \frac{1}{3} \, \frac{(3\text{س}-2)^5}{5} + \text{ج}$

---

⑥ $\int \text{س}^3 \times \sqrt[3]{\frac{5}{\text{س}^2} - \frac{2}{\text{س}^3}} \, \text{ء}\text{س} = \int \text{س}^3 \times \sqrt[3]{\frac{5\text{س}-2}{\text{س}^3}} \, \text{ء}\text{س}$

$= \int \text{س} \, \frac{\sqrt[3]{5\text{س}-2}}{\text{س}} \, \text{ء}\text{س} = \int (5\text{س}-2)^{\frac{1}{3}} \, \text{ء}\text{س} = \frac{1}{5} \times 3 \, \frac{(5\text{س}-2)^{\frac{4}{3}}}{4} + \text{ج}$

---

⑦ $\int \text{س}(\text{س}^4+2\text{س}^2+1)^5 \, \text{ء}\text{س} = \int \text{س}\left((\text{س}^2+1)^2\right)^5 \text{ء}\text{س} = \int \text{س}(\text{س}^2+1)^{10} \, \text{ء}\text{س}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^2+1$

$\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = 2\text{س} \Longrightarrow \text{ء}\text{س} = \frac{\text{ء}\text{ص}}{2\text{س}}$

$= \int \cancel{\text{س}} \, \text{ص}^{10} \, \frac{\text{ء}\text{ص}}{2\cancel{\text{س}}} = \frac{1}{2} \int \text{ص}^{10} \, \text{ء}\text{ص} = \frac{1}{2} \, \frac{\text{ص}^{11}}{11} + \text{ج}$

$= \frac{\text{ص}^{11}}{22} + \text{ج} = \frac{(\text{س}^2+1)^{11}}{22} + \text{ج}$

سؤال٤: جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{(٢س+٣)^{٩}}{س^{١١}}\, دس = \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س+٣}{س}\right)^{٩} دس$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س}{س} + \frac{٣}{س}\right)^{٩} دس = \int \frac{١}{س^{٢}} \left(٢ + \frac{٣}{س}\right)^{٩} دس$

$= \int \frac{١}{\cancel{س^{٢}}}\, ص^{٩}\, \frac{\cancel{س^{٢}}}{-٣}\, دص = -\frac{١}{٣} \int ص^{٩}\, دص$

$= -\frac{١}{٣}\, \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ = -\frac{١}{٣٠} \left(٢ + \frac{٣}{س}\right)^{١٠} + جـ$

$ص = ٢ + \frac{٣}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{س^{٢}}$

$دس = \frac{س^{٢}}{-٣}\, دص$

---

٢) $\int (س+١)^{٣} (س^{٢}+٢س+٧)^{٥}\, دس$

$= \int (س+١)^{٣}\, ص^{٥}\, \frac{دص}{٢(س+١)} = \frac{١}{٢} \int (س+١)^{٢}\, ص^{٥}\, دص$

$= \frac{١}{٢} \int (س^{٢}+٢س+١)\, ص^{٥}\, دص$

$= \frac{١}{٢} \int (ص-٦)\, ص^{٥}\, دص = \frac{١}{٢} \int ص^{٦} - ٦ص^{٥}\, دص$

$= \frac{١}{٢} \left(\frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{٦ص^{٦}}{٦}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٢} \left(\frac{(س^{٢}+٢س+٧)^{٧}}{٧} - (س^{٢}+٢س+٧)^{٦}\right) + جـ$

$ص = س^{٢} + ٢س + ٧$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٢$

$دس = \frac{دص}{٢(س+١)}$

$ص - ٧ = س^{٢} + ٢س$

$ص - ٦ = س^{٢} + ٢س + ١$

---

٣) $\int (س^{٥}+١)^{٨} \times س^{١٤}\, دس = \int ص^{٨}\, س^{١٤}\, \frac{دص}{٥س^{٤}}$

$= \frac{١}{٥} \int ص^{٨}\, س^{١٠}\, دص = \frac{١}{٥} \int ص^{٨} (ص^{٢} - ٢ص + ١)\, دص$

$= \frac{١}{٥} \int ص^{١٠} - ٢ص^{٩} + ص^{٨}\, دص$

$= \frac{١}{٥} \left(\frac{ص^{١١}}{١١} - \frac{٢ص^{١٠}}{١٠} + \frac{ص^{٩}}{٩}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٥} \left(\frac{(س^{٥}+١)^{١١}}{١١} - \frac{٢(س^{٥}+١)^{١٠}}{١٠} + \frac{(س^{٥}+١)^{٩}}{٩}\right) + جـ$

$ص = س^{٥} + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٥س^{٤}$

$دس = \frac{دص}{٥س^{٤}}$

$ص - ١ = س^{٥}$

$(ص-١)^{٢} = س^{١٠}$

$ص^{٢} - ٢ص + ١ = س^{١٠}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \sqrt[3]{٢س^{٣} + ٣س^{٥}}\ دس = \int \sqrt[3]{س^{٣}(٢+٣س^{٢})}\ دس$

$= \int س(٢+٣س^{٢})^{\frac{1}{3}}\ دس$

قمنا باخراج عامل مشترك حتى تصبح على صورة:
(مقدار)^{ن} × مشتقة المقدار

$= \int \cancel{س}\ ص^{\frac{1}{3}} \frac{دص}{٦\cancel{س}} = \frac{1}{6}\int ص^{\frac{1}{3}}\ دص$

$= \frac{1}{6} \times \frac{٣ص^{\frac{4}{3}}}{٤} + جـ = \frac{1}{8}(٢+٣س^{٢})^{\frac{4}{3}} + جـ$

$ص = ٢+٣س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٦س$

$دس = \frac{دص}{٦س}$

---

② $\int س\sqrt{س^{٨} + ٢س^{٤}}\ دس = \int س\sqrt{س^{٤}(س^{٤}+٢)}\ دس$

$= \int س \times س^{٢}\sqrt{(س^{٤}+٢)}\ دس = \int س^{٣}(س^{٤}+٢)^{\frac{1}{2}}\ دس$

$= \int \cancel{س^{٣}}\ ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}} = \frac{1}{4}\int ص^{\frac{1}{2}}\ دص$

$= \frac{1}{4} \times \frac{٢ص^{\frac{3}{2}}}{٣} + جـ = \frac{1}{6}(س^{٤}+٢)^{\frac{3}{2}} + جـ$

$ص = س^{٤}+٢$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$

---

③ $\int (س^{٨} - ٤س)^{٦}\ دس = \int (س(س^{٧}-٤))^{٦}\ دس = \int س^{٦}(س^{٧}-٤)^{٦}\ دس$

$= \int \cancel{س^{٦}}\ ص^{٦} \frac{دص}{٧\cancel{س^{٦}}} = \frac{1}{7}\int ص^{٦}\ دص$

$= \frac{1}{7}\ \frac{ص^{٧}}{٧} + جـ = \frac{1}{49}(س^{٧}-٤)^{٧} + جـ$

$ص = س^{٧} - ٤$

$\frac{دص}{دس} = ٧س^{٦}$

$دس = \frac{دص}{٧س^{٦}}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال ٤ جد:

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جاس}(1-\text{جا}^2\text{س})}\ \text{دس} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جاس} \times \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\text{جتاس}| \sqrt{\text{جاس}}\ \text{دس}$ لأن $0 \le \text{س} \le \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\,(\text{جاس})^{\frac{1}{2}}\ \text{دس} = \int_0^{1} \text{جتاس}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int_0^{1} \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{دص} = \frac{2\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$

ص = جاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

عندما س = ٠ ← ص = ٠ ،

س = $\frac{\pi}{2}$ ← ص = ١

---

② $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^6\ \text{جتا}2\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{ص}^6\ \cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})}\,(\text{جتاس} + \text{جاس})\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}}$

$= \int \text{ص}^6 \times \text{ص}\ \text{دص} = \int \text{ص}^7\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^8}{8} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^8}{8} + \text{جـ}$

ص = جاس + جتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$\text{جتا}2\text{س} = \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$

$= (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})$

---

③ $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^7\ \text{قاس}\ \text{دس}$

$= \int \text{ص}^7\ \text{قاس}\ \frac{\text{دص}}{\text{قاس}\,(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

$= \int \text{ص}^7\ \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^6\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^7}{7} + \text{جـ} = \frac{(\text{قاس} + \text{ظاس})^7}{7} + \text{جـ}$

ص = قاس + ظاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس}\,(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

---

④ $\int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{1-\text{جاس}} \times \frac{1+\text{جاس}}{1+\text{جاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^2\text{س}}{1 - \text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس جتاس}} + \text{ظا}^2\text{س}\ \text{دس} = \int \text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س} - 1\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

مثال: أوجد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \frac{(س-٢)^٣}{\sqrt{س+١}}\,دس = \int (س-٢)^٣ (س+١)^{-\frac{1}{2}}\,دس$

$ص = س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ١$

$دس = دص$

ثم نكمل ـــــ الإجابة $\frac{٤}{٣}\cdots$

٢) $\int \frac{٤}{س^٣\sqrt{١+س^٢}}\,دس = \int \frac{٤}{س^٢\sqrt{س^٢(\frac{1}{س^٢}+١)}}\,دس = \int \frac{٤}{س^٢|س|\sqrt{\frac{1}{س^٢}+١}}\,دس$

$= \int \frac{٤}{س^٢ \times س\,(١+\frac{1}{س^٢})^{\frac{1}{2}}}\,دس = \int \frac{٤}{س^٣(١+\frac{1}{س^٢})^{\frac{1}{2}}}\,دس = \int \frac{٤(١+\frac{1}{س^٢})^{-\frac{1}{2}}}{س^٣}\,دس$

نفرض $ص = \frac{1}{س^٢}+١$ ثم نكمل ---

٣) $\int \frac{\sqrt{١+س}}{\sqrt{س^٢ \times س}}\,دس = \int \frac{\sqrt{١+س}}{س^٢\sqrt{س}}\,دس = \int \frac{1}{س^٢}\sqrt{\frac{س+١}{س}}\,دس$

$= \int \frac{1}{س^٢}\sqrt{\frac{س}{س}+\frac{1}{س}}\,دس = \int \frac{1}{س^٢}(١+\frac{1}{س})^{\frac{1}{2}}\,دس$

نفرض $ص = ١ + \frac{1}{س}$ ثم نكمل ---

٤) $\int \frac{س\sqrt{١+س}}{١-\sqrt{س+١}}$ نضرب بالمرافق $\Leftarrow \int \frac{س\sqrt{١+س}}{١-\sqrt{س+١}} \times \frac{١+\sqrt{س+١}}{١+\sqrt{س+١}}\,دس$

$= \int \frac{س\sqrt{س+١}\,(١+\sqrt{س+١})}{١-(س+١)}\,دس = \int \frac{\cancel{س}\sqrt{س+١}\,(١+\sqrt{س+١})}{-\cancel{س}}\,دس$

$= -\int \sqrt{س+١} + ١ + س\,دس = -\int (س+١)^{\frac{1}{2}} + ١ + س\,دس$

$= -\left(\frac{(س+١)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + س + \frac{س^٢}{٢}\right) + ج$

٥) $\int (٤س^٣ + ٦س^٢ + ٢س)(س^٢+س)^{١٥}\,دس$

$ص = س^٢ + س$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + ١$

$دس = \frac{دص}{٢س+١}$

$= \int ٢س(س+١)\cancel{(٢س+١)}\,ص^{١٥}\,\frac{دص}{\cancel{٢س+١}}$

$= ٢\int (س^٢+س)\,ص^{١٥}\,دص = ٢\int ص \times ص^{١٥}\,دص$

$= ٢\int ص^{١٦}\,دص = \frac{٢ص^{١٧}}{١٧} + ج$

$= \frac{٢}{١٧}(س^٢+س)^{١٧} + ج$

⑥ $\int \frac{1}{س^2-1}\sqrt{\frac{س+1}{س-1}}\,دس = \int \frac{1}{(س-1)(س+1)}\left(\frac{س+1}{س-1}\right)^{\frac{1}{2}} دس$

$= \int \frac{1}{(1+س)(1-س)}\, ص^{\frac{1}{2}}\, \frac{(س-1)^2}{-2}\, دص$

$= \frac{-1}{2}\int \frac{س-1}{س+1}\, ص^{\frac{1}{2}}\, دص$

$= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{ص}\, ص^{\frac{1}{2}}\, دص = \frac{-1}{2}\int ص^{\frac{-1}{2}}\, دص$

$= \frac{-1}{2} \times \frac{2ص^{\frac{1}{2}}}{1} + ج = -\sqrt{ص} + ج$

$= -\sqrt{\frac{س+1}{س-1}} + ج$

$ص = \frac{س+1}{س-1}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1\times(س-1) - 1\times(س+1)}{(س-1)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-2}{(س-1)^2}$

$دس = \frac{(س-1)^2}{-2}\, دص$

مثال: بيّن أن $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^ن س\, دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن س\, دس$

الحل: $جاس = جتا\left(\frac{\pi}{2} - س\right)$

$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^ن س\, دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن\left(\frac{\pi}{2} - س\right) دس$

$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} جتا^ن ص\, دص = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن ص\, دص$ #

$ص = \frac{\pi}{2} - س$

$\frac{دص}{دس} = -1$

$دس = -دص$

$س = 0 \Leftarrow ص = \frac{\pi}{2}$

$س = \frac{\pi}{2} \Leftarrow ص = 0$

مثال: اذا كان ميل المماس للمنحنى يعطى بالعلاقة $\frac{4س}{3ص^2\sqrt{س^2+5}}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (2،3) اكتب معادلة المنحنى.

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{4س}{3ص^2\sqrt{س^2+5}} \Leftarrow 3ص^2\, دص = \frac{4س}{\sqrt{س^2+5}}\, دس$

$\Leftarrow \int 3ص^2\, دص = \int 4س\,(س^2+5)^{\frac{-1}{2}}\, دس$

$\Leftarrow ص^3 = \int 4\cancel{س}\,(ل)^{\frac{-1}{2}}\, \frac{دل}{2\cancel{س}}$

$\Leftarrow ص^3 = \int 2 ل^{\frac{1}{2}}\, دل \Leftarrow ص^3 = 2 \times \frac{2ل^{\frac{1}{2}}}{1} + ج$

$\Leftarrow ص^3 = 4\sqrt{ل} + ج \Leftarrow ص^3 = 4\sqrt{س^2+5} + ج$

يمر ب (2،3) $\Leftarrow 27 = 4\sqrt{9} + ج \Leftarrow \boxed{ج = 15}$

$ص^3 = 4\sqrt{س^2+5} + 15 \Leftarrow ص = \sqrt[3]{4\sqrt{س^2+5} + 15}$

$ل = س^2 + 5$

$\frac{دل}{دس} = 2س$

$دس = \frac{دل}{2س}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \sqrt{س ص + س + ص + ١}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \sqrt{\underbrace{س(ص+١) + (ص+١)}_{عامل\ مشترك}} = \sqrt{(س+١)(ص+١)} = (ص+١)^{\frac{1}{2}}(س+١)^{\frac{1}{2}}$

$دص = (ص+١)^{\frac{1}{2}}(س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس \Leftarrow \frac{دص}{(ص+١)^{\frac{1}{2}}} = (س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس$

$(ص+١)^{-\frac{1}{2}}\, دص = (س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس \Leftarrow \int (ص+١)^{-\frac{1}{2}}\, دص = \int (س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس$

$\frac{٢(ص+١)^{\frac{1}{2}}}{١} = \frac{٢(س+١)^{\frac{3}{2}}}{٣} + جـ$

مثال: جد $\int \frac{(\sqrt{س}+٣)^٧}{س^٥}\, دس$

$ص = \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{١}{٢ص}$

$دس = ٢ص\, دص$

الحل: $\int \frac{(ص+٣)^٧}{ص^{١٠}}\, ٢ص\, دص$

$= ٢\int \frac{(ص+٣)^٧}{ص^٩}\, دص = ٢\int \frac{١}{ص^٢}\left(\frac{٣+ص}{ص}\right)^٧ دص$

$= ٢\int \frac{١}{ص^٢}\left(\frac{٣}{ص}+١\right)^٧ دص$

تعويض مرة أخرى

$ع = \frac{٣}{ص} + ١$

$\frac{دع}{دص} = \frac{-٣}{ص^٢}$

$دص = \frac{ص^٢}{-٣}\, دع$

$= ٢\int \frac{١}{\cancel{ص^٢}}\, ع^٧\, \frac{\cancel{ص^٢}}{-٣}\, دع$

$= \frac{-٢}{٣} \times \frac{ع^٨}{٨} + جـ = \frac{-٢}{٢٤}\left(\frac{٣}{ص}+١\right)^٨ + جـ$

$= \frac{-٢}{٢٤}\left(\frac{٣}{\sqrt{س}}+١\right)^٨ + جـ$

سؤال: جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{2}} ٦\, جتاس\, هـ'(جاس)\, دس$

$ص = جاس$

$\frac{دص}{دس} = جتاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = ١$

$= \int_{٠}^{١} ٦\, \cancel{جتاس}\, هـ'(ص)\, \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

ثم نكمل ——————

$\boxed{الاجابة\ -٣٦}$