للمرحلة الثانوية

المسك في الـرياضيات

التكامل (علمي)

شرح مفصل للمادة

أسئلة السنوات السابقة

تمارين إضافية

إعداد :

الأستاذ عماد مسـك

079 5153 669

برعاية :

#Imad Misk

#imadmisk

* التكامل بالكسور الجزئية:

وهو تقسيم الكسر الواحد إلى عدة كسور

نلجأ إلى التكامل بالكسور الجزئية إذا أردنا إيجاد التكامل لاقتران نسبي مقامه محللاً إلى عوامل أو قابلاً للتحليل

مثل:

$$\int \frac{٢٠س + ٥}{س(٢س - ١)(٣س + ٧)} \, دس$$

$$\int \frac{٩}{٤س^{٢} - ٢٥} \, دس \quad (\text{بتحليل})$$

$$\int \frac{س + ٧}{٢س^{٢} - ٧س + ٥} \, دس \quad (\text{بتحليل})$$

مثال ٣ جد $\int \frac{6\text{س}-5}{2\text{س}^3-5\text{س}^2+3\text{س}}\,d\text{س} = \int \frac{6\text{س}-5}{\text{س}(2\text{س}^2-5\text{س}+3)}\,d\text{س}$

$= \int \frac{6\text{س}-5}{\text{س}(2\text{س}-3)(\text{س}-1)}\,d\text{س}$ فكرة الكسور الجزئية .

نفرض :

$\frac{6\text{س}-5}{\text{س}(2\text{س}-3)(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{2\text{س}-3} + \frac{\text{جـ}}{\text{س}-1}$ $\boxed{\times\ \text{س}(2\text{س}-3)(\text{س}-1)}$

$\Leftarrow 6\text{س}-5 = \text{أ}(2\text{س}-3)(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س})(\text{س}-1) + \text{جـ}(\text{س})(2\text{س}-3)$

بوضع $\boxed{\text{س}=0}$

$\Leftarrow -5 = \text{أ}(-3)(-1) + \text{صفر} + \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{-5}{3}}$

بوضع $2\text{س}-3=0 \Leftarrow \boxed{\text{س}=\frac{3}{2}}$

$\Leftarrow 4 = \text{صفر} + \text{ب}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \frac{16}{3}}$

بوضع $\text{س}-1=0 \Leftarrow \boxed{\text{س}=1}$

$\Leftarrow 1 = \text{صفر} + \text{صفر} + \text{جـ}(1)(-1) \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = -1}$

$\therefore I = \int \left(\frac{\frac{-5}{3}}{\text{س}} + \frac{\frac{16}{3}}{2\text{س}-3} + \frac{-1}{\text{س}-1} \right) d\text{س}$

$= \frac{-5}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{16}{3} \times \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س}-3| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}$

مثال ٤ $\int_3^4 \frac{6}{2\text{س}-\text{س}^2}\,d\text{س} \Leftarrow \frac{6}{2\text{س}-\text{س}^2} = \frac{6}{\text{س}(2-\text{س})} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{2-\text{س}}$

بالضرب في $\text{س}(2-\text{س}) \Leftarrow 6 = \text{أ}(2-\text{س}) + \text{ب}(\text{س})$

بوضع $\boxed{\text{س}=0} \Leftarrow 6 = 2\text{أ} + 0 + 0 \Leftarrow 6 = 2\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ}=3}$

بوضع $2-\text{س}=0 \Leftarrow \text{س}=2 \Leftarrow 6 = 2\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب}=3}$

$\therefore \int_3^4 \frac{6}{2\text{س}-\text{س}^2}\,d\text{س} = \int_3^4 \left(\frac{3}{\text{س}} + \frac{3}{2-\text{س}}\right) d\text{س} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{س}| \Big|_3^4$

$= \left(3\,\text{لو}_{\text{هـ}}4 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}2\right) - \left(3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}1\right)$

$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}4 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 - 0$

(٨٠)

سؤال ٤: $\int \frac{4\text{س} - 5}{2\text{س}^2 - \text{س} - 3}\, d\text{س}$

* ملاحظة: إذا كانت درجة البسط $\geq$ درجة المقام نجب القسمة أولاً

مثال ٤: أوجد $\int \frac{12\text{س}^2 - 5}{(2\text{س} - 3)(3\text{س} + 1)}\, d\text{س}$ (درجة البسط = درجة المقام)

$= \int \frac{12\text{س}^2 - 5}{6\text{س}^2 - 7\text{س} - 3}\, d\text{س}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 12\text{س}^2 - 5 & 6\text{س}^2 - 7\text{س} - 3 \\ \mp 12\text{س}^2 \pm 14\text{س} \pm 6 & \\ \hline 14\text{س} + 1 & \end{array}$$

الباقي $14\text{س} + 1$

$\therefore I = \int 2 + \frac{14\text{س} + 1}{(2\text{س} - 3)(3\text{س} + 1)}\, d\text{س} = 2\text{س} + \int \frac{14\text{س} + 1}{(2\text{س} - 3)(3\text{س} + 1)}\, d\text{س}$

$\frac{14\text{س} + 1}{(2\text{س} - 3)(3\text{س} - 1)} = \frac{أ}{2\text{س} - 3} + \frac{ب}{3\text{س} + 1} \times \boxed{(2\text{س} - 3)(3\text{س} + 1)}$

$\Leftarrow 14\text{س} + 1 = أ(3\text{س} + 1) + ب(2\text{س} - 3)$ بوضع $2\text{س} - 3 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{3}{2}}$

$\Leftarrow 14\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = أ\left(\frac{11}{2}\right) +$ صفر

$\Leftarrow 22 = \frac{11}{2} أ \Leftarrow \boxed{أ = 4}$

بوضع $3\text{س} + 1 =$ صفر $\Leftarrow \boxed{\text{س} = -\frac{1}{3}}$

$\Leftarrow 14\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 =$ صفر $- \frac{11}{3} ب \Leftarrow -\frac{11}{3} = -\frac{11}{3} ب \Leftarrow \boxed{ب = 1}$

$\therefore I = 2\text{س} + \int \frac{4}{2\text{س} - 3} + \frac{1}{3\text{س} + 1}\, d\text{س}$

$I = 2\text{س} + 4 \times \frac{1}{2} \text{لو}_{هـ}|2\text{س} - 3| + \frac{1}{3} \text{لو}_{هـ}|3\text{س} + 1| + جـ$

سؤال ٤: ١) $\int \frac{\text{س}^2}{\text{س} + 3}\, d\text{س}$ (درجة البسط > درجة المقام)

٢) $\int \frac{\text{س}^3 + \text{س}^2}{\text{س}^2 - 1}\, d\text{س}$ (درجة البسط > درجة المقام)

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢-٦\text{س}+٩}\,د\text{س} = \int \frac{٢\text{س}}{(\text{س}-٣)^٢}\,د\text{س}$ ⟵ العوامل غير مختلفة (بالأجزاء)

$= \int ٢\text{س}\,(\text{س}-٣)^{-٢}\,د\text{س} = ٢\text{س} \times \frac{١}{١} \times \frac{(\text{س}-٣)^{-١}}{-١} - \int \frac{(\text{س}-٣)^{-١}}{-١} \times ٢\,د\text{س}$

$= \frac{-٢\text{س}}{\text{س}-٣} + \int \frac{٢}{\text{س}-٣}\,د\text{س} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}-٣} + ٢\,\text{لو}_{هـ}|\text{س}-٣| + \text{جـ}$

---

٢) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^٤+٢\text{س}^٢+١}}{\text{س}^٢-\text{س}}\,د\text{س} = \int \frac{\sqrt{(\text{س}^٢+١)^٢}}{\text{س}^٢-\text{س}}\,د\text{س} = \int \frac{|\text{س}^٢+١|}{\text{س}^٢-\text{س}}\,د\text{س}$

$= \int \frac{\text{س}^٢+١}{\text{س}^٢-\text{س}}\,د\text{س}$ درجة البسط = درجة المقام

$\Leftarrow \int ١ + \frac{\text{س}+١}{\text{س}^٢-\text{س}}\,د\text{س} = \text{س} + \int \frac{\text{س}+١}{\text{س}(\text{س}-١)}\,د\text{س}$

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \text{س}^٢-\text{س} & \text{س}^٢+١ \\ & -\text{س}^٢ \pm \text{س} \\ \hline & \text{س}+١ \end{array}$$

$\Leftarrow \frac{\text{س}+١}{\text{س}(\text{س}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١} \times \boxed{\text{س}(\text{س}-١)}$

$\Leftarrow \text{س}+١ = \text{أ}(\text{س}-١) + \text{ب}(\text{س})$ بوضع $\text{س}-١ = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س}=١}$

$\Leftarrow \text{ب} = ١+١ \Rightarrow \boxed{\text{ب}=٢}$

بوضع $\text{س} = \text{صفر} \Leftarrow -\text{أ} = ٠+١ = ١ \Leftarrow \boxed{\text{أ}=-١}$

$\therefore \text{I} = \text{س} + \int \frac{-١}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}-١}\,د\text{س} = \text{س} - \text{لو}_{هـ}|\text{س}| + ٢\,\text{لو}_{هـ}|\text{س}-١| + \text{جـ}$

---

٣) $\int \frac{١}{\text{س}^{١٠}+\text{س}}\,د\text{س} = \int \frac{١}{\text{س}(\text{س}^٩+١)}\,د\text{س}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^٩$

$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٩\text{س}^٨$

$د\text{س} = \frac{د\text{ص}}{٩\text{س}^٨}$

$= \int \frac{١}{\text{س}(\text{ص}+١)} \cdot \frac{د\text{ص}}{٩\text{س}^٨} = \frac{١}{٩}\int \frac{١}{\text{س}^٩(\text{ص}+١)}\,د\text{ص}$

$= \frac{١}{٩}\int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)}\,د\text{ص} \Leftarrow \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+١} \times \boxed{\text{ص}(\text{ص}+١)}$

$\Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص}+١) + \text{ب}\,\text{ص}$ ...... ثم نكمل ونعيد الفرض

④ $\int \frac{س^3}{2س^4 + س^8}\, دس = \int \frac{س^3}{س^4(2+س^4)}\, دس$

$= \int \frac{س^3}{ص(2+ص)} \frac{دص}{4س^3} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{ص(2+ص)}\, دص$

ثم نكمل بالكسور الجزئية ونعيد الفرض ، — —

$ص = س^4$ ، $\frac{دص}{دس} = 4س^3$ ، $دس = \frac{دص}{4س^3}$

---

⑤ $\int \frac{1}{س^3+س}\, دس = \int \frac{1}{س(س^2+1)}\, دس$

$= \int \frac{1}{س(ص+1)} \frac{دص}{2س} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{س^2(ص+1)}\, دص$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{ص(ص+1)}\, دص$ ثم نكمل كسور جزئية ونعيد الفرض

$ص = س^2$ ، $\frac{دص}{دس} = 2س$ ، $دس = \frac{دص}{2س}$

---

⑥ $\int \frac{س+3}{س^3 - س}\, دس \Leftarrow \int \frac{س+3}{س(س^2-1)}\, دس = \int \frac{س+3}{س(س-1)(س+1)}\, دس$

$\Leftarrow \frac{س+3}{س(س-1)(س+1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} + \frac{جـ}{س+1}$ ثم نكمل ——— ———

---

⑦ $\int \underbrace{لو_هـ(س^2+2س)}\, \underbrace{دس}$

$= لو_هـ(س^2+2س) \times س - \int س \times \frac{2س+2}{س^2+2س}\, دس$

$= س\, لو_هـ(س^2+2س) - \int \frac{\cancel{س}(2س+2)}{\cancel{س}(س+2)}\, دس$ ← درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 2س+2 & س+2 \\ \mp 2س \mp 4 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$\Leftarrow = س\, لو_هـ(س^2+2س) - \int \left(2 - \frac{2}{س+2}\right) دس$

$= س\, لو_هـ(س^2+2س) - (2س - 2\, لو_هـ|س+2|) + ث$

---

⑧ $\int \frac{1}{س((لو_هـ س)^2 + لو_هـ س)}\, دس$ نفرض $ص = لو_هـ س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} \Leftarrow دس = س\, دص$

$= \int \frac{1}{\cancel{س}(ص^2+ص)} \times \cancel{س}\, دص \Leftarrow \frac{1}{ص(1+ص)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{1+ص}$ ثم نكمل

بالكسور الجزئية ——— ———

(٩) $\int \frac{4\,\text{لو}_{هـ}س}{(س-1)^2}\,دس = \int \underbrace{4\,\text{لو}_{هـ}س}_{ق}\ \underbrace{(س-1)^{-2}\,دس}_{دهـ}$ أجزاء

$= 4\,\text{لو}_{هـ}س \times \frac{(س-1)^{-1}}{-1} - \int \frac{(س-1)^{-1}}{-1} \times 4 \times \frac{1}{س}\,دس$

$= \frac{-4\,\text{لو}_{هـ}س}{س-1} + \int \frac{4}{(س-1)(س)}\,دس \Leftarrow \frac{4}{(س-1)(س)} = \frac{أ}{س-1} + \frac{ب}{س}$

ثم نكمل بالكسور الجزئية ——— $\boxed{أ=4}$ $\boxed{ب=-4}$

---

(١٠) $\int \frac{\text{ظا}س}{9-(\text{لو}_{هـ}\text{جتا}س)^2}\,دس$ نعوض $ص = \text{لو}_{هـ}\text{جتا}س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-\text{جا}س}{\text{جتا}س}$

$\frac{دص}{دس} = -\text{ظا}س$

$دس = \frac{دص}{-\text{ظا}س}$

$= \int \frac{\cancel{\text{ظا}س}}{9-ص^2} \times \frac{دص}{-\cancel{\text{ظا}س}} = \int \frac{1}{ص^2-9}\,دص$

$= \int \frac{1}{(ص-3)(ص+3)}\,دص$

$\frac{1}{(ص-3)(ص+3)} = \frac{أ}{ص-3} + \frac{ب}{ص+3}$ ثم نكمل ——— $\boxed{أ=\frac{1}{6}}$ $\boxed{ب=-\frac{1}{6}}$

---

(١١) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-9}\,دس = \int \frac{ص}{ص^2-9} \times 2ص\,دص$

$ص = \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$

$دس = 2ص\,دص$

(درجة البسط = درجة المقام) نقسم

$= \int \frac{2ص^2}{ص^2-9}\,دص$

$= \int 2 + \frac{18}{ص^2-9}\,دص = 2ص + \int \frac{18}{(ص-3)(ص+3)}\,دص$ ثم نكمل كسور جزئية ونعيد التعويض

---

(١٢) $\int \frac{1}{س-\sqrt{س}-6}\,دس = \int \frac{1}{ص^2-ص-6} \times 2ص\,دص$

$ص = \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$

$دس = 2ص\,دص$

$= \int \frac{2ص}{ص^2-ص-6}\,دص = \int \frac{2ص}{(ص-3)(ص+2)}\,دص$

$\Leftarrow \frac{2ص}{ص^2-ص-6} = \frac{2ص}{(ص-3)(ص+3)} = \frac{أ}{ص-3} + \frac{ب}{ص+3}$ ثم نكمل ونعيد التعويض

$\boxed{أ=\frac{6}{5}}$ $\boxed{ب=\frac{4}{5}}$

(١٣) $\int \frac{\sqrt{2س+10} - 3}{\sqrt{س+5} + 3}\, دس = \int \frac{\sqrt{2}\sqrt{س+5} - 3}{\sqrt{س+5}+3}\, دس$

$ص = \sqrt{س+5}$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س+5}} = \frac{1}{2ص}$ ، $دس = 2ص\, دص$

$= \int \frac{2ص - 3}{ص+3} \times 2ص\, دص = \int \frac{4ص^2 - 6ص}{ص+3}\, دص$

درجة البسط > درجة المقام ؛ نقسم

$= \int 4ص - 18 + \frac{54}{ص+3}\, دص$

$= 2ص^2 - 18ص + 54\, لو_هـ|ص+3| + جـ$

$= 2(س+5) - 18\sqrt{س+5} + 54\, لو_هـ|\sqrt{س+5}+3| + جـ$

---

(١٤) $\int \frac{1}{س(1 - \sqrt[3]{س})}\, دس = \int \frac{1}{ص^3(1-ص)} \times 3ص^2\, دص$

$ص = \sqrt[3]{س}$ ، $ص^3 = س$ ، $3ص^2 \frac{دص}{دس} = 1$ ، $دس = 3ص^2\, دص$

$= \int \frac{3}{ص(ص-1)}\, دص$ ثم نكمل كسور جزئية ——

$\boxed{أ = -3}$ $\boxed{ب = 3}$

---

(١٥) $\int \frac{هـ^{3س}}{هـ^{2س} - هـ^{س} - 2}\, دس = \int \frac{ص^3}{ص^2 - ص - 2} \cdot \frac{دص}{ص}$

$ص = هـ^{س}$ ، $\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$ ، $دس = \frac{دص}{هـ^{س}} = \frac{دص}{ص}$

$= \int \frac{ص^2}{ص^2 - ص - 2}\, دص$ (درجة البسط = درجة المقام نقسم)

$= \int 1 + \frac{ص+2}{ص^2 - ص - 2}\, دص$

$= ص + \int \frac{ص+2}{(ص-2)(ص+1)}\, دص \Leftarrow \frac{ص+2}{(ص+1)(ص-2)} = \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+1}$

ثم نكمل كسور جزئية —— $\boxed{أ = \frac{4}{3}}$ $\boxed{ب = -\frac{1}{3}}$

---

(١٦) $\int \sqrt{1 - هـ^{-س}}\, دس = \int ص \times \frac{2ص}{1-ص^2}\, دص$

$ص = \sqrt{1 - هـ^{-س}}$ ، $ص^2 = 1 - هـ^{-س}$ ، $2ص \frac{دص}{دس} = هـ^{-س}$ ، $2ص \frac{دص}{دس} = 1 - ص^2$ ، $دس = \frac{2ص}{1-ص^2}\, دص$

$= \int \frac{2ص^2}{1 - ص^2}\, دص$ (درجة البسط = درجة المقام نقسم)

$= \int -2 + \frac{2}{1-ص^2}\, دص = -2ص + \int \frac{2}{(1-ص)(1+ص)}\, دص$

ثم نكمل كسور جزئية —— $\boxed{أ = 1}$ $\boxed{ب = 1}$

(١٧) $\int \frac{قا^2 س}{ظا^2 س - ظا س - ٦} \, دس$

ص = ظاس

$\frac{دص}{دس} = قا^2 س$

$دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int \frac{\cancel{قا^2 س}}{ص^2 - ص - ٦} \cdot \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}} = \int \frac{١}{ص^2 - ص - ٦} \, دص$

$= \int \frac{١}{(ص - ٣)(ص + ٢)} \, دص$

$\Leftarrow \frac{١}{(ص - ٣)(ص + ٢)} = \frac{أ}{ص - ٣} + \frac{ب}{ص + ٢}$ ثم نكمل كسور جزئية — $\boxed{أ = \frac{١}{٥}}$ $\boxed{ب = \frac{-١}{٥}}$

---

(١٨) $\int \frac{جتا س}{٣ + جتا^2 س} \, دس = \int \frac{جتا س}{٣ + (١ - جا^2 س)} \, دس = \int \frac{جتا س}{٤ - جا^2 س} \, دس$

نفرض ص = جاس $\Leftarrow \frac{دص}{دس} = جتا س \Leftarrow دس = \frac{دص}{جتا س}$

$= \int \frac{\cancel{جتا س}}{٤ - ص^2} \cdot \frac{دص}{\cancel{جتا س}} = \int \frac{١}{٤ - ص^2} \, دص = \int \frac{١}{(٢ + ص)(٢ - ص)} \, دص$

$\Leftarrow \frac{١}{(٢ + ص)(٢ - ص)} = \frac{أ}{٢ - ص} + \frac{ب}{٢ + ص}$ ثم نكمل — $\boxed{أ = \frac{١}{٤}}$ $\boxed{ب = \frac{١}{٤}}$

---

(١٩) $\int \frac{جتا^3 س}{جا^2 س - ٣ جا س + ٢} \, دس = \int \frac{جتا^3 س}{ص^2 - ٣ص + ٢} \cdot \frac{دص}{جتا س}$

ص = جاس

$\frac{دص}{دس} = جتا س$

$دس = \frac{دص}{جتا س}$

$= \int \frac{جتا^2 س}{ص^2 - ٣ص + ٢} \, دص = \int \frac{١ - جا^2 س}{ص^2 - ٣ص + ٢} \, دص$

$= \int \frac{١ - ص^2}{ص^2 - ٣ص + ٢} \, دص = \int \frac{(١ + ص)\cancel{(١ - ص)}}{\cancel{(ص - ١)}(ص - ٢)} \, دص = \int \frac{-١ - ص}{ص - ٢} \, دص$

(درجة البسط = درجة المقام) $\Leftarrow$ نقسم

$\Leftarrow \int \left(-١ + \frac{-٣}{ص - ٢}\right) دص = -ص - ٣ \, لو_هـ |ص - ٢| + جـ$

$= - جا س - ٣ \, لو_هـ |جا س - ٢| + جـ$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

ج) $\int \frac{1}{س\sqrt{1+س}}\, دس = \int \frac{1}{(ص^2-1)\times ص} \times 2ص\, دص$

$= \int \frac{2}{ص^2-1}\, دص = \int \frac{2}{(ص-1)(ص+1)}\, دص$

$\Leftarrow \frac{2}{(ص-1)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1}$

ثم نكمل كسور جزئية ——— $\boxed{أ=1}$ $\boxed{ب=-1}$

$ص = \sqrt{1+س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{1+س}}$

$= \frac{1}{2ص}$

$دس = 2ص\, دص$

$س = ص^2 - 1$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^2}{س^2 - س}$

الحل: $\frac{دص}{ص^2} = \frac{دس}{س^2 - س} \Leftarrow \int \frac{دص}{ص^2} = \int \frac{دس}{س^2 - س}$

$\Leftarrow \int ص^{-2}\, دص = \int \frac{دس}{س(س-1)} \Leftarrow \frac{ص^{-1}}{-1} = \int \frac{دس}{س(س-1)}$

$\frac{1}{س(س-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} \quad \boxed{\times\, س(س-1)}$

$\Leftarrow 1 = أ(س-1) + ب(س)$ بوضع $س-1=0 \Leftarrow س=1$ ، $\boxed{ب=1}$

بوضع $س=0$ ، $\Leftarrow 1 = -أ \Leftarrow \boxed{أ=-1}$

$\therefore \frac{-1}{ص} = \int \left(\frac{-1}{س} + \frac{1}{س-1}\right) دس$

$\Leftarrow \frac{-1}{ص} = -لو_{هـ}|س| + لو_{هـ}|س-1| + جـ$

مثال: اذا كانت $\frac{دص}{دس} = ص^2 هـ^{-س}$ وكانت $ص=2$ عند $س=0$ ، أثبت

أن $ص = \frac{2هـ^{س}}{2 - هـ^{س}}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ص^2 هـ^{-س} \Leftarrow \frac{دص}{ص^2} = هـ^{-س} دس \Leftarrow \int ص^{-2} دص = \int هـ^{-س} دس$

$\frac{-1}{ص} = -هـ^{-س} + جـ \Leftarrow \frac{-1}{ص} = \frac{-1}{هـ^{س}} + جـ$ لكن: $ص=2$ عند $س=0$:

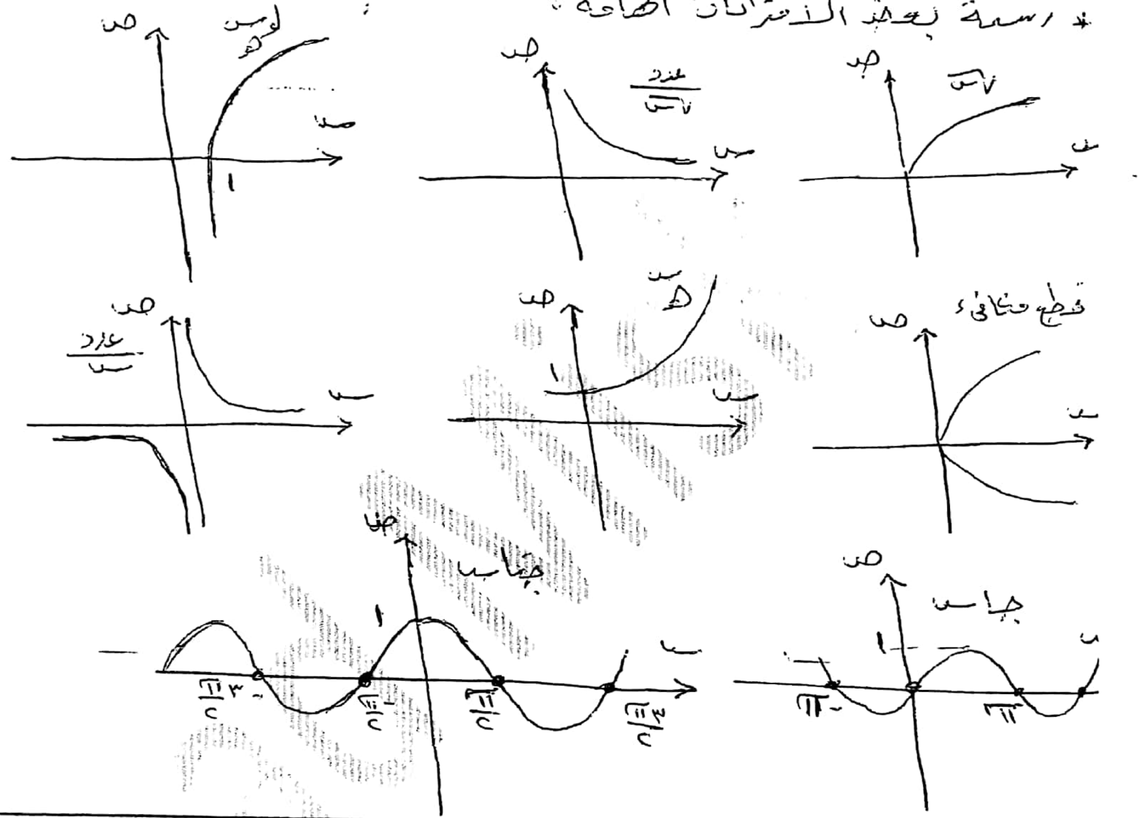
$\Leftarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1} + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = \frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{-1}{ص} = \frac{-1}{هـ^{س}} + \frac{1}{2}$ بالضرب في (−1)

$\Leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{1}{هـ^{س}} - \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{ص} = \frac{2 - هـ^{س}}{2هـ^{س}} \Leftarrow ص = \frac{2هـ^{س}}{2 - هـ^{س}}$

* حساب المساحة باستخدام التكامل:

مبادئ: حساب المساحة:

* نعتبر كل مستقيم على صورة ص = عدد هو اقتران و أهمهم محور السينات ص = ٠
* نعتبر كل مستقيم على صورة س = عدد هو عمود و أهمهم محور الصادات س = ٠
* رسمة بعض الاقترانات الهامة:



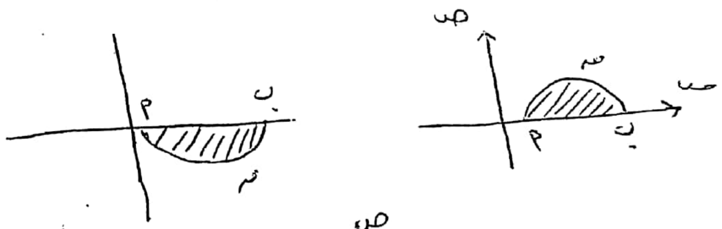
قانون المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ (الأعلى − الأدنى) دس

* خطوات الحل:

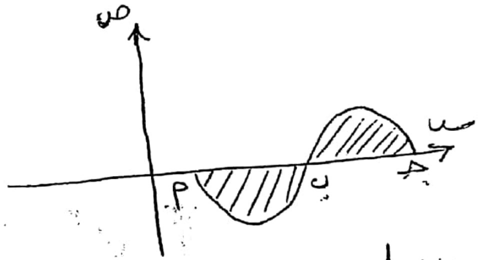
١) نحدد ما لدينا من أعمدة واقترانات
٢) نساوي كل اقترانين ببعض لإيجاد نقاط التقاطع والتي تعتبر حدود التكامل
٣) نرسم الأعمدة ثم الاقترانات ونظلل المنطقة المطلوبة
٤) نحدد المساحة باستخدام التكامل
٥) اذا كان لدينا ٣ اقترانات فإنه يوجد أكثر من منطقة
٦) نقط التقاء الاقترانات يجب أن تكون أعمدة.

* مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, دس$$

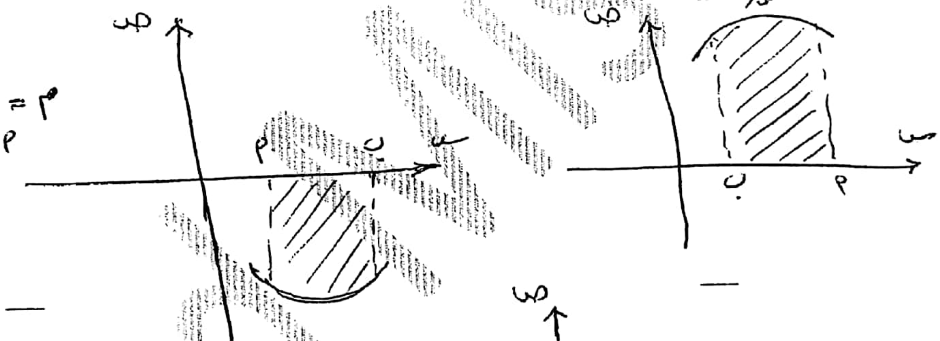


$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, دس + \int_{ب}^{جـ} |ق(س)| \, دس$$

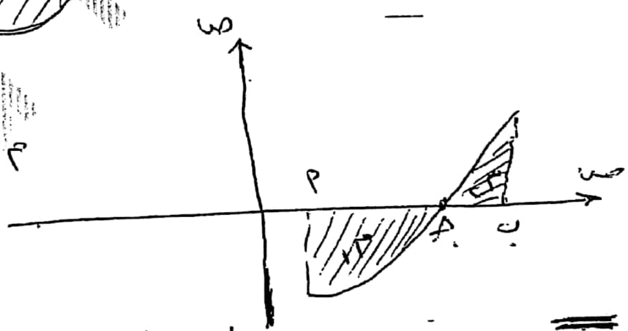


• إذا طلبت المساحة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب أو على [أ، ب]
نجد نقاط التقاطع مع محور السينات فإذا وقعت في الفترة (أ، ب) نجزئ المساحة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, دس$$



$$م = \int_{أ}^{جـ} |ق(س)| \, دس + \int_{جـ}^{ب} |ق(س)| \, دس$$



مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = س² − ٤س ومحور السينات

الحل : س² − ٤س = ٠ لايجاد حدود التكامل ⟸ س(س − ٤) = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٤}$

$$م = \int_{٠}^{٤} |س^2 - ٤س| \, دس = \int_{٠}^{٤} ٤س - س^2 \, دس = ٢س^2 - \frac{س^3}{٣} \Big|_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}\right) - ٠ = \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}$ ومحور السينات

الحل: $\text{س}^3 - \text{س} = 0 \Leftarrow \text{س}(\text{س}^2 - 1) = 0 \Leftarrow \text{س} = 0 ، \text{س} = 1 ، \text{س} = -1$

$$\text{م} = \int_{-1}^{0} |\text{س}^3 - \text{س}|\, \text{دس} + \int_{0}^{1} |\text{س}^3 - \text{س}|\, \text{دس}$$

$$= \int_{-1}^{0} (\text{س}^3 - \text{س})\, \text{دس} + \int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^3)\, \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \frac{\text{س}^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\text{س}^2}{2} - \frac{\text{س}^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

سؤال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ص} = 2\text{س} - 6$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 6$

$\boxed{\text{الاجابة } 13}$

سؤال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = 3\text{س} - \text{س}^2$ ومحور السينات حيث $\text{س} \in [1 ، 5]$

$\boxed{\text{الاجابة } 12}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ص} = 2 - \sqrt{\text{س}}$ ومحوري السينات والصادات.

الحل: محور الصادات $\text{س} = 0$

نجد نقطة التقاطع مع السينات $\Leftarrow 2 - \sqrt{\text{س}} = 0 \Leftarrow 2 = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \boxed{\text{س} = 4}$

$$\text{م} = \int_{0}^{4} |2 - \sqrt{\text{س}}|\, \text{دس} = \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{\text{س}})\, \text{دس} = \int_{0}^{4} (2 - \text{س}^{\frac{1}{2}})\, \text{دس} = \left[2\text{س} - \frac{2\text{س}^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left(8 - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - (0) = 8 - \frac{2}{3}(8) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ص} = \text{جاس} - \frac{1}{2}$ ومحور السينات في $\left[-\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}\right]$

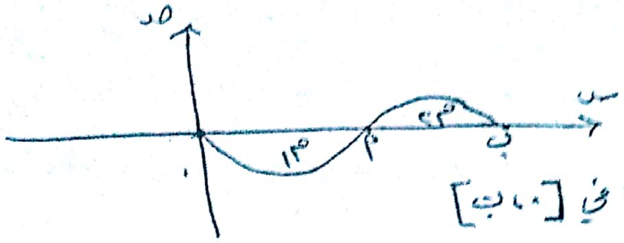
الحل: $\text{جاس} - \frac{1}{2} = 0 \Leftarrow \text{جاس} = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{6}$

$$\text{م} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left|\text{جاس} - \frac{1}{2}\right| \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\text{جاس} - \frac{1}{2}\right| \text{دس}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \text{جاس}\right) \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{جاس} - \frac{1}{2}\right) \text{دس} = \left[\frac{1}{2}\text{س} + \text{جتاس}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} + \left[\left(-\text{جتاس} - \frac{1}{2}\text{س}\right)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + 0\right) + \left(0 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

مثال: بالاعتماد على الرسم:



إذا كانت م١ = ٧ ، م٢ = ١٢ ، جد:

① $\int_{٠}^{ب} \text{ق(س) دس}$

② المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في [٠، ب]

الحل: ① $\int_{٠}^{ب} \text{ق(س) دس} = \int_{٠}^{أ} \text{ق(س) دس} + \int_{أ}^{ب} \text{ق(س) دس}$

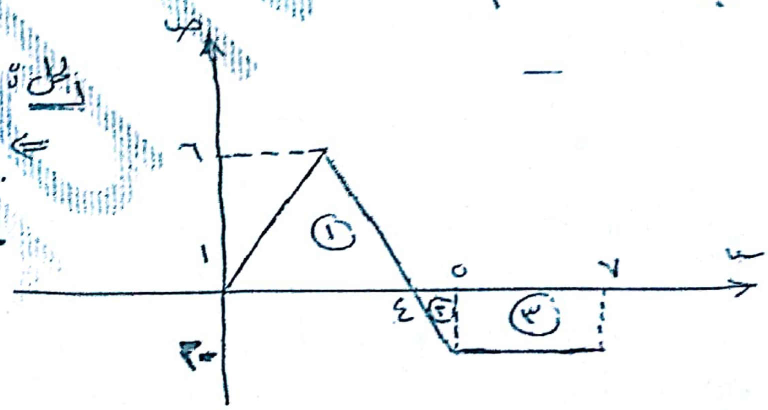
$= -٧ + ١٢ = ٥$

② $\text{م} = \int_{٠}^{أ} |\text{ق(س)}|\, \text{دس} + \int_{أ}^{ب} |\text{ق(س)}|\, \text{دس} = ٧ + ١٢ = ١٩$

مثال: معتمداً على الرسم الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد:

① $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس}$ ② $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\, \text{دس}$

③ $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس}\right|$ ④ المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في [٠، ٧]



الحل: م١ = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٦ = ١٢$ (مساحة المثلث)

⟸ $\int_{٠}^{٤} \text{ق(س) دس} = ١٢$

م٢ = $\frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$

⟸ $\int_{٤}^{٥} \text{ق(س) دس} = -١$ (لأنه تحت محور السينات)

م٣ = $٢ \times ٢ = ٤$ ⟸ $\int_{٥}^{٧} \text{ق(س) دس} = -٤$ (لأنها تحت محور السينات)

① $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس} = ١٢ + (-١) + (-٤) = ٧$

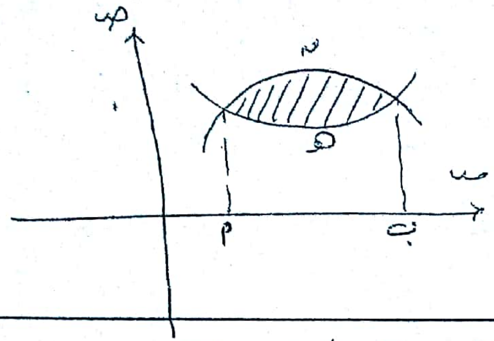
② $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\, \text{دس} = ١٢ + ١ + ٤ = ١٧$

③ $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس}\right| = |١٢ + (-١) + (-٤)| = ٧$

④ م = م١ + م٢ + م٣ = ١٧

"طريق النجاح مليء بالأشواك"

* ثانياً: المساحة بين منحنيين:



في هذه الحالة نقوم بـ:

١) إيجاد نقاط التقاطع بوضع ق = هـ

٢) نأخذ قيمة لـ س بين نقاط التقاطع فإذا كان مثلاً ق > هـ فإن $م = \int_{أ}^{ب} (ق - هـ)\, دس$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س² + س ، هـ(س) = ٢س + ٦

الحل: نضع ق = هـ لإيجاد نقاط التقاطع ⟸ س² + س = ٢س + ٦ ⟸ س² - س - ٦ = ٠

⟸ (س - ٣)(س + ٢) = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٣}$ ، $\boxed{س = -٢}$

لمعرفة أي الاقترانين أكبر نأخذ عدداً في الفترة (-٢، ٣) ليكن (١)

ق(١) = ١ + ١ = ٢
هـ(١) = ٢ + ٦ = ٨ ⟸ هـ > ق

∴ $م = \int_{-٢}^{٣} (هـ - ق)\, دس \Leftarrow م = \int_{-٢}^{٣} (٢س + ٦) - (س^٢ + س)\, دس$

$= \int_{-٢}^{٣} س + ٦ - س^٢\, دس = \left[\frac{س^٢}{٢} + ٦س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-٢}^{٣}$

$= \left(\frac{٩}{٢} + ١٨ - ٩\right) - \left(٢ - ١٢ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{١٢٥}{٦}$

سؤال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = -س² + ٣س + ٧ ، هـ(س) = س² + س + ٣

الإجابة ٩

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س³ ، هـ(س) = ٤س

الحل: نضع ق = هـ ⟸ س³ = ٤س ⟸ س³ - ٤س = ٠ ⟸ س(س² - ٤) = ٠

⟸ س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

$م = م_١ + م_٢ \Leftarrow م = \int_{-٢}^{٠} (س^٣ - ٤س)\, دس + \int_{٠}^{٢} (٤س - س^٣)\, دس$

$= \left[\frac{س^٤}{٤} - ٢س^٢ \right]_{-٢}^{٠} + \left[٢س^٢ - \frac{س^٤}{٤} \right]_{٠}^{٢}$

= (٠) - (٤ - ٨) + (٨ - ٤) - (٠)

= ٤ + ٤

= ٨

مثال ٤: اذا كان المستقيم ص = جـ يقسم المساحة المحصورة بين ص = س^{٢} ، ص = ٤ إلى قسمين متساويين، جد جـ

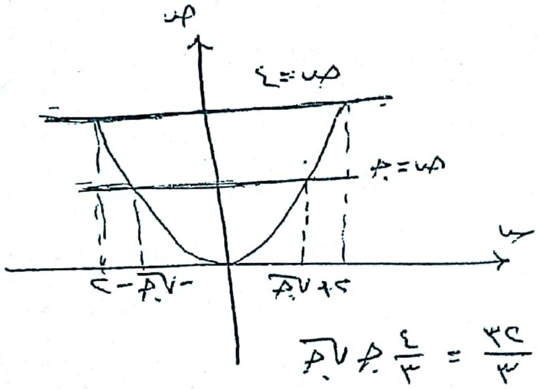
الحل: نجد المساحة المحصورة بين ص = س^{٢} ، ص = ٤ حيث:

س^{٢} = ٤ ⟸ س = ٢ ، -٢

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢})\,\text{دس} = ٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big|_{-٢}^{٢} = \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$

نجد المساحة بين ص = س^{٢} ، ص = جـ حيث:

س^{٢} = جـ ⟸ س = $\pm\sqrt{\text{جـ}}$



$$\text{م} = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{جـ} - \text{س}^{٢})\,\text{دس} = \text{جـ س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big|_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}}$$

$$= \left(\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} - \frac{\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}}{٣}\right) - \left(-\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} + \frac{\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}}{٣}\right)$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} + \frac{٢}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} = \frac{٤}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} \Leftarrow \frac{١}{٢} \times \frac{٣٢}{٣} = \frac{٤}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}$$

⟸ جـ$\sqrt{\text{جـ}}$ = ٤ بالتربيع ⟸ جـ^{٢} × جـ = ١٦ ⟸ جـ^{٣} = ١٦

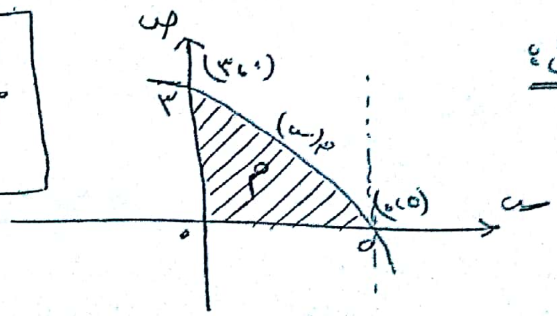
⟸ $\boxed{\text{جـ} = \sqrt[٣]{١٦}}$

ثالثاً: المساحة بين أكثر من منحنيين:

في هذه الحالة يجب اتباع ما يلي:

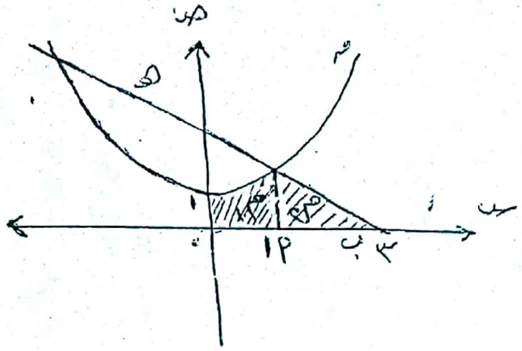
١) رسم المنحنيات
٢) تحديد المنطقة المطلوبة
٣) إيجاد نقاط التقاطع اللازمة
٤) إيجاد مساحة كل منطقة ثم جمع المساحات.

مثال:



$$\boxed{\text{م} = \int_{٠}^{٥} \underbrace{\text{ص}}_{\text{ع(س)}}\,\text{دس}}$$ أو $$\text{م} = \int_{٠}^{٣} \text{س}\,\text{دص}$$

مثال ٤: أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س² + ١ ، هـ(س) = ٣ - س ومحوري السينات والصادات



الحل: نرسم لتحديد المنطقة المطلوبة

لإيجاد (أ)

نضع ق = هـ

س² + ١ = ٣ - س

س² + س - ٢ = ٠

(س + ٢)(س - ١) = صفر

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$ ← النقطة المطلوبة

لإيجاد (ب)

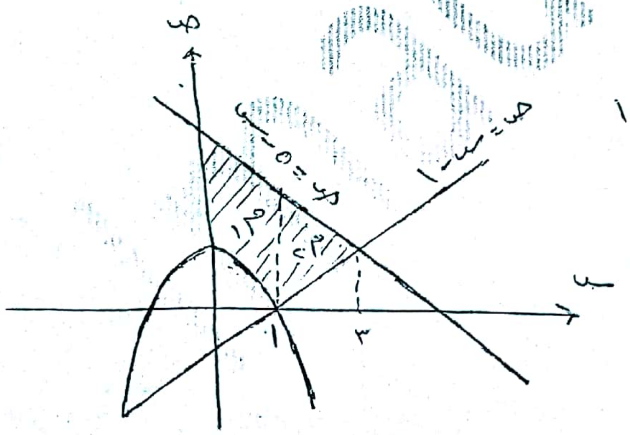
نضع هـ = ٠ ⟸ ٣ - س = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٣}$

$$م = م_١ + م_٢ = \int_{٠}^{١} ق \, د س + \int_{١}^{٣} هـ \, د س = \int_{٠}^{١} (س^٢ + ١) \, د س + \int_{١}^{٣} (٣ - س) \, د س$$

$$= \left[\frac{س^٣}{٣} + س\right]_{٠}^{١} + \left[٣س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{١}^{٣}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} + ١\right) - (٠) + \left(٩ - \frac{٩}{٢}\right) - \left(٣ - \frac{١}{٢}\right) = ٣\frac{١}{٣}$$

مثال ٥: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = ١ - س² ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ والمستقيم ص = س - ١



ق = ص

١ - س² = س - ١

س² + س - ٢ = ٠

(س + ٢)(س - ١) = ٠

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$

ص = ص

٥ - س = س - ١

٢س = ٦

$\boxed{س = ٣}$

$$م = م_١ + م_٢ = \int_{٠}^{١} \left((٥ - س) - (١ - س^٢)\right) د س + \int_{١}^{٣} \left((٥ - س) - (س - ١)\right) د س$$

$$= \int_{٠}^{١} (٤ - س + س^٢) \, د س + \int_{١}^{٣} (٦ - ٢س) \, د س$$

$$= \left[٤س - \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٣}{٣}\right]_{٠}^{١} + \left[٦س - س^٢\right]_{١}^{٣}$$

$$= \left(٤ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}\right) - (٠) + (١٨ - ٩) - (٦ - ١) = ٧\frac{٥}{٦}$$

مثال: ما مساحة المنطقة المحصورة بين م(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ - س والمستقيم س = ٤

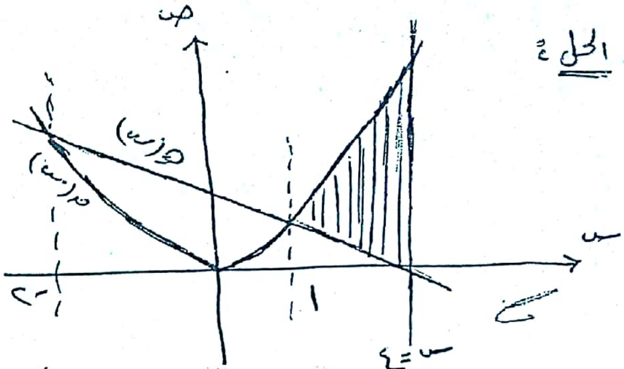
الحل:

نجد نقطة التقاطع بين م ، هـ

س² = ٢ - س ⟸ س² + س - ٢ = صفر

(س + ٢)(س - ١) = صفر

س = -٢ أو $\boxed{\text{س} = ١}$



م = ∫₁⁴ م(س) - هـ(س) دس = ∫₁⁴ (س² + س - ٢) دس = [س³/٣ + س²/٢ - ٢س]₁⁴

= (٦٤/٣ + ١٦/٢ - ٨) - (١/٣ + ١/٢ - ٢) = ٢٢,٥

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين م(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ - س ومحور السينات

الحل:

نجد نقاط تقاطع م مع محور السينات

س² = ٠ ⟸ س = ٠

نجد نقاط تقاطع هـ مع محور السينات

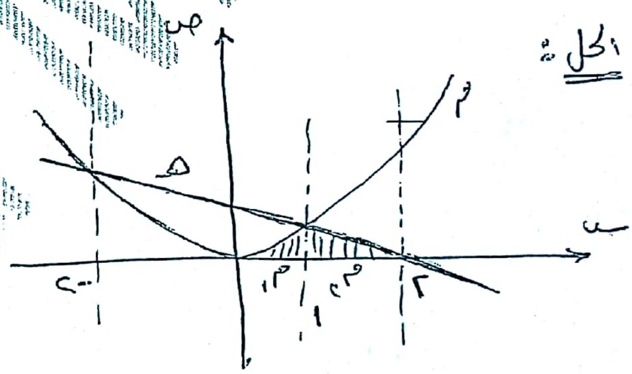
٢ - س = ٠ ⟸ س = ٢

نجد نقاط تقاطع م مع هـ

س² = ٢ - س ⟸ س² + س - ٢ = ٠

⟸ (س + ٢)(س - ١) = ٠

⟸ س = -٢ أو $\boxed{\text{س} = ١}$



م = م١ + م٢

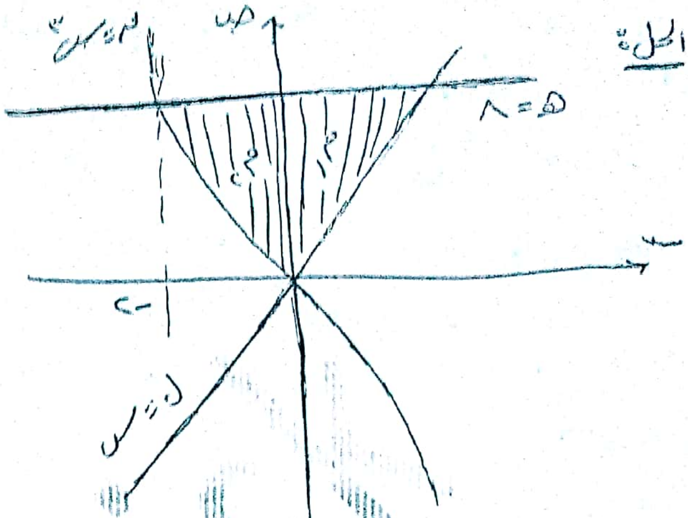
⟸ م = ∫₀¹ م(س) دس + ∫₁² هـ(س) دس = ∫₀¹ س² دس + ∫₁² (٢ - س) دس

= [س³/٣]₀¹ + [٢س - س²/٢]₁² = ١/٣ + (٤ - ٢) - (٢ - ١/٢)

= ١/٣ + ٢ - ٣/٢ = ٥/٦

مثال: اذا كانت ق(س) = $-$س^3 ، ه(س) = ٨ ، ل(س) = س جد المساحة المحصورة بين الاقترانات الثلاثة.

الحل:



نجد جميع نقاط التقاطع

ق = ه

$-$س^3 = ٨ ⟸ س^3 = $-$٨

⟸ $\boxed{\text{س} = -٢}$

ق = ل

$-$س^3 = س ⟸ س $-$ س^3 = ٠

⟸ س(١ $-$ س^2) = ٠

⟸ س = ٠ ، س = ١ ، س = $-$١

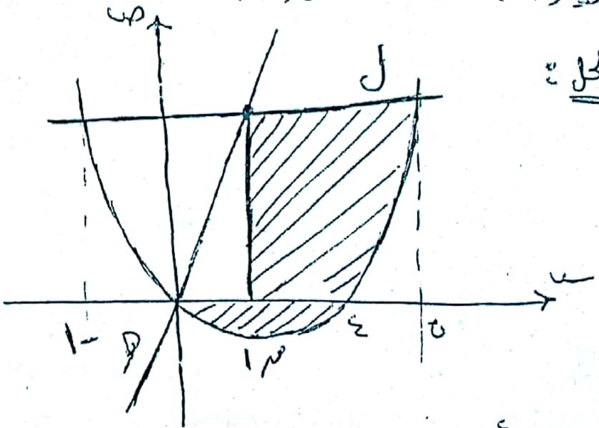
م = م١ + م٢ ⟸ م = $\int_{-٢}^{٠}$ ٨ $-$ ($-$س^3) دس + $\int_{٠}^{٨}$ ٨ $-$ س دس

= ٨س + $\frac{\text{س}^4}{٤}$ $\Big|_{-٢}^{٠}$ + ٨س $-$ $\frac{\text{س}^2}{٢}$ $\Big|_{٠}^{٨}$ = (٠) $-$ ($-$١٦ + ٤) + (٦٤ $-$ ٣٢) $-$ (٠)

= ١٢ + ٣٢ = ٤٤

مثال: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث: ق(س) = س^2 $-$ ٤س ، ه(س) = ٥س ، ل(س) = ٥

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ه

س^2 $-$ ٤س $-$ ٥س = ٠

س^2 $-$ ٩س = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٩

ق = ل

س^2 $-$ ٤س $-$ ٥ = ٠

س = ٥ ، س = $-$١

ه = ل

٥س = ٥ ⟸ س = ١

م = $\int_{٠}^{٤}$ (٠ $-$ ق) دس + $\int_{١}^{٤}$ (ل $-$ ٠) دس + $\int_{٤}^{٥}$ (ل $-$ ق) دس

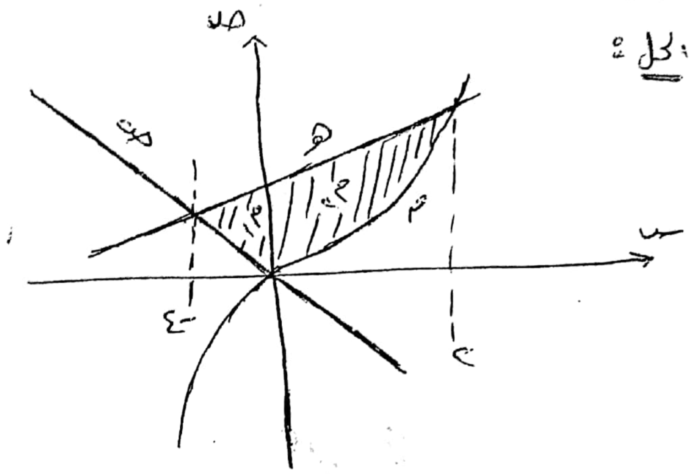
= $\int_{٠}^{٤}$ $-$س^2 + ٤س دس + $\int_{١}^{٤}$ ٥ دس + $\int_{٤}^{٥}$ ٥ $-$ س^2 + ٤س دس

= $-\frac{\text{س}^3}{٣}$ + $\frac{٤\text{س}^2}{٢}$ $\Big|_{٠}^{٤}$ + ١٥ + ٥س $-$ $\frac{\text{س}^3}{٣}$ + $\frac{٤\text{س}^2}{٢}$ $\Big|_{٤}^{٥}$ = $-\frac{٦٤}{٣}$ + ٣٢ + ١٥

+ $\frac{٣٢}{٣}$ + ١٥ + $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٨٥}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ع}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، $\text{هـ} = \frac{-\text{س}}{٢}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + ٦$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$\text{ع} = \text{هـ}$

$\text{س}^{٣} = \frac{-\text{س}}{٢}$

$\text{س} = ٠$

$\text{ع} = \text{ق}$

$\Leftarrow \text{س}^{٣} = \text{س} + ٦ \Leftarrow \text{س} = ٢$

$\text{هـ} = \text{ق}$

$\Leftarrow \text{س} + ٦ = \frac{-\text{س}}{٢} \Leftarrow \text{س} = -٤$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ \Leftarrow \text{م} = \int_{-٤}^{٠} (\text{س}+٦) - \left(\frac{-\text{س}}{٢}\right) \text{ د س} + \int_{٠}^{٢} (\text{س}+٦) - \text{س}^{٣} \text{ د س}$

$= \int_{-٤}^{٠} \frac{٣}{٢}\text{س} + ٦ \text{ د س} + \int_{٠}^{٢} \text{س} + ٦ - \text{س}^{٣} \text{ د س} = \frac{٣}{٢} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} \Big|_{-٤}^{٠} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} \Big|_{٠}^{٢}$

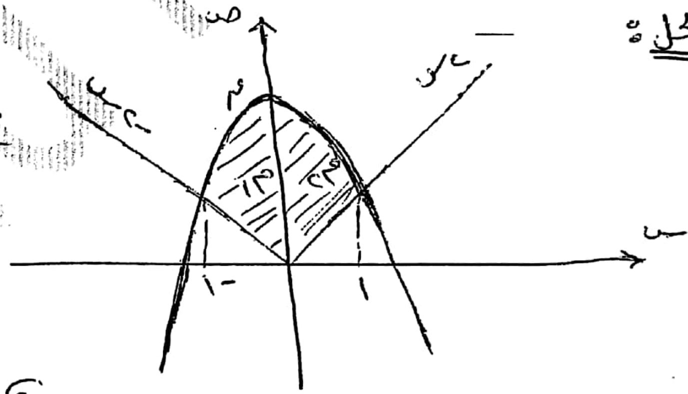
$= (٠) - (١٢ - ٢٤) + (٢ + ١٢ - ٤) - (٠) = ٢٢$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{م}(\text{س}) = ٣ - \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = |٢\text{س}|$

الحل:

تعريف $|\ |$ $\Leftarrow ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

-٢س ، ٢س ، $+++$



① $\text{س} < ٠$

$٣ - \text{س}^{٢} = -٢\text{س}$

$-\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣ = ٠$

$\Leftarrow \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) = ٠$

$\text{س} = ٣$ ، $\boxed{\text{س} = -١}$

② $\text{س} > ٠$

$٣ - \text{س}^{٢} = ٢\text{س}$

$\Leftarrow -\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣ = ٠$

$\Leftarrow \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} + ٣)(\text{س} - ١) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = -٣$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

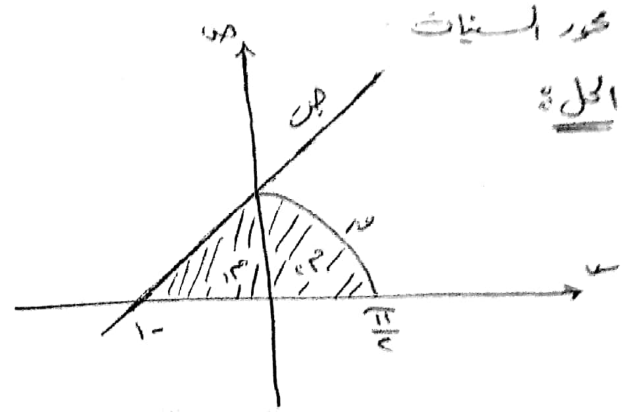
$= \int_{-١}^{٠} (٣ - \text{س}^{٢}) - (-٢\text{س}) \text{ د س} + \int_{٠}^{١} (٣ - \text{س}^{٢}) - (٢\text{س}) \text{ د س}$

$= ٣\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}^{٢} \Big|_{-١}^{٠} + ٣\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} \Big|_{٠}^{١}$

$= (٠) - (-٣ + \frac{١}{٣} + ١) + (٣ - \frac{١}{٣} - ١) - (٠) = \frac{١٠}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = جتاس ، ص = س + ١ والواقعة فوق محور السينات

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ص

جتاس = س + ١

س = ٠

ص = ٠

⇐ س + ١ = ٠

⇐ س = -١

ق = ٠

جتاس = ٠

س = $\frac{\pi}{2}$

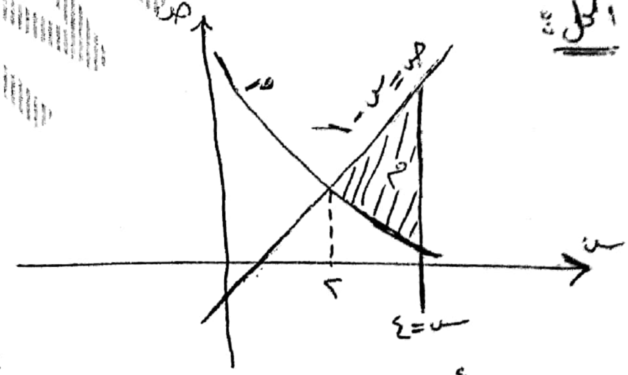
م = م١ + م٢

⇐ م = $\int_{-1}^{0}$ (س + ١) دس + $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس دس = ($\frac{\text{س}^2}{2}$ + س) $\Big|_{-1}^{0}$ + جاس $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= (٠) − ($\frac{1}{2}$ − ١) + (١ − ٠) = $\frac{1}{2}$ + ١ = ١ $\frac{1}{2}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $\frac{2}{\text{س}}$ ، ك = س − ١ والمستقيم س = ٤

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ك

$\frac{2}{\text{س}}$ = س − ١

س² − س = ٢ ⇐ س² − س − ٢ = ٠

⇐ (س − ٢)(س + ١) = ٠

⇐ س = ٢ ، س = −١

م = $\int_{2}^{4}$ ((س − ١) − ($\frac{2}{\text{س}}$)) دس = $\frac{\text{س}^2}{2}$ − س − ٢ لوهـ|س| $\Big|_{2}^{4}$

= (٨ − ٤ − ٢ لوهـ ٤) − (٢ − ٢ − ٢ لوهـ ٢) = ٤ − ٢ لوهـ ٢

سؤال: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = س³ والمستقيمات ص = ١ ، ص = ٨ ومحور الصادات

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = س² ، هـ(س) = ٢ - س والمحور السينات والمستقيم ص = -٢

الحل:

نجد نقاط التقاطع

ق = هـ

س² = ٢ - س

⇐ س² + س - ٢ = ٠

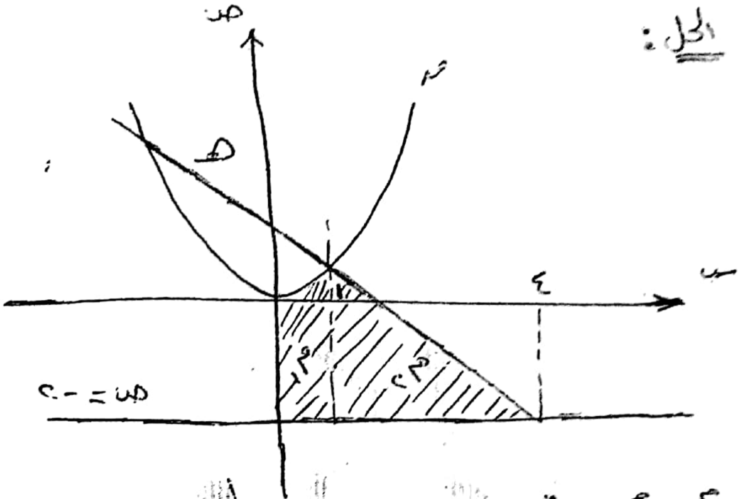
⇐ (س + ٢)(س - ١) = ٠

⇐ س = -٢ ، س = ١

هـ = ص

٢ - س = -٢

س = ٤



م = م١ + م٢

$$⇐ م = \int_{٠}^{١} س^2 - (-٢)\ دس + \int_{١}^{٤} (٢ - س) - (-٢)\ دس$$

$$= \int_{٠}^{١} س^2 + ٢\ دس + \int_{١}^{٤} ٤ - س\ دس = \frac{س^3}{٣} + ٢س \Big|_{٠}^{١} + ٤س - \frac{س^2}{٢} \Big|_{١}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} + ٢\right) - (٠) + (١٦ - ٨) - \left(٤ - \frac{١}{٢}\right) = ٦\frac{٥}{٦}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ص = √س ، ص + س = ٠ ، ص - ٢ = ٠

الحل:

نجد نقاط التقاطع.

ص١ = ص٢

-س = ٢ ⇐ س = -٢

ص١ = ص٣

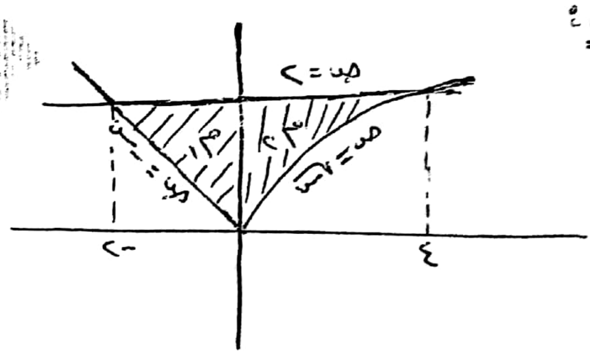
-س = √س

س = ٠

ص٢ = ص٣

٢ = √س

س = ٤



م = م١ + م٢

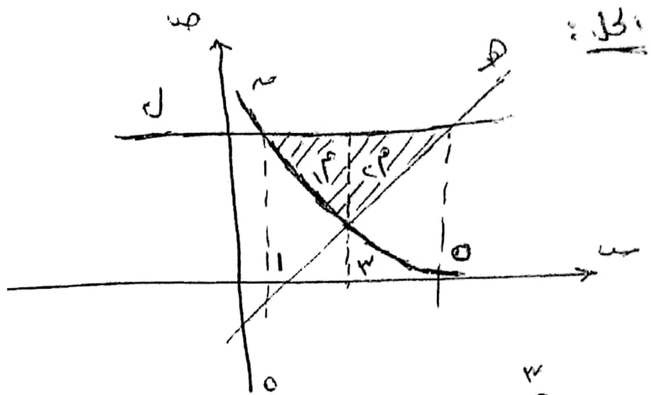
$$⇐ م = \int_{-٢}^{٠} ٢ - (-س)\ دس + \int_{٠}^{٤} ٢ - \sqrt{س}\ دس$$

$$= ٢س + \frac{س^2}{٢} \Big|_{-٢}^{٠} + ٢س - \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \Big|_{٠}^{٤}$$

$$= (٠) - (-٤ + ٢) + \left(٨ - \frac{١٦}{٣}\right) - (٠) = ٤\frac{٢}{٣}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \frac{3}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} - 2$ ، $\text{ل}(\text{س}) = 3$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ل

$\frac{3}{\text{س}} = 3 \Rightarrow 3 = 3\text{س} \Rightarrow \text{س} = 1$

هـ = ل

$\text{س} - 2 = 3 \Rightarrow \text{س} = 5$

ق = هـ

$\frac{3}{\text{س}} = \text{س} - 2 \Rightarrow \text{س}^2 - 2\text{س} = 3$

$\Rightarrow \text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$

$\Rightarrow (\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$

$\Rightarrow \text{س} = 3$ ، $\text{س} = -1$

$\text{م} = \int_1^3 (\text{ل} - \text{ق})\, \text{دس} + \int_3^5 (\text{ل} - \text{هـ})\, \text{دس}$

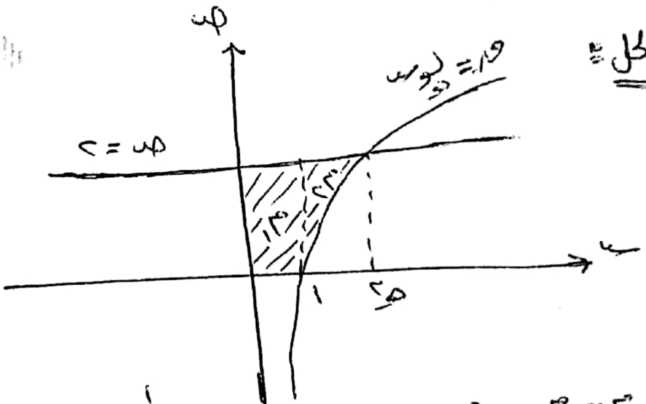
$= \int_1^3 \left(3 - \frac{3}{\text{س}}\right) \text{دس} + \int_3^5 \left(3 - (\text{س} - 2)\right) \text{دس}$

$= 3\text{س} - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| \Big|_1^3 + 5\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2} \Big|_3^5$

$= (9 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3) - (3 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}1) + \left(25 - \frac{25}{2}\right) - \left(15 - \frac{9}{2}\right) = 8 - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ومحور الصادات ومحور السينات والمستقيم $\text{ص} = 2$

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = 0$

$\text{س} = 1$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = 2$

$\text{س} = \text{هـ}^2$

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 \Rightarrow \text{م} = \int_0^1 2\, \text{دس} + \int_1^{\text{هـ}^2} (2 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\, \text{دس}$

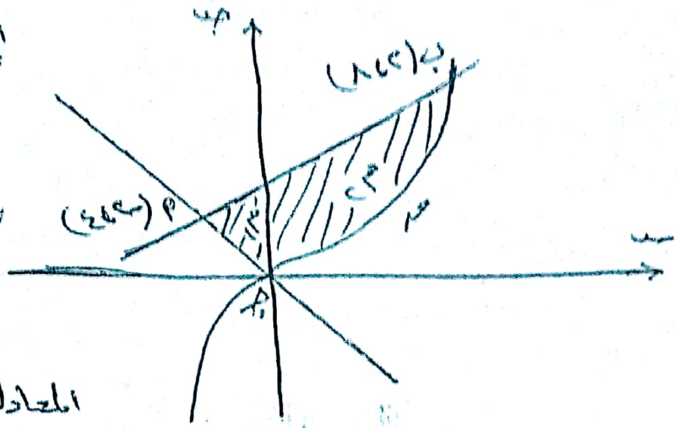
$= 2\text{س} \Big|_0^1 + 2\text{س} \Big|_1^{\text{هـ}^2} - \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{س} - \int \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\, \text{دس}\right) \Big|_1^{\text{هـ}^2}$

$= (2 - 0) + (2\text{هـ}^2 - 2) - (\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}) \Big|_1^{\text{هـ}^2}$

$= 2\text{هـ}^2 - \left((\text{هـ}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^2 - \text{هـ}^2) - (1\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 - 1)\right)$

$= 2\text{هـ}^2 - (2\text{هـ}^2 - \text{هـ}^2 - 0 + 1) = \text{هـ}^2 - 1$

مثال: معتمداً على الرسم أوجد المساحة المظللة حيث ق(س) = س٣



الحل: نجد معادلة أج ، أب

ميل أج = $\frac{٤ - ٠}{-٢ - ٠} = -٢$

المعادلة: ص − ٠ = −٢ (س − ٠)

ص = −٢س

ميل أب = $\frac{٨ - ٤}{٢ - (-٢)} = ١$

المعادلة: ص − ٨ = ١(س − ٢)

⟸ ص = س + ٦

م = م١ + م٢

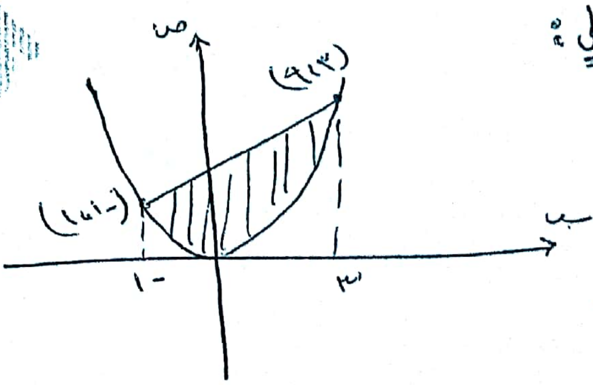
⟸ م = $\int_{-٢}^{٠} \left((س + ٦) - (-٢س)\right) دس + \int_{٠}^{٢} (س + ٦ - س^٣)\, دس$

= $\left[\frac{٣س^٢}{٢} + ٦س\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{س^٢}{٢} + ٦س - \frac{س^٤}{٤}\right]_{٠}^{٢}$

= (٠) − (٦ − ١٢) + (٢ + ١٢ − ٤) = ٦ + ١٠ = ١٦

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = س٢ والمستقيم الواصل بين النقطتين على منحنى ق(س) والتي احداثياتها السينية س = −١ ، س = ٣

الحل:



النقاط هي (−١،١) ، (٣،٩)

نجد معادلة المستقيم:

الميل = $\frac{٩ - ١}{٣ - (-١)} = ٢$

المعادلة: ص − ١ = ٢(س + ١)

⟸ ص = ٢س + ٣

م = $\int_{-١}^{٣} (٢س + ٣) - (س^٢)\, دس = \left[س^٢ + ٣س - \frac{س^٣}{٣}\right]_{-١}^{٣}$

= $(٩ + ٩ - ٩) - (١ - ٣ + \frac{١}{٣}) = ١٠\frac{٢}{٣}$

* ملاحظة: اذا وجد مثل الحد ص في المعادلات يكون التكامل بدلالة ص وذلك أسهل من التكامل بدلالة س

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ص}^٢ = ٤\text{س}$ ، $\text{ص} = \text{س} - ٣$

الحل: $\text{ص}^٢ = ٤\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص}^٢}{٤}$ ، $\text{ص} = \text{س} - ٣ \Leftarrow \text{س} = \text{ص} + ٣$

نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow \frac{\text{ص}^٢}{٤} = \text{ص} + ٣ \Rightarrow \text{ص}^٢ = ٤\text{ص} + ١٢ \Leftarrow \text{ص}^٢ - ٤\text{ص} - ١٢ = ٠$

$(\text{ص} - ٦)(\text{ص} + ٢) = \text{صفر} \Rightarrow \boxed{\text{ص} = ٦}$ ، $\boxed{\text{ص} = -٢}$

$$\therefore \text{م} = \int_{-٢}^{٦} \left((\text{ص}+٣) - \left(\frac{\text{ص}^٢}{٤}\right)\right) d\text{ص} = \frac{\text{ص}^٢}{٢} + ٣\text{ص} - \frac{\text{ص}^٣}{١٢} \Big|_{-٢}^{٦}$$

$$= (١٨ + ١٨ - ١٨) - \left(٢ - ٦ + \frac{٨}{١٢}\right) = ٢١\frac{١}{٣}$$

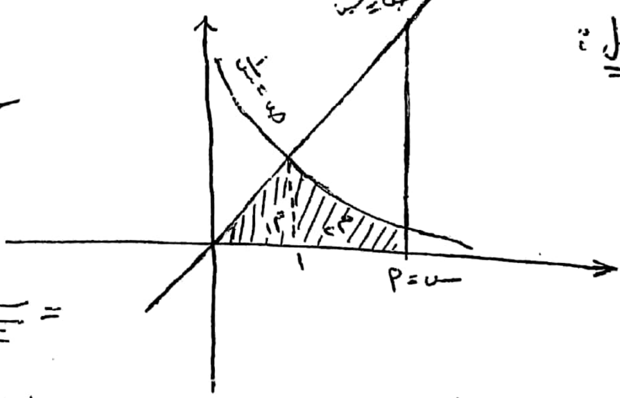
مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{س} = \text{ص}^٢$ ، $\text{س} = ٤$

الحل: نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow \text{ص}^٢ = ٤ \Rightarrow \text{ص} = \pm ٢$

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{ص}^٢)\, d\text{ص} = ٤\text{ص} - \frac{\text{ص}^٣}{٣} \Big|_{-٢}^{٢} = \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$

مثال: اذا كانت المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحنى $\text{ص} = \text{س}$ ومنحنى $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ والمستقيم $\text{س} = \text{م}$ حيث $\text{م} > ١$ تساوي ١,٥ جد م

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$\text{س} = \frac{١}{\text{س}} \Rightarrow \text{س}^٢ = ١ \Rightarrow \text{س} = \pm ١$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} \text{س}\, d\text{س} + \int_{١}^{\text{م}} \frac{١}{\text{س}}\, d\text{س}$$

$$= \frac{\text{س}^٢}{٢}\Big|_{٠}^{١} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١}^{\text{م}}$$

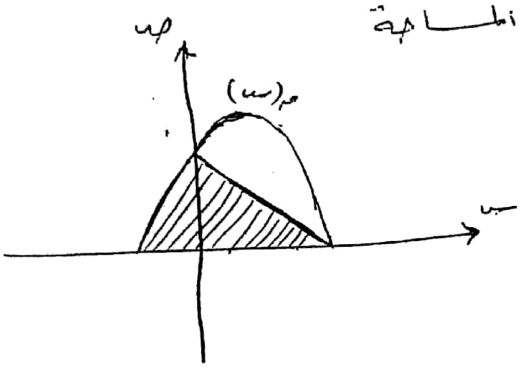
$$\Leftarrow \left(\frac{١}{٢} - ٠\right) + \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{م} - \text{لو}_{\text{هـ}}١\right) = ١,٥$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{م} = ١,٥$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{م} = ١$$

$$\therefore \boxed{\text{م} = \text{هـ}}$$

مثال: بالاعتماد على الرسم إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (١+\text{س})(\text{جـ}-\text{س})$ وكانت مساحة المثلث تساوي (٨) وحدات، جد المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات.



الحل: يجب معرفة قيمة جـ: يقطع محور السينات عندما $(١+\text{س})(\text{جـ}-\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١ ، \text{جـ}$

ويقطع محور الصادات عندما س = ٠

أي أن $\text{ق}(٠) = (١+٠)(\text{جـ}-٠) = \text{جـ}$

$\Leftarrow$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times \text{جـ} \times \text{جـ} = \frac{١}{٢}\text{جـ}^٢ \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{جـ}^٢ = ٨ \Leftarrow \text{جـ}^٢ = ١٦ \Leftarrow \text{جـ} = ٤ ، -٤$

نأخذ $\boxed{\text{جـ} = ٤} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = (١+\text{س})(٤-\text{س}) = ٤ - \text{س} + ٤\text{س} - \text{س}^٢$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = ٤ + ٣\text{س} - \text{س}^٢$

$\Leftarrow \text{م} = \int_{-١}^{٤} (٤ + ٣\text{س} - \text{س}^٢)\, \text{دس} = ٤\text{س} + \frac{٣\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٣}{٣} \Big|_{-١}^{٤}$

$= \left(١٦ + ٢٤ - \frac{٦٤}{٣}\right) - \left(-٤ + \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٣}\right) = \frac{١٢٥}{٦}$

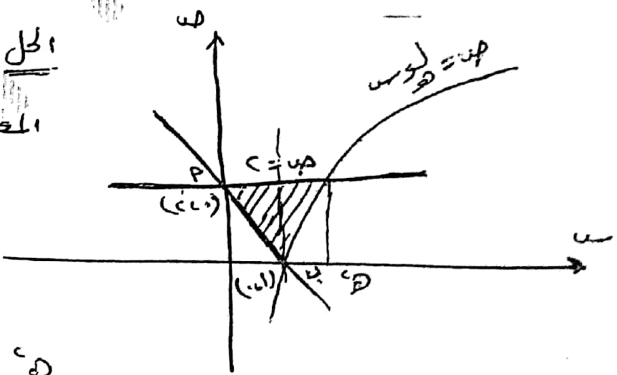
مثال: معتمداً على الرسم المجاور جد مساحة المنطقة المظللة

الحل: نجد معادلة أب $\Leftarrow \text{م} = \frac{٢-٠}{٠-١} = -٢$

المعادلة: $\text{ص} - ٠ = -٢(\text{س}-١) \Leftarrow \text{ص} = -٢\text{س} + ٢$

نجد نقاط التقاطع:

$\text{لو}_\text{هـ}\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}^٢$



$\therefore \text{م} = \int_{٠}^{١} ٢ - (-٢\text{س}+٢)\, \text{دس} + \int_{١}^{\text{هـ}^٢} ٢ - \text{لو}_\text{هـ}\text{س}\, \text{دس}$

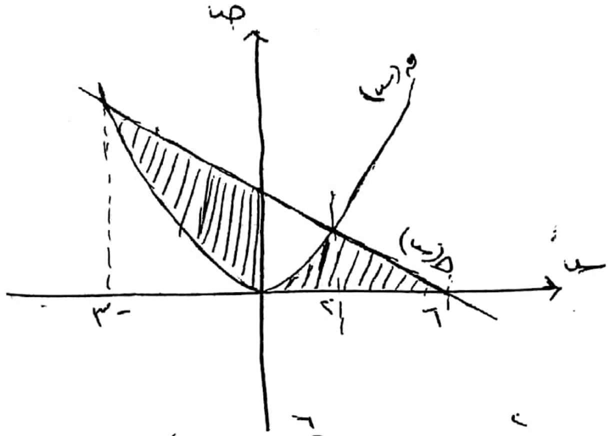
$= \int_{٠}^{١} ٢\text{س}\, \text{دس} + ٢(\text{هـ}^٢ - ١) - \left(\text{لو}_\text{هـ}\text{س} \times \text{س} - \int_{١}^{\text{هـ}^٢} \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\, \text{دس}\right)$

$= \text{س}^٢ \Big|_{٠}^{١} + ٢\text{هـ}^٢ - ٢ - (\text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}\text{س} - \text{س}) \Big|_{١}^{\text{هـ}^٢}$

$= ١ - ٠ + ٢\text{هـ}^٢ - ٢ - \left((\text{هـ}^٢\,\text{لو}_\text{هـ}\text{هـ}^٢ - \text{هـ}^٢) - (\text{لو}_\text{هـ}١ - ١)\right) = \text{هـ}^٢ - ٢$

مثال: معتمداً على الشكل المجاور جد المساحة المظللة

حيث ق(س) = س² ، هـ(س) = ٦ - س



الحل: نجد نقاط التقاطع:

ق = هـ

⇐ س² = ٦ - س ⇐ س² + س - ٦ = ٠

⇐ (س + ٣)(س - ٢) = ٠ ⇐ س = -٣ ، ٢

هـ = ٠

⇐ ٦ - س = ٠ ⇐ س = ٦

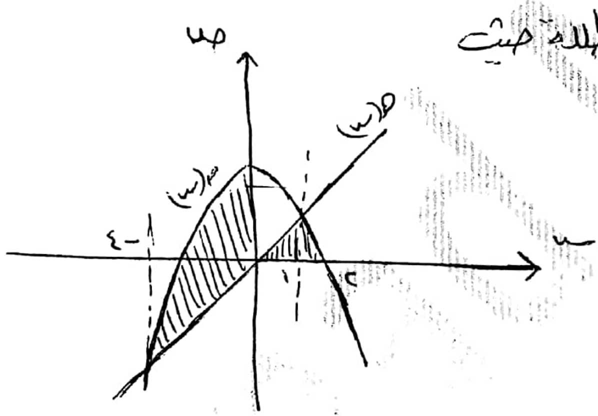
م = م١ + م٢ + م٣ = $\int_{-3}^{0}$ ((٦ - س) - (س²)) دس + $\int_{0}^{2}$ س² دس + $\int_{2}^{6}$ (٦ - س) دس

= ٦س - $\frac{س^2}{2}$ - $\frac{س^3}{3}$ $\Big|_{-3}^{0}$ + $\frac{س^3}{3}$ $\Big|_{0}^{2}$ + ٦س - $\frac{س^2}{2}$ $\Big|_{2}^{6}$

= (٠) - (-١٨ - $\frac{9}{2}$ + ٩) + ($\frac{8}{3}$ - ٠) + (٣٦ - ١٨) - (١٢ - ٢) = $\frac{145}{6}$

مثال: معتمداً على الرسم جد المساحة المظللة حيث

ق(س) = ٤ - س² ، هـ(س) = ٣س



نجد نقاط التقاطع:

هـ = ق ⇐ ٣س = ٤ - س²

⇐ س² + ٣س - ٤ = ٠ ⇐ (س + ٤)(س - ١) = ٠

⇐ س = -٤ ، ١

ص = ٠ يقطع محور السينات

٤ - س² = ٠ ⇐ س = ٢ ، -٢

م = م١ + م٢ + م٣ = $\int_{-4}^{0}$ ((٤ - س²) - (٣س)) دس + $\int_{0}^{1}$ ٣س دس + $\int_{1}^{2}$ (٤ - س²) دس

= ٤س - $\frac{س^3}{3}$ - $\frac{3س^2}{2}$ $\Big|_{-4}^{0}$ + $\frac{3س^2}{2}$ $\Big|_{0}^{1}$ + ٤س - $\frac{س^3}{3}$ $\Big|_{1}^{2}$

= (٠) - (-١٦ + $\frac{64}{3}$ - ٢٤) + ($\frac{3}{2}$ - ٠) + (٨ - $\frac{8}{3}$) - (٤ - $\frac{1}{3}$) = $\frac{131}{6}$