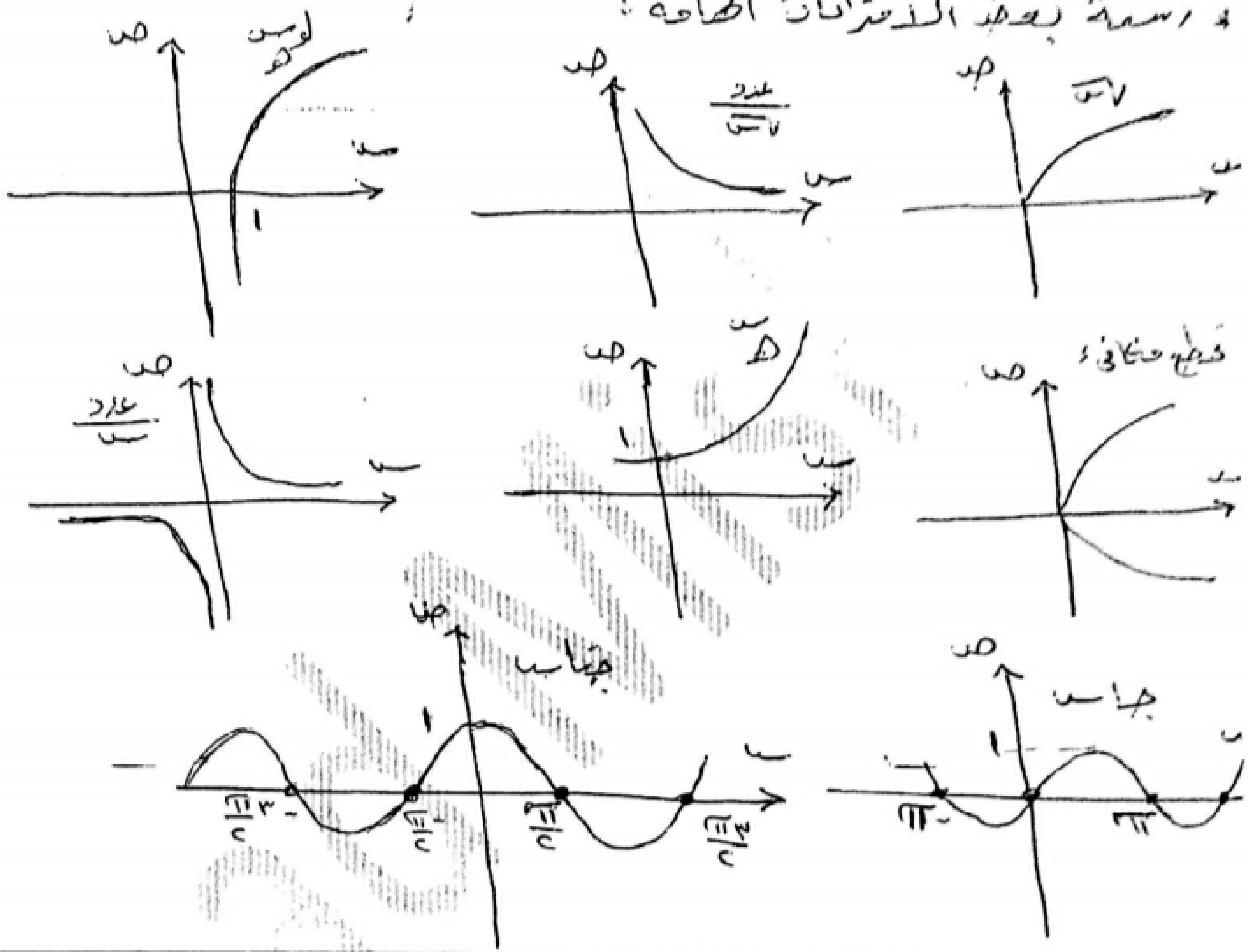
* حساب المساحة باستخدام التكامل :

مبادئ : حساب المساحة :

* نعتبر كل مستقيم على صورة ص = عدد هو اقتران و أهمهم محور السينات ص = ٠
* نعتبر كل مستقيم على صورة س = عدد هو عمود و أهمهم محور الصادات س = ٠
* رسمة بعض الاقترانات الهامة :



قانون المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ (الأعلى - الأدنى) دس

* خطوات الحل :

١) نحدد ما لدينا من أعمدة واقترانات

٢) نساوي كل اقترانين ببعض لإيجاد نقاط التقاطع والتي تعتبر حدود التكامل

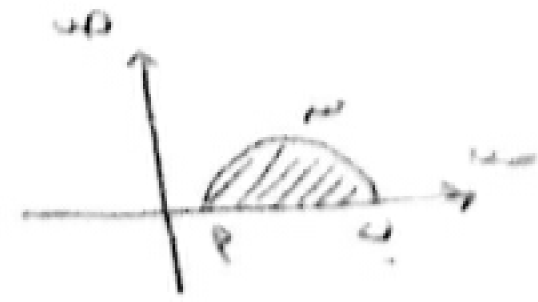
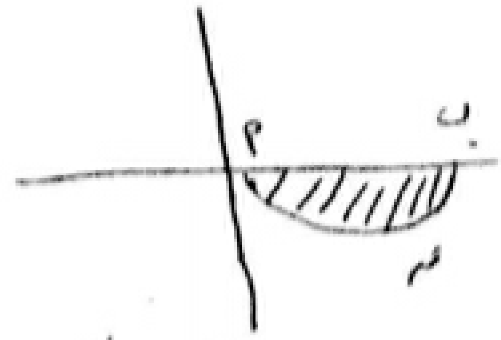
٣) نرسم الأعمدة ثم الاقترانات ونظلل المنطقة المطلوبة

٤) نحدد المساحة باستخدام التكامل

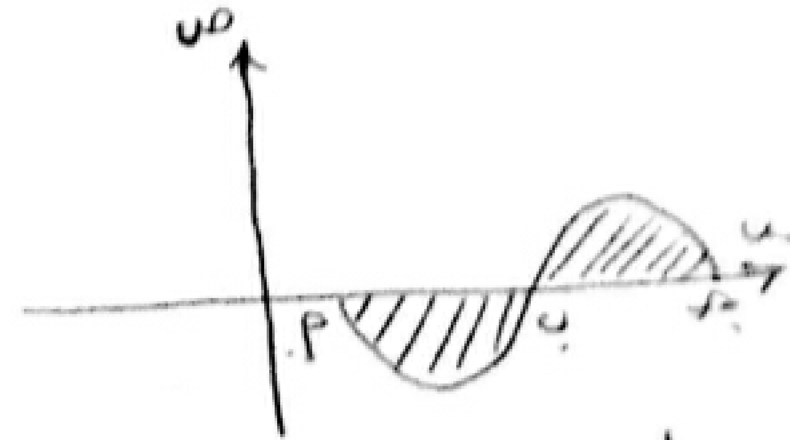
٥) اذا كان لدينا ٣ اقترانات فإنه يوجد أكثر من منطقة

٦) نقاط التقاء الاقترانات يجب أن تكون أعمدة .

* مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات .

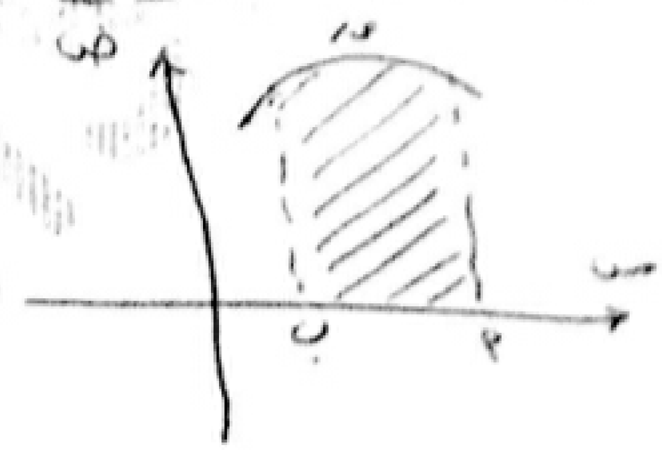
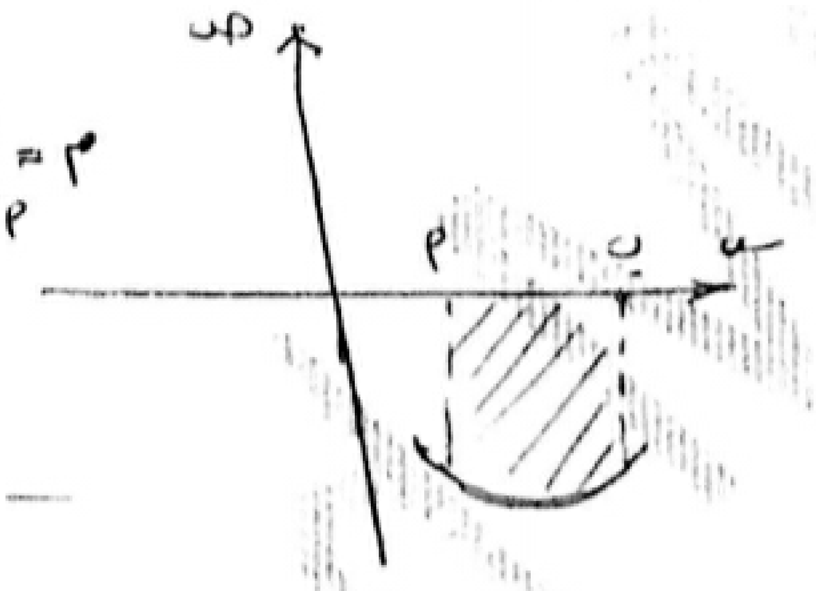



$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$

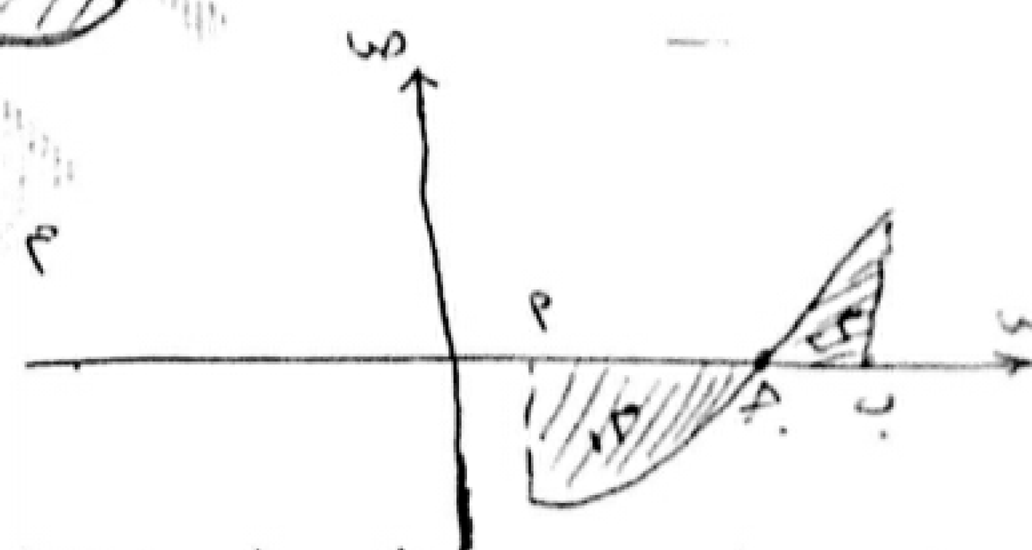


$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس + \int_{ب}^{جـ} |ق(س)|\, دس$$

إذا طلبت المساحة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ و س = ب أو على [أ، ب] نجد نقاط التقاطع مع محور السينات فإذا وقعت في الفترة (أ، ب) نجزئ المساحة .

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$



$$م = \int_{أ}^{جـ} |ق(س)|\, دس + \int_{جـ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = $س^2 - ٤س$ ومحور السينات

الحل: $س^2 - ٤س = ٠$ لايجاد حدود التكامل ⟸ $س(س-٤) = ٠$ ⟸ $\boxed{س=٠}$ ، $\boxed{س=٤}$

$$م = \int_{٠}^{٤} |س^2 - ٤س|\, دس = \int_{٠}^{٤} ٤س - س^2\, دس = ٢س^2 - \frac{س^3}{٣} \Big|_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}\right) - ٠ = \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال : جد المساحة المحصورة بين ص = $س^3 - س$ ومحور السينات

الحل : $س^3 - س = 0 \Leftarrow س(س^2 - 1) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = -1$ ، $س = 1$

$$م = \int_{-1}^{0} |س^3 - س| \, دس + \int_{0}^{1} |س^3 - س| \, دس$$

$$= \int_{-1}^{0} (س^3 - س) \, دس + \int_{0}^{1} (س - س^3) \, دس = \left. \frac{س^4}{4} - \frac{س^2}{2} \right|_{-1}^{0} + \left. \frac{س^2}{2} - \frac{س^4}{4} \right|_{0}^{1}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

سؤال : جد المساحة المحصورة بين ص = $2س - 6$ ومحور السينات والمستقيمين س = 1 ، س = 6

$\boxed{\text{الإجابة } 13}$

سؤال : جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $3س - س^2$ ومحور السينات حيث س $\in [1 ، 5]$

$\boxed{\text{الإجابة } 12}$

مثال : جد المساحة المحصورة بين ص = $2 - \sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات .

الحل : محور الصادات س = 0 .

نجد نقطة التقاطع مع السينات $\Leftarrow 2 - \sqrt{س} = 0 \Leftarrow 2 = \sqrt{س} \Leftarrow \boxed{س = 4}$

$$م = \int_{0}^{4} |2 - \sqrt{س}| \, دس = \int_{0}^{4} 2 - \sqrt{س} \, دس = \int_{0}^{4} (2 - س^{\frac{1}{2}}) \, دس = \left. 2س - \frac{2 س^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_{0}^{4}$$

$$= \left(8 - \frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}}\right) - (0) = 8 - \frac{2}{3}(8) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

مثال : جد المساحة المحصورة بين ص = جاس $- \frac{1}{2}$ ومحور السينات في $\left[-\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}\right]$

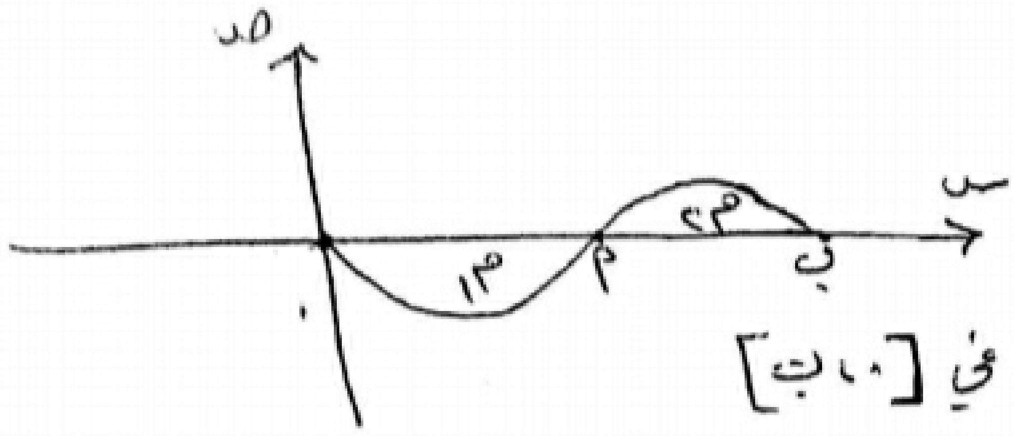
الحل : جاس $- \frac{1}{2} = 0 \Leftarrow$ جاس $= \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{6}$

$$م = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\text{جاس} - \tfrac{1}{2}| \, دس + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |\text{جاس} - \tfrac{1}{2}| \, دس$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \tfrac{1}{2} - \text{جاس} \, دس + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس} - \tfrac{1}{2} \, دس = \left. \tfrac{1}{2}س + \text{جتاس} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} + \left. \left(-\text{جتاس} - \tfrac{1}{2}س\right) \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + 0\right) + \left(0 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

مثال: بالاعتماد على الرسم:



إذا كانت $\text{م}_1 = ٧$ ، $\text{م}_2 = ١٢$ جد:

١) $\int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس}$

٢) المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في [٠، ب]

الحل: ١) $\int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس} = \int_{٠}^{\text{م}} \text{ق(س)}\, \text{دس} + \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس}$

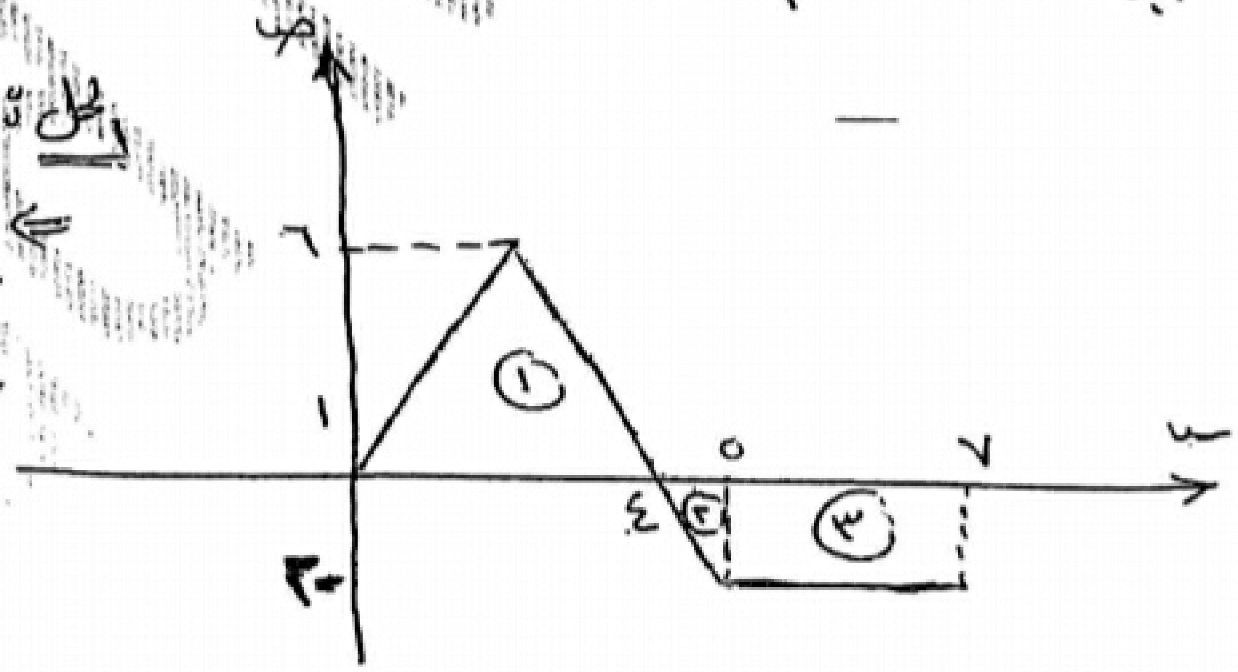
$= -٧ + ١٢ = ٥$

٢) $\text{م} = \int_{٠}^{\text{م}} |\text{ق(س)}|\, \text{دس} + \int_{\text{م}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\, \text{دس} = ٧ + ١٢ = ١٩$

مثال: معتمداً على الرسم الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد:

١) $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س)}\, \text{دس}$ ٢) $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\, \text{دس}$

٣) $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س)}\, \text{دس}\right|$ ٤) المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في [٠، ٧]



الحل: $\text{م}_1 = \frac{1}{2} \times ٤ \times ٦ = ١٢$ (مساحة مثلث)

$\Leftarrow \int_{٠}^{٤} \text{ق(س)}\, \text{دس} = ١٢$

$\text{م}_2 = \frac{1}{2} \times ١ \times ٢ = ١$

$\Leftarrow \int_{٤}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{دس} = -١$ (لأنه تحت محور السينات)

$\text{م}_3 = ٢ \times ٢ = ٤ \Leftarrow \int_{٥}^{٧} \text{ق(س)}\, \text{دس} = -٤$ (لأنها تحت محور السينات)

١) $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س)}\, \text{دس} = ١٢ + (-١) + (-٤) = ٧$

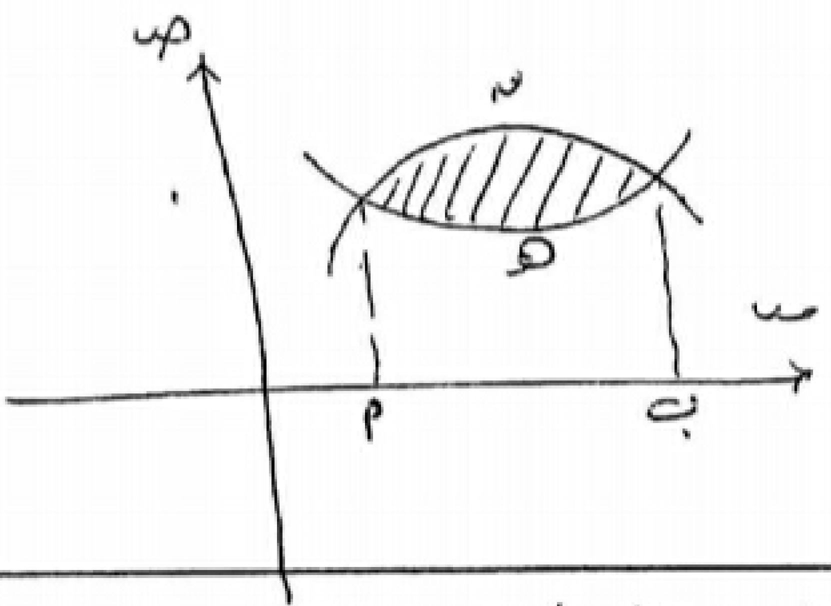
٢) $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\, \text{دس} = ١٢ + ١ + ٤ = ١٧$

٣) $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س)}\, \text{دس}\right| = |١٢ + (-١) + (-٤)| = ٧$

٤) $\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = ١٧$

"طريق النجاح مليء بالأشواك"

ثانياً : المساحة بين منحنيين :



في هذه الحالة نقوم بـ :

١) ايجاد نقاط التقاطع بوضع ق = هـ

٢) نأخذ قيمة لـ س بين نقاط التقاطع فإذا كانت مثلاً ق > هـ فإن م = $\int_{م}^{ب} (ق - هـ)$ دس

مثال : أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س^2 + س ، هـ(س) = ٢س + ٦

الحل : نضع ق = هـ لإيجاد نقاط التقاطع ⇐ س^2 + س = ٢س + ٦ ⇐ س^2 - س - ٦ = ٠

⇐ (س - ٣)(س + ٢) = ٠ ⇐ $\boxed{س = ٣}$ ، $\boxed{س = -٢}$

لمعرفة أي الاقترانين أكبر نأخذ عدداً في الفترة (-٢، ٣) ليكن (١)

ق(١) = ١ + ١ = ٢
هـ(١) = ٢ + ٦ = ٨ ⟸ هـ > ق

∴ م = $\int_{-٢}^{٣}$ (هـ - ق) دس ⇐ م = $\int_{-٢}^{٣}$ (٢س + ٦) - (س^2 + س) دس

= $\int_{-٢}^{٣}$ س + ٦ - س^2 دس = $\frac{س^2}{٢}$ + ٦س - $\frac{س^3}{٣}$ $\Big|_{-٢}^{٣}$

= $(\frac{٩}{٢} + ١٨ - ٩) - (٢ - ١٢ + \frac{٨}{٣}) = \frac{١٢٥}{٦}$

سؤال : جد المساحة المحصورة بين ق(س) = -س^2 + ٣س + ٧ ، هـ(س) = س^2 + س + ٣

$\boxed{\text{الاجابة ٩}}$

مثال : أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س^3 ، هـ(س) = ٤س

الحل : نضع ق = هـ ⇐ س^3 = ٤س ⇐ س^3 - ٤س = ٠ ⇐ س(س^2 - ٤) = ٠

⇐ س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

م = م$_1$ + م$_2$ ⇐ م = $\int_{-٢}^{٠}$ س^3 - ٤س دس + $\int_{٠}^{٢}$ ٤س - س^3 دس

= $\frac{س^4}{٤}$ - ٢س^2 $\Big|_{-٢}^{٠}$ + ٢س^2 - $\frac{س^4}{٤}$ $\Big|_{٠}^{٢}$

= (٠) - (٤ - ٨) + (٨ - ٤) - (٠)

= ٤ + ٤

= ٨

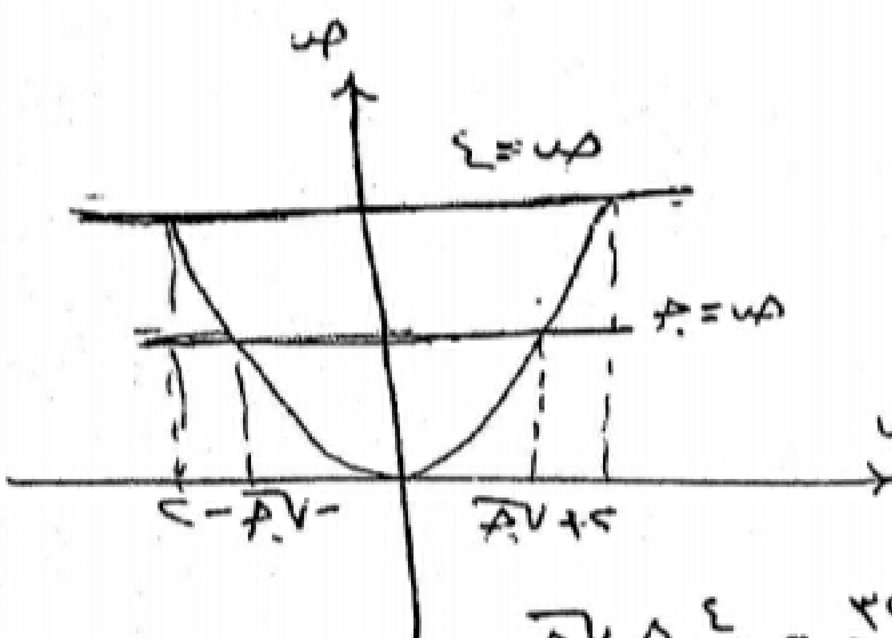
مثال: اذا كان المستقيم ص = جـ يقسم المساحة المحصورة بين ص = س^{٢}، ص = ٤ الى قسمين متساويين، جد جـ

الحل: نجد المساحة المحصورة بين ص = س^{٢}، ص = ٤ حيث:

س^{٢} = ٤ ⟸ س = ±٢

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢})\, \text{ءس} = ٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{-٢}^{٢} = \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$

نجد المساحة بين ص = س^{٢}، ص = جـ حيث:



س^{٢} = جـ ⟸ س = ±√جـ

$$\text{م} = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{جـ} - \text{س}^{٢})\, \text{ءس} = \text{جـ س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}}$$

$$= \left(\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} - \frac{\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}}{٣}\right) - \left(-\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} + \frac{\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}}{٣}\right)$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} + \frac{٢}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} = \frac{٤}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} \Leftarrow \frac{١}{٢} \times \frac{٣٢}{٣} = \frac{٤}{٣}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}$$

⟸ جـ√جـ = ٤ بالتربيع ⟸ جـ^{٢} × جـ = ١٦ ⟸ جـ^{٣} = ١٦

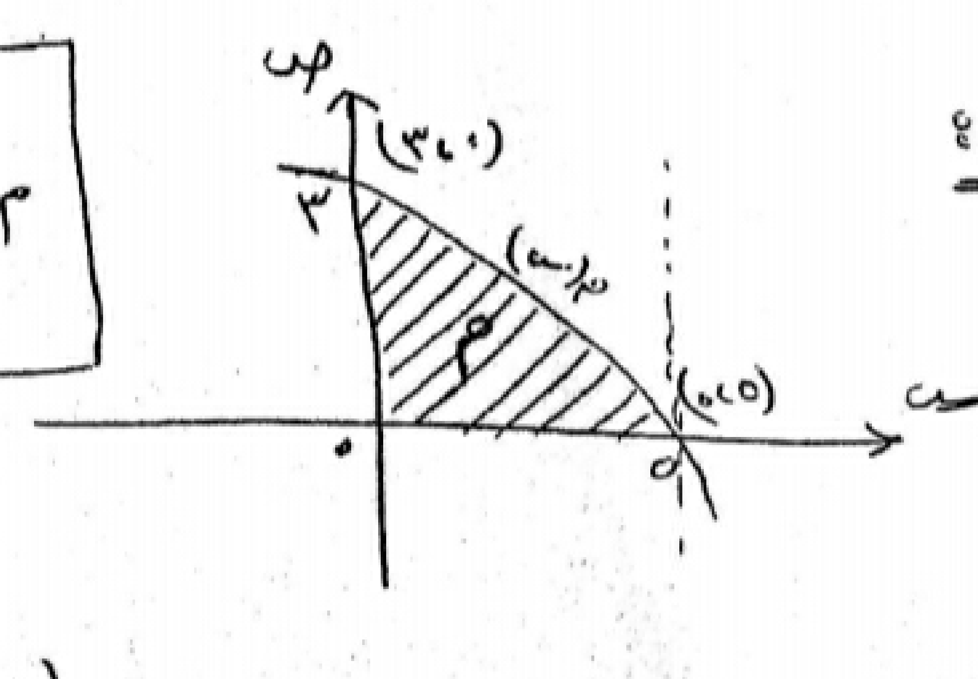
⟸ $\boxed{\text{جـ} = \sqrt[٣]{١٦}}$

ثالثاً: المساحة بين أكثر من منحنيين:

في هذه الحالة يجب اتباع ما يلي:

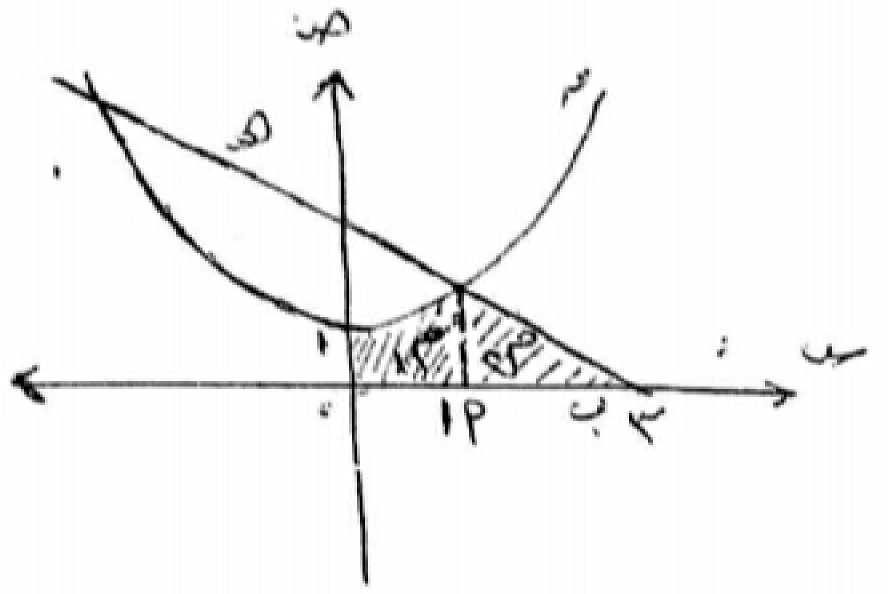
١) رسم المنحنيات
٢) تحديد المنطقة المطلوبة
٣) ايجاد نقاط التقاطع اللازمة
٤) ايجاد مساحة كل منطقة ثم جمع المساحات.

مثل:



$\boxed{\text{م} = \int_{٠}^{٥} \text{ص}\, \text{ءس}}$ ، ص = ق(س)　　أو　م = $\int_{٠}^{٣} \text{س}\, \text{ءص}$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين $ق(س) = س^2 + ١$ ، $هـ(س) = ٣ - س$ ومحوري السينات والصادات



الحل: نرسم لتحديد المنطقة المطلوبة

لإيجاد (أ)

نضع ق = هـ

$س^2 + ١ = ٣ - س$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = \text{صفر}$

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$ النقطة المطلوبة

لإيجاد (ب)

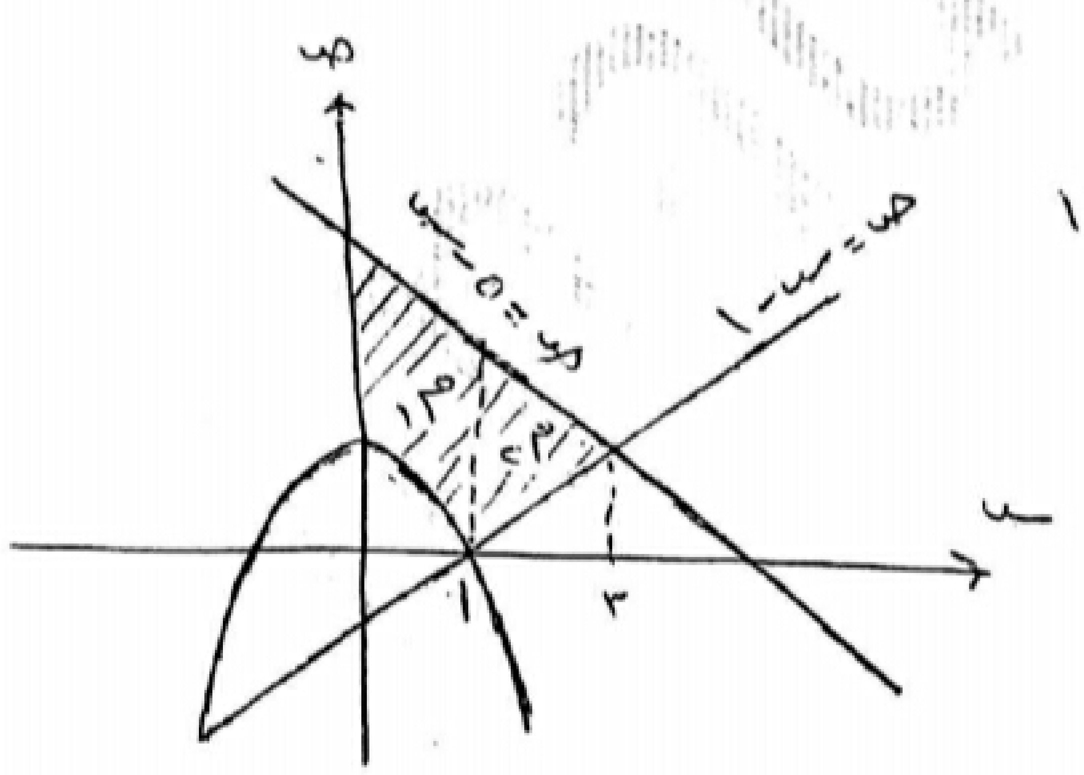
نضع هـ = ٠ ⟸ $٣ - س = ٠$ ⟸ $\boxed{س = ٣}$

$م = م_1 + م_2 = \int_0^1 ق \, دس + \int_1^3 هـ \, دس = \int_0^1 (س^2 + ١) \, دس + \int_1^3 (٣ - س) \, دس$

$= \left. \frac{س^3}{٣} + س \right|_0^1 + \left. ٣س - \frac{س^2}{٢} \right|_1^3$

$= (\frac{١}{٣} + ١) - (٠) + (٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٣\frac{١}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $ق(س) = ١ - س^2$ ومحور الصادات والمستقيم $س + ص = ٥$ والمستقيم $ص = س - ١$



ق = ص

$١ - س^2 = س - ١$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$

ص = ص

$٥ - س = س - ١$

$٢س = ٦$

$\boxed{س = ٣}$

$م = م_1 + م_2 = \int_0^1 \left((٥ - س) - (١ - س^2)\right) دس + \int_1^3 \left((٥ - س) - (س - ١)\right) دس$

$= \int_0^1 (٤ - س + س^2) \, دس + \int_1^3 (٦ - ٢س) \, دس$

$= \left. ٤س - \frac{س^2}{٢} + \frac{س^3}{٣} \right|_0^1 + \left. ٦س - س^2 \right|_1^3$

$= (٤ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}) - (٠) + (١٨ - ٩) - (٦ - ١) = ٧\frac{٥}{٦}$

مثال: ما مساحة المنطقة المحصورة بين م(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ - س والمستقيم س = ٤

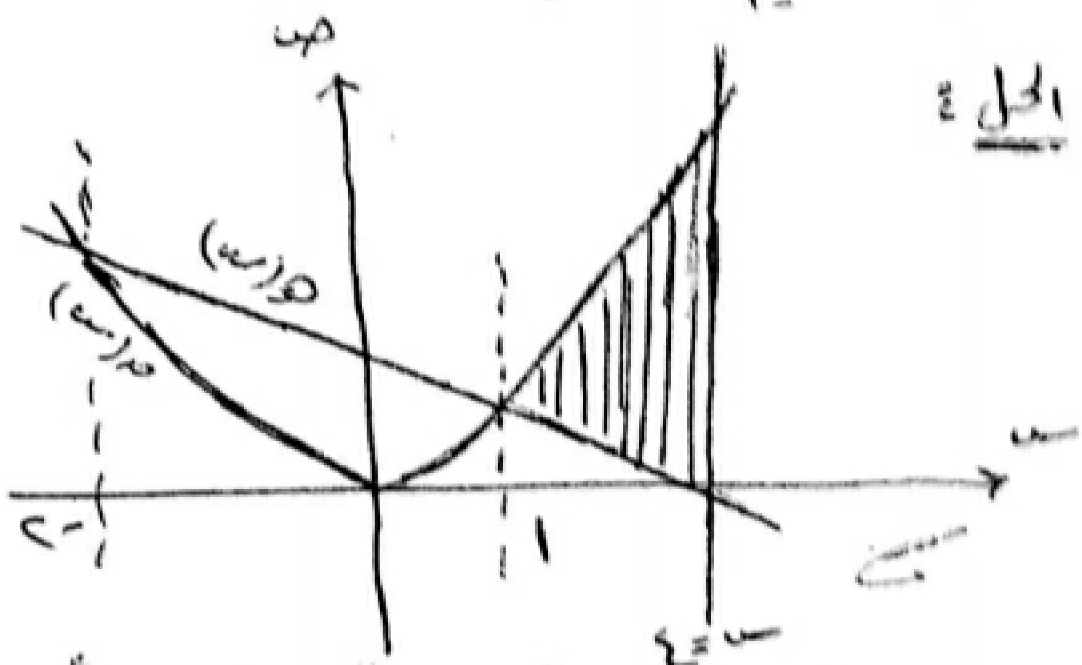
الحل:

نجد نقطة التقاطع بين م، هـ

س² = ٢ - س ⟸ س² + س - ٢ = صفر

(س + ٢)(س - ١) = صفر

س = -٢ أو $\boxed{\text{س} = ١}$



م = $\int_{1}^{4}$ (م(س) - هـ(س)) دس = $\int_{1}^{4}$ (س² + س - ٢) دس = $\frac{\text{س}^3}{3} + \frac{\text{س}^2}{2}$ - ٢س $\Big|_{1}^{4}$

= $\left(\frac{64}{3} + \frac{16}{2} - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$ = ٢٢,٥

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين م(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ - س ومحور السينات

الحل:

نجد نقاط تقاطع م مع محور السينات

س² = ٠ ⟸ س = ٠

نجد نقاط تقاطع هـ مع محور السينات

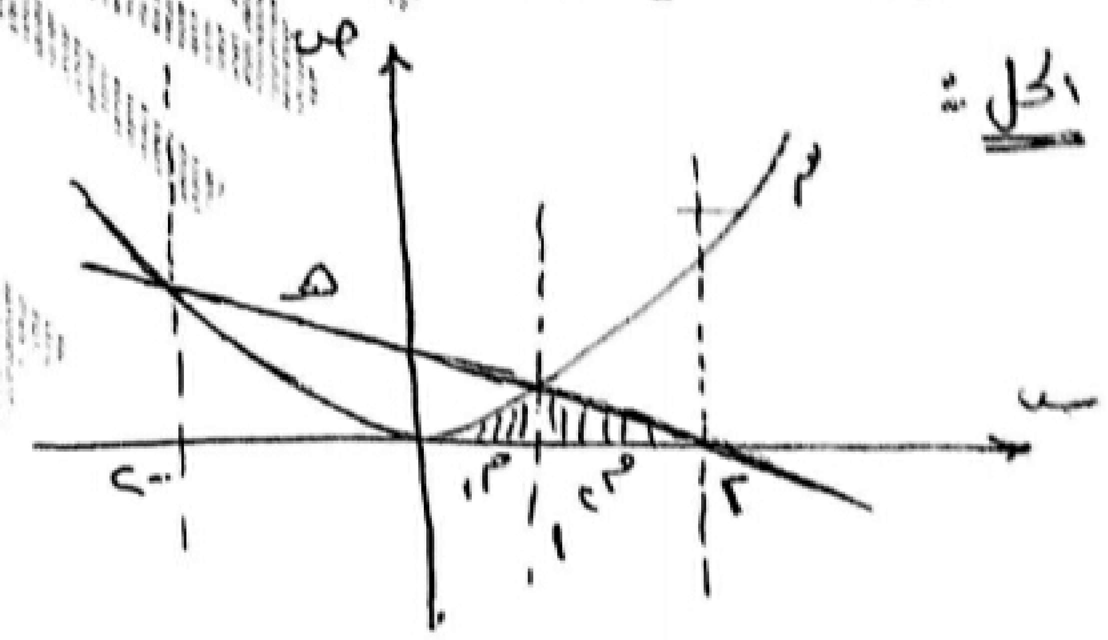
٢ - س = ٠ ⟸ س = ٢

نجد نقاط تقاطع م مع هـ

س² = ٢ - س ⟸ س² + س - ٢ = ٠

⟸ (س + ٢)(س - ١) = ٠

⟸ س = -٢ أو $\boxed{\text{س} = ١}$



م = م١ + م٢

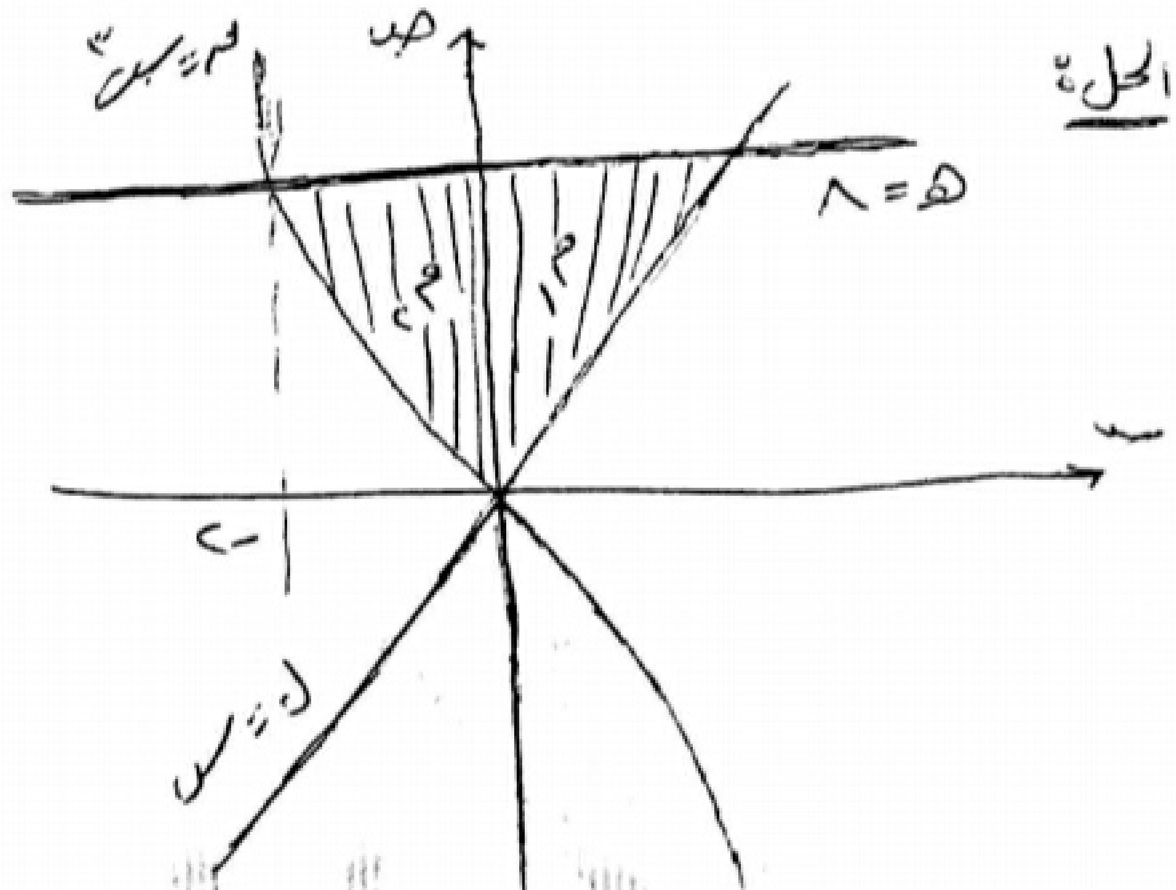
⟸ م = $\int_{0}^{1}$ م(س) دس - $\int_{1}^{2}$ هـ(س) دس = $\int_{0}^{1}$ س² دس + $\int_{1}^{2}$ (٢ - س) دس

= $\frac{\text{س}^3}{3}\Big|_{0}^{1}$ + ٢س - $\frac{\text{س}^2}{2}\Big|_{1}^{2}$ = $\frac{1}{3}$ + (٤ - ٢) - (٢ - $\frac{1}{2}$)

= $\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$

مثال: اذا كانت ق(س) = $-$س^{٣} ، هـ(س) = ٨ ، ل(س) = س جد المساحة المحصورة بين الاقترانات الثلاثة.

الحل:



نجد جميع نقاط التقاطع

ق = هـ

$-$س^{٣} = ٨ $\Leftarrow$ س^{٣} = $-$٨

$\Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = -٢}$

ق = ل

$-$س^{٣} = س $\Leftarrow$ س $-$ س^{٣} = ٠

$\Leftarrow$ س (١ $-$ س^{٢}) = ٠

$\Leftarrow$ س = ٠ ، س = ١ ، س = $-$١

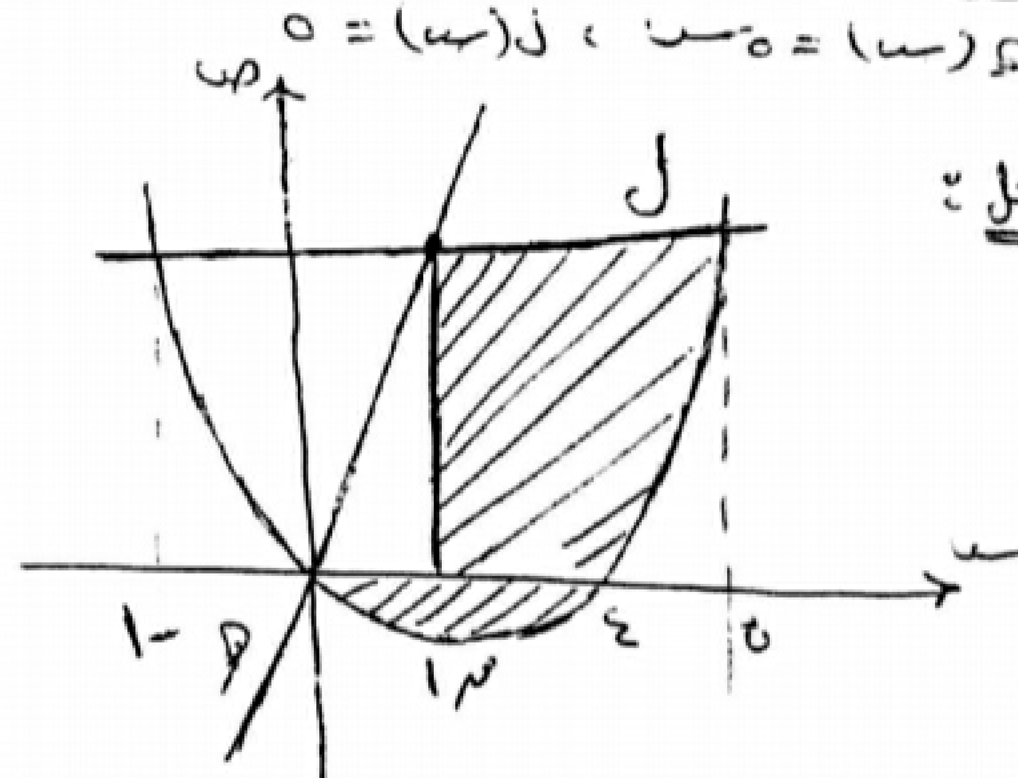
م = م١ + م٢ $\Leftarrow$ م = $\int_{-٢}^{٠}$ (٨ $-$ ($-$س^{٣})) دس + $\int_{٠}^{٨}$ ٨ $-$ س دس

= ٨س + $\frac{\text{س}^{٤}}{٤}$ $\Big|_{-٢}^{٠}$ + ٨س $-$ $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ $\Big|_{٠}^{٨}$ = (٠) $-$ ($-$١٦ + ٤) + (٦٤ $-$ ٣٢) $-$ (٠)

= ١٢ + ٣٢ = ٤٤

مثال: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث: ق(س) = س^{٢} $-$ ٤س ، هـ(س) = ٥س ، ل(س) = ٥

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = هـ

س^{٢} $-$ ٤س $-$ ٥س = ٠

س^{٢} $-$ ٩س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠ ، س = ٩

ق = ل

س^{٢} $-$ ٤س $-$ ٥ = ٠

س = ٥ ، س = $-$١

هـ = ل

٥س = ٥ $\Leftarrow$ س = ١

م = $\int_{٠}^{٤}$ (٠ $-$ ق) دس + $\int_{١}^{٤}$ (ل $-$ ٠) دس + $\int_{٤}^{٥}$ (ل $-$ ق) دس

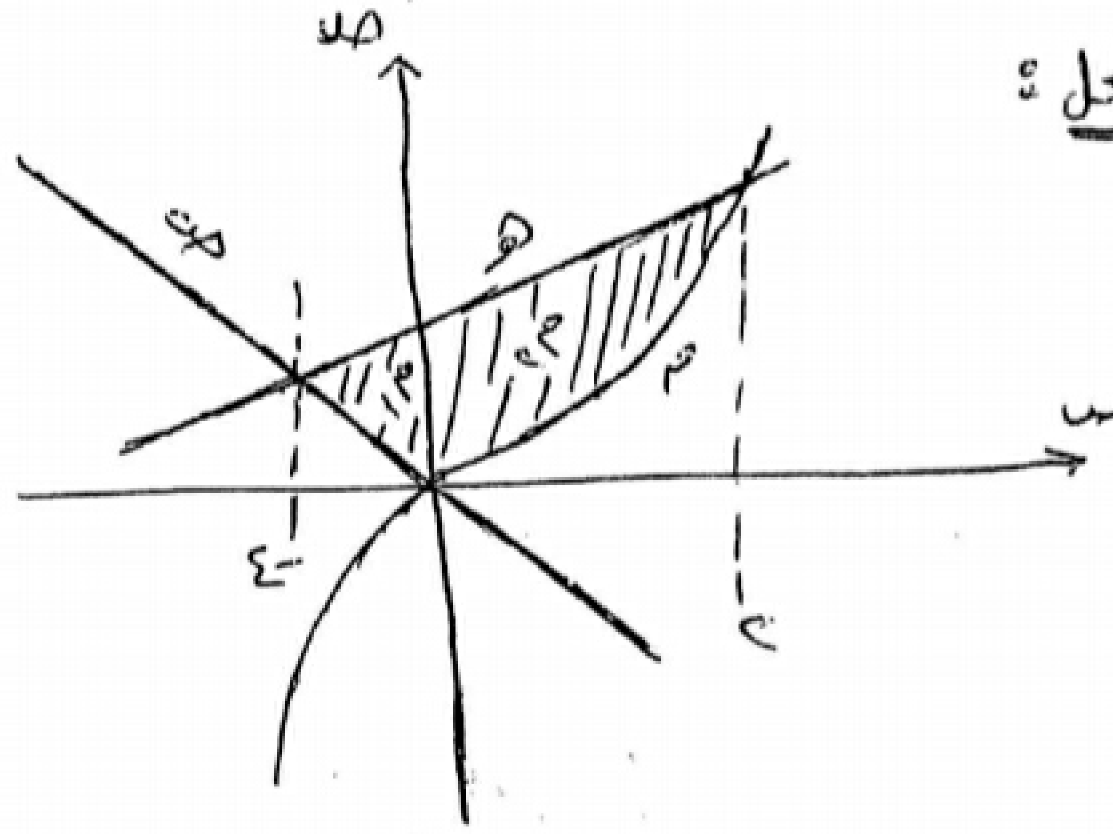
= $\int_{٠}^{٤}$ $-$س^{٢} + ٤س دس + $\int_{١}^{٤}$ ٥ دس + $\int_{٤}^{٥}$ ٥ $-$ س^{٢} + ٤س دس

= $-\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{٤\text{س}^{٢}}{٢}$ $\Big|_{٠}^{٤}$ + ١٥ + ٥س $-$ $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{٤\text{س}^{٢}}{٢}$ $\Big|_{٤}^{٥}$ = $-\frac{٦٤}{٣}$ + ٣٢ + ١٥

+ $\frac{٣٢}{٣}$ + ١٥ + $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٨٥}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ع(س) = $س^٣$ ، ق = $\frac{-س}{٢}$ ، هـ(س) = س + ٦

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ع = ق

$س^٣ = \frac{-س}{٢}$

س = ٠

ع = هـ

⇐ $س^٣$ = س + ٦ ⇐ س = ٢

هـ = ق

⇐ س + ٦ = $\frac{-س}{٢}$ ⇐ س = -٤

م = م١ + م٢ ⇐ م = $\int_{-٤}^{٠} \left((س+٦) - \left(\frac{-س}{٢}\right)\right) دس + \int_{٠}^{٢} \left((س+٦) - س^٣\right) دس$

= $\int_{-٤}^{٠} \left(\frac{٣}{٢}س + ٦\right) دس + \int_{٠}^{٢} \left(س + ٦ - س^٣\right) دس = \frac{٣}{٢} \times \frac{س^٢}{٢} + ٦س \Big|_{-٤}^{٠} + \frac{س^٢}{٢} + ٦س - \frac{س^٤}{٤} \Big|_{٠}^{٢}$

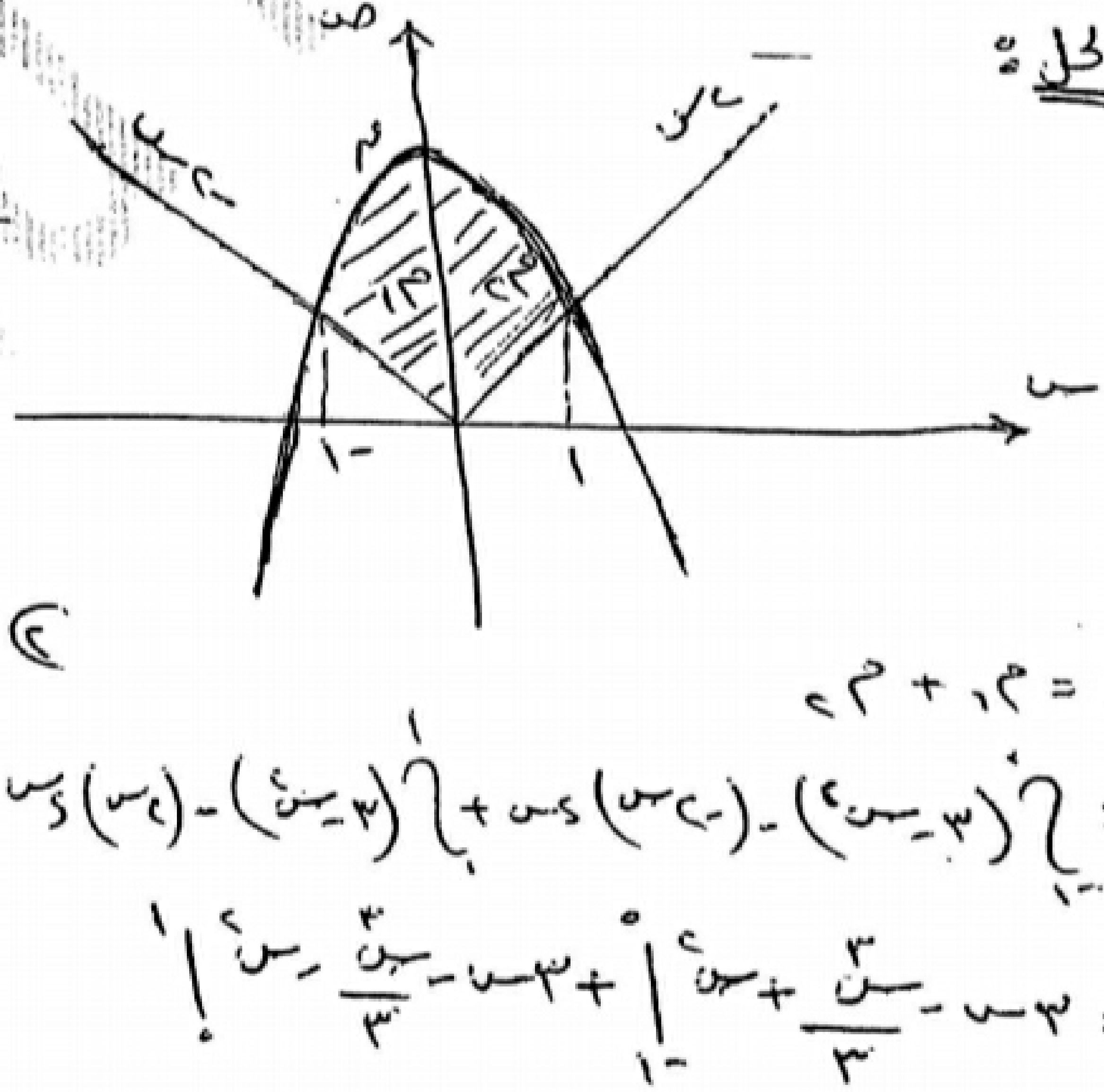
= (٠) - (١٢ - ٢٤) + (٢ + ١٢ - ٤) - (٠) = ٢٢

مثال: جد المساحة المحصورة بين ع(س) = ٣ - $س^٢$ ، هـ(س) = |٢س|

الحل:

تعريف |أ| ⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = ٠

-٢س ، ٢س



(١) س < ٠

٣ - $س^٢$ = -٢س

-$س^٢$ + ٢س + ٣ = ٠

⇐ $س^٢$ - ٢س - ٣ = ٠

⇐ (س - ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣ ، $\boxed{س = -١}$

(٢) س > ٠

٣ - $س^٢$ = ٢س

⇐ -$س^٢$ - ٢س + ٣ = ٠

⇐ $س^٢$ + ٢س - ٣ = ٠

⇐ (س + ٣)(س - ١) = ٠

⇐ س = -٣ ، $\boxed{س = ١}$

م = م١ + م٢

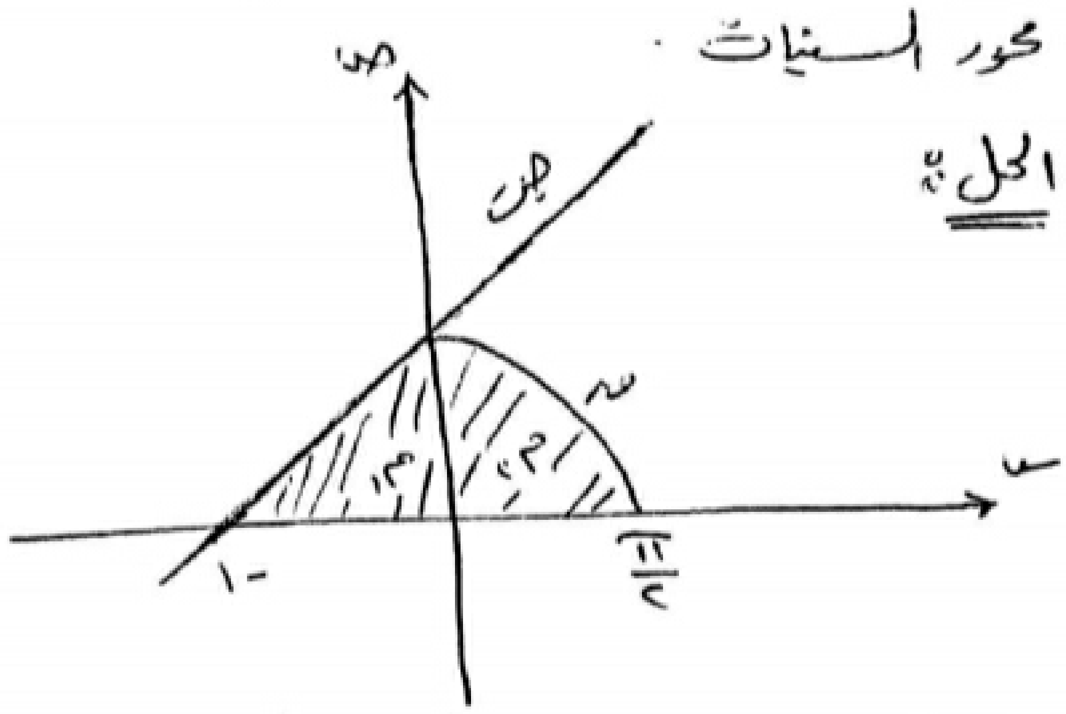
= $\int_{-١}^{٠} \left((٣ - س^٢) - (-٢س)\right) دس + \int_{٠}^{١} \left((٣ - س^٢) - (٢س)\right) دس$

= $٣س - \frac{س^٣}{٣} + س^٢ \Big|_{-١}^{٠} + ٣س - \frac{س^٣}{٣} - س^٢ \Big|_{٠}^{١}$

= (٠) - ($-٣ + \frac{١}{٣} + ١$) + ($٣ - \frac{١}{٣} - ١$) - (٠) = $\frac{١٠}{٣}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = جتاس ، ص = س + ١ والواقعة فوق محور السينات .

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ص

جتاس = س + ١

س = ٠

ص = ٠

⇐ س + ١ = ٠

⇐ س = -١

ق = ٠

جتاس = ٠

س = $\frac{\pi}{2}$

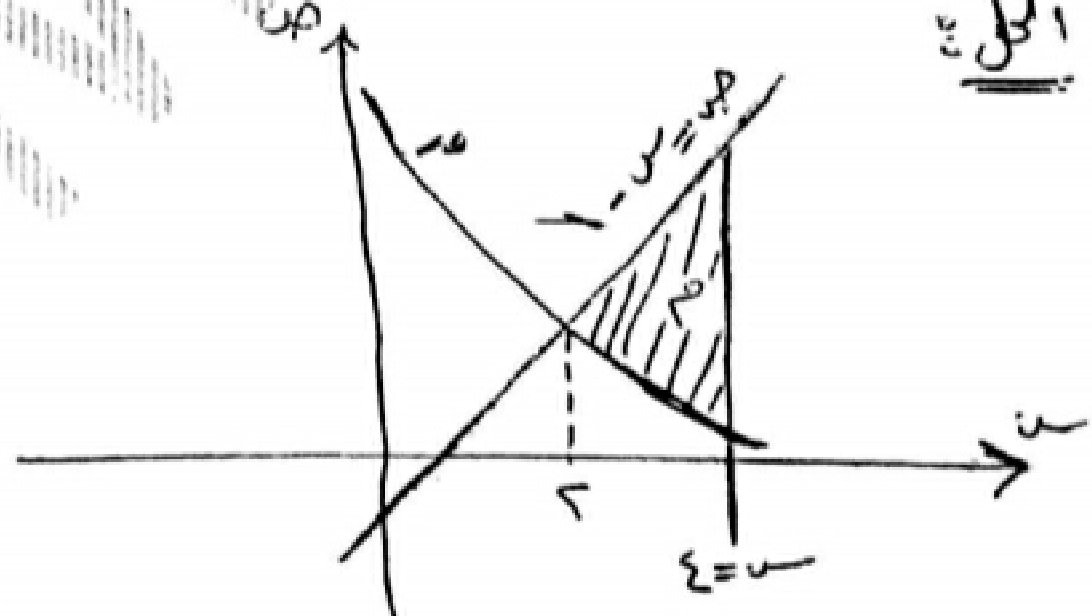
م = م١ + م٢

$⇐ م = \int_{-1}^{0} (س + 1)\, دس + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\, دس = \left(\frac{س^2}{2} + س\right)\Big|_{-1}^{0} + جاس\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (0) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + (1 - 0) = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $\frac{2}{س}$ ، ص = س - ١ والمستقيم س = ٤

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ص

$\frac{2}{س} = س - 1$

$س^2 - س = 2 ⇐ س^2 - س - 2 = 0$

$⇐ (س - 2)(س + 1) = 0$

⇐ س = ٢ ، س = -١

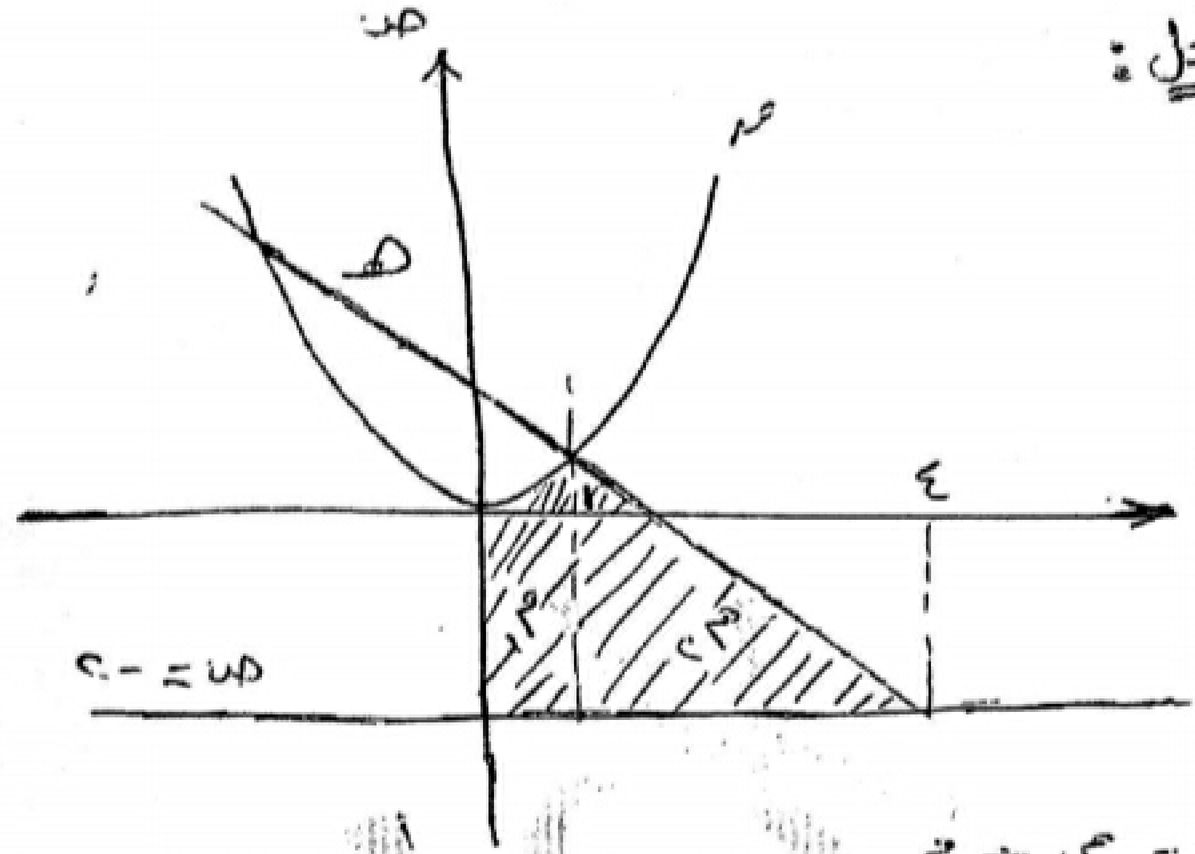
$م = \int_{2}^{4} (س - 1) - \left(\frac{2}{س}\right) دس = \frac{س^2}{2} - س - 2\,لو_{هـ}|س|\,\Big|_{2}^{4}$

$= (8 - 4 - 2\,لو_{هـ}4) - (2 - 2 - 2\,لو_{هـ}2) = 4 - 2\,لو_{هـ}2$

سؤال: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = $س^3$ والمستقيمات ص = ١ ، ص = ٨ ومحور الصادات

مثال: جد المساحة المحصورة بين م(س) = س² ، هـ(س) = ٢ - س والمحور الصادات والمستقيم ص = -٢

الحل:



نجد نقاط التقاطع

م = هـ

$\text{س}^2 = 2 - \text{س}$

$\Leftarrow \text{س}^2 + \text{س} - 2 = 0$

$\Leftarrow (\text{س} + 2)(\text{س} - 1) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = -2 \ ، \ \text{س} = 1$

هـ = ص

$2 - \text{س} = -2$

$\text{س} = 4$

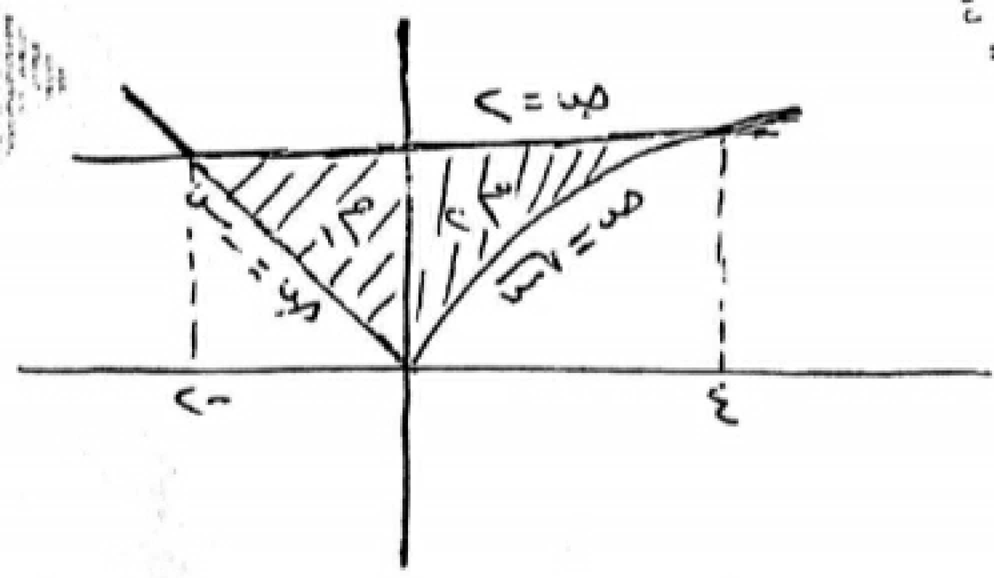
م = م١ + م٢ $\Leftarrow \text{م} = \int_0^1 \text{س}^2 - (-2)\, \text{دس} + \int_1^4 (2 - \text{س}) - (-2)\, \text{دس}$

$= \int_0^1 \text{س}^2 + 2\, \text{دس} + \int_1^4 4 - \text{س}\, \text{دس} = \frac{\text{س}^3}{3} + 2\text{س} \Big|_0^1 + 4\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2} \Big|_1^4$

$= \left(\frac{1}{3} + 2\right) - (0) + (16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 6\frac{5}{6}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص + س = ٠ ، ص - ٢ = ٠

الحل: نجد نقاط التقاطع.



ص١ = ص٢

$-\text{س} = 2 \Leftarrow \text{س} = -2$

ص١ = ص٣

$-\text{س} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{س} = 0$

ص٢ = ص٣

$2 = \sqrt{\text{س}}$

$\text{س} = 4$

م = م١ + م٢

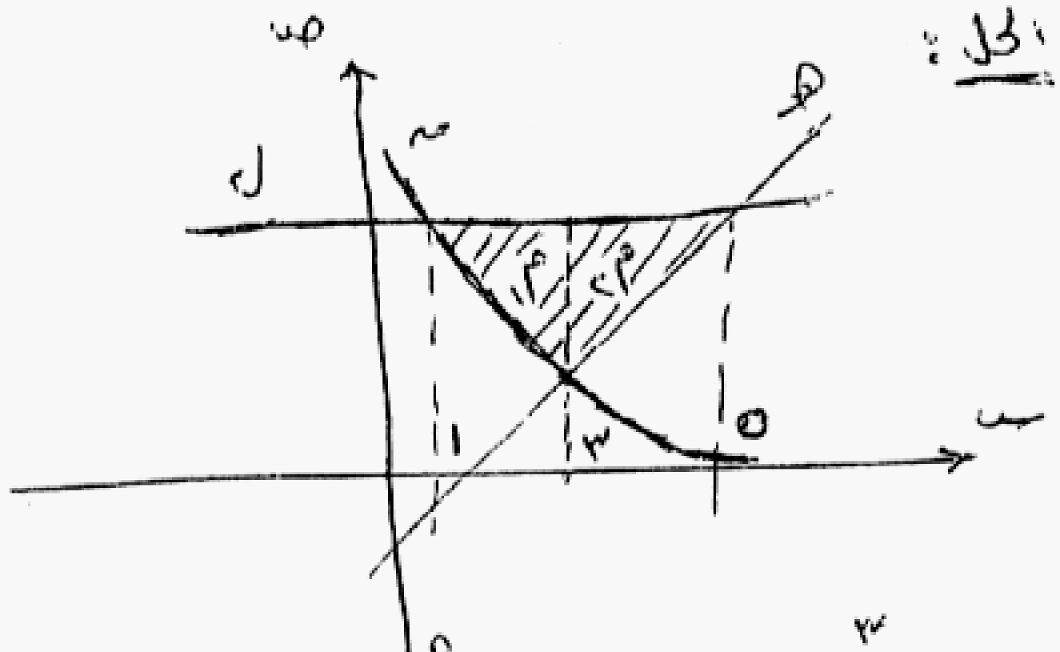
$\Leftarrow \text{م} = \int_{-2}^{0} 2 - (-\text{س})\, \text{دس} + \int_0^4 2 - \sqrt{\text{س}}\, \text{دس}$

$= 2\text{س} + \frac{\text{س}^2}{2} \Big|_{-2}^{0} + 2\text{س} - \frac{2\text{س}^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^4$

$= (0) - (-4 + 2) + \left(8 - \frac{16}{3}\right) - (0) = 4\frac{2}{3}$

مثال: جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $\frac{3}{س}$ ، هـ(س) = س − ٢ ، ل(س) = ٣

الحل:



نجد نقاط التقاطع

ق = ل

$\frac{3}{س} = 3 \Leftarrow 3 = 3س \Leftarrow س = 1$

هـ = ل

$س - 2 = 3 \Leftarrow س = 5$

ق = هـ

$\frac{3}{س} = س - 2 \Leftarrow س^2 - 2س = 3$

$\Leftarrow س^2 - 2س - 3 = 0$

$\Leftarrow (س - 3)(س + 1) = 0$

$\Leftarrow س = 3 \text{ ، } س = -1$

$$م = \int_1^3 (ل - ق)\, دس + \int_3^5 (ل - هـ)\, دس$$

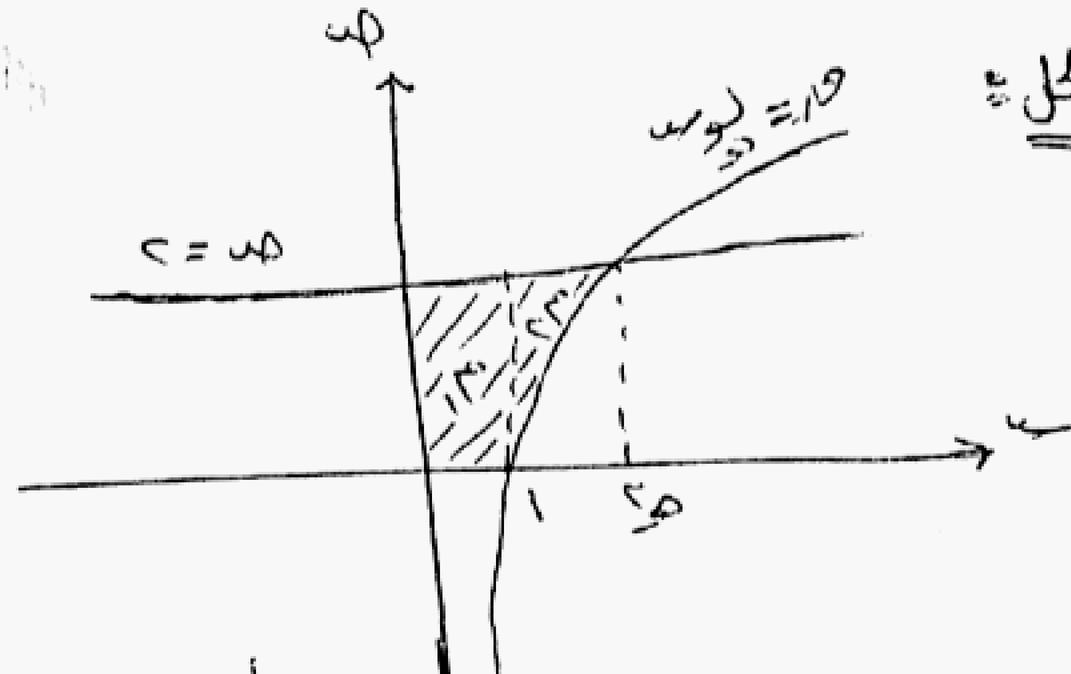
$$= \int_1^3 \left(3 - \frac{3}{س}\right) دس + \int_3^5 \left(3 - (س - 2)\right) دس$$

$$= 3س - 3\,لو_هـ|س| \Big|_1^3 + 5س - \frac{س^2}{2} \Big|_3^5$$

$$= (9 - 3\,لو_هـ 3) - (3 - 3\,لو_هـ 1) + \left(25 - \frac{25}{2}\right) - \left(15 - \frac{9}{2}\right) = 8 - 3\,لو_هـ 3$$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = لو$_هـ$ س ومحور الصادات ومحور السينات والمستقيم ص = ٢

الحل:



نجد نقاط التقاطع

لو$_هـ$ س = ٠

س = ١

لو$_هـ$ س = ٢

س = هـ^2

$$م = م_1 + م_2 \Leftarrow م = \int_0^1 2\, دس + \int_1^{هـ^2} (2 - لو_هـ س)\, دس$$

$$= 2س \Big|_0^1 + 2س \Big|_1^{هـ^2} - \left(لو_هـ س \times س - \int س \times \frac{1}{س}\, دس\right) \Big|_1^{هـ^2}$$

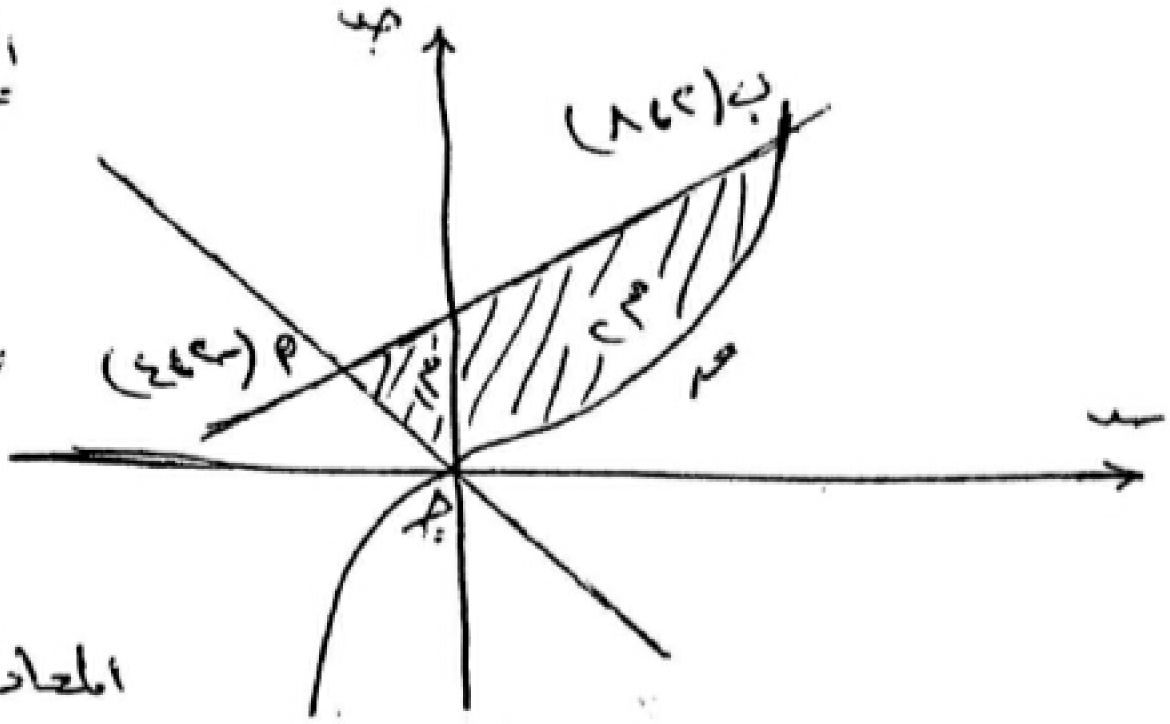
$$= (2 - 0) + (2هـ^2 - 2) - (س\,لو_هـ س - س) \Big|_1^{هـ^2}$$

$$= 2هـ^2 - \left((هـ^2\,لو_هـ هـ^2 - هـ^2) - (1\,لو_هـ 1 - 1)\right)$$

$$= 2هـ^2 - (2هـ^2 - هـ^2 - 0 + 1) = هـ^2 - 1$$

مثال: معتمداً على الرسم أوجد المساحة المظللة حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$

الحل: نجد معادلة $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{أب}}$



$$\text{ميل } \overline{\text{أجـ}} = \frac{٤ - ٠}{-٢ - ٠} = -٢$$

المعادلة: $\text{ص} - ٠ = -٢(\text{س} - ٠)$

$\text{ص} = -٢\text{س}$

$$\text{ميل } \overline{\text{أب}} = \frac{٨ - ٤}{٢ - (-٢)} = ١$$

المعادلة: $\text{ص} - ٨ = ١(\text{س} - ٢)$

$\Leftarrow \text{ص} = \text{س} + ٦$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-٢}^{٠} (\text{س} + ٦) - (-٢\text{س})\, d\text{س} + \int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٦ - \text{س}^{٣})\, d\text{س}$$

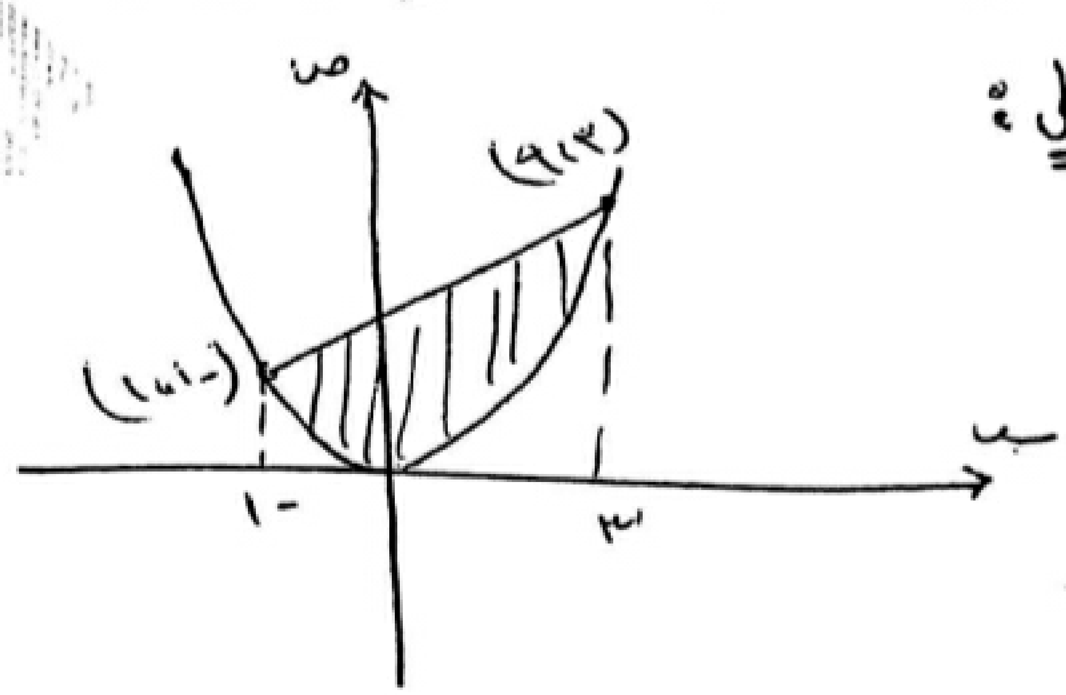
$$= \left[\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= (٠) - (٦ - ١٢) + (٢ + ١٢ - ٤) = ٦ + ١٠ = ١٦$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ والمستقيم الواصل بين النقطتين على منحنى $\text{ق}(\text{س})$ والتي احداثياتها السينية $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٣$

الحل:

النقاط هي $(-١،١)$ ، $(٣،٩)$



نجد معادلة المستقيم:

$$\text{الميل} = \frac{٩ - ١}{٣ - (-١)} = ٢$$

المعادلة: $\text{ص} - ١ = ٢(\text{س} + ١)$

$\Leftarrow \text{ص} = ٢\text{س} + ٣$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٣} (٢\text{س} + ٣) - (\text{س}^{٢})\, d\text{س} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big]_{-١}^{٣}$$

$$= (٩ + ٩ - ٩) - (١ - ٣ + \frac{١}{٣}) = ١٠\frac{٢}{٣}$$

* ملاحظة: اذا وجد مثل الحد ص^2 في المعادلات يكون التكامل بدلالة ص وذلك أسهل من التكامل بدلالة س

مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{ص}^2 = ٤\text{س}$ ، $\text{ص} = \text{س} - ٣$

الحل: $\text{ص}^2 = ٤\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص}^2}{٤}$ ، $\text{ص} = \text{س} - ٣ \Leftarrow \text{س} = \text{ص} + ٣$

نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow \frac{\text{ص}^2}{٤} = \text{ص} + ٣ \Leftarrow \text{ص}^2 = ٤\text{ص} + ١٢ \Leftarrow \text{ص}^2 - ٤\text{ص} - ١٢ = ٠$

$(\text{ص} - ٦)(\text{ص} + ٢) = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = ٦}$ ، $\boxed{\text{ص} = -٢}$

$$\therefore \text{م} = \int_{-٢}^{٦} (\text{ص} + ٣) - \left(\frac{\text{ص}^2}{٤}\right) د\text{ص} = \frac{\text{ص}^2}{٢} + ٣\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{١٢} \Big|_{-٢}^{٦}$$

$$= (١٨ + ١٨ - ١٨) - \left(٢ - ٦ + \frac{٨}{١٢}\right) = ٢١\frac{١}{٣}$$

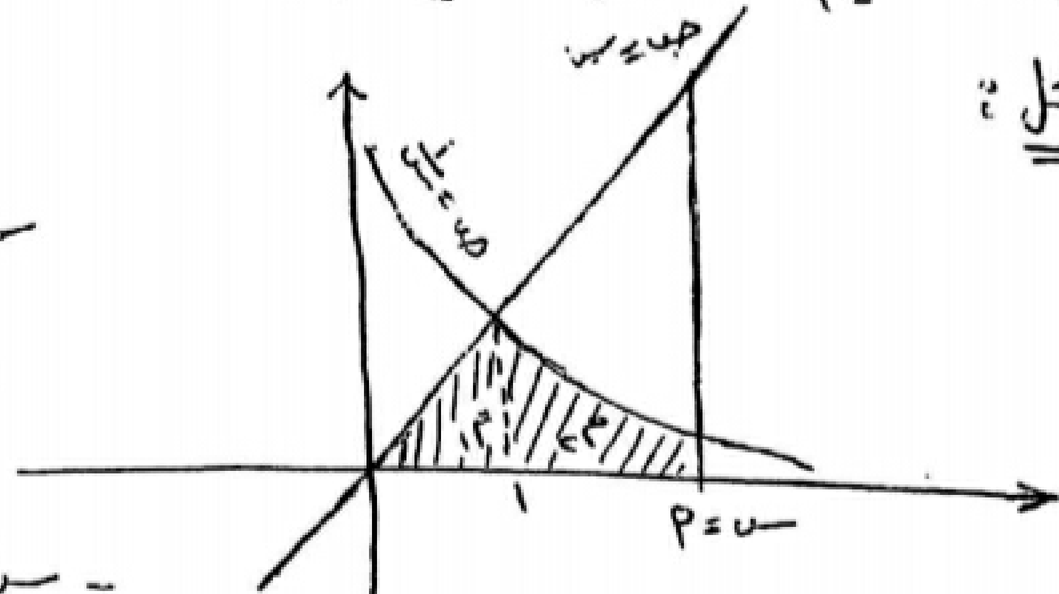
مثال: جد المساحة المحصورة بين $\text{س} = \text{ص}^2$ ، $\text{س} = ٤$

الحل: نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow \text{ص}^2 = ٤ \Leftarrow \text{ص} = \pm ٢$

$$\Leftarrow \text{م} = \int_{-٢}^{٢} ٤ - \text{ص}^2 \, د\text{ص} = ٤\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{٣} \Big|_{-٢}^{٢} = \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$

مثال: اذا كانت المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحنى $\text{ص} = \text{س}$، ومنحنى $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ والمستقيم $\text{س} = \text{م}$ حيث $\text{م} > ١$ تساوي ١,٥ جد م

الحل:



نجد نقاط التقاطع

$\text{س} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{س}^2 = ١ \Leftarrow \text{س} = \pm ١$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} \text{س} \, د\text{س} + \int_{١}^{\text{م}} \frac{١}{\text{س}} \, د\text{س}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{٢} \Big|_{٠}^{١} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \Big|_{١}^{\text{م}}$$

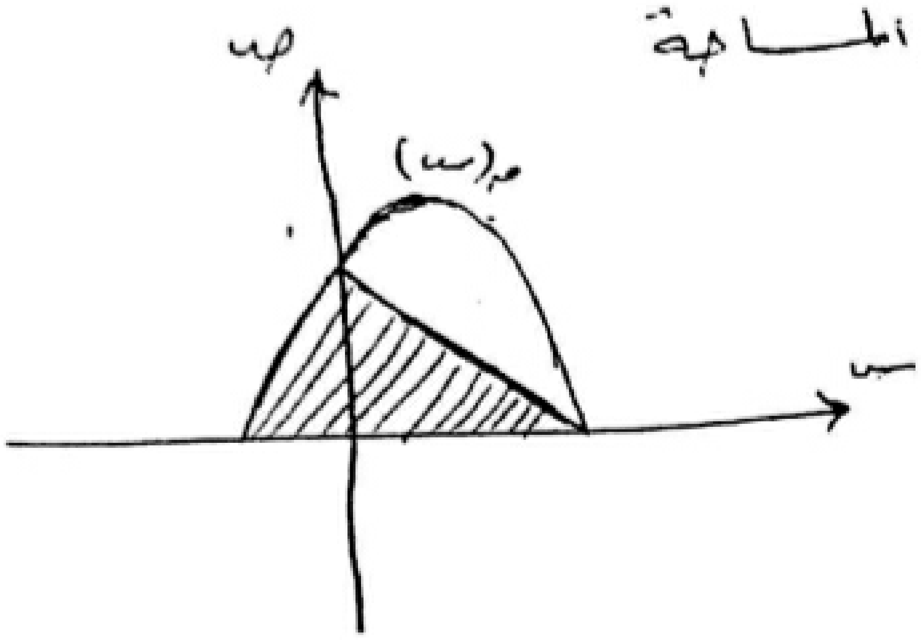
$$\Leftarrow \left(\frac{١}{٢} - ٠\right) + \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{م} - \text{لو}_{\text{هـ}} ١\right) = ١,٥$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{م} = ١,٥$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}} \text{م} = ١$$

$$\therefore \boxed{\text{م} = \text{هـ}}$$

مثال ٥ بالاعتماد على الرسم إذا كان ق(س) = (١+س) (جـ-س) وكانت مساحة المثلث تساوي (٨) وحدات، جد المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات .



الحل: يجب معرفة قيمة جـ : ليقطع محور السينات عندما $(١+س)(جـ-س) = ٠ \Leftarrow س = -١ ، جـ$

ويقطع محور الصادات عندما س = ٠

أي أن ق(٠) = (١+٠)(جـ-٠) = جـ

$\Leftarrow$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times جـ \times جـ = \frac{1}{2}جـ^{2} \Leftarrow \frac{1}{2}جـ^{2} = ٨ \Leftarrow جـ^{2} = ١٦ \Leftarrow جـ = ٤ ، -٤$

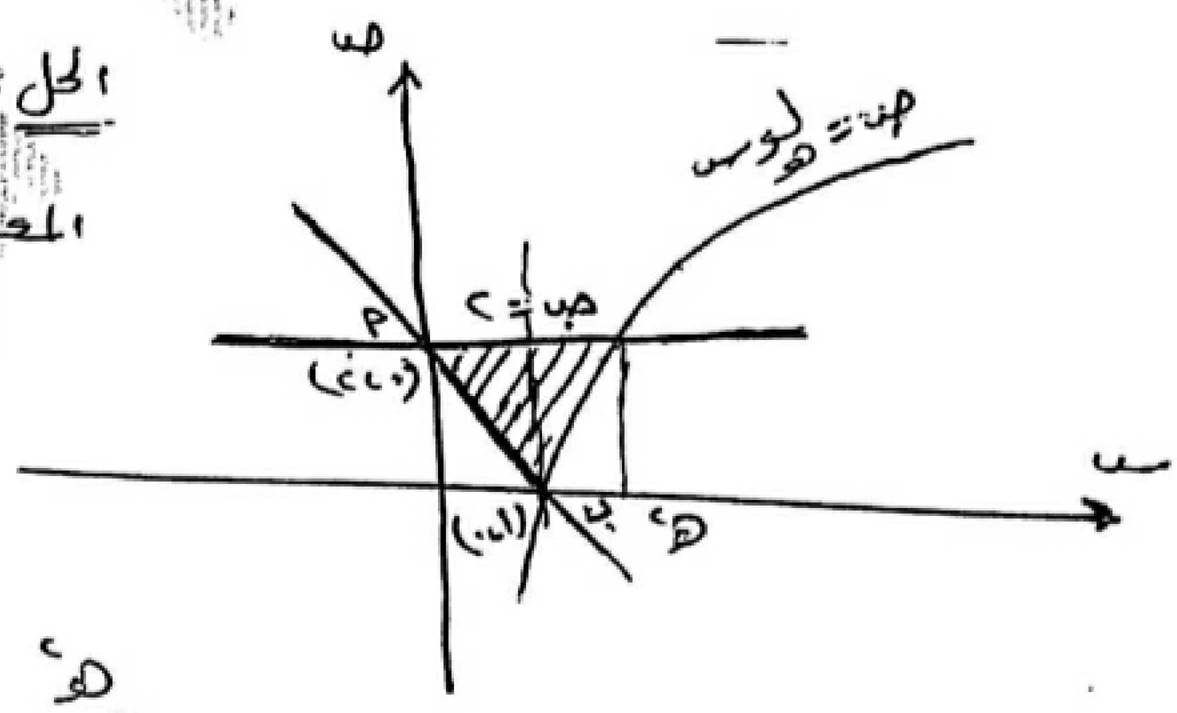
نأخذ $\boxed{جـ = ٤}$ $\Leftarrow$ ق(س) = (١+س)(٤-س) = ٤-س+٤س-س^{2}

$\therefore$ ق(س) = ٤+٣س-س^{2}

$\Leftarrow م = \int_{-١}^{٤} (٤+٣س-س^{2})\, ءس = ٤س + \frac{٣س^{2}}{٢} - \frac{س^{3}}{٣} \Big|_{-١}^{٤}$

$= \left(١٦ + ٢٤ - \frac{٦٤}{٣}\right) - \left(-٤ + \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٣}\right) = \frac{١٢٥}{٦}$

مثال ٦ معتمداً على الرسم المجاور جد مساحة المنطقة المظللة



الحل: نجد معادلة $\overline{أب}$ $\Leftarrow م = \frac{٢-٠}{٠-١} = -٢$

المعادلة: ص - ٠ = -٢(س-١) $\Leftarrow$ ص = -٢س+٢

نجد نقاط التقاطع:

$لو_{هـ}س = ٢ \Leftarrow س = هـ^{2}$

$\therefore م = \int_{٠}^{١} ٢ - (-٢س+٢)\, ءس + \int_{١}^{هـ^{2}} ٢ - لو_{هـ}س\, ءس$

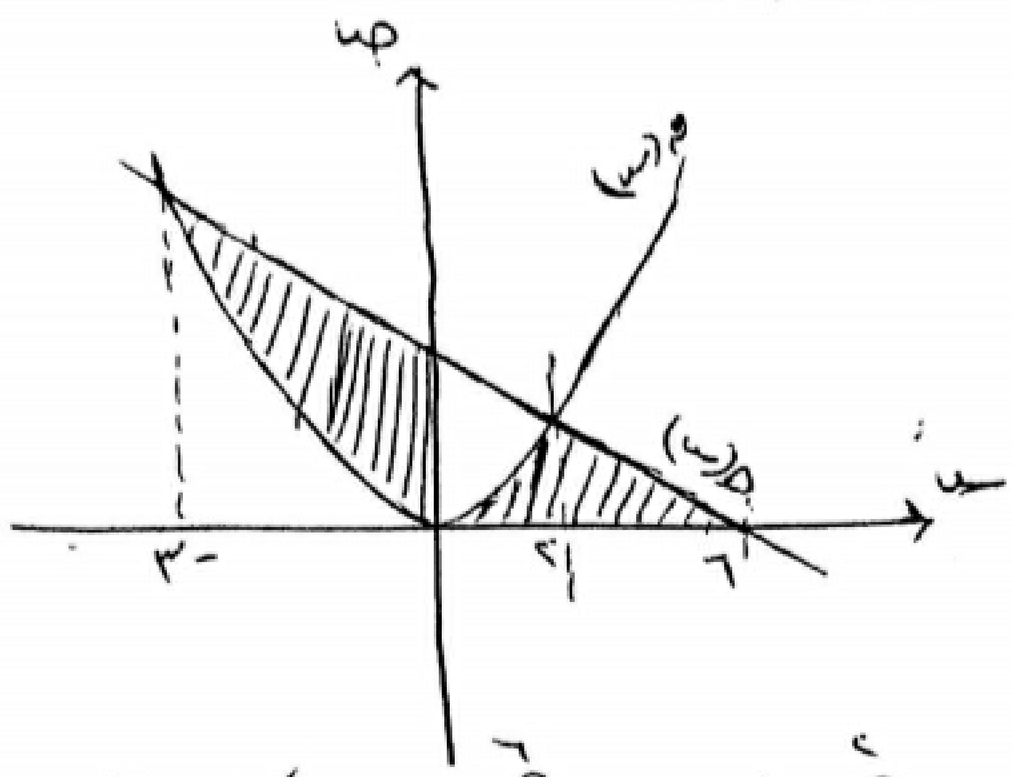
$= \int_{٠}^{١} ٢س\, ءس + ٢(هـ^{2}-١) - \left(لو_{هـ}س \times س - \int_{١}^{هـ^{2}} س \times \frac{١}{س}\, ءس\right)$

$= س^{2}\Big|_{٠}^{١} + ٢هـ^{2} - ٢ - \left(س\, لو_{هـ}س - س\right)\Big|_{١}^{هـ^{2}}$

$= ١ - ٠ + ٢هـ^{2} - ٢ - \left(\left(هـ^{2}لو_{هـ}هـ^{2} - هـ^{2}\right) - \left(١لو_{هـ}١ - ١\right)\right) = هـ^{2} - ٢$

مثال: معتمداً على الشكل المجاور جد المساحة المظللة

حيث $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = ٦ - س$



الحل: نجد نقاط التقاطع:

$ق = هـ$

$\Leftarrow س^2 = ٦ - س \Leftarrow س^2 + س - ٦ = ٠$

$\Leftarrow (س + ٣)(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = -٣ ، ٢$

$هـ = ٠$

$\Leftarrow ٦ - س = ٠ \Leftarrow س = ٦$

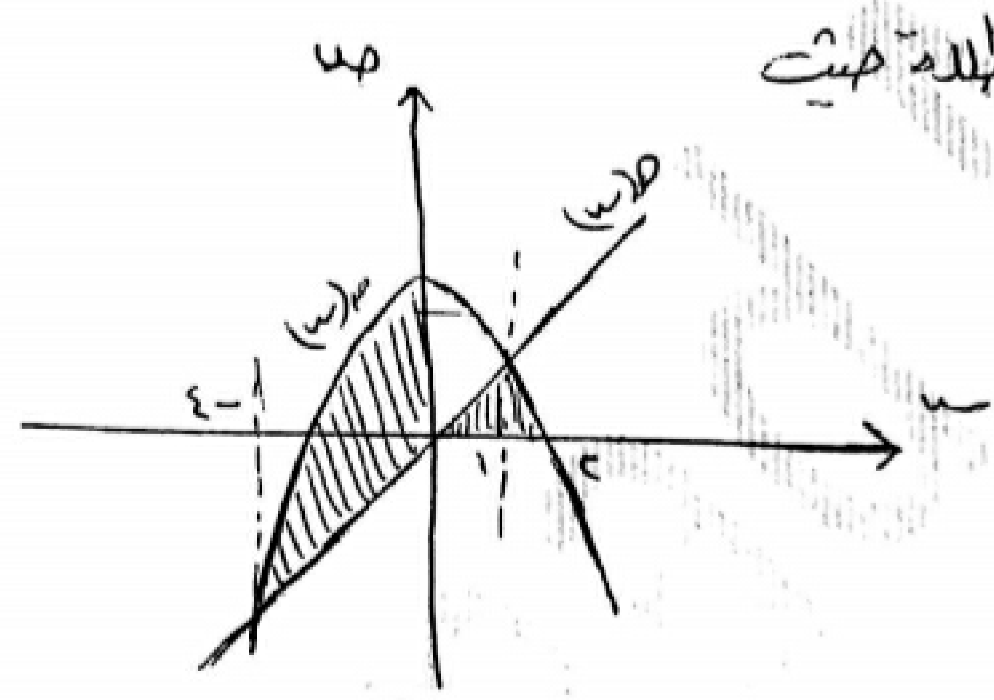
$$م = م_1 + م_2 + م_3 = \int_{-3}^{0} (٦ - س) - (س^2)\,دس + \int_{0}^{2} س^2\,دس + \int_{2}^{6} (٦ - س)\,دس$$

$$= ٦س - \frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{3} \Big|_{-3}^{0} + \frac{س^3}{3}\Big|_{0}^{2} + ٦س - \frac{س^2}{2}\Big|_{2}^{6}$$

$$= (٠) - (-١٨ - \frac{9}{2} + ٩) + (\frac{8}{3} - ٠) + (٣٦ - ١٨) - (١٢ - ٢) = \frac{145}{6}$$

مثال: معتمداً على الرسم جد المساحة المظللة حيث

$ق(س) = ٤ - س^2$ ، $هـ(س) = ٣س$



نجد نقاط التقاطع:

$هـ = ق \Leftarrow ٣س = ٤ - س^2$

$\Leftarrow س^2 + ٣س - ٤ = ٠ \Leftarrow (س + ٤)(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow س = -٤ ، ١$

$ق = ٠$ يقطع محور السينات

$٤ - س^2 = ٠ \Leftarrow س = ٢ ، -٢$

$$م = م_1 + م_2 + م_3 = \int_{-4}^{0} (٤ - س^2) - (٣س)\,دس + \int_{0}^{1} ٣س\,دس + \int_{1}^{2} ٤ - س^2\,دس$$

$$= ٤س - \frac{س^3}{3} - \frac{٣س^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + \frac{٣س^2}{2}\Big|_{0}^{1} + ٤س - \frac{س^3}{3}\Big|_{1}^{2}$$

$$= (٠) - (-١٦ + \frac{64}{3} - ٢٤) + (\frac{3}{2} - ٠) + (٨ - \frac{8}{3}) - (٤ - \frac{1}{3}) = \frac{131}{6}$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩