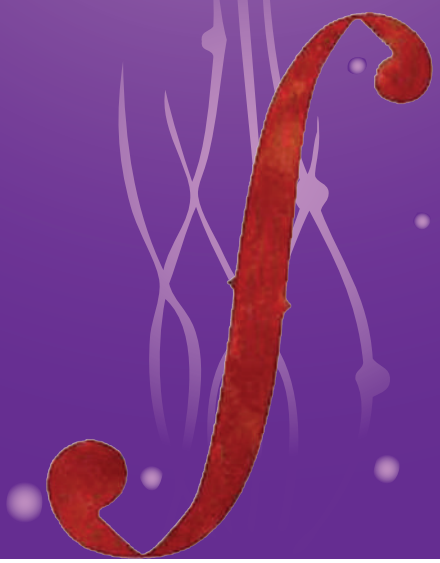
السليم

في الرياضيات

MATHS

التكامل وتطبيقات التكامل



إعداد الأستاذ :

سليم الخطيب

التكامل
وتطبيقات التكامل

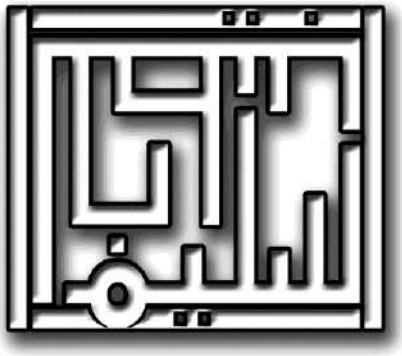
الرياضيات

المستوى الرابع

التخصص : العلمي

إعداد الاستاذ

سليم الخطيب



مركز زهرة النظم \ الوحدات \ 0787800852

مركز الهادفون العلمي \ ماركا \ 0795024143

أكاديمية وسام التمييز \ الاشرفية \ 0799988354

مركز الشورى الثقافي \ أم نوارة \ 0790681520

مركز بيت المقدس \القويسمة \ 0788109700

مركز المسار \ابو علندا \ 0798376776

/al2s6ora.saleem.al5a6eeb

078623040 7

الاقتران اللوغاريتمي والاسي الطبيعي :

تمهيد :

أ لو ب = جـ ⟺ أ^جـ = ب

حيث أن أ ، ب أعداد حقيقية حيث أ ≠ صفر

مثال : ٢ لو ١٦ = ٤ ⟺ ٢^٤ = ١٦

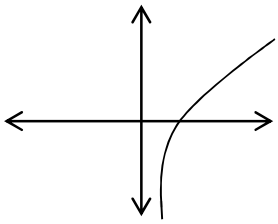
الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي :

ص = هـ لو (ق(س))

مجاله ق(س) > صفر ومداه الأعداد الحقيقية وأساسه العدد النيبيري (هـ ≈ ٢،٧)

مثال :

ق(س) = هـ لو س



خواص اللوغاريتمات :

١) هـ لو ١ = صفر

٢) هـ لو هـ = ١

٣) هـ لو س^ن = ن هـ لو س

٤) هـ لو س×ص = هـ لو س + هـ لو ص

٥) هـ لو (س/ص) = هـ لو س - هـ لو ص

٦) هـ لو هـ^ق(س) = ق(س)

مشتقة الإقتران اللوغارتمي :

ق(س) = هـ لو م(س) = هـ لو (ماداخل اللو)

قَ(س) = (م.ماداخل اللو / ما داخل اللو) = مَ(س) / م(س)

أسئلة :

جد قَ(س) في كل مما يلي :

١) ق(س) = هـ لو س

الحل : قَ(س) = ١/س

---

٢) ق(س) = هـ لو(س^٣ + ١)

الحل : قَ(س) = ٣س^٢ / (س^٣ + ١)

---

٣) ق(س) = هـ لو(س+١)^٢

الحل : ق(س) = ٢ هـ لو(س+١)

قَ(س) = ٢/(س+١)

---

٤) ق(س) = هـ لو(جا^٢ س)

الحل : ق(س) = ٢ هـ لو(جاس)

قَ(س) = ٢جتاس/جاس

---

٥) ق(س) = هـ لو هـ^جاس

الحل : ق(س) = جاس

قَ(س) = جتاس

---

٦) ق(س) = هـ لو(س جاس)

الحل : ق(س) = هـ لو س + هـ لو جاس

قَ(س) = ١/س + جتاس/جاس

---

٧) ق(س) = هـ لو((س^٢ + ١)/(٢س - ٧))

الحل: ق(س) = هـ لو(س^٢ + ١) - هـ لو(٢س - ٧)

قَ(س) = ٢س/(س^٢ + ١) + ٢/(٢س - ٧)

SALEM ALSATEB

٨) ق(س)= س^{٢} لوس$_{هـ}$

الحل : قَ(س)=س^{٢} × $\frac{١}{س}$ +لوس$_{هـ}$×٢س

---

٩) ق(س)=لو$_{هـ}$(لوس)

الحل: قَ(س)= $\frac{\frac{١}{س}}{لوس_{هـ}}$ = $\frac{١}{س لوس_{هـ}}$

---

١٠) ق(س)=(لوس$_{هـ}$)^{٣}

الحل : قَ(س) = ٣(لوس$_{هـ}$)^{٢} ($\frac{١}{س}$)

---

١١) ق(س)= $\sqrt[٢]{لوس_{هـ}}$

الحل: قَ(س)= $\frac{\frac{١}{س}}{\sqrt[٢]{لوس_{هـ}}}$ = $\frac{١}{٢س\sqrt[٢]{لوس_{هـ}}}$

---

١٢)ق(س)=لو$_{هـ}$ |س|

الحل : قَ(س)= $\frac{١}{س}$

---

١٣) ق(س)= لو$_{هـ}$ |جتاه٥س|

الحل :قَ(س)= $\frac{-جاه٥س×٥}{جتاه٥س}$ =-٥ظاه٥س

---

١٤) ق(س)=لو$_{هـ}$(س+ $\sqrt[٢]{س^{٢}+٧}$)

الحل : قَ(س)= $\frac{١+\frac{٢س}{٢\sqrt[٢]{س^{٢}+٧}}}{س+\sqrt[٢]{س^{٢}+٧}}$

---

١٥) ق(س) = لو$_{هـ}$ $\left(\frac{ظاس×قا^{٢}س}{س^{٣}+١}\right)^{٧}$

الحل:

ق(س) = ٧ (لو$_{هـ}$ ظاس+ لو$_{هـ}$ قا^{٢}س- لو$_{هـ}$ (س^{٣} +١))

= ٧ (لو$_{هـ}$ ظاس+ ٢لو$_{هـ}$ قاس- لو$_{هـ}$ (س^{٣} +١))

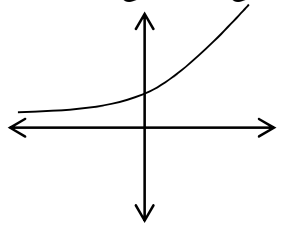
ق$'$(س)= ٧ ($\frac{قا^{٢}س}{ظاس}$ + $\frac{٢قاس ظاس}{قاس}$ - $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+١}$)

الاقتران الأسي الطبيعي:

ص=هـ$^{ق(س)}$ هو اقتران اساسة العدد النيبيري (هـ) ومجاله جميع الاعداد الحقيقية(ح) و مداه ح$^{+}$.

مثال :

ق(س)=هـ^{س}



قوانين الاسس :

١) هـ^{س}×هـ^{ص}=هـ$^{س+ص}$

٢) (هـ^{س})^{ص}=هـ$^{س×ص}$

٣) $\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}}$ = هـ$^{س-ص}$

٤) $\frac{١}{هـ^{س}}$ =هـ$^{-س}$

٥) $\sqrt[ص]{هـ^{س}}$ = $هـ^{\frac{س}{ص}}$

اشتقاق الاقتران الاسي :

ق(س)=هـ$^{م(س)}$

قَ(س)=هـ$^{م(س)}$×مَ(س)=نفسة ×م.الأس

أسئلة : جد قَ(س) في كل مما يلي :

١) ق(س)=هـ^{س}

الحل: قَ(س)=هـ^{س}×١

---

٢) ق(س)=هـ$^{س^{٢}}$

الحل: قَ(س) =هـ$^{س^{٢}}$×٢س

---

٣) ق(س)= هـ$^{٣س^{٢}+٤س}$

الحل : قَ(س)=هـ$^{٣س+٤س}$×^{٢}(٦س+٤)

---

٤) ق(س) = هـ $^{\sqrt[٢]{٢س+١}}$

الحل: قَ(س)= هـ $^{\sqrt[٢]{٢س+١}}$ $\frac{٢}{٢\sqrt[٢]{٢س+١}×}$

SALEEM ALSATEB

٥) ق(س)=هـ^جاس

الحل : قَ(س)=هـ^جاس×جتاس

---

٦)ق(س)= $\sqrt{هـ^{٢س}+١}$

االحل: قَ(س)= $\frac{٢\times هـ^{٢س}}{٢\sqrt{هـ^{٢س}+١}}$

---

٧)ق(س)= $\frac{هـ^{٢س}+١}{هـ^{٣س}}$

الحل:

قَ(س)= $\frac{(هـ^{٣س})(هـ^{٢س}\times٢)-(هـ^{٢س}+١)(هـ^{٣س}\times٣)}{(هـ^{٣س})^{٢}}$

العلاقة بين اللوغاريتمات والاقترانات الأسية :

*إذا كان الأساس ليس هـ فإننا ندخل اللوغاريتمات على طرفين المعادلة إذا طلب المشتقة .

قاعدة:

إذا كان ص=أ^ق(س) فإن :

$\frac{ء ص}{ء س}$=أ^ق(س)×قَ(س)×هـلوأ

البرهان :

هـلوص=هـلوأ^ق(س)=ق(س)هـلوأ

نشتق ضمنياً

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ = قَ(س)×لوأ

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص×قَ(س)×هـلوأ = أ^ق(س)×قَ(س)×هـلوأ

أسئلة : جد $\frac{ء ص}{ء س}$ في كل مما يلي :

١)ص=٣^س

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$=٣^س×١×هـلو٣

---

٢) ص=٥^حاس

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$= ٥^حاس×جتاس×هـلو٥

---

٣) ص= π^ظتاس

الحل: $\frac{ء ص}{ء س}$= π^ظتاس×-قتا^٢س× هـلو π

---

٤) ص=س^س

الحل : هـلوص=هـلوس^س=سهـلوس

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ =س× $\frac{١}{س}$ +هـلوس×١

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص(س× $\frac{١}{س}$ +هـلوس×١)

---

٥) ص=س^جاس

الحل:هـلوص=هـلوس^جاس=جاس×هـلوس

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ = (جاس)($\frac{١}{س}$)+(هـلوس)(جتاس)

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص((جاس)($\frac{١}{س}$)+(هـلوس)(جتاس))

---

٦)ص=(س^٢ +٣)^هـلوس

الحل : هـلوص = هـلو(س^٢ +٣)^هـلوس=هـلوس×هـلو(س^٢+٣)

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ =(هـلوس)($\frac{٢س}{س^{٢}+٣}$)+(هـلو(س^٢+٣))($\frac{١}{س}$)

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص((هـلوس)($\frac{٢س}{س^{٢}+٣}$)+(هـلو(س^٢+٣))($\frac{١}{س}$))

أسئلة عامة :

١) ص=هـ^٢س+لو(٢س)

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$= هـ^٢س+لو(٢س)(٢+ $\frac{٢}{٢س}$)

---

٢) ص= هـ^س^٢ ×هـلوس^٣

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$= هـ^س^٢ × $\frac{٣}{س}$ +هـلوس^٣ × هـ^س^٢ ×٢س

---

٣) لو ص^٢ =س^٣ جد $\frac{ء ص}{ء س}$ بدلالة س .

الحل : هـ^لوص^٢ = هـ^س^٣

ص^٢ = هـ^س^٣ ⇐ ص= هـ^$\frac{س^{٣}}{٢}$

$\frac{ء ص}{ء س}$= هـ^$\frac{س^{٣}}{٢}$ × $\frac{٣ س^{٢}}{٢}$

SALEM ALSATEB

٤) إذا كان هـ^{س}=هـ ، ص=س لـو س ، جد $\frac{ع ص}{ع س}$.

الحل : $\frac{ع ص}{ع س}$= س× $\frac{١}{س}$ +لـو س ×١

عندما هـ^{س} =هـ ⟸ س= ١

$\frac{ع ص}{ع س}$= ١ ×١ + لـو١×١=١+٠ = ١

---

٥) إذا كان ص^{٣}=٥س^{٢}+لـو ص +٧س-٧ ،جد $\frac{ع ص}{ع س}$.

الحل :

٣ص^{٢} $\frac{ع ص}{ع س}$=١٠س+ $\frac{\frac{ع ص}{ع س}}{ص}$ +٧

$\frac{ع ص}{ع س}$(٣ص^{٢}-$\frac{١}{ص}$) = ١٠س+٧

$\frac{ع ص}{ع س}$= $\frac{١٠س+٧}{٣ص^{٢}+\frac{١}{ص}}$

---

٦) لـو (س + ص) =هـ^{ص} جد $\frac{ع ص}{ع س}$.

الحل : $\frac{١+\frac{ع ص}{ع س}}{س+ص}$ = هـ^{ص} $\frac{ع ص}{ع س}$

١+$\frac{ع ص}{ع س}$ =(س+ص)هـ^{ص} $\frac{ع ص}{ع س}$

(س+ص)هـ^{ص} $\frac{ع ص}{ع س}$ – $\frac{ع ص}{ع س}$ = ١

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١}{(س+ص)هـ^{ص}-١}$

---

٧) ص=هـ^{٢س} ، أثبت أن صً +٢صَ – ٨ص = ٠

الحل :

صَ=هـ^{٢س}×٢

صً=هـ^{٢س}×٤

⟸صً +٢صَ – ٨ص=٤هـ^{٢س}+٢هـ^{٢س}×٢-٨هـ^{٢س} =٠.

---

٨) إذا كان ص^{ص} = هـ^{س} أثبت أن $\frac{ع ص}{ع س}$= $\frac{ص}{س+ص}$

الحل : لـو ص^{ص} =هـ لو هـ^{س}

ص لـو ص =س ⟸ ص×$\frac{\frac{ع ص}{ع س}}{ص}$ +لـو ص×$\frac{ع ص}{ع س}$=١

$\frac{ع ص}{ع س}$(١+لـو ص) = ١ ⟸ $\frac{ع ص}{ع س}$= $\frac{١}{١+لـو ص}$

---

٩) إذا كان هـ$^{س ص}$ = س + ص أثبت أن

$\frac{د ص}{د س}$ = - ($\frac{ص^{٢}+س ص-١}{س^{٢}+س ص - ١}$)

الحل : نشتق ضمنيا

هـ$^{س ص}$ (س $\frac{د ص}{د س}$ + ص) = ١ + $\frac{د ص}{د س}$

⟸هـ$^{س ص}$ س $\frac{د ص}{د س}$ + ص هـ$^{س ص}$ = ١ + $\frac{د ص}{د س}$

⟸س هـ$^{س ص}$ $\frac{د ص}{د س}$ - $\frac{د ص}{د س}$ = ١ –ص هـ$^{س ص}$

$\frac{د ص}{د س}$ (س هـ$^{س ص}$ – ١) = ١ –ص هـ$^{س ص}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١-ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص}-١}$

= $\frac{١-ص (س+ص)}{س (س+ص) – ١}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = - ($\frac{ص^{٢}+س ص-١}{س^{٢}+س ص – ١}$)

---

١٠) إذا كان ص = حا (لـو س^{٢}) أثبت أن

س^{٢} صً + س صَ + ٤ ص = ٠ .

الحل : صَ = جتا (لـو س^{٢}) ×$\frac{٢}{س}$

صً = جتا (لـو س^{٢}) ×$\frac{-٢}{س}$ + $\frac{٢}{س}$ × - جا (لـو س^{٢}) ×$\frac{٢}{س}$

صً = $\frac{-٢}{س^{٢}}$ جتا (لـو س^{٢}) - $\frac{٤}{س^{٢}}$ جتا (لـو س^{٢})

نعوض في المعادلة :

س^{٢}($\frac{-٢}{س^{٢}}$جتا (هـلو س^{٢}) - ٤ جا (هـلو س^{٢})) + س(جتا (هـلو س^{٢}) ×$\frac{٢}{س}$) + ٤ × جا (هـلو س^{٢})

= -٢ جتا (هـلو س^{٢}) – ٤ (هـلو س^{٢}) + ٢ جتا (هـلو س^{٢})+٤جا (هـلو س^{٢})

= صفر #

SALEEM ALSATEB

١١) إذا كان ص=هˢجاس فأثبت أن :

صً-٢صَ+٢ص=صفر

الحل:

صَ=هˢجتاس +جاس ×هˢ

صً=هˢجتاس -جاس ×هˢ+هˢجتاس +جاس ×هˢ

صً=٢هˢجتاس

نعوض بالمعادلة :

صً-٢صَ+٢ص

=٢هˢجتاس-٢(هˢجتاس +جاس ×هˢ)+٢هˢجاس

=٢هˢجتاس-٢هˢجتاس -٢جاس ×هˢ+٢هˢجاس=صفر#

---

١٢) إذا كان ص=هˣ جد قيمة (أ) بحيث أن :

صً -٤ص = صفر

الحل: صَ = أ هˣ

صً = أ² هˣ

نعوض في المعادلة :

أ² هˣ -٤ هˣ = صفر ⇐ هˣ (أ² -٤) = صفر

بما أن هˣ ≠ صفر ⇐ أ² -٤ = .

∴ أ = ± ٢

---

١٣) اذا كان ص = هˣ جد قيم أ التي تجعل

ص /// - ٧ ص / + ٦ ص = .

الحل:

ص = هˣ

ص / = هˣ × أ

ص // = أ² هˣ

ص /// = أ³ هˣ

ص /// - ٧ ص / + ٦ ص = .

أ³ هˣ - ٧ أ هˣ + ٦ هˣ = .

هˣ (أ³ – ٧أ +٦) = . ⇐ هˣ ≠ .

(أ³ – ٧أ +٦) = .

(أ-١)(أ² + أ -٦)=. ⇐ (أ-١) (أ +٣) (أ – ٢) =.

اما أ=١ او أ = -٣ او أ = ٢

---

١٤) ص = أهˢ² + جا (لـو س)
هـ

وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$ = هˢ + ١ جد قيمة الثابت(أ).

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ أ هˢ² + جتا (لـو س) × $\frac{١}{س}$
هـ

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$ = ٢ أ هˢ² + جتا (لـو ١) ×١
هـ

= ٢ أهˢ² + ١ = هˢ + ١ ⇐ أ= $\frac{هـ}{٢}$

---

١٥) ق(س) = $\frac{١}{هـ^{س}}$ + ألـو $\sqrt{س}$ وكان قَ (١) = هـ
هـ

جد قيمة الثابت "أ" .

الحل :

قَ (س) = $هـ^{\frac{١}{س}} \times \frac{-١}{س^{٢}} + \frac{أ}{٢س}$

قَ (١) = $هـ^{١}$ × -١ + $\frac{أ}{٢}$ = هـ ⇐ أ = ٤ هـ

---

١٦) ص = $هـ^{أ جتا س}$ + لـو حا س
هـ

وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}}$ = -٢ جد قيمة الثابت "أ"

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ $هـ^{أ جتا س}$ × -أ جا س + $\frac{جتا س}{حا س}$

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}}$ = $هـ^{٠}$ × -أ + ٠ = -٢ ⇐ أ = ٢

---

١٧) ص = $هـ^{طاس}$ + ألـو جتا س
هـ

وكان $\left|\frac{ء ص}{ء س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢ هـ + ١ جد قيمة (أ)

الحل : $\frac{د ص}{د س}$ = $هـ^{طاس}$ × قا²س + أ × $\frac{-حا س}{جتا س}$

$\left|\frac{ء ص}{ء س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = $هـ^{١}$ × ٢ + أ × -١ = ٢هـ + ١ ⇐ أ = - ١ #

SALEM ALSATEB

١٨) إذا كان ص^{٢} = لـو$_{هـ}$ س ص -هـ$^{س^{٢}}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

ص^{٢} = لـو$_{هـ}$ س+لـو$_{هـ}$ ص -هـ$^{س^{٢}}$

٢ص $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{س}$ + $\frac{\frac{د ص}{د س}}{ص}$ -٢س هـ$^{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ ٢ص $\frac{د ص}{د س}$ - $\frac{\frac{د ص}{د س}}{ص}$ = $\frac{١}{س}$ -٢س هـ$^{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س}$ (٢ص - $\frac{١}{ص}$) = $\frac{١}{س}$ -٢س هـ$^{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{\frac{١}{س} - ٢س هـ^{س^{٢}}}{٢ص - \frac{١}{ص}}$

معكوس المشتقة :

* يقال لـ م(س) أنه معكوس المشتقة لـ ق(س)

الشروط :- أ) ق(س) متصل على مجاله

ب) مَ(س) = ق(س)

أسئلة:- بين أن م (س) هو معكوس المشتقة لـ ق(س):-

١) م(س) = س^{٣} + ٢ و ق(س) = ٢س

الحل:- ق(س) متصل على مجاله

مَ(س)= ٢س = ق(س)

∴ م(س) يمثل معكوس المشتقة

---

٢) م(س)= س^{٢} + ٦س+٩ ، ق(س)= ٢س+٦

الحل:- (س) متصل على مجاله

مَ(س) = ٢س+٦ = ق(س)

∴ م(س) يمثل معكوس المشتقة

---

٣) جد معكوس المشتقة لـ ق(س) = جتا س

الحل:- ق(س) متصل على مجاله

نخمن الاقتران الذي مشتقته (جتاس)

نجد أن (جاس)$'$ =جتاس

∴ م(س) = جاس معكوس مشتقة لـ ق(س)

---

٤) جد معكوس المشتقة لـ ق(س) = ٣س^{٢} +قا^{٢} س

الحل:- ق(س) متصل على مجاله

تخمن الاقتران الذي مشتقته (٣س^{٢} +قا^{٢} س)

نجد أن (س^{٣} +طاس)$'$ = ٣س^{٢} +قا^{٢} س

∴ م(س) = س^{٣} +طاس معكوس مشتقة لـ ق(س)

---

*ملاحظة :الفرق بين أي معكوسا مشتقة هو عدد ثابت

أسئله:

١)إذا كان م(س) = س^{٣}-٥س+١ هو معكوسا مشتقة للإقتران ق(س) فجد ق(٢).

الحل :

مَ(س)= ق(س)=٣س^{٢}-٥

ق(٢) =١٢-٥=٧

SALEM ALSATEB

٢) كان م(س) هو معكوس مشتقة للاقتران
ق(س)= حاس +٣س – ٥ ،فجد مً(π).
الحل :
مَ(س)=ق(س)=حاس+٣س-٥
مً(س)=جتاس + ٣
مً(π) =جتا(π) + ٣ = ٢

---

٣) إذا كان م(س) معكوس مشتقة لـ ق(س) حيث
م(س) =س^{٣} +أس^{٢}+٧ وكان ق(١)=١٣ فجد قيمة الثابت أ.
الحل :
مَ(س)=ق(س)=٣س^{٢}+٢أس
ق(١)=٣ +٢أ=١٣ ⟸ أ=٥

---

٤)إذا كان م(س) ،ل(س) هما معكوسا مشتقة للاقتران ق(س) ، وكان ل(س) = س^{٢} -٣س+٧، م(٥)=١٦ ،فجد م(س)
الحل:
الفرق بين م(س) و ل(س) هو الثابت
م(س) = س^{٢} -٣س+ جـ ⟸م(٥) = ٢٥-١٥+جـ = ١٦
⟸ جـ = ٦⟸ م(س) = س^{٢} -٣س+ ٦

---

٥) إذا كان ق(س)=أس+ب وكان م(س) معكوس مشتقة للإقتران ق(س) حيث مَ(١)=٤،مً(١)=٥ ، فجد قيمة { أ،ب }
الحل: من شروط معكوس المشتقة .
م$^{/}$(س) = ق(س)
م$^{/}$(١) = ق(١) = أ + ب = ٤ ------ (١)
م$^{//}$(س) = ق$^{/}$(س)
م$^{//}$(١) = ق$^{/}$(١) = أ = ٥
بتعويض قيمة أ في المعادلة ١ ⟸ ٥ + ب = ٤ ⟸ ب = -١
القاعدة : ق(س) = ٥س – ١

تعريف :

إذا كان م معكوس مشتقة للاقتران ق على [أ ، ب] فإن الصورة العامة لقاعدة معكوس المشتقة للإقتران ق هي:
م(س) + جـ حيث جـ ثابت وذلك لأن
$\frac{د}{دس}$(م(س)+جـ) =مَ(س)=ق(س)
ويسمى معكوس المشتقة بالتكامل غير المحدود
ل ق(س) بالنسبة إلى س ويرمز له على النحو التالي :
∫ ق(س).د س = م (س) + جـ

التكامل : هي العملية العكسية للمشتقة
هنالك أسئلة يصعب تخمين معكوس المشتقة وكان الحل هو إيجاد قواعد سمية بقواعد التكامل
برمز للتكامل بالرمز (∫ ق(الحرف). ﻫ الحرف)
ﻫ الحرف تعني المتغير الذي نكامل له هو (الحرف)

نشتق ←
م(س) ↔ ق(س)↔ قَ(س) ↔قًَ(س)
→ نكامل

SALEM ALSATEB

قـــــــواعد التكامـــــــــل

١) $\int أ \, .دس = أ س + جـ$

٢) $\int س^{ن} .دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$

٣) $\int (أس + ب)^{ن} .د س = \frac{(أس+ب)^{ن+١}}{(ن+١) \times أ} + جـ$

٤) $\int هـ^{أس+ب} .دس = \frac{هـ^{أس+ب}}{أ} + جـ$

٥) $\int \frac{١}{أس+ب} .دس = \frac{١}{أ} لـو_{هـ} |أس+ب| + جـ$

تكامل المثلثيات :

١) $\int جا(أس+ ب) .د س = \frac{-جتا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٢) $\int جتا(أس + ب) .د س = \frac{جا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٣) $\int قا^{٢} (أس + ب) .دس = \frac{ظا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٤) $\int قتا^{٢}(أس + ب) .د س = \frac{-ظتا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٥) $\int قا(أس + ب)طا(أس + ب) .د س = \frac{قا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٦) $\int قتا(أس + ب)ظتا(أس + ب) .ى س = \frac{-قتا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

قاعدة :-

١) $\int و أ \, (س) .ى س = و \int أ(س) .ى س$

٢) $\int و (س) \pm هـ(س) .ى س = \int و (س) \int \pm هـ(س) .ى س$

*يوزع التكامل على (+ ، -) ولا يوزع على (× ، ÷)

محرمات

سؤال سريع :- جد قيمة التكاملات التالية :-

١) $\int ٦ .ى س = ٦س + جـ$

٢) $\int \frac{ى س}{٣} = \frac{١ س}{٣} + جـ$

٣) $\int -٢ .أى = -٢ أ + جـ$

٤) $\int س^{٢} .ى س = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

٥) $\int س^{\frac{١}{٢}} .ى س = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٦) $\int س^{-٣} .ى س = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$

٧) $\int (٢س+ ١)^{٤} .ى س = \frac{(٢س+١)^{٥}}{٢ \times ٥} + جـ$

٨) $\int (١ - ٣س)^{٣} .ى س = \frac{(١-٣س)^{٤}}{-٣ \times ٤} + جـ$

٩) $\int (٣س-٤)^{\frac{١}{٢}} .ى س = \frac{(٣س-٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times \frac{٣}{٢}} + جـ$

١٠) $\int هـ .ى س = هـ س + جـ$

١١) $\int هـ^{س} .ى س = هـ^{س} + جـ$

١٢) $\int هـ^{٢س} .ى س = \frac{هـ^{٢س}}{٢} + جـ$

١٣) $\int هـ^{٧-٥س} .ى س = \frac{- هـ^{٧-٥س}}{٥} + جـ$

١٤) $\int \frac{١}{س} .ى س = لـو_{هـ} |س| + جـ$

١٥) $\int \frac{١}{٢س+٧} .ى س = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} |٢س+٧| + جـ$

١٦) $\int \frac{١}{٦-٥س} .ى س = \frac{-١}{٥} لـو_{هـ} |٦-٥س| + جـ$

١٧) $\int حاس .ى س = - جتاس + جـ$

SALEM ALSATEB

١٨) ∫جتا(٢س – ١) .ء س= جا(٢س – ١)/٢ +جـ

١٩) ∫قا٢ (٣س+ ٢) .ء س= ظا(٣س+٢)/٣ + جـ

٢٠) ∫قتا٢(٤س – ٥).ء س= - ظتا(٤س – ٥)/٤ +جـ

٢١) ∫قا(٤- ٢س)طا(٤ – ٢س).ء س= قا(٤-٢س)/-٢ + جـ

٢٢)∫قتا (٤-٢س)ظتا(٤-٢س) .ءس = قتا(٤-٢س)/٢ +جـ

٢٣) ∫٣س٢ – ٢س+٤ .ءس = س٣ –س٢ +٤س+جـ

٢٤) ∫٢س – حا(٣س)+(٢س -١)٤ .ءس

= س٢ + حتا(٣س)/٣ +(٢س -١)٥/٢×٥ +جـ

٢٥) ∫٢(١-٤س)٢ – قتا٢ (١+٢س).ءس

= ٢(١-٤س)٣/٣× - ٤ + طتا(١+ ٢س)/٢ + جـ

٢٦) ∫ ٧هـ٢س +٧/س–طا٥س قا٥س .ءس

=٧/٢ هـ٢س +٧لو|س|- ١/٥ قا٥س +جـ

٢٧) ∫ قا٢(٣س) + ١/س+هـ - هـ٣س+١ .ءس

= ظا٣س/٣ + لـو|س+ هـ|- ١/٣ هـ٣س+١ + جـ

ملاحظة :-

إذا كان الشكل المعطى في السؤال لا نعرفه فإننا نحتاج الى ترتيب ما داخل التكامل.

قواعد الترتيب :-

١) كل جذر يحول الى قوة كسرية

٢) التخلص من الاقواس

٣) التخلص من المقام عن طريق رفعها بالقوة السالبة مع مراعات :-

أ) أن لا تكون القوة (-١)

ب) ترفع المثلثيات بقيمها وليس بقواها السالبة

٤) إذا كان البسط يحتوي على جمع وطرح فإننا نوزع البسط على المقام.

- تذكر أن إذا تساوت الاساسات فإن الاسس تجمع في حالة الضرب ⟸ س^{م}×س^{ن} = س$^{م+ن}$
- الزوايا يجب أن تكون وحده "نفسها"
- لاننسى استخدام المتطابقات.

قوانين توحيد الزوايا :-

١) حاس ×حاص = ١/٢ (جتا (س-ص) – جتا(س+ص)).

٢) جتاس×جتاص= ١/٢(جتا(س-ص)+جتا(س+ص))

٣) جاس×جتاص = ١/٢(حا(س-ص)+ حا(س+ص))

٤) جا(أ+ب)= جاأ جتاب + جتاأ جاب

٥) جا(أ-ب)= جاأ جتاب - جتاأ جاب

٦) جتا(أ+ب)= جتاأ جتاب - جاأ جاب

٧) جتا(أ-ب)= جتاأ جتاب + جاأ جاب

المتطابقات المثلثية :-

١) جا٢ س +جتا٢ س =١ ..... المتطابقة الأم

٢) طا٢ س = قا٢ س – ١

٣) طتا٢ س = قتا٢ س – ١

٤) جا ٢س = ٢ حاس جتاس

٥) جتا ٢س = جتا٢ س – جا٢ س

٦) جتا ٢س = ٢جتا٢ س – ١

٧) جتا ٢س = ١ – ٢ جا٢ س

٨) حا٢ = ١/٢(١ – جتا ٢س)

٩) جتا٢ س = ١/٢(١ + جتا ٢س)

SALEM ALSATEB

ملاحظات على المثلثيات :-

١) إذا وجدنا (١- جتا^{٢} س) ، (١- جا^{٢} س)
فإننا نرجع الى المتطابقة الأم.

٢) إذا وجد لدينا (جا^{٢} س) ، (جتا^{٢} س)
أو مضاعفاتها من القوى الزوجية (لوحدها) نستخدم متطابقة رقم (٨) ، (٩)

٣) إذا وجد لدينا (طا^{٢} س) ، (طتا^{٢} س)
لوحدها فإننا نستخدم المتطابقة (٢)،(٣)

٤) إذا كان لدينا (١ ± جتا س) ، (١ ± حاس) في المقام فإننا نضرب بالمرافق.

تذكر أن :-

١) طاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}}$ ٣) قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$

٢) طتاس= $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ٤) قتاس= $\frac{١}{\text{حاس}}$

** لا ننسى التشبيه على المتطابقات

أسئلة :- جد كل من التكاملات التالية :

١) $\int \sqrt{س} - \sqrt[٣]{٢س+١}\ .د س$

$= \int س^{\frac{١}{٢}} - (٢س+١)^{\frac{١}{٣}}\ .د س$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٣(٢س+١)^{\frac{٤}{٣}}}{٨} + جـ$

---

٢) $\int \sqrt{٧س}\left(\sqrt{٧س} - \frac{٧}{\sqrt{س}}\right)\ .د س$

$= \int س - ٧\ .د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - ٧س + جـ$

---

٣) $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{٧س}}\ .د س$

$= \int س^{\frac{-١}{٣}}(س-١)\ .د س$

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{-١}{٣}}\ .د س$

$= \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

---

٤) $\int \frac{٢س^{٢} - ٣س}{\sqrt{٧س}}\ .د س$

$= \int س^{\frac{-١}{٢}}(٢س^{٢} - ٣س)\ .د س$

$= \int ٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}}\ .د س$

$= \frac{٤}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - ٢س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

---

٥) $\int س(س^{٢} - ١)^{٢}\ .د س$

$= \int س(س^{٤} - ٢س^{٢} + ١)\ .د س$

$= \int س^{٥} - ٢س^{٣} + س\ .د س$

$= \frac{س^{٦}}{٦} - \frac{س^{٤}}{٢} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

٦) $\int \frac{س^{٢} - ٤س - ١٢}{س - ٦}\ .د س = \int \frac{(س-٦)(س+٢)}{س-٦}\ .د س$

$= \int س + ٢\ .د س = \frac{س^{٢}}{٢} + ٢س + جـ$

---

٧) $\int (س^{٢} - ٦س + ٩)^{٥}\ .د س$

$= \int ((س-٣)^{٢})^{٥}\ .د س = \int (س-٣)^{١٠}\ .د س$

$= \frac{(س-٣)^{١١}}{١١} + جـ$

---

٨) $\int \frac{\sqrt[٣]{س^{٤} - ٢س^{٣}}}{س}\ .د س$

$= \int \frac{س\sqrt[٣]{س - ٢}}{س}\ .د س$

$= \int (س-٢)^{\frac{١}{٣}}\ .د س$

$= \frac{٣(س-٢)^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + جـ$

---

٩) $\int \sqrt[٣]{هـ^{٢س}}\ .د س$

$= هـ^{\frac{٢}{٣}س} \int .د س = \frac{٣هـ^{\frac{٢}{٣}س}}{٢} + جـ$

---

١٠) $\int هـ^{٢س}(هـ^{٥س} + هـ^{٨س})\ .د س$

SALEM ALSATEB

= ∫(هˢ^٧+هˢ^١٠) .ﻫس

= هˢ^٧/٧ + هˢ^١٠/١٠ +جـ

---

١١) ∫ (هˢ^٢+١ + ٧)/هˢ^٥ .ﻫس

= ∫هˢ^-٥(هˢ^٢+١ +٧) .ﻫس

= ∫(هˢ^-٣+٧هˢ^-٥) .ﻫس

= هˢ^-٣+١/-٣ + ٧هˢ^-٥/-٥ + جـ

---

١٢) ∫ ٢/√(هˢ^١٠+١٥)^٥ .ﻫس

= ∫ ٢/هˢ^٢+٣ .ﻫس = ∫ ٢هˢ^-٢-٣ .ﻫس = - هˢ^-٢-٣ + جـ

---

١٣) ∫ س هˢ لو(٥س^٣+٢) .ﻫس

= ∫س(٥س^٣ + ٢) .ﻫس = ∫(٥س^٤ + ٢س) .ﻫس

= س^٥ + س^٢ + جـ

---

١٤) ∫ هˢ^٢+لو(٣س^٢+١) .ﻫس

= ∫ هˢ^٢ × هˢ لو(٣س^٢+١) .ﻫس = ∫ هˢ^٢ ×(٣س^٢+١) .ﻫس

= هˢ^٢ ×(س^٣ + س) + جـ

---

١٥) ∫ جاˢ^٢س +جتاˢ^٢ س .ﻫس

= ∫ ١ .ﻫس = س + جـ

---

١٦) ∫جاس ظتاس.ﻫس

= ∫جاس × جتاس/جاس .ﻫس = ∫ جتاس .ﻫس = جاس + جـ

---

١٧) ∫جتاس طاس.ﻫس

= ∫جتاس × جاس/جتاس .ﻫس = ∫ جاس .ﻫس = -جتاس +جـ

---

١٨) ∫ ٥/قتاس .دس

= ∫ ٥جاس.دس = -٥جتاس + جـ

---

١٩) ∫ ٣/جتاˢ^٢س .دس

= ∫ ٣قاˢ^٢س.دس = ٣ظاس +جـ

---

٢٠) ∫ ١/جاˢ^٢٥س .دس

= ∫قتاˢ^٢ ٥س .دس = -١/٥ ظتا٥س +جـ

---

٢١) ∫ جاس/جتاˢ^٢س .دس

= ∫ظاس قاس .دس = قاس + جـ

---

٢٢) ∫ جتاس/جاˢ^٢س .دس

= ∫ظتاس قتاس .دس = -قتاس + جـ

---

٢٣) ∫ ٢/جتا٥س ظتا٥س .دس

= ∫٢قا٥س ظا٥س .دس

= ٢/٥ قا٥س + جـ

---

٢٤) ∫قاس(قاس+ظاس).دس

= ∫قاˢ^٢س + ظاس قاس.دس = ظاس +قاس +جـ

---

٢٥) ∫جاس جتاس .دس

= ∫ ١/٢ جا٢س.دس = -١/٤ جتا٢س +جـ

---

٢٦) ∫ (جاس + جتاس)ˢ^٢ .دس

= ∫جاˢ^٢س +٢جاس جتاس +جتاˢ^٢س.دس = ∫١+جا٢س .دس

= س - ١/٢ جتا٢س +جـ

---

٢٧) ∫ ظاˢ^٢س .دس

= ∫قاˢ^٢س -١ .دس = ظاس – س +جـ

---

٢٨) ∫(قتاس +ظتاس)ˢ^٢ .دس

= ∫ قتاˢ^٢س + ٢ظتاس قتاس +ظتاˢ^٢س.دس

= ∫ قتاˢ^٢س + ٢ظتاس قتاس +قتاˢ^٢س – ١ .دس

= -٢ ظتاس –٢قتاس – س + جـ

---

٢٩) ∫ جاˢ^٢س .دس

= ∫ ١/٢ (١-جتا٢س) .دس = ١/٢(س - ١/٢ جا٢س) + جـ

SALEM ALSATEB

٣٠) $\int$ جتا^{٢}س.دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (١+جتا٢س) .دس $= \frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$جاس) + جـ

---

٣١) $\int$ جا^{٤}س.دس

$= \int (\frac{١}{٢}$ (١- جتا٢س))^{٢}.دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١- ٢جتا٢س+جتا^{٢} ٢س) .دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١- ٢جتا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (١+جتا٤س)) .دس

$= \frac{١}{٤}$ (س - جا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (س+$\frac{١}{٤}$جا٤س)) + جـ

---

٣٢) $\int$ جتا^{٤}س.دس

$= \int (\frac{١}{٢}$ (١+جتا٢س))^{٢}.دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١+٢جتا٢س+جتا^{٢} ٢س) .دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١+٢جتا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (١+جتا٤س)) .دس

$= \frac{١}{٤}$ (س + جا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (س+$\frac{١}{٤}$جا٤س)) + جـ

---

٣٣) $\int$ جتا ٣س جتا٨س .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(٣س- ٨س) +جتا(٣س+٨س)).دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(-٥س) +جتا(١١س)).دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{-١}{٥}$ جا(-٥س) + $\frac{١}{١١}$ جا(١١س)) +جـ

---

٣٤) $\int$ جا ٣س جا٨س .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(٣س- ٨س) - جتا(٣س+٨س)).دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(-٥س) - جتا(١١س)).دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{-١}{٥}$ جا(-٥س) - $\frac{١}{١١}$ جا(١١س)) +جـ

---

٣٥) $\int$ جا ٣س جتا٨س .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جا(٣س- ٨س) +جا(٣س+٨س)).دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جا(-٥س) +جا(١١س)).دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{-١}{٥}$ جتا(-٥س) + $\frac{-١}{١١}$ جتا(١١س)) +جـ

---

٣٦) $\int \frac{١}{١+جا\ س}$. دس

$= \int \frac{١}{١+جا\ س} \times \frac{١-جا\ س}{١-جا\ س}$.دس $= \int \frac{١-جاس}{١-جا^{٢}س}$. دس

$= \int \frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{١}{جتا^{٢}س} - \frac{جا\ س}{جتا\ س \times جا\ س}$.دس

$= \int$ قا^{٢}س - قا س طا س . د س = طا س – قا س + جـ

---

٣٧) $\int \frac{١}{١+جتا\ س}$. دس

$= \int \frac{١}{١+جتا\ س} \times \frac{١-جتا\ س}{١-جتا\ س}$.دس $= \int \frac{١-جتاس}{١-جتا^{٢}س}$. دس

$= \int \frac{١-جتاس}{جا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{١}{جا^{٢}س} - \frac{جتا\ س}{جا\ س \times جا\ س}$.دس

$= \int$ قتا^{٢}س - قتا س طتا س . د س

$=$ - طتا س + قتا س + جـ

---

٣٨) $\int \frac{جاس}{١+جا\ س}$. دس

$= \int \frac{جاس}{١+جا\ س} \times \frac{١-جا\ س}{١-جا\ س}$.دس $= \int \frac{جاس-جا^{٢}س}{١-جا^{٢}س}$. دس

$= \int \frac{جاس-جا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{جاس}{جتا^{٢}س} - \frac{جا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$.دس

$= \int$ قاس ظاس –ظا^{٢}س .دس

$= \int$ قاس ظاس –(قا^{٢}س – ١) .دس

$=$ قاس – (ظاس –س) +جـ

---

٣٩) $\int \frac{١}{١+جتا\ ٢س}$. دس

$= \int \frac{١}{٢جتا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{١}{٢}$ قا^{٢}س . دس $= \frac{١}{٢}$ظاس + جـ

حل اخر:

$\int \frac{١}{١+جتا٢س} \times \frac{١-جتا٢س}{١-جتا٢س}$. دس

$\int \frac{١-جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$. دس $= \int \frac{١}{جا^{٢}٢س} - \frac{جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$. دس

$= \int$ قتا^{٢}٢س - قتا٢س ظتا٢س . دس

$= -\frac{ظتا٢س}{٢} + \frac{قتا٢س}{٢}$ + جـ

حل اخر:

$= \int \frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س}{١+جتا^{٢}س-جا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س}{٢جتا^{٢}س}$. دس

$= \frac{١}{٢} \int \frac{جا^{٢}س}{جتا^{٢}س} + \frac{جتا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$. دس $= \frac{١}{٢} \int$ ظا^{٢}س + ١ .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ قا^{٢}س . دس $= \frac{١}{٢}$ظاس + جـ

SALEM ALSATEB

٤٠) $\int \frac{\text{جا}^3 س - ١}{١ - \text{جتا}^2 س}$. دس

$= \int \frac{\text{جا}^3 س - ١}{\text{جا}^2 س}$. دس $= \int \frac{\text{جا}^3 س}{\text{جا}^2 س} - \frac{١}{\text{جا}^2 س}$.دس

$= \int$ جاس – قتا^2 س .دس =- جتاس + ظتاس +جـ

---

٤١) $\int \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س}$.دس

$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{(\text{جاس جتاس})^2}$.دس$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{\left(\frac{\text{جا}٢س}{٢}\right)^2}$. دس

$= \int ٤$قتا٢س ظتا٢س.دس =-٢قتا٢س +جـ

---

٤٢) $\int \frac{١ - \text{جا}^2 س}{\text{جا}^2\left(\frac{س}{٢}\right)\text{جتا}^2\left(\frac{س}{٢}\right)}$.دس

$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\left(\text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right)\text{جتا}\left(\frac{س}{٢}\right)\right)^2}$.دس$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\left(\frac{\text{جاس}}{٢}\right)^2}$.دس

$= \int ٤$ ظتا^2 س.دس =٤$\int$قتا^2 س – ١ .دس

= ٤(- ظتاس – س) +جـ

---

٤٣) $\int \frac{\text{جا}^2 س}{١ - \text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س}{١ - \text{جتاس}} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$.دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س(١ - \text{جتاس})}{١ - \text{جتا}^2 س}$. دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س(١ - \text{جتاس})}{\text{جا}^2 س}$. دس $= \int ١ -$ جتاس .دس

=س – جاس + جـ

---

٤٤) $\int \frac{\text{جا}٢س}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{٢ \text{ جاس جتاس}}{\text{جتاس}}$. دس $= \int ٢$جاس . دس=-٢جتاس+جـ

---

٤٥) $\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتاس}}$. دس

الحل :

$\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتاس}}$. دس $= \int \frac{\text{جتا}(س+٢س)}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جتاس جتا}٢س - \text{جاس جا}٢س}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جتاس جتا}٢س - ٢\text{جا}^2 س \text{جتاس}}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}(\text{جتا}٢س - ٢\text{جا}^2 س)}{\cancel{\text{جتاس}}}$. دس

$= \int$ جتا ٢س - ٢ جا^2 س . دس

$= \int$ جتا٢س – (١-جتا٢س) .دس

$= \int$ ٢جتا٢س -١.دس = جا٢س – س + جـ

---

٤٦) $\int \frac{\text{جا}٣س}{\text{جاس}}$. دس

الحل :

$\int \frac{\text{جا}٣س}{\text{جاس}}$. دس $= \int \frac{\text{جا}(س+٢س)}{\text{جاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جاس جتا}٢س + \text{جتاس جا}٢س}{\text{جاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جاس جتا}٢س + ٢\text{جاس جتا}^2 س}{\text{جاس}}$. دس

$= \int \frac{\cancel{\text{جاس}}(\text{جتا}٢س + ٢\text{جتا}^2 س)}{\cancel{\text{جاس}}}$. دس

$= \int$ جتا ٢س + جتا^2 س . دس

$= \int$ جتا٢س + (١+جتا٢س) .دس

$= \int$ ٢جتا٢س +١.دس = جا٢س + س + جـ

---

٤٧) $\int \frac{٢ + ٢\text{جتا}^3 س}{١ - \text{جا}^2 س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{٢ + ٢\text{جتا}^3 س}{\text{جتا}^2 س}$. دس

$= \int \frac{٢}{\text{جتا}^2 س} + ٢$ جتاس . دس

$= \int ٢$ قا^2 س + ٢جتاس . دس = ٢ظاس + ٢جاس + جـ

---

٤٨) $\int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتا س}}$. دس

$= \int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتا س}} \times \frac{١ - \text{جتا س}}{١ - \text{جتا س}}$.دس$= \int \frac{(١ - \text{جتاس})^2}{١ - \text{جتا}^2 س}$. دس

SALEEM ALSATEB

$= \int \frac{1-2جتاس+جتا^2 س}{جا^2 س} \ .دس$

$= \int \frac{1}{جا^2 س} - 2\frac{جتا س}{جا س \times جا س} + \frac{جتا^2 س}{جا^2 س} .دس$

$= \int قتا^2 س - 2قتاس\ ظتاس + ظتا^2 س \ .دس$

$= \int قتا^2 س - 2قتاس\ ظتاس + قتا^2 س - ١ \ .دس$

$= \int 2قتا^2 س - 2قتاس\ ظتاس - ١ \ .دس$

$= -2ظتاس + 2قتاس - س + جـ$

---

٤٩) $\int \frac{1-جا2س}{جاس-جتاس} .دس$

$= \int \frac{جا^2 س - 2جاس جتاس + جتا^2 س}{جاس-جتاس} .دس = \int \frac{(جاس-جتاس)^2}{جاس-جتاس} .دس$

$= \int جاس - جتاس \ .دس = -جتاس - حاس + جـ$

---

٥٠) $\int \frac{1}{جتا^2 س - جتا^4 س} .دس$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س(1-جتا^2 س)} .دس = \int \frac{جا^2 س + جتا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{جا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} + \frac{جتا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} .دس$

$= \int قا^2 س + قتا^2 س \ .دس = ظاس - ظتاس + جـ$

حل اخر:

$\int \frac{1}{جتا^2 س - جتا^4 س} .دس$ | $جا2س = 2جاس\ جتاس$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س(1-جتا^2 س)} .دس$ | $\left(\frac{جا2س}{2}\right)^2 = جا^2 س\ جتا^2 س$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س \times جا^2 س} .دس = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2} جا2س\right)^2} .دس$

$= 4\int \frac{1}{جا^2 2س} .دس = 4\int قتا^2 2س \ .دس$

$= -4\frac{ظتا2س}{2} + جـ$

حل اخر:

$\int \frac{1}{جتا^2 س - جتا^4 س} .دس$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س(1-جتا^2 س)} .دس = \int \frac{1}{جتا^2 س \times جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{جا^2 س + جتا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{\cancel{جا^2 س}}{جتا^2 س \times \cancel{جا^2 س}} + \frac{\cancel{جتا^2 س}}{\cancel{جتا^2 س} \times جا^2 س} .دس$

$= \int قا^2 س + قتا^2 س \ .دس = ظاس - ظتاس + جـ$

---

٥١) $\int 2حاس\ لو_{هـ}^{جتاس} .دس$

$= \int 2حاس\ جتاس \ .دس = \int جا2س \ .دس = -\frac{1}{2} جتا2س + جـ$

---

٥٢) $\int قا^2 س\ جا^2 س .دس$

$= \int \frac{جا^2 س}{جتا^2 س} .دس = \int ظا^2 س \ .دس = \int قا^2 س - 1 \ .دس$

$= ظاس - س + جـ$

---

٥٣) $\int (قتاس + جاس)^2 .دس$

$= \int قتا^2 س + 2قتاس\ جاس + جا^2 س \ .دس$

$= \int قتا^2 س + 2 + \frac{1}{2}(1-جتا2س) \ .دس$

$= -ظتاس + 2س + \frac{1}{2}(س - \frac{1}{2}جاس) + جـ$

---

٥٤) $\int \frac{قا^2 س - ظا^2 س}{جا^2 5س} .دس$

الحل :

$= \int \frac{1}{جا^2 5س} .دس = \int قتا^2 5س \ .دس$

$= -\frac{1}{5} ظتا\ 5س + جـ$

---

٥٥) $\int \frac{1}{1+قتا س} .دس$

الحل:

$= \int \frac{1}{\frac{1}{جاس}+1} .دس = \int \frac{جاس}{1+جا س} .دس$

$= \int \frac{جاس}{1+جا س} \times \frac{1-جا س}{1-جا س} .دس = \int \frac{جاس - جا^2 س}{1-جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{جاس - جا^2 س}{جتا^2 س} .دس = \int \frac{جاس}{جتا^2 س} - \frac{جا^2 س}{جتا^2 س} .دس$

$= \int قاس\ ظاس - ظا^2 س \ .دس$

$= \int قاس\ ظاس - (قا^2 س - 1) \ .دس$

$= قاس - (ظاس - س) + جـ$

SALEEM ALSATEB

٥٦) ∫٢جتاس جتا٣س – جتا٤س . دس

الحل:

= ∫٢ × $\frac{١}{٢}$ (جتا(س-٣س) +جتا(س+٣س)) – جتا٤س . دس

= ∫ جتا(-٢س) .دس = - $\frac{١}{٢}$ جا(-٢س) +جـ

---

٥٧) ∫جتا^{٤}س-جا^{٤}س.دس

الحل :

= ∫ (جتا^{٢}س-جا^{٢}س)(جتا^{٢}س+جا^{٢}س).دس

= ∫جتا٢س . دس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س + جـ

---

٥٨) أثبت أن :

∫ جتاس جتا٣س.دس = جاس جتا^{٣}س + جـ

الحل:

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (جتا(س-٣س)+جتا(س+٣س)).دس

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (جتا(-٢س) +جتا٤س) .دس

= $\frac{١}{٢}$ ∫ جتا(٢س) + جتا (٤س) .دس

= $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ + $\frac{\text{جتا٤س}}{٤}$ + جـ

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{جاسجتاس}}{}$ + $\frac{\text{جا٢سجتا٢س}}{٢}$ + جـ

= $\frac{١}{٢}$ (جاس جتاس + $\frac{\text{جاسجتاس}(\text{جتا}^{٢}\text{س-جا}^{٢}\text{س})}{}$) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ جاس جتاس (١+ جتا^{٢} س – جتا ^{٢}س) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ جاس جتاس (جتا^{٢} س + جتا ^{٢}س) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ × جاس جتاس × ٢جتا^{٢} س + جـ

=جاس جتا^{٣}س + جـ

---

٥٩) ∫ $\frac{(٢-\text{س})^{٣}}{\text{س}}$. دس

= ∫ $\frac{٨-١٢\text{س}+٦\text{س}^{٢}-\text{س}^{٣}}{\text{س}}$.دس

= ∫ $\frac{٨}{\text{س}}$ - ١٢ + ٦س – س^{٢} .دس

=٨لوس – ١٢س +٣س^{٢} - $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ +جـ

٦٠) ∫ $\frac{\text{جتا٢س}}{\text{جتاس–جاس}}$.دس

الحل:

= ∫ $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س–جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس–جاس}}$ دس

= ∫ $\frac{\cancel{(\text{جتاس–جاس})}\ (\text{جتاس–جاس})}{\cancel{\text{جتاس–جاس}}}$ دس

= ∫جتاس + جاس دس = جاس – جتاس +جـ

---

٦١) إذا كان م(س)= ٤س^{٣} -٢س^{٢} هو معكوس مشتقة للإقتران ق فجد ∫ق(س)-٢ .دس

الحل :

∫ ق(س) – ٢ .دس = م(س) – ٢س + جـ

= ٤س^{٣} -٢س^{٢} -٢س +جـ

SALEEM ALSATEB

التكامل المحدود :

التكامل المحدود للاقتران ق (س) في الفترة [أ ، ب] هو :

$\int_{أ}^{ب} ق'(س) \cdot د س = ق(س)]_{أ}^{ب}$

= ق (ب) – ق (أ)

لإيجاد التكامل المحدود نقوم بإيجاد التكامل بصورة عادية ثم نعوض الحدود:

(تعويض الحد العلوي) – (تعويض الحد سفلي)

أسئلة :جد قيمة كل من التكاملات التالية :

١) $\int_{١}^{٣} (٢س + ١) \cdot د س$

$= س^{٢} + س]_{١}^{٣} = (٩ + ٣) - (١ - ١) = ١٠$

---

٢) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} \cdot د س$

$= \int_{١}^{٢} س^{-٢} \cdot د س = -س^{-١}]_{١}^{٢} = \frac{-١}{س}]_{١}^{٢} = \frac{-١}{٢} + ١ = \frac{١}{٢}$

---

٣) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{س} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٨} س^{\frac{١}{٣}} \cdot دس = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}}]_{١}^{٨} = \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}}]_{١}^{٨} = \frac{٣}{٤} \times ١٦ - \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٤٥}{٤}$

---

٤) $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{س}} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٤} س^{-\frac{١}{٢}} \cdot دس = ٢س^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{٤} = ٢\sqrt{س}]_{١}^{٤} = ٤ - ٢ = ٢$

---

٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا س \cdot د س$

$= -جتا س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = -جتا \frac{\pi}{٢} + جتا ٠ = ٠ + ١ = ١$

---

٦) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} قتاس طتا س \cdot د س$

$= -قتا س]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} = -قتا \frac{\pi}{٣} + قتا \frac{\pi}{٦} = -\frac{٢}{\sqrt{٣}} + ٢$

---

٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢} س \cdot دس$

$= ظا س]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = ظا \frac{\pi}{٤} - ظا ٠ = ١ - ٠ = ١$

---

٨) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{جا^{٢} س} \cdot د س$

$= \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} قتا س ظتا س \cdot دس = -قتا س]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= -قتا \frac{\pi}{٢} + قتا \frac{\pi}{٦} = -١ + ٢ = ١$

---

٩) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتا س - جا س \cdot د س$

$= جا س + جتا س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (جا \frac{\pi}{٢} + جتا \frac{\pi}{٢}) - (جا ٠ + جتا ٠)$

$= (١ + ٠) - (٠ + ١) = ٠$

---

١٠) $\int_{١}^{هـ} \frac{١}{س} \cdot دس = لو_{هـ} |س|]_{١}^{هـ} = لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} ١ = ١ - ٠ = ١$

---

١١) $\int_{٠}^{هـ} \frac{١}{س+هـ} \cdot دس = لو_{هـ} |س+هـ|]_{٠}^{هـ}$

$= لو_{هـ} ٢هـ - لو_{هـ} هـ = لو_{هـ} ٢ + ١ - ١ = لو_{هـ} ٢$

---

١٢) $\int_{٠}^{١} ٢هـ^{٢س+١} \cdot دس$

$= هـ^{٢س+١}]_{٠}^{١} = هـ^{٣} - هـ$

---

١٣) $\int_{٠}^{٢} \frac{١ - هـ^{٣س}}{هـ^{س-١}} \cdot دس$

$= \int_{٠}^{٢} هـ^{١-س} (١ - هـ^{٢س}) \cdot دس$

$= \int_{٠}^{٢} هـ^{١-س} - هـ^{س+١} \cdot دس$

$= -هـ^{١-س} - هـ^{س+١}]_{٠}^{٢} = (-هـ^{-١} - هـ^{٣}) - (-هـ^{١} - هـ)$

$= -هـ^{-١} - هـ^{٣} + ٢هـ$

SALEM ALSATEB

١٤) $\int_{0}^{\ln 2} (9e^{x} - 4e^{x}).dx$

الحل :

$= \int_{0}^{\ln 2} 9e^{x} - 4e^{2x} \, . \, dx$

$= [9e^{x} - 2e^{2x}]_{0}^{\ln 2}$

$= (9e^{\ln 2} - 2e^{2\ln 2}) - (9e^{0} - 2e^{0})$

$(18-8)-(9-2)=3$

قاعدة سريعة :

$\int_{أ}^{آ}$ جـ . د س = جـ (ب – أ) : حيث جـ = ثابت

أمثلة :

١) $\int_{1}^{2} 8 \, . \, د س = 8 (5 – 1) = 32$

٢) $\int_{1}^{2} -5 \, . \, دس = -5 (3 – 1) = -10$

ملاحظة على إيجاد الثوابت :

١) إذا طلب منا السؤال إيجاد قيمة الثابت نكامل ثم نعوض الحدود

٢) قاعدة كثير الحدود من الدرجة الاولى :

ق (س) = أس + ب

قاعدة كثير الحدود من الدرجة الثانية :

ق (س) = أس^{2} + ب س + جـ

أسئلة : جد قيمة الثابت (أ) في كل من ما يلي :

١) $\int_{1}^{أ^{2}} 3 \, . \, د س = 9$

الحل :

$\int_{1}^{أ^{2}} 3 \, . \, د س = 3 (2 أ – 1) = 9 \Leftarrow 2 أ – 1 = 3$

$\Leftarrow$ أ = ٢

٢) $\int_{ب}^{أ} أ \, . \, د س = 4$

الحل :

$\int_{ب}^{أ} أ \, . \, د س = أ (أ – ب) = 4 \Leftarrow أ^{2} = 4 \Leftarrow أ = \pm 2$

٣) $\int_{أ}^{2} 2أ \, . \, د س = -30$

الحل :

$\int_{أ}^{2} 2أ \, . \, د س = 2 أ (2 - أ) = -30$

$4أ - 2أ^{2} = -30 \Leftarrow 2 آ^{2} - 4آ - 30 = 0$

$أ^{2} - 2أ - 15 = 0 \Leftarrow (أ-5)(أ+3) = 0$

$\Leftarrow أ = 5 ، أ = -3$

٤) $\int_{2أ^{2}+أ}^{3+4أ} 8 \, . \, دس = 56$

الحل :

$\int_{2أ^{2}+أ}^{3+4أ} 8 \, . \, دس = 8(3+4أ-(2+2أ^{2})) = 56$

$\Leftarrow 8(1+2أ^{2}) = 56 \Leftarrow 1+2أ^{2} = 7 \Leftarrow أ = 3$

٥) $\int_{1}^{أ} (3س^{2} + 6س) . دس = صفر$

الحل :

$\int_{1}^{أ} 3س^{2} + 6س . دس = [س^{3} + 3س^{2}]_{1}^{أ}$

$= أ^{3} + 3أ^{2} - (1+3) = 0$

$\Leftarrow أ^{3} + 3أ^{2} - 4 = 0 \Leftarrow (أ-1)(أ+2)(أ+2) = 0$

$\Leftarrow أ = 1 ، -2$

٦) $\int_{أ}^{0} 3أ . دس = 18$

الحل:

$\int_{أ}^{0} 3أ . دس = 3أ(5-أ) = 18$

$\Leftarrow 15أ - 3أ^{2} - 18 = 0 \Leftarrow أ^{2} - 5أ + 6 = 0$

$\Leftarrow (أ-2)(أ-3) = 0 \Leftarrow أ = 2 ، 3$

SALEM ALSATEB

٧) $\int_{٢}^{٣}$ ٥.دس = $\int_{٠}^{١}$ ٢س+٦.دس، فجد قيمة الثابت جـ .

الحل :

٥(جـ - ٢) =$س^{٢}$ + ٦س]$_{٠}^{١}$ = (١+٦)-(٠+٠) =٧

٥جـ-١٠=٧ ⟸ جـ = $\frac{١٧}{٥}$

---

٩) اذا كان ق(٣) = ٧ ، ق(١) = ٢ و كان

$\int_{١}^{٣}$ أ ق/س + ٢س.دس =٣ ، جد قيمة الثابت أ.

الحل:

$\int_{١}^{٣}$ أ ق/س + ٢س.دس = أ ق(س) + $س^{٢}$]$_{١}^{٣}$

= (أق(٣) +٩) – (أ ق(١) + ١)

= (٧أ + ٩) – ٢أ – ١ = ٥أ – ٨ = ٢٣ ⟸ $\frac{٥أ}{٥}$ = $\frac{١٥}{٥}$

أ = ٣

---

١٠) اذا كان $\int_{١}^{٣}$ ٢س + أ .دس = ٨ ، جد قيمة أ.

الحل:

$\int_{١}^{٣}$ ٢س + أ .دس = $س^{٢}$ + أس]$_{١}^{٣}$

= (٩ +٣أ) – (١ + أ) = ٨ + ٢أ = ١٨

٢أ = ١٠ ⟸ أ = ٥

---

١١) $\int_{١}^{جـ}$ ٣ $س^{٢}$ – ٢ س – ٤ . دس = صفر ،جد قيمة جـ

الحل :

$\int_{١}^{جـ}$ ٣$س^{٢}$ – ٢ س – ٤ . دس = $س^{٣}$ – $س^{٢}$ – ٤س]$_{١}^{جـ}$

= $جـ^{٣}$ – $جـ^{٢}$ -٤ جـ + ٤ = ٠ .

⟸ (جـ - ١) ($جـ^{٢}$ – ٤) = ٠ ⟸ جـ = { ١ ، ٢ ،-٢}

---

١٢) إذا كان أ عدد صحيح موجب فما مجموع قيم أ التي

تجعل $\int_{-١}^{١}$ $س^{أ}$. دس = $\int_{٠}^{١}$ ٢ $س^{أ}$.د س صحيحة .

الحل :]$_{-١}^{١}$ $\frac{س^{أ+١}}{أ+١}$=]. $\frac{٢^{أ+١}}{أ+١}$

$\frac{١^{أ+١}}{أ+١}$ - $\frac{(-١)^{أ+١}}{أ+١}$ = $\frac{٢(١)^{أ+١}}{أ+١}$ - $\frac{٢(٠)^{أ+١}}{أ+١}$

$\frac{١}{أ+١}$ - $\frac{(-١)^{أ+١}}{أ+١}$ = $\frac{٢}{أ+١}$ نضرب ب (أ + ١)

١ –(-١)$^{أ+١}$ = ٢ ⟸ (-١)$^{أ+١}$ = -١

⟸ أ + ١ = عدد فردي ⟸أ = عدد زوجي

---

١٣) إذاكان ل ، م هما معكوسا مشتقة للإقتران ق وكان

$\int_{-١}^{٢}$ (ل(س) – م(س)) .دس =١٢ فجد قيمة

$\int_{١}^{٨}$ (م(س) – ل(س)) .دس ؟

الحل :

ل(س) – م(س) = أ

$\int_{-١}^{٢}$ أ .دس = أ(٢+١) = ٣أ=١٢ ⟸ أ= ٤

$\int_{١}^{٨}$ (م(س) – ل(س)) .دس= $\int_{١}^{٨}$ -٤.دس =-٤(٨-١)=-٣٢

أسئلة على إيجاد قواعد الاقتران كثير الحدود :

قواعد كثير الحدود:

❖ الدرجة الاولى :

ق(س) = أس +ب

ق/(س) = أ = ثابت

❖ الدرجة الثانية :

ق(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ

ق/(س) = ٢أس +ب

ق//(س) = ٢أ = ثابت

SALEM ALSATEB

١) جد قاعده كثير حدود من الدرجة الأولى حيث

$\int_{-1}^{1}$ ق(س).دس=٤ ، $\int_{1}^{3}$ ق(س).دس=٢

الحل:

ق(س)=أس+ب

$\int_{-1}^{1}$ أس+ب.دس = $\frac{أس^{٢}}{٢}$ +ب س]$_{-1}^{1}$

=($\frac{أ}{٢}$ + ب) – ($\frac{أ}{٢}$ - ب)

=٢ب=٤⟸ب=٢

$\int_{1}^{3}$ أس+٢.دس = $\frac{أس^{٢}}{٢}$ +٢ س]$_{1}^{3}$

=($\frac{٩أ}{٢}$ + ٦) – ($\frac{أ}{٢}$ +٢)

= ٤أ +٤ = ٢

٤أ = -٢ ⟸ أ = - $\frac{١}{٢}$

∴ ق(س) = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢

---

٢)جد قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الاولى إذا

علمت أن $\int_{1}^{2}$ ق (س) .د = ٨ ، ق (٠) = ٣ .

الحل : ق (س) = أ س + ب

ق (٠) = أ × ٠ + ب = ٣ ⟸ ب = ٣

$\int_{1}^{2}$ أ س + ٣ . د س = $\frac{أ}{٢}$ س^{٢} + ٣س]$_{1}^{2}$

= (٢ أ + ٦) – ($\frac{أ}{٢}$ + ٣) = ٨ ⟸ $\frac{٣أ}{٢}$ - ٣ = ٨

$\frac{٣أ}{٢}$ ⟸ = ٥ ⟸أ = $\frac{١٠}{٣}$

∴ ق (س)= $\frac{١٠}{٣}$س + ٣

---

٣)جد قاعدة الاقتران كثير الحدود إذا علمت أن

ق (٠) = ٥ ، قً (س) = ٤ ، $\int_{0}^{1}$ قَ(س) .د س = ٣ .

الحل :

ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

ق(٠) = أ × ٠ + ب × ٠ + جـ = ٥

⟸ جـ = ٥

قَ (س) = ٢أ س +ب

قً (س) = ٢ أ = ٤

⟸أ = ٢

$\int_{0}^{1}$ ٤س + ب . دس = ٢ س^{٢} +ب س]$_{0}^{1}$

= (٢ + ب) – (٠ + ٠) = ٣

⟸ ب = ١

∴ق(س) = ٢ س^{٢} +س + ٥

SALEEM ALSATEEB

خواص التكامل المحدود :

١) $\int_{أ}^{أ}$ ق (س) . د س = صفر

٢) الخواص الخطية :

أ) $\int_{أ}^{آ}$ جـ ق (س) – د س = جـ $\int_{أ}^{آ}$ ق (س) . دس

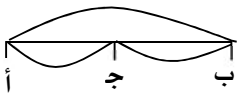
ب) $\int_{أ}^{آ}$ ق (س) ± هـ (س) . د س

= $\int_{أ}^{آ}$ ق (س) .دس ± $\int_{أ}^{آ}$ هـ (س) . د س

٣) خاصية القلب عكس الحدود :

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س) . دس = - $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) .دس

٤) خاصية الاضافة :



$\int_{أ}^{آ}$ق(س) . د س = $\int_{أ}^{ج}$ ق(س) . د س + $\int_{ج}^{آ}$ق(س) . د س

٥) خاصية المقارنة:

أ) ق (س) ≥ صفر حيث س [∋ أ ، ب]

$\int_{أ}^{آ}$ ⇐ ق (س) . دس ≥ صفر

ب) ق (س) ≤ صفر حيث س [∋أ ، ب]

$\int_{أ}^{آ}$ ⇐ق (س) . دس ≤ صفر

جـ) ق (س) ≤ هـ (س) حيث س [∋أ ، ب]

$\int_{أ}^{آ}$ ⇐ق (س) . دس ≤ $\int_{أ}^{آ}$ هـ (س) . د س

أسئلة :

١) $\int_{٣}^{٣}$ ٢ س^{٢} + ٤ س + ٥ .د س = صفر

---

٢) $\int_{٣}^{٣}$ $\frac{قا^{٢}س - ظا^{٢}س}{جا^{٢}٥س}$ + س^{٢} – ٥هـ$^{٢س+١}$.دس = صفر

---

٣) $\int_{ب}^{٢}$ ($\int_{١}^{٣}$ ٣س^{٢} .دس –س+ $\int_{٢}^{٢}$ هـ(س).دس).دس

الحل :

$\int_{ب}^{٢}$ (٢٦–س+ ٠).دس = ٢٦س- $\frac{س^{٢}}{٢}$]$_{ب}^{٢}$ = (٢-٥٢)-(٠-٠)=٥٠

٤) $\int_{١}^{٢}$ ٢ ق (س). دس = ٤ ، جد $\int_{١}^{٢}$ ٥ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{١}^{٢}$ ٢ ق (س) . د س = ٢ $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس = ٤

$\int_{١}^{٢}$ ق (س) . د س = ٢

المطلوب :

$\int_{١}^{٢}$ ٥ ق (س) . د س = ٥ $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس

= ٥ × ٢ = ١٠

---

٥) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٢ ق (س) . د س = ١٠ فجد

$\int_{١}^{٢}$(ق (س) + ٦) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{١}^{٢}$٢ق(س). دس= ٢ $\int_{١}^{٢}$ق(س).دس=١٠ ⇐ $\int_{١}^{٢}$ق(س).دس =٥

المطلوب

$\int_{١}^{٢}$(ق (س) + ٦) . دس

= $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس + $\int_{١}^{٢}$ ٦ . دس

= ٥ + ٦ (٢ + ١) = ٥ + ٦ = ١١

---

٦) $\int_{ب}^{٢}$ق (س) -٢س . دس = ٢ فجد

$\int_{ب}^{٢}$ ٣ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{ب}^{٢}$ ق (س) -٢س . دس

= $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس + $\int_{ب}^{٢}$ - ٢ س . دس

= $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس – ٤ = ٢ ⇐ $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس = ٦

المطلوب

$\int_{ب}^{٢}$ ٣ ق (س) . دس = ٣ $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس = ٣ × ٦ = ١٨

SALEEM ALSATEB

٧) إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ ٢ق (س) +٢ . د س = ٨ فجد

$\int_{٢}^{٤}$ ٢س – ٣ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٢}^{٤}$ ٢ ق (س) +٢ . د س

= ٢ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س).دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٢ . دس

=٢ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . د س + ٤ = ٨

$\Leftarrow$ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . د س = ٢

المطلوب :

$\int_{٢}^{٤}$ ٢س – ٣ ق (س) . دس =

$\int_{٢}^{٤}$ ٢س.دس – ٣ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس

= س^{٢}]$_{٢}^{٤}$ - ٣ × ٢ = ١٢ – ٦ = ٦

---

٨) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ق (س) . دس = ٥ ،

فجد $\int_{٤}^{١}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{٤}^{١}$ ق (س) . دس = - $\int_{١}^{٤}$ ق (س) . دس = -٥

---

٩) إذا كان $\int_{٠}^{٢}$ ٢ ق (س) -٤ . دس = -٢ ، جد

$\int_{٠}^{٢}$ ٣ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ق (س) -٤ . دس = ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س).دس- $\int_{٠}^{٢}$ ٤ . دس

= ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس -٤ (٢-٠) = -٢

$\Leftarrow$ ق (س) . دس =٣

المطلوب

$\int_{٠}^{٢}$ ٣ ق (س) . دس = -٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) دس = -٩

١٠) $\int_{٠}^{٢}$ ٢س + ٣ ق (س) . د س = ١٦ فجد

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ + ٢ ق (س) . د س

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٠}^{٢}$ ٢س + ٣ ق (س) . د س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س . دس + ٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس

= ٤ + ٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . د س = ١٦

$\Leftarrow$ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس = ٤

المطلوب

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ + ٢ ق (س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢. د س – ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس

= -٤ - ٢ × ٤ = - ١٢

---

١١) إذا كان $\int_{-١}^{٣}$ ($\int_{١}^{٢}$ ق(س) . دس).دس = ٢٤

فجد $\int_{٢}^{١}$ق(س) . دس .

الحل:

$\int_{١}^{٢}$ ق(س) . دس = أ

$\int_{-١}^{٣}$ أ.دس = أ(٣+١)=٤أ=٢٤ $\Leftarrow$ أ= ٦

$\int_{٢}^{١}$ق(س) . دس = -٦

SALEEM ALSATEB

خاصية الإضافة :

بتعرف أنه السؤال على خاصية الاضافة إذا كان لدينا ٣ تكاملات داخلها ق (س)

خطوات الحل :

١) نرتب المعطيات نجعل داخل التكامل ق (س) لوحدها وحدود التكامل مرتبة

٢) نكتب القانون ونعوض ونجد المفقود

٣) لا تنسى المطلوب من السؤال

أسئلة :

١) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . د س = ٢ ،

$\int_{٣}^{٧}$ ق (س) . د س= ٤ ، جد $\int_{١}^{٧}$ ق (س) . دس

الحل : $\int_{١}^{٧}$ ق (س) . دس

= $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس + $\int_{٣}^{٧}$ ق (س) . دس = ٢+٤=٦

---

٢) $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس = ٥ ، $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس = ٤

فجد $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس = $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس + $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

٤ = ٥ + $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

$\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس = -١

---

٣) $\int_{-١}^{٣}$ ق (س) . دس = ٤ ، $\int_{٣}^{٥}$ (ق (س) +٢). دس = ٩

فجد : $\int_{-١}^{٣}$ (٤ق (س) +٧). دس .

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٣}^{٥}$ ق (س) +٢. دس = $\int_{٣}^{٥}$ ق (س) . دس + $\int_{٣}^{٥}$ ٢. دس

$\int_{٣}^{٥}$ ق (س) . دس +٢(٥-٣) = ٩

⇐ $\int_{٣}^{٥}$ ق (س) . دس = ٥

⇐ $\int_{-١}^{٣}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{١}$ ق (س). دس + $\int_{١}^{٣}$ ق (س) .دس

⇐٤ = $\int_{-١}^{١}$ ق (س). دس +٥

⇐ $\int_{-١}^{١}$ ق (س). دس = -١

المطلوب

$\int_{-١}^{٣}$ ٤ ق (س) + ٧ . دس

= ٤ $\int_{-١}^{٣}$ ق (س). دس + $\int_{-١}^{٣}$ ٧ . دس

= ٤ × -١ + ٧ (١+٣) = ٢٤

---

٤) إذا كان $\int_{٤}^{٢}$ ق (س). دس = ٤ ، $\int_{٢}^{٧}$ $\frac{ق(س)}{٣}$. دس = ٢،

جد $\int_{٧}^{٤}$ ٢ق (س). دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس = -٤ ، $\int_{٢}^{٧}$ ق (س). دس = ٦

$\int_{٢}^{٧}$ ق (س). دس = $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس+ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس

⇐٦ = -٤ + $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس

⇐ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس = ١٠

المطلوب

$\int_{٧}^{٤}$ ٢ق (س). دس = -٢ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس

= -٢ × ١٠ = -٢٠

---

٥) $\int_{-١}^{٢}$ (٣ق (س) -٤) . دس = ٣ ،

$\int_{٤}^{٢}$ ق (س). دس = ٦

جد $\int_{-١}^{٤}$ (ق (س) +٢س) . دس

الحل : ترتيب المعطيات

$\int_{-١}^{٢}$ ٣ق (س) – ٤ . دس

= ٣ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس - $\int_{-١}^{٢}$ ٤ دس = ٣

SALEM ALSATEB

$= ٣ = \int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس -١٢ = ٣

$\Leftarrow \int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس = ٥

$\int_{٤}^{٢}$ ق (س). دس = ٦ $\Leftarrow \int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس = -٦

$\int_{-١}^{٤}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس + $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس

= ٥ + -٦ = -١

المطلوب

$\int_{-١}^{٤}$ ق (س)+٢س . دس

= $\int_{-١}^{٤}$ ق (س). دس + $\int_{-١}^{٤}$ ٢س. دس = -١ + س$^{٢}]_{-١}^{٤}$ = -١ +

١٥ = ١٤

---

٦) إذا كان قابلا للتكامل تنتمي لها الاعداد أ ، ب ، جـ فإن :

$\int_{أ}^{جـ}$ ق (س). دس - $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس =

أ) $\int_{جـ}^{آ}$ ق (س). دس ب) $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س). دس

جـ) $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س). دس د) $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

الحل :

$\int_{أ}^{جـ}$ ق (س). دس - $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس

= $\int_{أ}^{جـ}$ ق (س). دس + $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

= $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س). دس $\Leftarrow$ الجواب (ب)

---

٧) إذا كان $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس - $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس

= $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس ، جد قيمة {أ ، ب}

الحل :

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس + $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس

= $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٤}$ ق (س). دس

$\Leftarrow$ قيمة {أ ، ب } = { -١ ، ٤ }

٨)إذا كان $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس =٣،جد

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس - $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

الحل :

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس - $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

= $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس + $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس = ٣ + ٣ = ٦

SALEEM ALSATEEB

خاصية المقارنة :

هناك أربعة أنواع من الأسئلة

النوع الأول :

يطلب منا تحديد إشارة التكامل تحدد إشارة الاقتران ومنها نحدد إشارة التكامل

أمثلة : دون إجراء عملية التكامل

ما إشارة كل من التكاملات التالية :

١) $\int_{١}^{٢} س^{٢} . دس$

الحل : $س^{٢} > ٠$ حيثس $\in [١ ، ٢]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} س^{٢} . دس > ٠ \Leftarrow \int_{١}^{٢} س^{٢} . دس$= موجب

---

٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا \sqrt{س} . دس$

الحل :

جتا $\sqrt{س} \leq ٠$ حيثس $\in [٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا \sqrt{س} . دس \leq ٠ \Leftarrow \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا \sqrt{س} . دس$ = موجب

---

٣) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} طا س . دس$

الحل :

طا $س \geq ٠$ حيث س $\in [\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} طا س . دس \geq ٠ \Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} طا س . دس$ = سالب

---

٤) $\int_{-١}^{٠} \frac{س}{س^{٢}+١} . دس$

الحل :

$\frac{س}{س^{٢}+١} \geq ٠$ حيث س $\in [-١ ، ٠]$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٠} \frac{س}{س^{٢}+١} . دس \geq ٠$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٠} \frac{س}{س^{٢}+١} . دس$ =سالب

النوع الثاني :

يعطينا تكاملين ويطلب تحديد أيها أكبر نحدد أي الإقترانات أكبر بالتعويض

ملاحظة : في الفترة [٠ ، ١] يكون الجذور أكبر من القوى الصحيحة كما ان الجذور الأكبر تكامله أكبر.

أسئلة : حدد أي التكاملات التالية أكبر دون إجراء عملية التكامل :

١) $\int_{٠}^{١} س . دس ، \int_{٠}^{١} س^{٢} . دس$

الحل :

$س \geq س^{٢}$ س $\in [٠ ، ١]$

$\Leftarrow \int_{٠}^{١} س . دس \geq \int_{٠}^{١} س^{٢} . دس$

---

٢) $\int_{٠}^{٢} س^{٢} + ٢ س . دس ، \int_{٠}^{٢} س^{٢} - ١ . دس$

الحل :

$س^{٢} + ٢س \geq س^{٢} - ١$ حيث س$\in$ [٠ ، ٢] بالتعويض

$\Leftarrow \int_{٠}^{٢} س^{٢} + ٢س . دس \geq \int_{٠}^{٢} س^{٢} - ١ . دس$

---

٣) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جتا س . دس ، \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جا س . دس$

الحل :

جتا $س \geq$ جا س س $\in [\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جتا س . دس \geq \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جا س . دس$

---

٤) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س} . دس ، \int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{س} . دس ، \int_{٠}^{١} س^{٥} . دس$

الحل :

$\sqrt[٣]{س} \leq \sqrt{س} \leq س^{٥}$ حيث س $\in$ [٠ ، ١]

$\int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{س} . دس \leq \int_{٠}^{١} \sqrt{س} . دس \leq \int_{٠}^{١} س^{٥} . دس$

SALEM ALSATEB

النوع الثالث : يعطينا الاقتران محصور فإن التكامل يوزع على المتباينة

أسئلة :

١) إذا كان ق (س) ≤ ٣ حيث س ∈ [١ ،٣] ، جد أقل قيمة لـ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{١}^{٣}$ ٣. دس

⟸ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس ≤ ٦

---

٢) ٢ ≤ ق (س) ≤ ٥ حيث س ∈ [-١ ،٢] جد أكبر وأقل قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{-١}^{٢}$ ٢ . دس ≤ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ ٥ $\int_{-١}^{٢}$. دس

⟸ ٦ ≤ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ ١٥

∴ أكبر قيمة ١٥ و أقل قيمة ٦

---

٣) إذا كان ٢ ≤ ق (س) – ٣ ≤ ٥ حيث س ∈ [-٢ ، ٢] ، جد أكبر وأقل قيمة لـ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

٦ ≤ ٢ ق (س) ≤ ٨ ⟸ ٣ ≤ ق (س) ≤ ٤

$\int_{-٢}^{٢}$ ٣ . دس ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ٤ . دس

١٢ ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ ١٦

⟸ أكبر قيمة (١٦) ، أصغر قيمة (١٢)

---

٤) إذا كان -١ ≤ ق (س) ≤ ٢ حيث ∈ [٢ ، ٥] فجد أقل وأكبر قيمة لـ $\int_{٢}^{٥}$ ٤ – ٢ ق (س) . دس

الحل :

-١ ≤ ق (س) ≤ ٢ ⟸ ٢ ≤ -٢ ق (س) ≤ -٤

⟸ ٦ ≤ ٤ – ٢ ق (س) ≤ ٠

$\int_{٢}^{٥}$ ٦ . دس ≤ $\int_{٢}^{٥}$ ٤ – ٢ ق (س) . دس ≤ $\int_{٢}^{٥}$ ٠ . دس

١٨ ≤ $\int_{٢}^{٥}$ ٤ – ٢ ق (س) . دس ≤ ٠

⟸ أكبر قيمة (١٨) و أقل قيمة (٠)

النوع الرابع :

عندما يكون الاقتران غير محصور ويطلب من أعلى قيمة وأقل قيمة " خطوات الحل "

١) نشق ونساوي المشتقة بالصفر

٢) نجد القيم الحرجة

٣) نجد صور القيم الحرجة

٤) نحص الاقتران وندخل التكامل

أسئلة :

١) ق (س) = $س^{٢}$ -٢س +٤ جد اكبر قيمة وأقل قيمة لـ $\int_{٠}^{١}$ ق (س) . دس

الحل :

قَ (س) = ٢ س – ٢ = ٠ ⟸ س = ١

الأطراف ⟸ س = ٠ ، ٢

ق(١) = ٣ ، ق(٠) = ٤ ، ق(٢) = ٤

٣ ≤ ق (س) ≤ ٤

٣ $\int_{٠}^{٢}$ دس ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ٤ . دس

٦ ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) . دس ≤ ٨

SALEM ALSATEB

٢) ق(س) = $\sqrt{1-س^2}$ فأثبت أن

$\int_{0}^{\frac{1}{2}}$ ق(س).دس ≥ ٢

الحل :

قَ(س) = $\frac{-2س}{2\sqrt{1-س^2}}$ = صفر

أصفار البسط ⟸ س = ٠

أصفار المقام ⟸ س = ١ ، -١

الأطراف ⟸ س = ١ ، -١

ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(-١) = ٠

⟸ ٠ ≥ ق(س) ≥ ١ حيث س ∈ [-١ ، ١]

⟸ $\int_{0}^{1}$ ٠ .دس ≥ $\int_{0}^{1}$ ق(س) .دس ≥ $\int_{0}^{1}$ ١ .دس

⟸ ٠ ≥ $\int_{0}^{1}$ ق(س).دس ≥ ٢ وهو المطلوب

---

٣) ق (س) جتا س فجد الفترة التي ينحصر بها

$\int_{0}^{\pi}$ ٢ – ٣ ق (س) . دس

الحل :

قَ (س) =- جا س = ٠

أصفار المشتقة ⟸س = ٠ ، π

الأطراف ⟸س = ٠ ، π

ق(٠) = ١ ، ق(π) = -١

⟸ -١ ≤ق (س) ≤ ١ حيث س ∈ [٠ ، π]

⟸٣≤ -٣ ق (س) – ٣

⟸٥≤ ٢ – ٣ ق (س) ≤-١

$\int_{0}^{\pi}$ ٥ . د س ≤ $\int_{0}^{\pi}$ ٢ – ٣ ق (س) . دس ≤ $\int_{0}^{\pi}$ -١ . دس

٥ π ≤ $\int_{0}^{\pi}$ ٢ – ٣ ق (س) . دس ≤ - π

---

٤) ق (س) = جا س حيث س ∈ [٠ ، π]

جد الفترة التي يتخصر بها $\int_{0}^{\pi}$ جا س . دس

الحل : قَ (س) = جتا س = ٠

أصفار المشتقة ⟸ س= $\frac{\pi}{2}$

الأطراف ⟸س = ٠ ، π

ق($\frac{\pi}{2}$) = ١ ، ق(٠) = ٠ ، ق(π) = ٠

⟸٠ ≤ ق (س) ≤ ١ حيث س ∈ [٠ ، π]

⟸ $\int_{0}^{\pi}$ ٠ . دس ≤ $\int_{0}^{\pi}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{0}^{\pi}$ ١ . دس

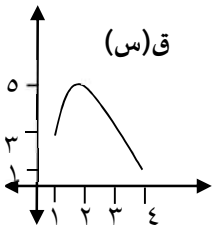
⟸٠ ≤ ق (س) . دس ≤ π

---

٥) بالإعتماد على الرسم المجاور لمنحنى ق المعرف على الفترة

[١ ،٤]جد أعلى قيمة

وأقل قيمة لـ $\int_{1}^{أ}$ ق(س).دس



الحل :

١≤ق(س) ≤ ٥

$\int_{1}^{أ}$ ١.دس ≤ $\int_{1}^{أ}$ ق(س) .دس ≤ $\int_{1}^{أ}$ ٥ .دس ⟸٣≤ $\int_{1}^{أ}$ ق(س) .دس≤١٥

SALEEM ALSATEEB

تكامل الاقتران المتشعب

- نستخدم هنا خاصية الاضافة
- المطلق وأكبر عدد صحيح تعيد تعريفها

مثال :

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، ٠ \le س \le ٢ \\ ٢س - ٢ & ، ١ \le س \le ٤ \\ ٤ & ، ٤ \le س \le ٦ \end{cases}$$

فجد :

أ) $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س$ ب) $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

جـ) $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س$ د) $\int_{٠}^{٦} ق(س)\,د س$

هـ) $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,د س$ و) $\int_{١}^{٥} ق(س)\,د س$

ز) $\int_{٠}^{٤} ٢ق(س) - ٧\,د س$

ح) $\int_{١}^{٥} ٣ق(س) + ٤س\,د س$

الحل :

أ) $\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س = \int_{٠}^{٢} ٣س^{٢}\,د س = س^{٣}]_{٠}^{٢}$

$= ٨ - ٠ = (٨)$

ب) $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س = \int_{٢}^{٤} ٢س - ٢\,د س = س^{٢} - ٢س]_{٢}^{٤}$

$= (١٦-٨) - (٤-٤) = ٨$

جـ) $\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س = \int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س + \int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س$

$= \int_{٠}^{٢} ٣س^{٢}\,د س + \int_{٢}^{٤} ٢س - ٢\,د س = س^{٣}]_{٠}^{٢} + س^{٢} - ٢س]_{٢}^{٤}$

$= (٨) - ٠ + (١٦-٨) - (٤-٤) = ٨ + ٨ = ١٦$

د) $\int_{٠}^{٦} ق(س)\,د س =$

$= \int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س + \int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س + \int_{٤}^{٦} ق(س)\,د س$

$= \int_{٠}^{٢} ٣س^{٢}\,د س + \int_{٢}^{٤} ٢س - ٢\,د س + \int_{٤}^{٦} ٤\,د س$

$= س^{٣}]_{٠}^{٢} + س^{٢} - ٢س]_{٢}^{٤} + ٤س]_{٤}^{٦}$

$= (٨) - ٠ + (١٦-٨) - (٤-٤) + (٢٤-١٦) = ٢٤$

هـ) $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,د س$

$= \int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س + \int_{٢}^{٣} ق(س)\,د س$

$= \int_{٠}^{٢} ٣س^{٢}\,د س + \int_{٢}^{٣} ٢س - ٢\,د س$

$= س^{٣}]_{٠}^{٢} + س^{٢} - ٢س]_{٢}^{٣}$

$= (٨) - ٠ + (٩-٦) - (٤-٤) = ٨ + ٣ = ١١$

و) $\int_{١}^{٥} ق(س)\,د س =$

$= \int_{١}^{٢} ق(س)\,د س + \int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س + \int_{٤}^{٥} ق(س)\,د س$

$= \int_{١}^{٢} ٣س^{٢}\,د س + \int_{٢}^{٤} ٢س - ٢\,د س + \int_{٤}^{٥} ٤\,د س$

$= س^{٣}]_{١}^{٢} + س^{٢} - ٢س]_{٢}^{٤} + ٤س]_{٤}^{٥}$

$= (٨) - (١) + (١٦-٨) - (٤-٤) + (٢٠-١٦) = ١٩$

ز) $\int_{٠}^{٤} ٢ق(س) - ٧\,د س$

$= ٢\int_{٠}^{٤} ق(س)\,د س - \int_{٠}^{٤} ٧\,د س$

$= ٢ \times ١٦ - ٧(٤-٠) = ٤$

ح) $\int_{١}^{٥} ٣ق(س) + ٤س\,د س$

$= -٣\int_{١}^{٥} ق(س)\,د س + \int_{١}^{٥} ٤س\,د س$

$= -٣ \times ١٩ + ٢س^{٢}]_{١}^{٥} = -٥٧ + ٥٠-٢ = -١٠٥$

الاقتران المطلق " إعادة التعريف "

١) نساوي ما داخل المطلق بالصفر

٢) نعين الاصفار على خط الأعداد ونفحص إشارة ما داخل القيمة المطلقة

٣) المنطقة الموجبة تأخذ ما دخل المطلق نفسه ، المنطقة السالبة نضرب ما داخل المطلق بـ (- ١)

٤) إذا كان لدينا ضيوف نعيد التعريف ثم ندخل الضيوف على الاقتران

٥) لا تنسى طفل المطلق

$\int_{أ}^{ب} |ق(س)|^{ن}\,د س = \int_{أ}^{ب} ق(س)^{ن}\,د س$ ن : عدد زوجي

SALEEM ALSATEB

إقتران أكبر عدد صحيح " إعادة التعريف "

١) نجد طول الفقرة " ل " = $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$

٢) نجد نقطة البداية نساوي ما داخل [ ] بالصفر

٣) نضع خط الأعداد ونضيف ونطرح طول الدرجة (ل)، ونلتزم بالفترة (أطراف التكامل)

٤) نضع المساواة بحيث :

- معامل موجب ⟵ بداية

ب- معامل سالب ⟵ نهاية

- إذا كان لدينا [ ] و || فإننا نعيد تعريف الصحيح ثم نعيد تعريف المطلق .
- [س+أ] = [س] + أ

مشان ابلش خط الاعداد من الصفر دائما

أسئلة :

جد قيمة التكاملات التالية :

١) $\int_{٠}^{٨}$ | س – ٦ | . دس

الحل : س – ٦ = ٠ ⟸ س = ٦

ق (س)= { ٦ – س ، ٠ ≤ س ≤ ٦ ؛ س – ٦ ، ٦ ≤ س ≤ ٨ }

$\int_{٠}^{٨}$ ق (س) . دس = $\int_{٠}^{٦}$ ٦ – س . دس + $\int_{٦}^{٨}$ س – ٦.دس

= [٦ س – $\frac{س^{٢}}{٢}$]$_{٠}^{٦}$ + [$\frac{س^{٢}}{٢}$ - ٦ س]$_{٦}^{٨}$

= (١٨ – ٠) + (-١٦ + ١٨) = ٢٠

---

٢) $\int_{٠}^{٤}$ | ١٢ – ٣س^{٢} | . د س

الحل : ١٢ – ٣ س^{٢} = ٠ ⟸ س = ± ٢

ق (س) = { ١٢ – ٣ س^{٢} ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣ س^{٢} -١٢ ، ٢ ≤ س ≤ ٤ }

$\int_{٠}^{٤}$ ق (س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ١٢ – ٣ س^{٢} . دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٣س^{٢} -١٢. دس

= [١٢ س – س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + [س^{٣} – ١٢ س]$_{٢}^{٤}$

= (١٦ - ٠) + (١٦ + ١٦) = ٤٨

---

٣) $\int_{-٤}^{٢}$ $\sqrt{س^{٢}+٤س+٤}$. دس

الحل :

= $\int_{-٤}^{٢}$ $\sqrt{(س+٢)^{٢}}$. دس = $\int_{-٤}^{٢}$ | س + ٢ | . دس

س + ٢ = ٠ ⟸ س = -٢

ق(س) = { - س -٢ ، -٤ ≤ س ≤ -٢ ؛ س +٢ ، -٢ ≤ س ≤ ٢ }

$\int_{-٤}^{٢}$ ق (س) . دس = $\int_{-٤}^{-٢}$ - س -٢ . دس+ $\int_{-٢}^{٢}$ س + ٢ . دس

= [$\frac{-س^{٢}}{٢}$ -٢س]$_{-٤}^{-٢}$ + [$\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٢س]$_{-٢}^{٢}$

= (٢ – ٠) + (٦ + ٢) = ١٠

---

٤) $\int_{٠}^{\pi}$ $\sqrt{١-جا^{٢}س}$.دس

الحل :

$\int_{٠}^{\pi}$ $\sqrt{جتا^{٢}س}$. دس = $\int_{٠}^{\pi}$ | جتا س | . دس

جتا س = ٠ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$

ق(س) = { جتا س ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{٢}$ ؛ - جتا س ، $\frac{\pi}{٢}$ ≤ س ≤ π }

$\int_{٠}^{\pi}$ ق (س) . دس = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا س . دس+ $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ - جتا س . دس

= [جا س]$_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ - [جا س]$_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$

= (١ – ٠) – (-١ – ٠) = ٢

SALEM ALSATEB

٥) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\text{جتا}2س}$. دس

جتا٢س = ٢ جتا^{٢}س -١

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+2\text{جتا}^{٢}س}$. دس

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{2\text{جتا}^{٢}س}$. دس

نعيد التعريف

$= \sqrt{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\ .\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتاس}\ .\text{دس}\right)$

$= \sqrt{2}\left[\text{جاس}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\text{جاس}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}) = \sqrt{2}((١-٠)-(٠-١))$

$= ٢\sqrt{2}$

---

٦) $\int_{0}^{٣} |س^{٣} - ٣س - ٦|$. دس

الحل : ٣س – ٦ = ٠ == س = ٢

ق(س) = { ٦ س – ٣س^{٢} ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ; ٣ س^{٢} -٦س ، ٢ ≤ س ≤ ٣ }

$\int_{0}^{٣}$ ق (س) . دس

$= \int_{0}^{٢}$ ٦ س – ٣ س^{٢} .دس + $\int_{0}^{٢}$ ٣س^{٢} -٦ س . دس

= ٣ س^{٢} – س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + س^{٣} – ٣ س^{٢}]$_{٢}^{٣}$

= (٤ - ٠) + (٠ + ٤) = ٨

---

٧) $\int_{١}^{٤}$ [س + ١] . دس

الحل : ل = ١ ⟸ س+ ١ = ٠ ⟸ س = -١

ق(س) = { ٢ ، ١ ≤ س < ٢ ; ٣ ، ٢ ≤ س < ٣ ; ٤ ، ٣ ≤ س < ٤ }

$\int_{١}^{٤}$ ق(س) . دس = $\int_{١}^{٢}$ ٢ . د س + $\int_{٢}^{٣}$ ٣ . دس+ $\int_{٣}^{٤}$ ٤ . دس

=٢ + ٣ + ٤ = ٩

---

٨) $\int_{0}^{٣}$ [$\frac{١}{٢}$ س + ٤] . دس

الحل : ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢ ⟸ س + ٤ = ٠ ⟸ س = -٨

ق(س) = { ٤ ، ٠ ≤ س < ٢ ; ٥ ، ٢ ≤ س < ٣ }

$\int_{0}^{٣}$ ق(س) . دس = $\int_{0}^{٢}$ ٤ . د س + $\int_{٢}^{٣}$ ٥ . دس

= ٨ + ٥ = ١٣

---

٩) $\int_{0}^{٢}$[٢–٢س] . دس

الحل : ل = $\frac{١}{|-٢|}$ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ ٢ - ٢س = ٠ ⟸ س = ١

ق(س) = { ١ ، ٠ < س ≤ $\frac{١}{٢}$; ٠ ، $\frac{١}{٢}$ < س ≤ ١ ; -١ ، ١ < س ≤ $\frac{٣}{٢}$; -٢ ، $\frac{٣}{٢}$ < س ≤ ٢ }

$\int_{0}^{٢}$ ق(س) . دس

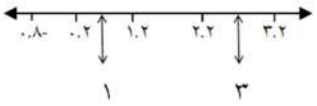
$= \int_{0}^{\frac{١}{٢}}$ ١ . د س + $\int_{\frac{١}{٢}}^{١}$ ٠ . دس + $\int_{١}^{\frac{٣}{٢}}$ ١ . دس+ $\int_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$ -٢ . دس

$= \frac{١}{٢} + ٠ + -\frac{١}{٢} + -١ = -١$

---

١٠) $\int_{١}^{٣}$[س+٠.٨] . دس

الحل: ل = ١ ، س + ٠.٨ = ٠ ⟸ س = - ٠.٨



ق(س) = { ١ ، ٠.٢ ≤ س < ١.٢ ; ٢ ، ١.٢ ≤ س < ٢.٢ ; ٣ ، ٢.٢ ≤ س < ٣.٢ }

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) .دس = $\int_{١}^{١.٢}$ ١ . دس + $\int_{١.٢}^{٢.٢}$ ٢ . دس + $\int_{٢.٢}^{٣}$ ٣ . دس

= ٠.٢ + ٢ + ٢.٤ = ٤.٦

SALEEM ALSATEB

١١) $\int_{-١}^{٢}$ [١ – س] | س | . دس

الحل : نعيد تعريف [١ – س]

ل = $\frac{١}{|-١|}$ = ١ ⟸ س = ١

ق (س) = { | س | × ١ ، -١ < س ≤ ٠ ; | س | × ٠ ، ٠ < س ≤ ١ ; | س | × -١ ، ١ < س ≤ ٢

نعيد تعريف | س | ⟸ س = ٠

ق (س) = { - س ، -١ < س ≤ ٠ ; صفر ، ٠ < س ≤ ١ ; - س ، ١ < س ≤ ٢

$\int_{-١}^{٢}$ ق(س).د س

= $\int_{-١}^{٠}$ - س. د س + $\int_{٠}^{١}$ ٠ .. د س + $\int_{١}^{٢}$ - س . د س

= - [$\frac{س^٢}{٢}$]$_{-١}^{٠}$ + [٠]$_{٠}^{١}$ + - [$\frac{س^٢}{٢}$]$_{١}^{٢}$

= (٠ + $\frac{١}{٢}$) + (-٢ + $\frac{١}{٢}$) = -١

---

١٢) إذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) المتصل على مجاله، وكان م(س) يمر بالنقطتين (-١،٣) ، (٠، ١)،فجد

$\int_{-١}^{١}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ - | س |) . دس

الحل :

$\int_{-١}^{١}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ + س) . دس = [$\frac{م(س)}{٢}$ + $\frac{س^٢}{٢}$]$_{-١}^{١}$

= ($\frac{م(٠)}{٢}$ + ٠) – ($\frac{م(-١)}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ - ($\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$)

= $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٤}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

إيجاد الثوابت في الاقتران المتشعب :

- إذا كان لدينا قيمة مطلقة نعيد التعريف .
- إذا كان لدينا] [وطلب منا السؤال إيجاد ثابت فإن الحل بالتجريب إذا كانت الفترة غير معلومة.
- في ثوابت المتشعب يجب معرفة الفترة لمعرفة الاقترانات التابعة للتكامل .

أسئلة :

١) إذا كان $\int_{٠}^{جـ}$ | ٢س – ٢ | . د س = ٥ ، جـ > ١

جد قيمة الثابت جـ

الحل : ٢س – ٢ = ٠ ⟸ س = ١

$\int_{٠}^{جـ}$ | ٢س – ٢| .د س

= $\int_{٠}^{١}$ ٢- ٢س. د س + $\int_{١}^{جـ}$ ٢ س – ٢ . د س

=٢س- س^٢]$_{١}^{جـ}$ + س^٢- ٢ س]$_{١}^{جـ}$

= ١ + جـ^٢- ٢جـ + ١ = ٥ ⟸ جـ^٢ – ٢ جـ -٣ = ٠

⟸ (جـ - ٣) (جـ + ١) = ٠ ⟸ جـ = ٣ ، جـ = -١ تهمل

---

٢) $\int_{١}^{جـ}$ [$\frac{١}{٣}$ س + ١] . د س = ١٢ جد قيمة الثابت

جـ : جـ > ١

الحل : نعيد التعريف

ل =٣ ⟸ $\frac{١}{٣}$ س + ١ = ٠ ⟸ س = - ٣

ق (س)= { ١ ، ٠ ≤ س < ٣ ; ٢ ، ٣ ≤س< ٦ ; ٣ ، ٦ ≤ س < ٩

التجريب :

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ١ . د س = ٢

$\int_{١}^{٦}$ ق(س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ١ . د س + $\int_{٣}^{٦}$ ٢ . د س = ٢ + ٦ = ٨

$\int_{١}^{٩}$ ق(س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ١ . د س + $\int_{٣}^{٦}$ ٢ . د س + $\int_{٦}^{٩}$ ٣ . د س

= ٢ + ٦ + ٩ = ١٧

⟸ جـ ∈ (٦ ، ٩)

SALEM ALSATEB

$\int_{1}^{3}$ ق(س) . د س = $\int_{1}^{3}$ ١ . د س + $\int_{3}^{6}$ ٢ . د س + $\int_{6}^{7}$ ٣ . د س

= ٢ + ٦ + ٣ جـ - ١٨ = ١٢ ⟸ جـ = $\frac{٢٢}{٣}$

---

٣) $\int_{2}^{7}$ [$\frac{س}{٢}$ - ١] . د س = ٤ جد قيمة الثابت جـ

الحل : ل = ٢ ⟸ س = ٢

ق (س)= { ٠ ، ٢ ≥ س < ٤ ؛ ١ ، ٤ ≥ س < ٦ ؛ ٢ ، ٦ ≥ س < ٨

$\int_{2}^{4}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س = صفر

$\int_{2}^{6}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س + $\int_{4}^{6}$ ١ . د س = ٠ + ٢ = ٢

$\int_{2}^{8}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س + $\int_{4}^{6}$ ١ . د س + $\int_{6}^{8}$ ٢ . د س = ٦

⟸ جـ ∋ (٦ ، ٨)

$\int_{2}^{7}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س + $\int_{4}^{6}$ ١ . د س + $\int_{6}^{7}$ ٢ . د س

= ٠ + ٢ + ٢جـ - ١٢ = ٢ جـ - ١٠ = ٤

⟸ جـ = ٧

---

٤) $\int_{1}^{4}$ [س + ن] . د س = ١٢

جد قيمة الثابت ن حيث ن ∋ الأعداد الصحيحة .

الحل :

$\int_{1}^{4}$ [س + ن] . د س = $\int_{1}^{4}$ [س] + ن . د س

نعيد التعريف

ل = ١ ⟸ س = ٠

ق (س)= { ١+ ن ، ١ ≥ س < ٢ ؛ ٢ + ن ، ٢ ≥ س<٣ ؛ ٣ + ن ، ٣ ≥ س <٤

$\int_{1}^{4}$ [س + ن] . د س

= $\int_{1}^{2}$ ١ +ن. د س + $\int_{2}^{3}$ ٢+ن. د س + $\int_{3}^{4}$ ٣+ن . د س

= ١ +ن + ٢+ن +٣ + ن =٣ن+٦ = ١٢ ⟸ ن = ٢

اشتقاق التكامل :

قواعد اشتقاق التكامل :

١) إذا كان ص = $\int_{أ}^{آ}$ ق(س).د س

فإن صَ = صفر

٢) إذا كان ص = $\int_{أ}^{آ}$ ق(س).د س

فإن صَ = ق(س)

أسئلة:

١) جد $\frac{د}{د س}$ ($\int$ س^{٢}+٤س+١.دس)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ ($\int$ س^{٢}+٤س+١.دس) = س^{٢}+٤س+١

---

٢) جد $\frac{د}{د س}$ ($\int_{١}^{ظ}$ جتا ٢س+٤س^{٢}+١.دس)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ ($\int_{١}^{ظ}$ جتا ٢س+٤س^{٢}+١.دس)= صفر

---

٣) اذا كان $\int$ س^{٢} + ق(س).دس = ٣س+١ جد ق (س)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ $\int$ س^{٢}+ق (س).دس = $\frac{د}{د س}$ (٣س+١)

⟸ س^{٢} + ق(س)=٣ ⟸ ق(س) =٣- س^{٢}

---

٤) إذا كان $\int$ (ظا^{٢} س – قا^{٢} س) ق(س).دس = س^{٢}

جد ق (س) .

الحل:

$\frac{د}{د س}$ $\int$ (طا^{٢} س – قا^{٢} س) ق(س).دس = $\frac{د}{د س}$ (س^{٢})

(طا^{٢}س – قا^{٢} س) ق (س) = ٢س (من المطابقة)

⟸ ق(س) =٢س ⟸ ق(س)=-٢س ⟸ ق(٣)=-٦

SALEEM ALSATEB

٥) إذا كان $\int$ ق(س).دس =جا^{٢} ٢س + ظاس + جـ فجد

قَ($\frac{\pi}{٤}$)

الحل :

$\frac{د}{د س}$($\int$ ق(س).دس) = $\frac{د}{د س}$ (جا^{٢} ٢س + ظاس + جـ)

ق(س) = ٢جا٢س جتا٢س×٢ + قا^{٢}س

ق(س)= ٢جا٤س + قا^{٢}س

قَ(س)=٨جتا٤س + ٢قا^{٢}س ظاس

ق($\frac{\pi}{٤}$)=٨جتا π +٢قا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$ظا$\frac{\pi}{٤}$

= -٨ +٤ = -٤

---

٦) إذا كان ص= $\int$ $\sqrt[٣]{س^{٢}+٣س+٥}$.دس

فجد $\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=-١}$.

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٣]{س^{٢}+٣س+٥}$

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=-١}$ = $\sqrt[٣]{٣}$

---

٧) إذا كان $\int$ ق(س).دس =جاس- جتاس +٢ اثبت أن

ق($\frac{\pi}{٢}$)- قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

الحل : نشتق الطرفين

ق(س)= جتاس +جاس ⟸ ق($\frac{\pi}{٢}$)= ١

قَ(س)=-جاس +جتاس ⟸ قَ($\frac{\pi}{٢}$) = -١

∴ ق($\frac{\pi}{٢}$)- قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ١- -١ = ٢

---

٨) إذا كان $\int$(قَ(س) – س) .دس

= هلو|قتاس+ظتاس|-٢ فأثبت أن قَ(س)=س-قتاس

الحل : نشتق الطرفين

قَ(س)-س = $\frac{-قتاس ظتاس-قتا^{٢}س}{قتاس+ظتاس}$ = $\frac{-قتاس(ظتاس+قتاس)}{قتاس+ظتاس}$

⟸قَ(س) = س – قتاس

---

٩) إذا كان $\int$ ق(س).دس = هـ$^{س^{٢}}$ +هلو جاس + جـ ،

فجد قَ(س) .

الحل : نشتق الطرفين

ق(س) = هـ$^{س^{٢}}$ ×٢س + $\frac{جتاس}{جاس}$

قَ(س) = (هـ$^{س^{٢}}$)(٢)+(٢س)(هـ$^{س^{٢}}$ ×٢س) + $\frac{جا^{٢}س-جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$

قَ(س)= ٢هـ$^{س^{٢}}$ +٤س^{٢}هـ$^{س^{٢}}$ - قتا^{٢}س

---

١٠) إذا كان $\int$ ق(س) . دس= ٨ + س^{٢}،فجد $\int_{-١}^{٢}$ قَ(س) . دس

الحل :

($\int$ق(س) . دس) $'$ = (٨ + س^{٢})$'$

⟸ ق(س) = ٢س

$\int_{-١}^{٢}$ قَ(س) . دس = ق(٢) – ق(-١) = ٤ + ٢ = ٦

---

١١) إذا كان ق(س) = س لو$_{هـ}$ س، فما قيمة $\int_{١}^{هـ}$ ق $''$(س) . دس

الحل :

ق(س) $'$ = س × $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س × ١

= ١ + لو$_{هـ}$ س

المطلوب :

$\int_{١}^{هـ}$ ق $''$(س) . دس = [ق$'$(س)]$_{١}^{هـ}$ = ق$'$(هـ) – ق$'$(١)

= (١ + لو$_{هـ}$ هـ) – (١ + لو$_{هـ}$ ١) = ٢ – ١ = ١

---

١٢) إذا كان ص= هـ^{أجتاس} +هلو جاس + $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ $\frac{دس}{٢+جاس}$

وكان صَ =-٢ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

صَ= هـ ^{أجتاس} ×-أجاس + $\frac{جتاس}{جاس}$

صَ= هـ ^{أجتاس} ×-أجاس + ظتاس

نعوض س= $\frac{\pi}{٢}$

صَ= هـ^{٠} ×-أ + ٠ =-٢ ⟸ أ=٢

SALEM ALSATEB

١٣) إذا كان ص= هـ$^{\text{ظاس}}$ +أ ∫$_{\text{ب}}^{\pi}$ لو جتاس + $\frac{١}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}$.دس

وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$ =٢هـ + ١ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{ظاس}}$ ×قا^{٢}س - أ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{ظاس}}$ ×قا^{٢}س - أ ظاس

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$ =هـ^{١}×٢ - أ =٢هـ +١ ⟸ أ = -١

---

١٤) اذا كان ∫ ٢ق$'$(س).دس = ٢س+جاس- ∫ جتاس ق$'$(س). دس

فجد ق$'$(٠) .

الحل:

٢ق$'$(س) = ٢ + جتاس – جتاس ق$'$(س)

٢ق$'$(٠) = ٢ + ١ – ١ ق$'$(٠)

= ٣ ق$'$(٠) = ٣ ⟸ ق$'$(٠) = ١

SALEEM ALSATEEB

التكامل بالتعويض :

يستخدم التكامل بالتعويض عند فشل الترتيب .

خطوات الحل :

١) نفرض ص ٢) نشتق دس = $\frac{\text{دص}}{\text{صَ}}$

٣) نجعل ما داخل التكامل كله ص .

٤) نكامل ونرجع ص إذا كان التكامل غير محدود .

إذا كان التكامل محدود نغير حدود التكامل ولا نرجع ص

يستخدم التكامل بالتعويض في الحالات التالية :-

١) قوس مرفوع لقوة ما داخله غير خطي

(كثير حدود × مركب) ⟸ ص = ما داخل القوس

٢) مثلثي زاويته غير خطية نفرض ص = الزاوية

٣) أسي قوته غير خطية نفرض ص = القوة

٤) مثلثي × مثلي ، نفرض أحدهما ص مع قليل من التفكير.

التفكير: أ) قا ، ظا ⟸ ص = قا القوة (قا) فردية

⟸ ص = ظا القوة (قا) زوجية

ب) قتا ، ظتا ⟸ ص = ظتا القوة (قتا) زوجية

⟸ ص = قتا القوة (قتا) فردية

ج) جا × جتا ⟸ ص = الأعلى قوة فردي ، فردي

⟸ ص = القوة زوجية فردي ، زوجي

٥) إذا كانت ق ، قَ ، قً ، ... وكان داخلها مش (س) نفرض ص = ما داخل ق .

٦) إذا كان لدينا $\sqrt{\text{س}}$ ، $\sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ، جا س ، ظا س ، ... داخل مكان غير مريح نفرضها ص لتحسين الشكل .

* لا تنسى الأصل في حالة وجود أي (س) .

أسئلة :

١) $\int$ ٢س (س^{٢} + ١)^{٥} . دس

الحل :

ص = س^{٢} + ١ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

= $\int$ ٢س (ص)^{٥} . $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$ = $\int$ ص^{٥} . دص

= $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}$ + جـ = $\frac{(\text{س}^{٢}+١)^{٦}}{٦}$ + جـ

---

٢) $\int$ ٥س^{٤} (س^{٥} + ٢)^{٦} . دس

الحل :

ص = س^{٥} + ٢ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥س^{٤} ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٥س}^{٤}}$

= $\int$ ٥س^{٤} (ص)^{٦} . $\frac{\text{دص}}{\text{٥س}^{٤}}$ = $\int$ ص^{٦} دص

= $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$ + جـ = $\frac{(\text{س}^{٥}+٢)^{٧}}{٧}$ + جـ

---

٣) $\int$ س^{٥} $\sqrt{\text{س}^{٣}+٢}$. دس

الحل :

ص = س^{٣} + ٢ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ س^{٢} ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}}$

= $\int$ س^{٥} $(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{١}{٢}}$. دس

= $\int$ س^{٥} (ص)$^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}}$

= $\int$ س^{٣} (ص)$^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{\text{دص}}{٣}$ ⟸ س^{٣} = ص − ٢

= $\int$ (ص − ٢) (ص)$^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{\text{دص}}{٣}$

= $\int$ $\frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ - $\frac{\text{٢ص}^{\frac{١}{٢}}}{٣}$. دص

= $\frac{٢}{١٥}$ $(\text{ص})^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٤}{٩}$ $(\text{ص})^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

= $\frac{٢}{١٥}$ $(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٤}{٩}$ $(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

SALEEM ALSATEB

٤) $\int \frac{٢س+٤}{\sqrt[٥]{س^٢+٤س+٥}}$.دس

الحل :

$\int (٢س + ٤)\ (س^٢+٤س+٥)^{\frac{١}{٥}}$.دس

ص = $س^٢$ + ٤س + ٥ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ٤ $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س+٤}$

= $\int (٢س + ٤)\ (ص)^{\frac{١}{٥}} . \frac{دص}{٢س+٤}$

= $\int (ص)^{\frac{١}{٥}} .دص = \frac{٥}{٤}\ ص^{\frac{٤}{٥}} + جـ$

= $\frac{٥}{٤}\ (س^٢+٤س+٥)^{\frac{٤}{٥}} + جـ$

---

٥) $\int_{٠}^{٣} \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}}$.دس

الحل :

ص = $س^٢$ + ١ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س}$

$\int_{٠}^{٣} س\ (س^٢+١)^{-\frac{١}{٢}} .دس = \int_{١}^{١٠} س\ ص^{-\frac{١}{٢}} . \frac{دص}{٢س}$

= $\int_{١}^{١٠} \frac{ص^{-\frac{١}{٢}}}{٢} .دص = ص^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{١٠} = \sqrt{١٠} - ١$

---

٦) $\int س^{١٣} (\frac{١}{س^٢}+٢)^٥$. دس

الحل :

$\int س^{١٣} \left(\frac{١+٢س^٢}{س^٢}\right)^٥$. دس

= $\int \frac{س^{١٣}}{س^{١٠}} (١+٢س^٢)^٥$. دس

= $\int س^٣ (١+٢س^٢)^٥$. دس

ص = ١ + $٢س^٢$

دس = $\frac{دص}{٤س}$

$\int س^٣ (ص)^٥ . \frac{دص}{٤س}$

$\int \frac{س^٢}{٤} (ص)^٥ .دص \Leftarrow س^٢ = \frac{ص-١}{٢}$

= $\frac{١}{٨}\int (ص - ١)\ ص^٥ .دص$

= $\frac{١}{٨}\int ص^٦ - ص^٥ .دص$

= $\frac{١}{٨}\ (\frac{ص^٧}{٧} - \frac{ص^٦}{٦}) + جـ$

= $\frac{١}{٨}\ (\frac{(١+٢س^٢)^٧}{٧} - \frac{(١+٢س^٢)^٦}{٦}) + جـ$

---

٧) $\int (س - ١)^٣\ (س^٢ - ٢س + ٥)^٧$. دس

الحل :

ص = $س^٢$ - ٢س + ٥ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س – ٢

$\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س-٢}$

= $\int (س - ١)^٣ ص^٧ . \frac{دص}{٢س-٢}$

= $\int \frac{(س-١)^٢}{٢} ص^٧ .دص$

= $\int (س^٢ - ٢س + ١)\ \frac{ص^٧}{٢} .دص$

$\Leftarrow$ص – ٤ = $س^٢$ - ٢س + ١

= $\int (ص - ٤)\ \frac{ص^٧}{٢} .دص$

= $\int \frac{ص^٨}{٢} - ٢ ص^٧ .دص$

= $\frac{ص^٩}{١٨} - \frac{٢ص^٨}{٨} + جـ$

= $\frac{(س^٢-٢س+٥)^٩}{١٨} - \frac{(س^٢-٢س+٥)^٨}{٤} + جـ$

SALEEM ALSATEB

٨) $\int \frac{٢}{س^{٢}-١} \sqrt{\frac{س-١}{س+١}}$. دس

الحل :

$ص = \frac{س-١}{س+١} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{(س+١)\times ١-(س-١)}{(س+١)^{٢}}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٢}{(س+١)^{٢}} \Leftarrow دس = \frac{(س+١)^{٢}}{٢}$ دص

$= \int \frac{٢}{س^{٢}-١} ص^{\frac{١}{٢}} . \frac{(س+١)^{٢}}{٢}$ دص

$= \int (\frac{س+١}{س-١}) ص^{\frac{١}{٢}} . دص = \int \frac{١}{ص} \times ص^{\frac{١}{٢}} . دص$

$= \int ص^{\frac{-١}{٢}} . دص = ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + جـ = ٢ (\frac{س+١}{س-١})^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

٩) $\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{٢س-١}{س}}$. دس

الحل :

$ص = \frac{٢س-١}{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{س(٢)-(٢س-١)}{س^{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س^{٢}} \Leftarrow دس = س^{٢} . دص$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} . س^{٢} . دص = \int ص^{\frac{١}{٢}} . دص$

$= \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} (\frac{٢س-١}{س})^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

١٠) $\int \frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^{٥}}}$. دس

$= \int \sqrt{\frac{س+١}{س}} \times \frac{١}{\sqrt{س^{٤}}}$. دس

$= \int (\frac{س+١}{س})^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٢}}$. دس

$ص = \frac{س+١}{س} = ١ + \frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}} \Leftarrow دس = - س^{٢} . دص$

$= \int ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٢}} \times - س^{٢} . دص$

$= \int - ص^{\frac{١}{٢}} . دص = - \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= - \frac{٢}{٣} (\frac{س+١}{س})^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

---

١١) $\int (\frac{س+١}{س-١})^{٢}$. دس

الحل:

نفرض ان: $ص = \frac{س-١}{س+١} \Leftarrow ص + ١ = \frac{س}{س+١}$

$\frac{دص}{دس} = ١ \Leftarrow دس = دص$

$\Leftarrow \int (\frac{ص+١}{ص})^{٢} . دص = \int (\frac{ص+٢}{ص})^{٢} . دص$

$= \int \frac{ص^{٢}+٤ص+٤}{ص^{٢}} . دص$

$= \int ١ + \frac{٤}{ص} + ٤ص^{-٢} . دص$

$= ص + ٤ لو_{هـ} |ص| - ٤ص^{-١} + جـ$

$= س - ١ + ٤ لو_{هـ} |س-١| - ٤(س-١)^{-١} + جـ$

---

١٢) $\int \frac{(٢س+٣)^{٥}}{س^{٧}}$. دس

الحل :

$= \int \frac{(٢س+٣)^{٥}}{س^{٥}} \times \frac{١}{س^{٢}}$. دس

$= \int (٢+\frac{٣}{س})^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}}$. دس

$ص = ٢ + \frac{٣}{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{س^{٢}} \Leftarrow دس = \frac{س^{٢}}{-٣}$. دص

$\Leftarrow \int ص^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{س^{٢}}{-٣}$. دص

$= \int \frac{-ص^{٥}}{٣} . دص = \frac{-١}{١٨} ص^{٦} + جـ$

SALEEM ALSATEB

$= \frac{-١}{١٨}\left(\frac{٣}{س}+٢\right)^{٦} + جـ$

---

١٣) $\int \frac{(أس+ب)^{ن}}{س^{ن+٢}}$.دس ، حيث أ ، ب ، ن ثوابت

الحل:

$= \int \frac{(أس+ب)^{ن}}{س^{ن}} \times \frac{١}{س^{٢}}$.دس

$= \int \left(\frac{أس+ب}{س}\right)^{ن} \times \frac{١}{س^{٢}}$.دس

نفرض ص $= \frac{أس+ب}{س}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{س \times أ - (أس+ب) \times ١}{س^{٢}}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{-ب}{س^{٢}} \quad \frac{١}{س^{٢}}$

دس $= \frac{س^{٢}}{-ب}$.دص

$\Leftarrow = \int ص^{ن} \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{س^{٢}}{-ب}$.دص

$= \frac{-١}{ب} \int ص^{ن}$.دص $= \frac{-١}{ب(ن+١)} \times ص^{ن+١} + جـ$

$= \frac{-١}{ب(ن+١)} \times \left(\frac{أس+ب}{س}\right)^{ن+١} + جـ$

---

١٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس جتاس}{\sqrt{١+جا^{٢}س}}$.دس

الحل :

ص = ١ + جا^{٢} س $\Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢$ جاس جتا س

$\Leftarrow$ د س $= \frac{دص}{٢جاس جتاس}$

ص$_{١}$ = ١ ص$_{٢}$ = ٣

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ص^{\frac{-١}{٢}}}{٢}$. دص $= ص^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{٣} = \sqrt{٣} - ١$

---

١٥) $\int \frac{جا\ ٢س}{جتا^{٢}٢س}$.دس

الحل :

ص = جتا٢س $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{-٢جا٢س}$

$= \int \frac{جا\ ٢س}{ص^{٢}} \cdot \frac{دص}{-٢جا٢س}$

$= \int \frac{-ص^{-٢}}{٢}$.دص $= \frac{ص^{-١}}{٢} + جـ$

$= \frac{١}{٢جتا٢س} + جـ = \frac{قا^{٢}س}{٢} + جـ$

حل اخر:

$\int \frac{جا\ ٢س}{جتا^{٢}٢س}$.دس $= \int \frac{جا\ ٢س}{جتا٢س} \times \frac{١}{جتا٢س}$.دس

$= \int$ ظا٢س $\times$ قا ٢س .دس $= \frac{قا^{٢}س}{٢} + جـ$

---

١٦) $\int \frac{١}{جتا^{٢}س \sqrt{ظاس - ١}}$.دس

الحل :

ص = ظاس – ١ $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int \frac{قا^{٢}س}{\sqrt{ظاس-١}}$.دس

$= = \int \frac{قا^{٢}س}{\sqrt{ص}} \cdot \frac{دص}{قا^{٢}س} = \int ص^{\frac{-١}{٢}}$.دص

$= ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + جـ = ٢ (ظاس)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

١٧) $\int جا\ ٢س \sqrt{٢جتا٢س - ٢}$.دس

الحل :

ص = ٢ جتا ٢س – ٢ $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{-٤جا٢س}$

$= \int جا\ ٢س\ ص^{\frac{١}{٢}} \cdot \frac{دص}{-٤جا٢س}$

SALEM ALSATEB

$= \int \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{-٤} \cdot دص = \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{-٦} + جـ$

$= \frac{-١}{٦} (٢جتا٢س-٢)^{\frac{3}{2}} + جـ$

---

١٨) $\int$ ٢ س جا $(س^{٢} - ١)$. دس

الحل :

$ص = س^{٢} + ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢ س \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int ٢س جا ص . \frac{دص}{٢س} = \int جا ص . دص = -$ جتا ص + جـ

$= -$ جتا $(س^{٢} - ١)$ + جـ

---

١٩) $\int$ س قا $(١ - ٢س^{٢})$ ظا $(١ - ٢س^{٢})$. دس

الحل :

$ص = ١ - ٢س^{٢} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٤س \Leftarrow دس = \frac{دص}{-٤س}$

$= \int س قا ص ظا ص . \frac{دص}{-٤س}$

$= \int قا ص ظا ص . \frac{دص}{-٤} = -\frac{قاص}{٤} + جـ$

$= \frac{-قا(١-٢س^{٢})}{٤} + جـ$

---

٢٠) $\int \frac{جا\sqrt{س}}{\sqrt{س}} .$ دس

الحل :

$ص = \sqrt{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow دس = ٢\sqrt{س} . دص$

$= \int ٢ جا ص . دص = -٢$ جتاص $+ جـ = -٢$ جتا$\sqrt{س} + جـ$

---

٢١) $\int \frac{جا(لو_{هـ} س)}{س} .$ دس

الحل:

$ص = لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{س} \Leftarrow دس = س دص$

$= \int \frac{جاص}{س} س . دص \Leftarrow \int جاص \ دص$

$= -$جتاص $+ جـ = -$جتا$(لو_{هـ} س) + جـ$

---

٢٢) $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}+١} .$ دس

الحل :

$ص = س^{٣} + ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\int س^{٢} هـ^{ص} . \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int \frac{هـ^{ص}}{٣} .$ دص

$= \frac{هـ^{ص}}{٣} + جـ = \frac{هـ^{(س^{٣}+١)}}{٣} + جـ$

---

٢٣) $\int قا^{٢}س$ هـ$^{ظاس} .$ دس

الحل :

$ص =$ ظا س $\Leftarrow \frac{دص}{دس} = قا^{٢}س \Leftarrow دس = \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int قا^{٢}س$ هـ$^{ص} . \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int$ هـ$^{ص} .$ دص $=$ هـ$^{ص} + جـ =$ هـ$^{ظاس} + جـ$

---

٢٤) $\int$ جا ٢س هـ$^{جا^{٢}س} .$ دس

الحل :

$ص = جا^{٢}س \Leftarrow \frac{دص}{دس} =$ ٢جاس جتاس

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} =$ جا ٢س $\Leftarrow دس = \frac{دص}{جا٢س}$

$= \int$ هـ$^{ص} .$ دص $=$ هـ$^{ص} + جـ =$ هـ$^{جا^{٢}س} + جـ$

قاعدة: $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} .$ دس $= لو_{هـ}|ق(س)| + جـ$

٢٥) $\int \frac{٣س^{٢}-٢}{س^{٣}-٢س+١} .$ دس

الحل :

$= لو_{هـ}|س^{٣} - ٢س + ١| + جـ$

---

٢٦) $\int$ طاس. دس

الحل :

$\int \frac{جاس}{جتاس} .$ دس $= -لو_{هـ}|$جتاس$| + جـ$

SALEM ALSATEB

٢٧) ∫ظتاس. دس

الحل :

$$\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \cdot \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{جـ}$$

---

٢٨) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١+\text{جتا}٣\text{س}} \cdot$ دس

الحل :

ص = ١ + جتا ٣س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣\ \text{جا}٣\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٣\text{جا}٣\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{-٣\text{جا}٣\text{س}}$$

$$= \frac{-١}{٣} \int \frac{١}{\text{ص}} \cdot \text{دص} = \frac{-١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |١ + \text{جتا}\ ٣\text{س}| + \text{جـ}$$

---

٢٩) ∫ جا^{٥}س جتا^{٣}س . دس

الحل :

= ∫ جا^{٥}س (١ – جا^{٢}س) جتاس . دس

ص = جاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

= ∫ ص^{٥} (١ – ص^{٢}) جتاس . $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

= ∫ ص^{٥} – ص^{٧} . دص = $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} - \frac{\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

= $\frac{\text{جا}^{٦}\text{س}}{٦} - \frac{\text{جا}^{٨}\text{س}}{٨} + \text{جـ}$

---

٣٠) ∫ جتا^{٤}س جا^{٣}س . دس

الحل :

∫ جتا^{٤}س (١ – جتا^{٢}س) جاس . دس

ص = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ص^{٤} (١ –ص^{٢}) جاس . $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ص^{٦} – ص^{٤} . دص = $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

= $\frac{\text{جتا}^{٧}\text{س}}{٧} - \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$

---

٣١) ∫ جا^{٥}س جتا^{٢}س . دس

الحل :

= ∫ جاس (١ – جتا^{٢}س) (١ – جتا^{٢}س) جتا^{٢}س . دس

ص = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ جاس (١ – ص^{٢}) (١ – ص^{٢}) ص^{٢} . $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ٢ص^{٤} – ص^{٦} – ص^{٢} . دص

= = $\frac{٢}{٥}$ ص^{٥} - $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

= $\frac{٢}{٥}$ جتا^{٥}س - $\frac{\text{جتا}^{٧}\text{س}}{٧} - \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

---

٣٢) ∫ جا^{٣}س . دس

الحل :

∫ جاس (١ – جتا^{٢}س) . دس

ص = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ جاس (١ – ص^{٢}) . $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ص^{٢} – ١ . دص = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ - ص + جـ

= $\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ - جتا س + جـ

---

٣٣) ∫ جا^{٢}س جتا^{٤}س.دس

الحل :

= ∫ $\frac{١}{٨}$ (١-جتا٢س)(١+جتا٢س)(١+جتا٢س) .دس

= ∫ $\frac{١}{٨}$ (١-جتا^{٢} ٢س)(١+جتا٢س).دس

= ∫ $\frac{١}{٨}$ جا^{٢} ٢س (١+جتا٢س).دس

SALEM ALSATEB

= $\frac{١}{٨}$ ∫جا^{٢} ٢س.دس + ∫ $\frac{١}{٨}$ جا^{٢} ٢س جتا٢س.دس

ص = جا٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢جتا٢س}}$

= ∫ $\frac{١}{٨}$ (١-جتا٤س).دس + $\frac{١}{٨}$ ∫ ص^{٢} جتا٢س. $\frac{\text{دص}}{\text{٢جتا٢س}}$

= $\frac{١}{٨}$ (س- $\frac{١}{٤}$ جا٤س)+ $\frac{١}{١٦}$ ∫ ص^{٢} .دص

= $\frac{١}{٨}$ (س- $\frac{١}{٤}$ جا٤س)+ $\frac{١}{٤٨}$ ص^{٣} +جـ

= $\frac{١}{٨}$ (س- $\frac{١}{٤}$ جا٤س)+ $\frac{١}{٤٨}$ جا^{٢} ٢س +جـ

---

٣٤) ∫ جاس (١ + جتا٢س)^{٣} . دس

الحل :

= ∫ جاس (١ + ٢جتا^{٢}س – ١)^{٣} . دس

= ∫ جاس × ٨ جتا^{٦}س . دس

ص = جتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - جاس ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{–جاس}}$

∫ ٨ جاس ×ص^{٦} . $\frac{\text{دص}}{\text{–جاس}}$

= ∫ - ٨ ص^{٦} . دص

= $\frac{\text{–٨}}{٧}$ ص٧ + جـ = $\frac{\text{–٨}}{٧}$ (جتا^{٧}س) + جـ

---

٣٥) ∫قا^{٢} س ظا^{٢} س . دس

الحل :

ص = ظا س⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا^{٢}س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

=∫ ص^{٢} . دص = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ = $\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

٣٦) ∫ قتا^{٤}س ظتا^{٣}س.دس

الحل:

ص=ظتاس ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$=-قتا^{٢}س⟸ دس= $\frac{\text{دص}}{\text{–قتا}^{٢}\text{س}}$

∫ قتا^{٤}س ص^{٣}. $\frac{\text{دص}}{\text{–قتا}^{٢}\text{س}}$ = ∫ -قتا^{٢}س ص^{٣}.دص

∫ -(ظتا^{٢}س+١) ص^{٣}.دص =∫ -(ص^{٢}+١) ص^{٣}.دص

=∫ -ص^{٥}–ص^{٣} .دص =- $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}$ - $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$+جـ

=- $\frac{\text{ظتا}^{٦}\text{س}}{٦}$ - $\frac{\text{ظتا}^{٤}\text{س}}{٤}$+جـ

---

٣٧)∫ قا^{٥}س طا^{٣}س.دس

الحل:

ص=قاس ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$=قاس ظاس⟸ دس= $\frac{\text{دص}}{\text{قاسظاس}}$

=∫ص^{٥} طا^{٣}س. $\frac{\text{دص}}{\text{قاسظاس}}$ = ∫ص^{٤}طا^{٢}س.دص

=∫ص^{٤} (قا^{٢}س-١).دص=∫ص^{٦}-ص^{٤}.دص

$\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$ - $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$+جـ = $\frac{\text{قا}^{٧}\text{س}}{٧}$ - $\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}$+جـ

---

٣٨)∫ قا^{٤}س . دس

الحل :

= ∫ قا^{٢}س (١+ظا^{٢}س) . دس

ص = ظا س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ قا^{٢} س (١ + ص^{٢}) . $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ = ∫ ١ + ص^{٢} . دص

= ص + $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ = ظاس + $\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

---

٣٩) ∫ ظا^{٣} س . دس

الحل :

= ∫ (قا^{٢}س – ١) ظا س . دس

= ∫ قا^{٢}س ظاس . دس - ∫ ظا س . دس

SALEM ALSATEB

ص = ظا س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ قا^{٢}س × ص . $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ - ∫ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$. دس

= ∫ ص . دص + لو$_{هـ}$ | جتاس|

= $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + $_{هـ}$لو|جتاس| +جـ

= $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + $_{هـ}$لو|جتاس| + جـ

---

٤٠) ∫ ظتا^{٤}س .دس

الحل:

∫ ظتا^{٢}س × ظتا^{٢}س .دس = ∫ ظتا^{٢}س × (قتا^{٢}س-١).دس

= ∫ ظتا^{٢}س × قتا^{٢} س .دس - ∫ ظتا^{٢}س . دس

نفرض ص = ظتا س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - قتا^{٢}س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

⟸= ∫ ص^{٢} × قتا^{٢} س . $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$ - ∫ قتا^{٢}س-١ . دس

= $\frac{-\text{ص}^{٣}}{٣}$ - (-ظتاس – س) + جـ

= $\frac{-\text{ظتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ - (-ظتاس – س) + جـ

---

٤١) ∫ $\frac{(\text{جاس-جتاس})^{٥}}{\text{جا}^{٧}\text{س}}$. دس

= ∫ $\frac{(\text{جاس-جتاس})^{٥}}{\text{جا}^{٥}\text{س}}$ × $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$. دس

= ∫ (١ + ظتاس)^{٥} × قتا^{٢}س . دس

ص = ١ + ظتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - قتا٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

⟸ ∫ ص^{٥} × قتا^{٢}س . $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ - ص^{٥} . دص = $\frac{-\text{ص}^{٦}}{٦}$ + جـ

= $\frac{-١}{٦}$ (١ + ظتاس)^{٦} + جـ

---

٤٢) ∫ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}(٢+\sqrt{\text{س}})}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{\text{س}}$ ⟸ دس = ٢ $\sqrt{\text{س}}$ دص

= ∫ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}(٢+\text{ص})}$. ٢ $\sqrt{\text{س}}$. دص

= ∫ $\frac{٢}{(٢+\text{ص})}$. دص = ٢ $_{هـ}$لو| ص + ٢ | + جـ

= ٢ $_{هـ}$لو| $\sqrt{\text{س}}$ + ٢| + جـ

---

٤٣) ∫ $\frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥+\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$

ص^{٣} = س ⟸ ٣ص^{٢} . دص = دس

⟸ ∫ $\frac{\text{ص}}{٥+\text{ص}^{٤}}$. ٣ص^{٢} . دص

= ∫ $\frac{٣\text{ص}^{٣}}{٥+\text{ص}^{٤}}$. دص

ع = ٥ + ص^{٤} ⟸ $\frac{\text{دع}}{\text{دص}}$ = ٤ص^{٣} ⟸ دص = $\frac{\text{دع}}{٤\text{ص}^{٣}}$

⟸ = ∫ $\frac{٣\text{ص}^{٣}}{٥+\text{ص}^{٤}}$. دص = ∫ $\frac{٣\text{ص}^{٣}}{\text{ع}}$. $\frac{\text{دع}}{٤\text{ص}^{٣}}$

= $\frac{٣}{٤}$ ∫ $\frac{١}{\text{ع}}$. دع = $\frac{٣}{٤_{هـ}}$ لو|ع| + جـ

= $\frac{٣}{٤}$ $_{هـ}$لو| ٥ + ص^{٤} | + جـ = $\frac{٣}{٤}$ $_{هـ}$لو| ٥ + $\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}$ | + جـ

SALEEM ALSATEB

٤٤) $\int \frac{س^{٩}}{\sqrt{س^{٥}-٢}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س^{٥}-٢}$

ص^{٢} = س^{٥} − ٢ ⟸ س^{٥} = ص^{٢} + ٢

٢ص . دص = ٥س^{٤} . دس ⟸ دس = $\frac{٢ص.دص}{٥س^{٤}}$

$\int \frac{س^{٩}}{ص} \cdot \frac{٢ص.دص}{٥س^{٤}}$

= $\frac{٢}{٥}\int س^{٥}$. دص = $\frac{٢}{٥}\int$ ص^{٢} + ٢

= $\frac{٢}{٥}\left(\frac{ص^{٣}}{٣}+٢ص\right)$ + جـ

= $\frac{٢}{٥}\left(\frac{\left(\sqrt{س^{٥}-٢}\right)^{٣}}{٣}+٢\sqrt{س^{٥}-٢}\right)$ + جـ

---

٤٥) $\int$ قاس . دس

الحل :

= $\int$ قاس × $\frac{قاس+ظاس}{قاس+ظاس}$. دس

= $\int \frac{قا^{٢}س+قاس ظاس}{قاس+ظاس}$. دس

ص = قاس + ظاس ⟸ دس = $\frac{دص}{قاس ظاس+قا^{٢}س}$

= $\int \frac{قا^{٢}س+قاس ظاس}{ص} \cdot \frac{دص}{قاس ظاس+قا^{٢}س}$

= $\int \frac{١}{ص}$. دص = هـلو|ص| + جـ

= هـلو| قاس + ظاس | + جـ

---

٤٦) $\int$ جاس ظاس . دس

الحل :

= $\int \frac{جا^{٢}س}{جتاس}$. دس = $\int \frac{١-جتا^{٢}س}{جتاس}$. دس

= $\int \frac{١}{جتاس}$ - جتاس . دس

= $\int$ قاس × $\frac{قاس+ظاس}{قاس+ظاس}$ - جتاس . دس

= $\int \frac{قا^{٢}س+ظاس قاس}{قاس+ظاس}$ - جتاس . دس

= هـلو| قاس + ظاس | - جاس + جـ

---

٤٧) $\int$ جتاس ظتاس . دس

الحل :

= $\int \frac{جتا^{٢}س}{جاس}$. دس = $\int \frac{١-جا^{٢}س}{جاس}$. دس

= $\int \frac{١}{جاس}$ - جاس . دس

= $\int$ قتاس × $\frac{قتاس+ظتاس}{قتاس+ظتاس}$ - جاس . دس

= - هـلو| قتاس ظتاس | + جتاس + جـ

---

٤٨) $\int \frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{هـ^{س}+هـ^{-س}}$. دس

الحل :

ص = هـ^{س} + هـ$^{-س}$ ⟸ دس = $\frac{دص}{هـ^{س}+هـ^{-س}}$

= $\int \frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{هـ} \cdot \frac{دص}{هـ^{س}+هـ^{-س}}$ = $\frac{١}{ص}$. دص

= هـلو|ص| + جـ = هـلو| هـ^{س} + هـ$^{-س}$| + جـ

---

٤٩)إذا كان $\int_{٣}^{١}$ ق(س).دس = ٧ جد $\int_{٠}^{٢}$ ق(س + ١) .دس

الحل :

ص = س + ١ ⟸ دس = دص ، ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ٣

= $\int_{١}^{٣}$ ق(ص) . دص = - $\int_{١}^{٣}$ ق(س).دس = -٧

---

٥٠) إذا كان $\int_{١٠}^{١}$ ق(س).دس = ٧جد $\int_{٠}^{٣}$ س ق(س^{٢} + ١). دس

الحل :

ص = س^{٢} + ١ ⟸دس = $\frac{دص}{٢س}$

ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ١٠

= $\frac{١}{٢}\int_{١}^{١٠}$ ق(ص) . دص = $\frac{-٧}{٢}$

SALEEM ALSATEB

٥١)جد $\int_{ب}^{أ}$ س قَ(س^{٢}) . دس،إذا كان ق(١) = ٢،ق(٤) = ٤ ؟

الحل :

ص = س٢ $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ٤

$\int_{ب}^{أ}$ س قَ(ص) . $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$ = $\int_{ب}^{أ}$ $\frac{\text{ق(ص)}}{\text{٢}}$.دص

= $\frac{\text{ق(ص)}}{\text{٢}}$]$_{١}^{٤}$ = $\frac{\text{ق(ص)}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{ق(٤)}}{\text{٢}}$ - $\frac{\text{ق(١)}}{\text{٢}}$ = ١

٥٢) اذا كان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤ جد : $\int_{١}^{٢}$ ٣ق$'$(س) $\sqrt{\text{ق(س)}}$ بس

الحل :

نفرض ان ص= ق(س) $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{ق}'\text{(س)}}$

ص$_{١}$= ق(١) = ١ ، ص$_{٢}$= ق(٢) = ٤

$\int_{١}^{٢}$ ٣ق$'$(س) $\sqrt{\text{ص}}$. $\frac{\text{دص}}{\text{ق}'\text{(س)}}$

= $\int_{١}^{٤}$ ٣ص$^{\frac{١}{٢}}$.دص

= ٢ص$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{١}^{٤}$

= ٢ $\sqrt{\text{(ص)}^{٣}}$]$_{١}^{٤}$ = ٢ $\sqrt{٦٤}$ - ٢

التكامـــــل بـــالأجـزاء :

- يُستخدم التكامل بالأجزاء عند فشل التعويض ويكون ذلك بفرض ق (الأسهل في الذوبان) ونشتقه دهـ (الباقي) ونكامل

القاعدة : -

$\int$ ق . دهـ = ق . هـ - $\int$ هـ . دق

الإثبات :

(ق.هـ)$'$ = ق × $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$ + هـ × $\frac{\text{دق}}{\text{دس}}$

$\int$ (ق.هـ)$'$. دس = $\int$ ق × $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$.دس+$\int$ هـ × $\frac{\text{دق}}{\text{دس}}$.دس

$\Leftarrow$ ق . هـ = $\int$ ق . دهـ + $\int$ هـ . دق

$\Leftarrow$ $\int$ ق . دهـ = ق . هـ - $\int$ هـ . دق

يُستخدم التكامل بالأجزاء في أكالات التاليـة

١. كثير حدود × قوس مرفوع لقوة ما داخله خطي

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٢. كثير حدود × مثلثي زاويته خطية

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٣. كثير حدود × هـ قوته خطية

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٤. كثير حدود × ق$'$(س)

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٥. إذا كان لدينا (لو)في البسط و داخله كثير حدود نفرض دائماً ق هو (لو)والباقي دهـ

أسئلة :

١) $\int$ س (س + ٣)^{٣} . دس

ق دهـ

الحل :

ق = س ⟵ دق = ١ . دس

$\int$دهـ =$\int$(س + ٣)^{٣}.دس ⟵ هـ = $\frac{\text{(س+٣)}^{٤}}{\text{٤}}$

= $\frac{\text{س}}{\text{٤}}$ (س + ٣)^{٤} - $\int$ $\frac{\text{(س+٣)}^{٤}}{\text{٤}}$. دس

= $\frac{\text{س}}{\text{٤}}$ (س + ٣)^{٤} - $\frac{\text{(س+٣)}^{٥}}{\text{٢٠}}$ + جـ

SALEM ALSATEB

٢) ∫ س $\sqrt{١-س}$. دس

الحل :

$= \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}} \underbrace{(١-س)^{\frac{١}{٢}}}_{\text{دهـ}} . \text{دس}$

ق = س ⟵ دق = ١ . دس

∫.دهـ = $(١-س)^{\frac{١}{٢}}$ ∫.دس ⟵ هـ = $\frac{٢(١-س)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$

= $\frac{-٢}{٣}$ س $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ - ∫ $\frac{-٢}{٣}$ $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$. دس

= $\frac{-٢}{٣}$ س $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ - $\frac{-٤}{١٥}$ $(١-س)^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

---

٣) ∫ س جاس . دس

الحل :

ق = س ⟵ دق = ١ . دس

∫.دهـ = ∫جاس . دس ⟵ هـ = - جتاس

= - س جتاس + ∫جتاس . دس

= - س جتاس + جاس + جـ

---

٤) ∫ ٤س جتا (٢س + ١) . دس

الحل :

ق = ٤س ⟸ دق = ٤ . دس

∫.دهـ = ∫جتا(٢س + ١) .دس ⟸ هـ = $\frac{\text{جا}(٢س-١)}{٢}$

= ٢س جا (٢س - ١) - ∫ ٢ جا (٢س- ١) . دس

= ٢س جا (٢س - ١) + جتا (٢س- ١) + جـ

---

٥) ∫ (س + ١) $\text{هـ}^{٢س}$. دس

الحل :

ق = (س + ١) ⟸ دق = ١ . دس

∫.دهـ = ∫$\text{هـ}^{٢س}$.دس ⟸ هـ = $\frac{\text{هـ}^{٢س}}{٢}$

= (س + ١) $\frac{\text{هـ}^{٢س}}{٢}$ - ∫ $\frac{\text{هـ}^{٢س}}{٢}$. دس

= (س + ١) $\frac{\text{هـ}^{٢س}}{٢}$ - $\frac{\text{هـ}^{٢س}}{٤}$ + جـ

---

٦) ∫ $(\text{س} - ٢)^{٢}$ جتا (س – ١) . دس

الحل :

ق = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ ⟸ دق = ٢(س – ٢) . دس

∫.دهـ =∫جتا (س – ١) . دس ⟸ هـ = جا (س – ١)

=$(\text{س} - ٢)^{٢}$ جا (س – ١) - ∫ ٢جا (س – ١)(س – ٢) . دس

ق = ٢(س – ٢) ⟸ دق = ٢ . دس

∫.دهـ = ∫جا (س – ١) . دس ⟸ هـ = - جتا (س – ١)

= $(\text{س} - ٢)^{٢}$ جا (س – ١) – (-٢(س – ٢)جتا (س – ١)

+ ∫ ٢ جتا (س – ١) . دس)

= $(\text{س} - ٢)^{٢}$ جا (س – ١) + ٢ (س – ١) جتا (س – ١)

– ٢جا (س – ١) + جـ

---

٧) ∫ $\frac{(٢س-١٢)}{\text{قا}٢س}$. دس

الحل :

= ∫ (٢س – ١٢) جتا ٢س . دس

ق = ٢س – ١٢ ⟸ دق = ٢ . دس

∫.دهـ = ∫ جتا ٢س.دس⟸ هـ = $\frac{\text{جا}٢س}{٢}$

= (٢س – ١٢) $\frac{\text{جا}٢س}{٢}$ - ∫ جا ٢س . دس

= (س – ٦) جا ٢س + $\frac{\text{جتا}٢س}{٢}$ + جـ

---

٨) ∫ $\frac{(٣س+١)}{\text{هـ}^{٣س}}$. دس

الحل :

= ∫ (٣س + ١) $\text{هـ}^{-٣س}$. دس

ق = ٣س + ١ ⟸ دق = ٣ . دس

∫.دهـ =∫ $\text{هـ}^{-٣س}$. دس ⟸ هـ = $\frac{\text{هـ}^{-٣س}}{-٣}$

= (٣س + ١) $\frac{\text{هـ}^{-٣س}}{-٣}$ + ∫ $\text{هـ}^{-٣س}$. دس

= (٣س + ١) $\frac{\text{هـ}^{-٣س}}{-٣}$ - $\frac{\text{هـ}^{-٣س}}{٣}$ + جـ

SALEMALSATEB

٩) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}}$. دس

الحل :

$= \int$ س جاس جتاس . دس

$= \int \frac{\text{س}}{٢}$ جا ٢س . دس

ق $= \frac{\text{س}}{٢} \Leftarrow$ دق $= \frac{١}{٢}$. دس

$\int$.دهـ $= \int$ جا ٢س.دس$\Leftarrow$ هـ $= \frac{-\text{جتا}٢\text{س}}{٢}$

$= \frac{-\text{س}}{٤}$ جتا ٢س $+ \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٤}$. دس

$= \frac{-\text{س}}{٤}$ جتا ٢س $+ \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٨} +$ جـ

---

١٠) $\int_{٠}^{٢}$ س^{٢} هـ$^{\text{س}}$. دس

الحل :

ق $=$ س$^{٢} \Leftarrow$ دق $=$ ٢س

$\int$.دهـ $= \int$ هـ$^{\text{س}}$.دس $\Leftarrow$ هـ $=$ هـ$^{\text{س}}$

$=$ س^{٢} هـ$^{\text{س}}]_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢}$ ٢س هـ$^{\text{س}}$. دس

ق $=$ ٢س $\Leftarrow$ دق $=$ ٢

$\int$.دهـ $= \int$ هـ$^{\text{س}}$.دس $\Leftarrow$ هـ $=$ هـ$^{\text{س}}$

$=$ ٤هـ$^{٢} -$ (٢س هـ$^{\text{س}}]_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢}$ ٢هـ$^{\text{س}}$. دس)

$=$ ٤هـ$^{٢} -$ (٤هـ$^{٢} -$ ٢ هـ$^{\text{س}}]_{٠}^{٢}$)

$=$ ٤هـ$^{٢} -$ ٢هـ$^{٢} -$ ٢ $=$ ٢هـ$^{٢} -$ ٢

---

١١) اذا كان ق(٢) $=$ ٤ ، ق(٥) $=$ ٧ ، $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) .دس $=$ ٦

، جد $\int_{١}^{٢}$ ٢س^{٣} ق/(س^{٢}+١) . دس

الحل:

نفرض ص $=$ س$^{٢} +$ ١ $\Leftarrow$ دس $= \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

ص$_{١}$ $=$ ٢ ، ص$_{٢}$ $=$ ٥

$\int_{٢}^{٥}$ ٢س^{٣} ق/ (ص) . $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \int_{٢}^{٥}$ س^{٢} ق/(ص) . دص

$= \int_{٢}^{٥}$ (ص-١) ق/(ص) . دص

ق $=$ ص-١ $\Leftarrow$ دق $=$ ١ . دص

$\int$.دهـ $= \int$ ق/(ص) .دص $\Leftarrow$ هـ $=$ ق(ص)

$\Leftarrow =$ (ص-١) × ق(ص) $]_{٢}^{٥} - \int_{٢}^{٥}$ ق(ص) .دص

$=$ ٤ق(٥) $-$ ١ ق(٢) $=$ ٦ $=$ ٢٨ $-$ ٤ $-$ ٦ $=$ ١٨

---

١٢) $\int$ جا $\sqrt{\text{س}}$. دس

الحل :

ص $= \sqrt{\text{س}} \Leftarrow$ دس $=$ ٢ $\sqrt{\text{س}}$. دص

$= \int$ جا ص . ٢ $\sqrt{\text{س}}$. دص $= \int$ ٢ص جاص . دص

ق $=$ ٢ص $\Leftarrow$ دق $=$ ٢ . دص

$\int$.دهـ $= \int$جاص.دص$\Leftarrow$ هـ $=$ - جتاص

$=$ -٢ص جتاص $+ \int$ ٢جتاص . دص

$=$ -٢ص جتاص $+$ ٢جاص $+$ جـ

$=$ -٢ $\sqrt{\text{س}}$ جتا $\sqrt{\text{س}} +$ ٢جا $\sqrt{\text{س}} +$ جـ

---

١٣) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$. دس

الحل :

$= \int$ س ظاس قا^{٢}س . دس

ق $=$ س $\Leftarrow$ دق $=$ ١ . دس

$\int$.دهـ $= \int$ظاس قا٢س .دس$\Leftarrow$هـ $= \int$ ظاس قا^{٢}س . دس

$\Leftarrow \int$ ظاس قا٢س . دس

ص $=$ ظاس $\Leftarrow$ دس $= \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \int$ ص . دص $= \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$

$\Leftarrow \int$ س ظاس قا^{٢}س . دس

$= \frac{\text{س}}{٢}$ ظا٢س - $\frac{١}{٢} \int$ (ظاس $-$ س) + جـ

---

١٤) $\int$ جا٢س قا^{٢}(جاس) . دس

الحل :

ص $=$ جاس $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow =$ جتاس $\Leftarrow$ دس $= \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int$ ٢جاس جتاس قا^{٢}(ص) . $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int$ ٢ص قا^{٢}ص . دص

ق $=$ ٢ص $\Leftarrow$ دق $=$ ٢ . دص

SALEM ALSATEB

∫ دهـ = ∫ قا٢ص . دص ⇐ هـ = ظاص

⇐ ∫ ٢ص قا٢ص . دص

= ٢ص ظاص - ∫ ٢ظاص . دص

= ٢ص ظاص + ٢ لـو | جتاص | + جـ

= ٢جاس ظا(جاس) + ٢ لـو | جتا(جاس) | + جـ

---

١٥) ∫ جا √س جتا٣ √س . دس

الحل :

ص = √س ⇐ دس = ٢ √س . دص

= ∫ جاص جتا٣ص . ٢ √س . دص

= ∫ ٢ص جاص جتا٣ص . دص ..... (١)

ق = ٢ص ⇐ دق = ٢ . دص

دهـ = جاص جتا٣ص ⇐ هـ = ∫ جاص جتا٣ص . دص

⇐ ∫ جاص جتا٣ص . دص

ع = جتاص ⇐ دص = $\frac{دع}{-جاص}$

= ∫ جاص ع٣ . $\frac{دع}{-جاص}$

= $\frac{-ع^{٤}}{٤}$ = - $\frac{(جتا ص)^{٤}}{٤}$

⇐ ...(١) = $\frac{-ص}{٢}$ (جتا٤ص) + ∫ $\frac{(جتاص)^{٤}}{٢}$. دص

⇐ ∫ $\frac{(جتا ص)^{٤}}{٤}$. دص = $\frac{١}{٨}$ ∫ (١+جتا٢ص)٢ . دص

= $\frac{١}{٨}$ ∫ ١ + ٢جتا٢ص + $\frac{١}{٢}$ (١ +جتا٤ص) . دص

= $\frac{١}{٨}$ (ص + جا ٢ص + $\frac{١}{٢}$ (ص + $\frac{جا٤ص}{٤}$))

⇐ ...(١) = $\frac{-ص}{٢}$ (جتا٤ص) + $\frac{١}{٨}$ (ص + جا ٢ص + $\frac{١}{٢}$ (ص + $\frac{جا٤ص}{٤}$)

= $\frac{-\sqrt{س}}{٢}$ جتا٣ √س + $\frac{١}{٨}$ (√س + جا٢ √س + $\frac{١}{٢}$ (√س + $\frac{جا ٤ √س}{٤}$) + جـ

---

١٦) ∫ س ظا٢س . دس

الحل :

ق = س ⇐ دق = ١ . دس

∫ دهـ = ∫ ظا٢س . دس

= ∫ قا٢س - ١ . دس ⇐ هـ = ظاس – س

⇐ ∫ س ظا٢س . دس

= س (ظاس – س) - ∫ ظاس – س . دس

= س (ظاس – س) + لو|جتاس | + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

---

١٧) ∫ هـ٢س جا٢(هـ س) . دس

الحل :

ص = هـ س ⇐ ∫ ص٢ جا٢ص . $\frac{دص}{ص}$

$\frac{دص}{دس}$ = هـ س ⇐ = ∫ ص جا٢ص . دص

دس = $\frac{دص}{هـ^{س}}$ ⇐ ق = ص ⇐ دق = ١ . دص

دس = ∫ $\frac{دص}{ص}$ ⇐ دهـ = ∫ جا٢ص . دص

= $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢ص) . دص

هـ = $\frac{١}{٢}$ (ص - $\frac{جا٢ص}{٢}$)

⇐ ∫ ص جا٢ص . دص

= $\frac{١}{٢}$ ص (ص - $\frac{جا٢ص}{٢}$) - $\frac{١}{٢}$ ($\frac{ص^{٢}}{٢}$ + $\frac{جتا٢ص}{٤}$) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ هـ س (هـ س - $\frac{جا(٢هـ^{س})}{٢}$) - $\frac{١}{٢}$ ($\frac{هـ^{٢س}}{٢}$ + $\frac{جتا(٢هـ^{س})}{٢}$) + جـ

---

١٨) ∫ (س + جاس)٢ . دس

الحل :

= ∫ س٢ + ٢س جاس + جا٢س . دس

= ∫ س٢ + $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢س).دس + ∫ ٢س جاس.دس

* ⇐ ∫ ٢س جاس.دس

ق = ٢س ⇐ دق = ٢ . دس

∫ دهـ = ∫ جاس . دس ⇐ هـ = - جتاس

⇐ ∫ س٢ + $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢س).دس + ∫ ٢س جاس.دس

= $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{جا٢س}{٢}$) - ٢س جتاس + ∫ ٢جتاس . دس

= $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{جا٢س}{٢}$) - ٢س جتاس + ٢جاس + جـ

SALEM ALSATEB

١٩) $\int \frac{٢س}{١-جتا٢س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{٢س}{١-(١-٢جا^{٢}س)}$. دس

$= \int \frac{٢س}{٢جا^{٢}س}$. دس $= \int$ س قتا^{٢}س . دس

ق = س $\Leftarrow$ دق = ١ . دس

$\int$ دهـ = $\int$ قتا^{٢}س . دس $\Leftarrow$ هـ = - ظتاس

$\Leftarrow \int$ س قتا^{٢}س . دس

= - س ظتاس + $\int$ ظتاس . دس

= - س ظتاس + لو| جاس| + جـ

---

٢٠) $\int_{٠}^{\pi}$ س $\sqrt{١-جتا٢س}$. دس

الحل :

$\int_{٠}^{\pi}$ س $\sqrt{١-(١-٢جا^{٢}س)}$. دس

$= \int_{٠}^{\pi}$ س $\sqrt{٢جا^{٢}س}$. دس $= \sqrt{٢} \int_{٠}^{\pi}$ س جاس . دس

ق = س $\Leftarrow$ دق = ١ . دس

$\int$ د هـ = $\int$ جاس . دس $\Leftarrow$ هـ = - جتاس

$\Leftarrow \sqrt{٢} \int_{٠}^{\pi}$ س جاس . دس

$= \sqrt{٢}$ (- س جتاس + $\int_{٠}^{\pi}$ جتاس . دس

$= \sqrt{٢}$ (- س جتاس + جاس) $]_{٠}^{\pi} = - \pi \sqrt{٢}$

---

٢١) $\int$ قا^{٢}س هـ $^{\sqrt{ظاس}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{ظاس} \Leftarrow$ دس = $\frac{٢\sqrt{ظاس}}{قا^{٢}س}$. دص

$= \int$ قا^{٢}س هـ^{ص} . $\frac{٢\sqrt{ظاس}}{قا^{٢}س}$. دص $= \int$ ٢ص هـ^{ص} . دص

ق = ٢ص $\Leftarrow$ دق = ٢

دهـ = هـ^{ص} $\Leftarrow$ هـ = هـ^{ص}

= ٢ص هـ^{ص} - $\int$ ٢ هـ^{ص} . دص

= ٢ص هـ^{ص} - ٢ هـ^{ص} + جـ

= ٢ $\sqrt{ظاس}$ هـ $^{\sqrt{ظاس}}$ - ٢ هـ $^{\sqrt{ظاس}}$ + جـ

---

٢٢) $\int \frac{٢}{س}$ هـ $^{س+٢لوس}$. دس

الحل:

$= \int \frac{٢}{س}$ هـ^{س} × هـ^{٢لوس} . دس

$= \int \frac{٢}{س}$ هـ^{س} × هـ$^{لوس^{٢}}$. دس

$= \int \frac{٢}{س}$ هـ^{س} × س^{٢} . دس

$= \int$ ٢س هـ^{س} . دس

ق = ٢س $\Leftarrow$ دق = ٢ . دس

$\int$ دهـ = $\int$ هـ^{س} . دس $\Leftarrow$ هـ = هـ^{س}

= $\int$ ٢س هـ^{س} . دس = ٢س هـ^{س} - $\int$ ٢ هـ^{س} . دس

= ٢س هـ^{س} - ٢ هـ^{س} + جـ

---

٢٣) $\int \frac{س هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$. دس

الحل :

ق = س هـ^{س} $\Leftarrow$ دق = س هـ^{س} + هـ^{س}

$\int$ دهـ = $\int \frac{١}{(س+١)^{٢}}$. دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{-١}{(س+١)}$

$= \frac{-س هـ^{س}}{(س+١)} + \int \frac{س هـ^{س} + هـ^{س}}{(س+١)}$. دس

$= \frac{-س هـ^{س}}{(س+١)} + \int$ هـ^{س} . دس $= \frac{-س هـ^{س}}{(س+١)} +$ هـ^{س} + جـ

---

٢٤) $\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{(\sqrt{س}+١)^{٢}}$. دس

الحل :

$= \int$ هـ $^{\sqrt{س}} (\sqrt{س}+١)^{-٢}$. دس

ص = $\sqrt{س} \Leftarrow$ دس = ٢ $\sqrt{س}$. دص

$= \int$ هـ^{ص} (ص + ١)$^{-٢}$. ٢ $\sqrt{س}$. دص

$= \int$ ٢ص هـ^{ص} (ص + ١)$^{-٢}$. دص

ق = ٢ص هـ^{ص} $\Leftarrow$ دق = ٢ص هـ^{ص} + ٢ هـ^{ص}

$\int$ دهـ = $\int$ (ص + ١)$^{-٢}$. دص $\Leftarrow$ هـ = - (ص + ١)$^{-١}$

= - ٢ص هـ^{ص} (ص + ١)$^{-١}$ + $\int$(ص + ١)$^{-١}$ (٢ص هـ^{ص} + هـ^{ص}) . دص

= - ٢ص هـ^{ص} (ص + ١)$^{-١}$ + $\int$(ص + ١)$^{-١}$ (ص + ١) (٢هـ^{ص}). دص

SALEM ALSATEB

$= \frac{-٢ص هـ^{ص}}{ص+١} + ٢هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{-٢\sqrt{س} هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}+١} + ٢هـ^{\sqrt{س}} + جـ$

---

٢٥) $\int \frac{١+ظا^{٢}س}{ظاس}$. دس

الحل :

$= \int \frac{١}{ظاس} + \frac{ظا^{٢}س}{ظاس}$. دس $= \int$ ظتاس + ظاس . دس

$= \int \frac{جتاس}{جاس} + \frac{جاس}{جتاس}$. دس

= لوهـ | جاس| - لوهـ | جتاس| + جـ

ملاحظة على تكامل اللوغريتمات :

اذا ظهر لدينا لوغريتم فإن الحل يكون باحد الطرق التالية :

أ) بالاجزاء : يجب ان يكون اللوغريتم في البسط و داخله كثير حدود نفرض ق = اللوغريتم و الباقي دهـ

ب) بالتعويض : داخل اللوغريتم ليس كثير حدود

١. ص = ما داخل اللوغريتم

٢. ص= كل اللوغريتم

حسب اللي برا مشتقة م

١) $\int$ لوهـ س . دس

الحل : ق = لوهـ س $\Leftarrow$ دق = $\frac{١}{س}$. دس

$\int$ دهـ = $\int$ ١.دس $\Leftarrow$ هـ = س

= س لوهـ س - س + جـ

---

٢) $\int$ س لوهـ س . دس

الحل :

ق = لوهـ س $\Leftarrow$ دق = $\frac{١}{س}$. دس

$\int$دهـ = $\int$س.دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{س^{٢}}{٢}$

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س - $\int \frac{س}{٢}$. دس

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س - $\frac{س^{٢}}{٤}$ + جـ

---

٣) $\int$ س^٥ لوهـ س^٣ . دس

الحل : ق = لوهـ س^٣ $\Leftarrow$ دق = $\frac{٣}{س}$. دس

$\int$دهـ = $\int$س^٥ .دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{س^{٦}}{٦}$

= $\frac{س^{٦}}{٦}$ لوهـ س^٣ - $\int \frac{س^{٥}}{٢}$. دس

= $\frac{س^{٦}}{٦}$ لوهـ س^٣ - $\frac{س^{٦}}{١٢}$ + جـ

---

٤) $\int$ س^ن لوهـ س^٣ . دس

الحل :

ق = لوهـ س^٣ $\Leftarrow$ دق = $\frac{٣}{س}$

$\int$دهـ = س^ن.دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لوهـ س^٣ - $\int \frac{٣}{س} \cdot \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$. دس

= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لوهـ س^٣ - $\int \frac{٣}{ن+١}$. س^ن . دس

= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لوهـ س^٣ - $\frac{٣}{(ن+١)^{٢}}$. س^{ن+١} + جـ

---

٥) $\int$ قا^٢س هـ^لوظاس . دس

الحل :

ص = ظاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$ قا^٢س هـ^لوص . $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$هـ^لوص . دص = ص هـ^لوص – ص + جـ "بالأجزاء"

= ظاس هـ^لوظاس – ظاس + جـ

---

٦) $\int$ قا^٤س هـ^لوظاس . دس

الحل :

ص = ظاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$ قا^٢س هـ^لوص . دص

= $\int$(ظا^٢س + ١) هـ^لوص . دص

= $\int$ (ص^٢ + ١) هـ^لوص . دص

ق = هـ^لوص $\Leftarrow$ دق = $\frac{١}{ص}$

SALEM ALSATEB

$\int$ دهـ = $\int$ ص^{٢} + ١ .دص ⇐ هـ = $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص

= ($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) هـ لو ص - $\int \frac{ص^{٣}}{٣}$ + ١ . دس

= ($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) هـ لو ص – ($\frac{ص^{٣}}{٩}$ + ص) + جـ

= ($\frac{ظا^{٣}س}{٣}$ + ظاس) هـ لو (ظاس) - ($\frac{ظا^{٣}س}{٩}$ + ظاس) +جـ

---

٧) $\int$ لو$_{هـ}$ جتاس . دس

الحل:

نفرض ان ص = جتاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = جتاس

دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$\int$ لو$_{هـ}$ ص .دص = ص لو$_{هـ}$ ص – ص + جـ

= جاس لو$_{هـ}$ جاس – جاس + جـ

---

٨) $\int$ ظتاس لو$_{هـ}$ جاس . دس

الحل:

نفرض ان ص = لو$_{هـ}$ جاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{جتاس}{جاس}$

دس = $\frac{دص}{ظتاس}$

$\int$ ص .دص = $\frac{ص}{٢}$ + جـ

= (لو$_{هـ}$ جاس)^{٢} + جـ

---

٩) $\int_{١}^{هـ}$ (هـ لوس)^{٢} . دس

الحل :

ق = (هـ لوس)^{٢} ⇐ دق = ٢ هـ لوس × $\frac{١}{س}$

$\int$دهـ = $\int$ ١ .دس ⇐ هـ = س

= س (هـ لوس)^{٢}]$_{١}^{هـ}$ - ٢ $\int_{١}^{هـ}$ هـ لوس . دس "بالأجزاء"

= هـ – ٢(س هـ لوس – س]$_{١}^{هـ}$

= هـ – ٢(هـ – هـ + ١) = هـ – ٢

---

١٠) $\int \frac{لو_{هـ} ظاس}{جا^{٢}س}$. دس

ص = لو$_{هـ}$ ظاس

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{قا^{٢}س}{ظاس}$ = $\frac{١}{جتا^{٢}س}$ × $\frac{جتاس}{جاس}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{جاس جتاس}$

دس = جاس جتاص

$\int \frac{ص}{٢جاس جتاس}$ جاس جتاس .دص

= $\int \frac{ص}{٢}$.دص = $\frac{ص^{٢}}{٤}$ +جـ

= $\frac{(لو_{هـ} ظاس)^{٢}}{٤}$ +جـ

---

١١) $\int \frac{لو_{هـ} س}{س}$.دس

الحل:

نفرض ان ص = لو$_{هـ}$ س ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{س}$

دس = س . دص

$\int$ ص .دص = $\frac{ص^{٢}}{٢}$ + جـ

= $\frac{-(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢}$ + جـ

حل اخر:

$\int$ لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس

ق = لو$_{هـ}$ س ⇐ دق = $\frac{١}{س}$.دس

$\int$ دهـ = $\int \frac{١}{س}$.دس ⇐ هـ = لو$_{هـ}$ س

= (لو$_{هـ}$ س)^{٢} - $\int$ لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس

$\int$ لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس + $\int$ لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس = $\int$ لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دهـ

رجع لاصله
يعني تكامل
دوري بنقله
للطرف الثاني

SALEM ALSATEB

$$\int \frac{\frac{1}{س} \times لو_{هـ} س}{س} \, دس = \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢}$$

$$\int لو_{هـ} س \, دس = \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + جـ$$

---

١٢) $\int \frac{لو_{هـ} س}{\sqrt{س}} \, دس$

الحل:

$= \int س^{-\frac{١}{٢}} \times لو_{هـ} س \, دس$

ق $= لو_{هـ} س \Leftarrow$ دق $= \frac{١}{س} \, دس$

$\int د هـ = \int س^{-\frac{١}{٢}} \, دس \Leftarrow هـ = ٢ س^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} لو_{هـ} س - \int ٢ س^{\frac{١}{٢}} دس$

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} لو_{هـ} س - ٤ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

١٣) $\int \frac{لو_{هـ} \sqrt{س+٢}}{س+٢} \, دس$

الحل :

$\int \frac{\frac{١}{٢} لو_{هـ} (س+٢)}{س+٢} \, دس$

ص $= لو_{هـ} (س + ٢) \Leftarrow$ دس $= (س + ٢)$. دص

$= \int \frac{\frac{١}{٢} ص}{س+٢} . (س + ٢) . دص = \int \frac{١}{٢} ص . دص$

$= \frac{١}{٤} ص^{٢} + جـ = \frac{١}{٤} (لو_{هـ} (س + ٢))^{٢} + جـ$

---

١٤) $\int هـ^{س} (\frac{١}{س} + لو_{هـ} س) \, دس$

الحل :

$\int \frac{هـ^{س}}{س} \, دس + \int هـ^{س} لو_{هـ} س \, دس$

ق $= لو_{هـ} س \Leftarrow$ دق $= \frac{١}{س}$

دهـ $= هـ^{س} \Leftarrow هـ = هـ^{س}$

$= \int \frac{هـ^{س}}{س} . دس + هـ^{س} - \int \frac{هـ^{س}}{س} . دس$

$= هـ^{س} لو_{هـ} س + جـ$

---

١٥) $\int هـ^{س} . جتاس . دس$

الحل :

ق $= هـ^{س} \Leftarrow$ دق $= هـ^{س}$

$\int د هـ = \int جتاس . دس \Leftarrow هـ = جاس$

$= هـ^{س} جاس - \int هـ^{س} جاس . دس$

ق $= هـ^{س} \Leftarrow$ دق $= هـ^{س}$

دهـ $= جاس \Leftarrow هـ = -$ جتاس

$\int هـ^{س} . جتاس . دس = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس - \int هـ^{س} جتاس \, دس$

$\Leftarrow \int هـ^{س} . جتاس . دس = \frac{١}{٢} (هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس) + جـ$

---

١٦) $\int هـ^{س} . جاس . دس$ ((واجب))

---

١٧) $\int$ جتا $(لو_{هـ} س) . دس$

الحل :

ص $= لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{س}$

دس $= س . دص \Leftarrow س = هـ^{ص}$

$= \int$ جتاص $. س . دص$

$= \int هـ^{ص}$ جتاص $. دص$

$= \frac{١}{٢} (هـ^{ص}$ جاص $+ هـ^{ص}$ جتاص $) + جـ$

$= \frac{١}{٢} (هـ^{لو_{هـ} س}$ جا $لو_{هـ} س + لو_{هـ} س$ جتا $لو_{هـ} س) + جـ$

$= \frac{١}{٢} (س$ جا$(لو_{هـ} س) + س$ جتا$(لو_{هـ} س)) + جـ$

---

١٨) $\int هـ^{س} ($ ٢ جتاس × جتا٣س –جتا٤س $) . دس$

الحل:

$= \int هـ^{س} ($ ٢× $\frac{١}{٢}$ (جتا(س-٣س) + جتا(س+٣س)) –جتا٤س $) . دس$

$= \int هـ^{س}$ (جتا(-٢س) + جتا(٤س) –جتا٤س $) . دس$

$= \int هـ^{س}$ جتا٢س. دس

ق $= هـ^{س} \Leftarrow$ دق $= هـ^{س}$

SALEM ALSATEB

∫ دهـ = ∫ جتا٢س . دس ⇐ هـ = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

= $\frac{١}{٢}$ هـ^س جاس - $\frac{١}{٢}$ ∫ هـ^س جا٢س . دس

ق = هـ^س ⇐ دق = هـ^س

∫ دهـ = ∫ $\frac{١}{٢}$ جا٢س . دس ⇐ هـ = - $\frac{١}{٤}$ جتا٢س

⇐ ∫ هـ^س . جتا٢س . دس

= $\frac{١}{٢}$ هـ^س جا٢س + $\frac{١}{٤}$ هـ^س جتا٢س - $\frac{١}{٤}$ هـ^س ∫ جتا٢س . دس

$\frac{٥}{٤}$ ∫ هـ^س . جتا٢س . دس = $\frac{١}{٢}$ هـ^س جا٢س + $\frac{١}{٤}$ هـ^س جتا٢س

∫ هـ^س . جتا٢س . دس = $\frac{٤}{٥}$ ($\frac{١}{٢}$ هـ^س جا٢س + $\frac{١}{٤}$ هـ^س جتا٢س) + جـ

---

١٩) ∫ قا^٣ س . دس

الحل:

= ∫ قا^٢ س قاس . دس

= ∫ (ظا^٢س + ١) قاس .دس

= ∫ ظا^٢ س قاس .دس + ∫ قاس .دس

= ∫ ظا^٢ س قاس .دس + ∫ قاس × $\frac{قاس+ظاس}{قاس+ظاس}$.دس

= ∫ ظا^٢ س قاس .دس + لـو |قاس+ظاس|

ق= ظاس ⇐ د هـ = قا^٢ س . دس

∫ دهـ = ∫ قاس ظاس .دس ⇐ هـ = قاس

∫ قا^٣ س . دس = ظاس قاس - ∫ قا^٣س + لـو |قاس+ظاس|

$\frac{\text{∫ قا}^٣\text{س .دس}}{٢}$ = $\frac{\text{ظاس قاس +لـو |قاس+ظاس|}}{٢}$

= $\frac{\text{ظاس قاس +لـو |قاس+ظاس|}}{٢}$ +جـ

الكســـور الجزئيـــة :

إذا كان البسط كثير حدود والمقام كثير حدود فإننا :

١) نستخدم التعويض "بسط مشتقة مقام"

٢) القسمة الطويلة : درجة البسط أعلى من درجة المقام أو تساويه .

$\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

٣) الكسور الجزئية : عند فشل القسمة والمقام تربيعي يُحلل إلى عاملين مختلفين

- إذا كانت عوامل المقام هي :

(جـ١س + د١) ، (جـ٢س + د٢) فإنّ :

$\frac{\text{البسط}}{\text{مقام}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{جـ١س + د١}}$ + $\frac{\text{ب}}{\text{جـ٢س + د٢}}$

- لا يستخدم الكسور الجزئية إلا إذا كان البسط خطي أو ثابت وإذا كان غير ذلك فإننا نقسم قسمة طويلة :

أسئلة : -

١) ∫ $\frac{٥س+١}{٥س-٣}$. دس

٥س - ٣	١
٥س + ١	
-٥س + ٣	
٤	

الحل :

= ∫ ١ + $\frac{٤}{٥س-٣}$. دس = س + $\frac{٤}{٥}$ لوهـ|٥س – ٣| + جـ

---

٢) ∫ $\frac{٣س-٢}{س+٢}$. دس

= ∫ ٣ + $\frac{-٨}{س+٢}$. دس

= ٣س – ٨ لوهـ| س + ٢| + جـ

س + ٢	٣
٣س - ٢	
-٣س - ٦	
- ٨	

---

٣) ∫ $\frac{٢س^٢-٥}{س+٣}$. دس

الحل :

= ∫ ٢س – ٦ + $\frac{١٣}{س+٣}$. دس

= س^٢ – ٦س + ١٣ لوهـ| س + ٣| + جـ

س	٢س -
٣س^٢ - ٥	
-٣س^٢ -	
-٦س	
٦س +	
١	

SALEM ALSATEB

٤) $\int \frac{س^{٥}}{س^{٢}+١}$. دس (بالقسمة الطويلة)

الحل: $\int س^{٣} - س + \frac{س}{س^{٢}+١}$. دس

$= \frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ | $س^{٢} + ١$ | + جـ

---

٥) $\int \frac{٣س^{٢}-٢س+١}{س^{٣}-س^{٢}+س-٣}$. دس

الحل :

ص = $س^{٣} - س^{٢} + س - ٣$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢س + ١ \Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}-٢س+١}$

$= \int \frac{٣س^{٢}-٢س+١}{ص} . \frac{دص}{٣س^{٢}-٢س+١}$

$= \int \frac{١}{ص}$. دص = لو$_{هـ}$ | ص | + جـ

= لو$_{هـ}$ | $س^{٣} - س^{٢} + س - ٣$ | + جـ

---

٦) $\int \frac{٢س^{٢}-٤}{س^{٢}}$. دس

الحل :

$= \int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٢}}$. دس

$= \int ٢ - ٤س^{-٢}$. دس = $٢س + ٤س^{-١}$ + جـ

---

٧) $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{١}{س^{١٠}(١+س^{-٩})}$. دس

ص = $١ + س^{-٩} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٩س^{-١٠}$

$\Leftarrow$ دس = $\frac{س^{١٠}}{-٩}$. دص

$= \int \frac{١}{س^{١٠}(ص)} - \frac{س^{١٠}}{-٩}$. دص

$= \int \frac{-١}{٩ص}$. دص = $\frac{-١}{٩}$ لو$_{هـ}$|ص| + جـ

= $\frac{-١}{٩}$ لو$_{هـ}$|$س^{-٩} + ١$ | + جـ

---

٨) $\int \frac{س}{س^{١١}+س^{٢}}$. دس

الحل :

$= \int \frac{س}{س(س^{١٠}+س)}$. دس = $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}$. دس

= $\frac{-١}{٩}$ لو$_{هـ}$|$س^{-٩} + ١$ | + جـ

---

٩) $\int \frac{ن}{س^{ن+١}+س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{ن}{س^{ن+١}\left(\frac{١}{س^{ن}}+١\right)}$. دس

ص = $١ + \frac{١}{س^{ن}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{س^{ن+١}}$

$\Leftarrow$ دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن}$. دص

$= \int \frac{ن}{س^{ن+١}ص} . \frac{س^{ن+١}}{ن}$ دص = $\int \frac{١}{ص}$. دص

= لو$_{هـ}$|ص| + جـ = لو$_{هـ}$|$١ + \frac{١}{س^{ن}}$| + جـ

---

١٠) $\int \frac{\sqrt{س+١}-١}{\sqrt{س+١}+١}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س+١} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

$\Leftarrow$ دس = $٢\sqrt{س+١}$. دص

$= \int \frac{ص-١}{ص+١} \times ٢ص$. دص

$= \int \frac{٢ص^{٢}-٢ص}{ص+١}$. دص

$= \int ٢ص - ٤ + \frac{٤}{ص+١}$. دص

= $ص^{٢} - ٤ص + ٤$ لو$_{هـ}$|ص + ١| + جـ

= $(\sqrt{س+١})^{٢} - ٤\sqrt{س+١} + ٤$ لو$_{هـ}$|$\sqrt{س+١} + ١$| + جـ

٢ص - ٤	ص + ١
$٢ص^{٢} - ٢ص$	
$-٢ص^{٢} - ٢ص$	
$-٤ص$	
$+٤ص + ٤$	
٤	

SALEM ALSATEB

١١) $\int \frac{\sqrt{1+س}-\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}$.دس

الحل:

$= \int \frac{\sqrt{1+س}-\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}} \times \frac{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}$.دس

$= \int \frac{(1+س)-(1-س)}{\left(\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}\right)^{٢}}$.دس

$= \int \frac{٢س}{١+س+٢\sqrt{(1+س)(1-س)}+1-س}$. دس

$= \int \frac{٢س}{٢+٢\sqrt{1-س^{٢}}}$. دس

ص$= \sqrt{1-س^{٢}} \Leftarrow$ ص$^{٢} = 1 - س^{٢}$

٢ص .دص = -٢س .دس

٢س $= \frac{-ص}{س}$.دص

$\int \frac{٢س}{٢+٢ص} \times \frac{-ص}{س} = \int \frac{-ص}{(1+ص)}$. دص

$= \int \frac{-ص}{1+ص}$.دص

$= \int -١ + \frac{١}{1+ص}$.دص

$= -ص + لو|1+ص| + جـ$

$= -\sqrt{1-س^{٢}} + لو|1+\sqrt{1-س^{٢}}| + جـ$

١٢) $\int \frac{٤}{س^{٢}-٤}$. دس

الحل :

$\frac{٤}{س^{٢}-٤} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢}$

$\Leftarrow ٤ = أ (س + ٢) + ب (س - ٢)$

س = ٢ $\Leftarrow$ ٤أ = ٤ $\Leftarrow$ أ = ١

س = -٢ $\Leftarrow$ -٤ب = ٤ $\Leftarrow$ ب = -١

$= \int \frac{١}{س-٢} + \frac{-١}{س+٢}$. دس

$= لوه|س - ٢| - لوه|س + ٢| + جـ$

١٣) $\int \frac{٥س+١}{س^{٢}-٥س-٦}$. دس

الحل :

$\frac{٥س+١}{س^{٢}-٥س+٦} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س-٣}$

٥س + ١ = أ(س - ٣) + ب(س - ٢)

س = ٢ $\Leftarrow$ ١١ = -أ $\Leftarrow$ أ = -١١

س = ٣ $\Leftarrow$ ١٦ = ب

$= \int \frac{-١١}{س-٢} + \frac{١٦}{س-٣}$. دس

$= -١١ لوه|س - ٢| + ١٦ لوه|س - ٣| + جـ$

١٤) $\int \frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}$. دس

الحل :

$= \int ١ + \frac{٢}{س^{٢}-١}$. دس

$= \frac{٢}{س^{٢}-١} = \frac{أ}{س+١} + \frac{ب}{س-١}$

٢ = أ (س - ١) + ب (س + ١)

س = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢أ $\Leftarrow$ أ = -١

س = ١ $\Leftarrow$ ٢ = ٢ب $\Leftarrow$ ب = ١

$= \int ١ + \frac{-١}{س+١} + \frac{١}{س-١}$. دس

$= س - لوه|س + ١| + لوه|س - ١| + جـ$

١٥) $\int \frac{س^{٣}+٣}{س^{٢}-١}$. دس

الحل :

$= \int س + \frac{س+٣}{س^{٢}-١}$. دس

$\frac{س+٣}{س^{٢}-١} = \frac{أ}{س+١} + \frac{ب}{س-١}$

س + ٣ = أ (س - ١) + ب (س + ١)

س = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢أ $\Leftarrow$ أ = -١

س = ١ $\Leftarrow$ ٤ = ٢ب $\Leftarrow$ ب = ٢

SALEEM ALSATEB

$= \int س + \frac{-١}{س+١} + \frac{٢}{س-١}$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - لو_{هـ}|س+١| + ٢ لو_{هـ}|س-١| + جـ$

---

١٦) $\int \frac{س^{٣}-٣}{س^{٢}-س}$. دس

الحل :

$= \int س + ١ + \frac{س-٣}{س^{٢}-س}$. دس

$\frac{س-٣}{س^{٢}-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$

$س-٣ = أ(س-١) + ب(س)$

$س = ٠ \Leftarrow -٣ = -أ \Leftarrow أ = ٣$

$س = ١ \Leftarrow -٢ = ب \Leftarrow ب = -٢$

$= \int س + ١ + \frac{٣}{س} + \frac{-٢}{س-١}$. دس

$= \frac{س^{٢}}{٢} + س + ٣ لو_{هـ}|س| - ٢ لو_{هـ}|س-١| + جـ$

---

١٧) $\int \frac{س+٧}{(س+٣)^{٢}+٤س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{س+٧}{س^{٢}+٦س+٩+٤س}$. دس

$= \int \frac{س+٧}{س^{٢}+١٠س+٩}$. دس

$\frac{س+٧}{س^{٢}+١٠س+٩} = \frac{أ}{س+٩} + \frac{ب}{س+١}$

$\Leftarrow س+٧ = أ(س+١) + ب(س+٩)$

$س = -١ \Leftarrow ٦ = ٨ب \Leftarrow ب = \frac{٦}{٨}$

$س = -٩ \Leftarrow -٢ = -٨أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow \int \frac{١}{٤} \frac{}{س+٩} + \frac{٦}{٨} \frac{}{س+١}$. دس

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ}|س+٩| + \frac{٦}{٨} لو_{هـ}|س+١| + جـ$

---

١٨) $\int \frac{١}{س^{٣}-٤س}$.دس

الحل:

$\frac{١}{س^{٣}-٤س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+٢} + \frac{جـ}{س-٢}$

$١ = أ(س+٢)(س-٢) + ب(س)(س-) + جـ(س+٢)$

$س=٠ \Leftarrow ١ = -٤أ \Leftarrow أ = \frac{-١}{٤}$

$س=٠ \Leftarrow ١ = ٨ب \Leftarrow ب = \frac{١}{٨}$

$س=٠ \Leftarrow ١ = ٨جـ \Leftarrow جـ = \frac{١}{٨}$

$\Leftarrow \int \frac{-١}{٤} \frac{}{س} + \frac{١}{٨} \frac{}{س+٢} + \frac{١}{٨} \frac{}{س-٢}$. دس

$= \frac{-١}{٤} لو_{هـ}|س| + \frac{١}{٨} لو_{هـ}|س+٢| + \frac{١}{٨} لو_{هـ}|س+٢| + جـ$

---

١٩) $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٦}-٩}$.دس

الحل:

$= \int \frac{٣س^{٢}}{(س^{٣})^{٢}-٩}$.دس

$ص = س^{٣} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$= \int \frac{٣س^{٢}}{ص^{٢}-٩} \times \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int \frac{١}{ص^{٢}-٩}$.دص

$\frac{١}{ص^{٢}-٩} = \frac{أ}{ص-٣} + \frac{ب}{ص+٣}$

$١ = أ(ص+٣) + ب(ص-٣)$

$ص = ٣ \Leftarrow ١ = ٦أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٦}$

$ص = -٣ \Leftarrow ١ = -٦ب \Leftarrow ب = \frac{-١}{٦}$

$\Leftarrow = \int \frac{١}{٦} \frac{}{ص-٣}$.دص + $\int \frac{-١}{٦} \frac{}{ص+٣}$. دص

$= \frac{١}{٦} لو_{هـ}|ص-٣| - \frac{١}{٦} لو_{هـ}|ص+٣| + جـ$

$= \frac{١}{٦} لو_{هـ}|س^{٣}-٣| - \frac{١}{٦} لو_{هـ}|س^{٣}+٣| + جـ$

SALEEM ALSATEB

٢٠) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-١}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

س = ص^{٢} $\Leftarrow$ دس = ٢ $\sqrt{س}$. دص

$= \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-١}$. دص

$= \int ٢ + \frac{٢}{ص^{٢}-١}$. دص

$\frac{٢}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

٢ = أ (ص + ١) + ب (ص – ١)

ص = ١ $\Leftarrow$ ٢ = ٢أ $\Leftarrow$ أ = ١

ص = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢ب $\Leftarrow$ ب = -١

$= \int ٢ + \frac{١}{ص-١} + \frac{-١}{ص+١}$. دص

= ٢ص + لوه |ص - ١| - لوه|ص + ١| + جـ

= ٢ $\sqrt{س}$ + لوه|$\sqrt{س}$ - ١| - لوه|$\sqrt{س}$ + ١| + جـ

---

٢١) $\int \frac{١}{س\sqrt{س+١}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س+١} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

دس = ٢ $\sqrt{س+١}$. دص $\Leftarrow$ س = ص^{٢} – ١

$= \int \frac{١}{(ص^{٢}-١)ص}$. ٢ص . دص

$= \int \frac{٢}{ص^{٢}-١}$. دص

$\frac{٢}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

٢ = أ (ص + ١) + ب (ص – ١)

ص = ١ $\Leftarrow$ ٢ = ٢ أ $\Leftarrow$ أ = ١

ص = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢ب $\Leftarrow$ ب = -١

$= \int \frac{١}{ص-١} + \frac{-١}{ص+١}$. دص

= لوه |ص - ١| - لوه|ص + ١| + جـ

= لوه|$\sqrt{س+١}$ - ١| - لوه|$\sqrt{س+١}$ + ١| + جـ

---

٢٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{س-١}}{\sqrt[٣]{س^{٢}}-١}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt[٣]{س} \Leftarrow$ ص^{٣} = س $\Leftarrow$ دس = ٣ص^{٢} . دص

$= \int \frac{ص-١}{ص^{٣}-١}$. ٣ص^{٢} . دص

$= \int \frac{٣ص^{٢}}{ص+١}$. دص

$= \int ٣ص - ٣ + \frac{٣}{ص+١}$. دص

$= \frac{٣}{٢}$ ص^{٢} – ٣ص + ٣ لوه |ص + ١| + جـ

$= \frac{٣}{٢}\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٢} - ٣\sqrt[٣]{س} + ٣$لوه| $\sqrt[٣]{س}$ +١|+ جـ

٣ص - ٣ | ص + ١

٣ص^{٢}

- ٣ص^{٢} – ٣ص

- ٣ص + ٣ص + ٣

٣

---

٢٣) $\int_{١}^{٨} \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٤}}+٤س+٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$.دس

الحل:

ص= $\sqrt[٣]{س} \Leftarrow$ ص^{٣} = س $\Leftarrow$ ٣ص^{٢} . دص = ١.دس

ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ٢

$\int_{١}^{٢} \frac{٢ \times ٣ص^{٢}}{ص^{٤}+٤ص^{٣}+٣ص^{٢}}$. دص

$\int_{١}^{٢} \frac{٦}{ص^{٢}+٤ص+٣}$. دص

$\frac{٦}{ص^{٢}+٤ص+٣} = \frac{أ}{ص+٣} + \frac{ب}{ص+١}$

٦ = أ (ص+١) + ب (ص+٣)

ص= -٣ $\Leftarrow$ ٦ = -٢ أ $\Leftarrow$ أ = -٣

ص = -١ $\Leftarrow$ ٦ = ٢ ب $\Leftarrow$ ب = ٣

$\int_{١}^{٢} \frac{-٣}{ص+٣} + \frac{٣}{ص+١}$. دص

= -٣ لو |ص+٣| + ٣ لو |ص+١| $]_{١}^{٢}$

= (-٣ لوه٥ + ٣ لوه٣) - (-٣ لوه٤ + ٣ لوه٢)

SALEM ALSATEB

٢٤) $\int \frac{١}{هـ^{س}+٥}$. دس

الحل :

ص = $هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{هـ^{س}}$

= $\int \frac{١}{ص+٥} \cdot \frac{دص}{هـ^{س}} = \int \frac{١}{ص^{٢}+٥ص}$. دص

$\frac{١}{ص^{٢}+٥ص} = \frac{أ}{ص+٥} + \frac{ب}{ص}$

$\Leftarrow$ ١ = أ ص + ب (ص + ٥)

ص = -٥ $\Leftarrow$ ١ = -٥ أ $\Leftarrow$ أ = $\frac{-١}{٥}$

ص = ٠ $\Leftarrow$ ١ = ٥ب $\Leftarrow$ ب = $\frac{١}{٥}$

= $\int \frac{\frac{-١}{٥}}{ص+٥} + \frac{\frac{١}{٥}}{ص}$. دص

= $\frac{-١}{٥}$ لوهـ |ص| + $\frac{١}{٥}$ لوهـ |ص – ١| + جـ

= $\frac{-١}{٥}$ لوهـ |$هـ^{س}$| + $\frac{١}{٥}$ لوهـ |$هـ^{س}$ – ١| + جـ

---

٢٥) $\int \frac{١}{هـ^{س}-هـ^{-س}}$. دس

الحل :

ص = $هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{هـ^{س}}$

= $\int \frac{١}{ص-ص^{-١}} \cdot \frac{دص}{ص} = \int \frac{١}{ص^{٢}-١}$. دص

$\frac{١}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

١ = أ (ص + ١) + ب (ص – ١)

ص = ١ $\Leftarrow$ ١ = ٢ أ $\Leftarrow$ أ = $\frac{١}{٢}$

ص = -١ $\Leftarrow$ ١ = -٢ ب $\Leftarrow$ ب = $\frac{-١}{٢}$

= $\int \frac{\frac{١}{٢}}{ص-١} + \frac{\frac{-١}{٢}}{ص+١}$. دص

= $\frac{١}{٢}$ لوهـ |ص - ١| - $\frac{١}{٢}$ لوهـ |ص + ١| + جـ

٢٦) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س}-هـ^{س}-٦}$. دس

الحل :

ص = $هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{هـ^{س}}$

= $\int \frac{هـ^{س}}{ص^{٢}-ص-٦} \cdot \frac{دص}{هـ^{س}}$

= $\int \frac{١}{ص^{٢}-ص-٦}$. دص

$\frac{١}{ص^{٢}-ص-٦} = \frac{أ}{ص-٣} + \frac{ب}{ص+٢}$

١ = أ (ص + ٢) + ب (ص – ٣)

ص = ٣ $\Leftarrow$ ١ = ٥ أ $\Leftarrow$ أ = $\frac{١}{٥}$

ص = -٢ $\Leftarrow$ ١ = -٥ب $\Leftarrow$ ب = $\frac{-١}{٥}$

= $\int \frac{\frac{١}{٥}}{ص-٣} + \frac{\frac{-١}{٥}}{ص+٢}$. دص

= $\frac{١}{٥}$ لوهـ |ص - ٣| - $\frac{١}{٥}$ لوهـ |ص + ٢| + جـ

= $\frac{١}{٥}$ لوهـ |$هـ^{س}$ - ٣| - $\frac{١}{٥}$ لوهـ |$هـ^{س}$ + ٢| + جـ

---

٢٧) $\int \frac{جتاس}{جا^{٢}س+٤جاس-٥}$. دس

الحل :

ص = جاس $\Leftarrow \frac{ع ص}{ع س}$ = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int \frac{جتاس}{ص^{٢}+٤ص-٥} \cdot \frac{دص}{جتاس}$

= $\int \frac{١}{ص^{٢}+٤ص-٥}$. دص

$\frac{١}{ص^{٢}+٤ص-٥} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+٥}$

١ = أ (ص + ٥) + ب (ص – ١)

ص = ١ $\Leftarrow$ ١ = ٦ أ $\Leftarrow$ أ = $\frac{١}{٦}$

ص = -٥ $\Leftarrow$ ١ = -٦ب $\Leftarrow$ ب = $\frac{-١}{٦}$

SALEM ALSATEB

$$= \int \frac{\frac{1}{6}}{ص-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{ص+5} \, .دص$$

$$= \frac{1}{6} لو_{هـ} |ص-1| - \frac{1}{6} لو_{هـ} |ص+5| + جـ$$

$$= \frac{1}{6} لو_{هـ} |جاس-1| - \frac{1}{6} لو_{هـ} |جاس+5| + جـ$$

---

٢٨) $\int \frac{6 جتاس}{2جا^2س + جاس - 1} \, .دس$

الحل :

ص = جاس $\Leftarrow \frac{ع_ص}{ع_س}$ = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$$= \int \frac{6 جتاس}{2ص^2 + ص - 1} \cdot \frac{دص}{جتاس}$$

$$= \int \frac{6}{2ص^2 + ص - 1} \, .دص$$

$$\frac{6}{2ص^2 + ص - 1} = \frac{أ}{2ص - 1} + \frac{ب}{ص + 1}$$

$\Leftarrow$ ٦ = أ (ص + ١) + ب (٢ص − ١)

ص = $\frac{1}{2} \Leftarrow$ ٦ = $\frac{3}{2}$ أ $\Leftarrow$ أ = ٤

ص = -١ $\Leftarrow$ ٦ = -٣ ب $\Leftarrow$ ب = -٢

$$= \int \frac{4}{2ص - 1} + \frac{-2}{ص + 1} \, .دص$$

= ٤ لو$_{هـ}$|٢ص − ١| - ٢ لو$_{هـ}$|ص + ١| + جـ

= ٤ لو$_{هـ}$|٢جاس − ١| - ٢ لو$_{هـ}$|جاس + ١| + جـ

---

٢٩) $\int \frac{ق^4 س}{ظا^2 س - 5ظاس - 6} \, .دس$ ....واجب

---

٣٠) $\int \frac{جتا^3 س}{جتا^2 س + جاس + 5} \, .دس$ .....واجب

---

٣١) $\int \frac{4ق^2 س}{5 - ق^2 س} \, .دس$ ..... واجب

---

٣٢) $\int \frac{6جتاس}{8 + جتا^2 س} \, .دس$

الحل :

$$= \int \frac{6جتاس}{8 + 1 - جا^2 س} \, .دس$$

ص = جاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$$\Leftarrow \int \frac{6جتاس}{9 - ص^2} \cdot \frac{دص}{جتاس}$$

$$= \int \frac{6}{9 - ص^2} \, .دص$$

$$\frac{6}{9 - ص^2} = \frac{أ}{3 - ص} + \frac{ب}{3 + ص}$$

ص = ٣ $\Leftarrow$ أ = $\frac{6}{6}$ = ١

ص = -٣ $\Leftarrow$ ب = $\frac{6}{6}$ = ١

$$= \int \frac{6}{9 - ص^2} \, .دص = \int \frac{1}{3 - ص} + \frac{1}{3 + ص} \, .دص$$

= - لو$_{هـ}$|٣ − ص| + لو$_{هـ}$|٣ + ص| + جـ

= - لو$_{هـ}$|٣ − جاس| + لو$_{هـ}$|٣ + جاس| + جـ

---

٣٣) $\int \sqrt{1 + هـ^س} \, .دس$

الحل :

ص = $\sqrt{1 + هـ^س} \Leftarrow$ ص^2 − ١ = $هـ^س$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^س}{2\sqrt{1 + هـ^س}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{ص^2 - 1}{ص}$$

$$دس = \frac{ص}{ص^2 - 1} \, .دص$$

$$\Leftarrow \int ص \times \frac{ص}{ص^2 - 1} \, .دص$$

$$= \int \frac{ص^2}{ص^2 - 1} \, .دص$$

$$= \int 1 + \frac{1}{ص^2 - 1} \, .دص$$

$$= \int 1 + \frac{\frac{-1}{2}}{ص + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{ص - 1} \, .دص$$

$$= ص - \frac{1}{2} لو|ص + 1| + \frac{1}{2} لو|ص - 1| + جـ$$

$$= \sqrt{1 + هـ^س} - \frac{1}{2} لو_{هـ} |\sqrt{1 + هـ^س} + 1| + \frac{1}{2} لو_{هـ} |\sqrt{1 + هـ^س} - 1| + جـ$$

ص^2 − ١ | ص^2 + ١ | ١

SALEM ALSATEB

٣٤) $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س}{(س-١)^{٢}}$. دس

الحل :

$\int (س-١)^{-٢} \times \text{لو}_{هـ} س$. دس

ق = $\text{لو}_{هـ} س$ ⟸ دق = $\frac{١}{س}$. دس

$\int$ دهـ = $\int (س-١)^{-٢}$ ⟸ هـ = $\frac{-١}{س-١}$

⟸ $\int (س-١)^{-٢} \times \text{لو}_{هـ} س$. دس

= $\frac{-١}{س-١} \times \text{لو}_{هـ} س + \int \frac{١}{س(س-١)}$. دس

$\frac{١}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$

س = صفر ⟸ أ = $\frac{١}{-١-٠}$ = - ١

س = ١ ⟸ ب = $\frac{١}{١}$ = ١

⟸ = $\frac{-\text{لو}_{هـ} س}{س} + \int \frac{-١}{س} + \frac{١}{س-١}$. دس

= $\frac{-\text{لو}_{هـ} س}{س}$ - لو|س| + $_{هـ}$لو|س - ١| + جـ

---

٣٥) $\int$ لو$_{هـ}$(س^{٢} + س – ٢) . دس

الحل :

ق = لو$_{هـ}$(س^{٢} + س – ٢) ⟸ دق = $\int \frac{٢س+١}{س^{٢}+س-٢}$

دهـ = $\int$ ١ . دس ⟸ هـ = س

= س لو$_{هـ}$(س^{٢} + س – ٢) - $\int \frac{٢س^{٢}+س}{س^{٢}+س-٢}$. دس

٢	
٢س^{٢} + س	س^{٢} + س -٢
-٢س^{٢} -٢س+٤	
- س +٤	

= س لو$_{هـ}$(س^{٢} + س –٢) - $\int$ ٢ + $\frac{٤-س}{س^{٢}+س-٢}$. دس

$\frac{٤-س}{س^{٢}+س-٢} = \frac{أ}{س+٢} + \frac{ب}{س-١}$

س = ١ ⟸ أ = $\frac{٤-١}{٢+١}$ = ١

س = -٢ ⟸ ب = $\frac{٤+٢}{-٢-١}$ = -٢

= س لو$_{هـ}$(س^{٢} + س – ٣) - $\int$ ٢ + $\frac{١}{س+٢} + \frac{-٢}{س-١}$. دس

=س لو$_{هـ}$(س^{٢} + س- ٣) - (٢س+لو$_{هـ}$|س + ٢| + ٢لو$_{هـ}$|س - ١|)+ جـ

---

٣٦) $\int \frac{دس}{س(\text{لو}_{هـ} س)^{٢}-٤س}$

الحل :

= $\int \frac{دس}{س((\text{لو}_{هـ} س)^{٢}-٤)}$

ص = لو$_{هـ}$س ⟸ دس = س دص

⟸ $\int \frac{١}{س(ص^{٢}-٤)} \times$ س . دص

= $\int \frac{١}{ص^{٢}-٤}$. دص

$\frac{١}{ص^{٢}-٤} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢}$

س = ٢ ⟸ أ = $\frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

س = -٢ ⟸ ب = $\frac{١}{-٢-٢} = \frac{-١}{٤}$

= $\int \frac{\frac{١}{٤}}{ص-٢} + \frac{\frac{-١}{٤}}{ص+٢}$. دص

= $\frac{١}{٤}$ لو|ص – ٢| - $\frac{١}{٤}$ $_{هـ}$لو|ص + ٢| + جـ

= $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$|لوس – ٢| - $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$|لوس + ٢| + جـ

SALEEM ALSATEB

المعادلات التفاضلية :

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقات ونتعرف عليها إذا

أعطانا د س ، د ص،صَ ، $\frac{د ص}{د س}$ ، قَ ، $\frac{د ع}{د ن}$ .....

* كلمه حل المعادلة تعني التخلص من المشتقات

خطوات الحل :

١) تجعل الحروف المتشابه معا (إلي زي بعض مع بعض) .

٢) ندخل التكامل غير المحدود على طرفين المعادلة ونحل التكامل .

٣) نضع"جـ" واحده في طرف الايسر .

٤) إذا أعطانا معطيات نتخلص من "جـ" خاوا .

أسئلة :حل المعادلات التفاضلية التالية :

١) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س+١}{٣ ص^{٢}}$

الحل :

٣ ص^{٢}.د ص = (٢س+١).د س

∫٣ص^{٢}.د ص=∫ ٢س+١.دس

∴ ص^{٣} = س^{٢} + س + جـ

---

٢) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٣س^{٢}+٤ س}{٢ ص+٧}$

الحل: (٢ص+٧).د ص=(٣س^{٢}+٤س).دس

∫ ٢ص+٧.دص= ∫ ٣س^{٢}+٤س.دس

∴ص^{٢}+٧ص = س^{٣}+٢س^{٢}+ جـ

---

٣) $\frac{د ص}{د س} = \left[\frac{س}{ص}\right]$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{[س]}{[ص]}$ ⇐ [ص] . د ص = [س] . دس

⇐ ∫ ص$^{\frac{١}{٢}}$. دص =∫ س$^{\frac{١}{٢}}$. دس

$\frac{٢}{٣}$ص$^{\frac{٣}{٢}}$ ⇐ = $\frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ +جـ

---

٤)$\frac{د ص}{س-١}$ = (٣س + ١) . د س

الحل :

د ص = (س-١)(٣س+١).دس

∫.د ص=∫(س-١)(٣س+١).دس

∫.د ص=∫٣س^{٢} -٢س -١.دس

∴.ص = س^{٣}-س^{٢} -س+ جـ

---

٥) س^{٣}.دص-ص^{٢}.دس = صفر

الحل :

س^{٣}.دص=ص^{٢}.دس

$\frac{د ص}{ص^{٢}}$ ⇐= $\frac{د س}{س^{٢}}$

⇐ ∫ ص$^{-٢}$.دص = ∫س$^{-٣}$.دس

⇐ - ص$^{-١}$= - س$^{-٢}$ + جـ⇐$\frac{-١}{ص}$ = $\frac{-١}{س^{٢}}$ + جـ

---

٦) $\frac{د ص}{د س} = \frac{قتا^{٢}س}{٣ص^{٢}-١}$

الحل :

(٣ص^{٢}-١).د ص = قتا^{٢}س .د س

∫٣ص^{٣}-١.د ص = ∫قتا^{٢}س .د س

∴.ص^{٣}- ص= - ظتا س + جـ

---

٧) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س+١}{جتا ص}$

الحل :

جتا ص .د ص = (٢س+١).دس

∫جتا ص .د ص=∫٢س+١.دس

∴.جا ص= س^{٢}+ س + جـ

---

٨) جا^{٢}س .دص+ ص^{٢}.د س = د ص

الحل :

جا^{٢}س.د ص- ص= ص^{٢}.د س

(جا^{٢}س-١) . د ص= - ص^{٢}.د س

$\frac{د ص}{-ص^{٢}} = \frac{دس}{جا^{٢}س-١}$ ⇐∫ $\frac{د ص}{-ص^{٢}}$ = ∫ $\frac{دس}{جا^{٢}س-١}$

SALEM ALSATEB

$\Leftarrow \int -ص^{-٢}.د ص = \int \frac{د س}{-جتا^{٢} س}$

$\Leftarrow \int ص^{-٢}.د ص = \int -قا^{٢} س.د س$

$\therefore -ص^{-١} = طا س + جـ \Leftarrow \frac{-١}{ص} = طا س + جـ$

---

٩) $د س + ٣.د ص = جتا س . د س$

الحل :

$٣ . د ص = جتا س . د س - د س$

$٣.د ص = (جتا س - ١) . د س$

$٣.د ص = \int جتا س - ١ . د س$

$\therefore ٣ص = جا س - س + جـ$

---

١٠) $قا^{٢}(\frac{س}{٤}) . د ص - ٤ جا^{٢}(\frac{س}{٤}) . د س = صفر$

الحل :

$قا^{٢}\frac{س}{٤}.دص = ٤ جا^{٢}\frac{س}{٤}.دس$

$د ص = \frac{٤ جا^{٢}(\frac{س}{٤})}{قا^{٢}(\frac{س}{٤})} . دس$

$\int د ص = \int ٤ جا^{٢}\frac{س}{٤} جتا^{٢}\frac{س}{٤} . د س$

$ص = \int (٢ جا (\frac{س}{٤}) جتا (\frac{س}{٤}))^{٢} .دس$

$ص = \int جا^{٢}(\frac{س}{٢}) . د س$

$ص = \frac{١}{٢}\int (١ - جتا س) . د س$

$\therefore ص = \frac{١}{٢}(س - جا س) + جـ$

---

١١) $س^{٢}.دس - ص^{٢} . د ص = جا ص . د ص + ٨ . د س$

الحل:

$جا ص .د ص + ص^{٢} . د ص = -س^{٢} . د س + ٨ .د س$

$(جا ص + ص^{٢}).د ص = (-س^{٢} + ٨) . د س$

$\int جا ص + ص^{٢}.د ص = \int -س^{٢} + ٨ .د س$

$\therefore - جتا ص + \frac{ص^{٣}}{٣} = -\frac{س^{٣}}{٣} + ٨ س + جـ$

---

١٢) $طا^{٢}س - جتا ص . \frac{د ص}{د س} = ٠$

الحل :

$طا^{٢}س = جتا ص . \frac{د ص}{د س}$

$طا^{٢}س . دس = جتا ص . د ص$

$\int طا^{٢}س.د س = \int جتا ص . د ص$

$\int قا^{٢}س - ١ . د س = \int جتا ص . د ص$

$\therefore طا س - س = جا ص + جـ$

---

١٣) $هـ^{-ص} جاس - \frac{د ص}{د س} جتا^{٢}س = ٠$

الحل :

$هـ^{-ص} جاس = \frac{د ص}{د س} جتا^{٢}س$

$هـ^{-ص} جاس . دس = جتا^{٢}س . دص$

$\frac{جاس}{جتا^{٢}س} .دس = \frac{دص}{هـ^{-ص}}$

$\int قاس طاس .دس = \int هـ^{-ص} .دص$

$قاس = -هـ^{-ص} + جـ$

---

١٤) $دص - س ص .دس = س.دس$

الحل :

$دص = س ص .دس + س.دس$

$دص = س(ص+١).دس \Leftarrow \int \frac{د ص}{ص+١} = \int س.دس$

$\therefore لو|ص+١| = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

١٥) $\frac{د ص}{د س} = ١ - ص + س^{٢} - ص س^{٢}$

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = ١ - ص + س^{٢}(١ - ص) = (١ - ص)(١ + س^{٢})$

$\int \frac{دص}{ص+١} = \int (س^{٢}+١).دس$

$\therefore لو|ص+١| = \frac{س^{٣}}{٣} + س + جـ$

SALEM ALSATEB

١٦) $\frac{د س}{د ص}$ =١- ص+س^{٢}- ص س^{٢} + ٢س- ٢س ص

الحل :

$\frac{د س}{د ص}$ = ١- ص + س^{٢} (١- ص)+٢س(١- ص)

$\frac{د س}{د ص}$= (١-ص)(س^{٢}+٢س + ١)

$\int \frac{د س}{س^{٢} + ٢س + ١}$ = $\int$ (١- ص) .د ص

$\int \frac{دس}{(س+١)^{٢}}$ =$\int$ (١- ص) . د ص

$\int$ (س+١)$^{-٢}$.دس=$\int$ (١-ص).د ص

∴- (س+١)$^{-١}$=ص- $\frac{ص^{٢}}{٢}$+جـ

التفسير الهندسي للتكامل

ملاحظات مهمة :

١) الميل = قَ(س) = $\frac{د ص}{د س}$

٢) النقطة (أ،ب) نقطة حرجة تعني أ) ق(أ)=ب

ب) قَ(أ)=صفر

٣)ق يتقاطع مع هـ عندما س= أ تعني ق(أ)=هـ(أ)

٤) إذا كان ق يمس هـ عند النقطة (أ،ب) تعني

أ) المعادلات تتساوى⇐ ق(أ)=هـ(أ) = ب

ب) المشتقات تتساوي ⇐قَ(أ)=هَ(أ)

أسئلة:

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س،ص) هو (٣س^{٢}– ٢س) ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٣)

الحل :

قَ(س)= ٣س^{٢} – ٢ س

⇐ $\int$قَ(س).د س = $\int$(٣س^{٢} – ٢ س) . د س

ق(س)=س^{٣} – س^{٢} + جـ

(٠ ، ٣) تحقق ⇐ ٣ = ٠ ^{٣} - ٠ ^{٢} + جـ ⇐جـ = ٣

∴.ق(س) = س^{٣} – س^{٢} + ٣

٢) جد قاعدة الاقتران الكثير حدود من الدرجة الخامسة الذي قَ (س) = ٥ س^{٤} + ٢س والذي يمر بالنقط (١ ، ٤).

الحل :

$\int$قَ(س).دس =$\int$ ٥ س^{٤} + ٢س . دس

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + جـ

(١ ، ٤) تحقق ⇐ ٤= ١ ^{٥} + ١ ^{٢} + جـ ⇐ جـ = ٢

∴.ق(س) = س^{٥}+ س^{٢} + ٢

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س،ص) هو (٢س – $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$) ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن المنحنى يمر بالنقطة (-١، ٢).

الحل :

قَ(س)= ٢س - $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

$\int$قَ(س).دس=$\int$ ٢س - س $^{\frac{-٢}{٣}}$.دس

ق(س) = س^{٢} - **٣س**$^{\frac{١}{٣}}$ + جـ

النقطة (-١ ،٢) تحقق ⇐ ٢= ١ +٣ + جـ ⇐جـ= **-٢**

∴. ق(س) = س^{٢} - ٣س$^{\frac{١}{٣}}$ -٢

٤) إذا كان قَ (س) + جتا س = ٢س جد ق (س) علما بأن المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤).

الحل :

قَ (س) = ٢ س – جتا س

$\int$قَ (س) . د س = $\int$٢س – جتا س .د س

ق (س) = س^{٢} – جا س + جـ

النقطة (٠، ٤) تحقق ⇐ق(٠) = ٠ ^{٢} – جا . + جـ

∴⇐ جـ = ٤

∴.ق (س) = س^{٢} – جا س + ٤

SALEM ALSATEB

٥) إذا كان قَ (س) = ٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ١

فجد ق(٣) – ق(١)

الحل :

$\int_{١}^{٣}$ قَ (س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ١.دس

ق(٣) – ق(١) = س^{٤} – س^{٣} + س]$_{١}^{٣}$

= (٨١ – ٢٧ – ٣) – (١ – ١ + ١) = ٥٦

---

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س . ص) يساوي $\frac{\text{جاس–قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$ فجد قاعدة العلاقة علما بأن النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤) تقع على منحناها

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جاس–قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$

⟸ ∫٣ص^{٢} . دص =∫ حا س – قا^{٢} س . د س

∫٣ص^{٢} . دص = ∫حا س – قا^{٢}س . د س

ص^{٣} = - جتا س – طا س + جـ

نجد جـ و النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤)

(٤)^{٣} = -جتا$\frac{\pi}{٤}$ - طا$\frac{\pi}{٤}$ +جـ⟸ جـ = ٥٦ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ص^{٣} = - جتا س – طا س + ٥٦ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

---

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س . ص) يساوي(س هـ^{ص}) فجد قاعدة العلاقة علما بأن المنحنى يمر بالنقطة(٢، ٠) .

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = س هـ^{ص}⟸ ∫ $\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{ص}}$ =∫ س .دس

∫هـ$^{-ص}$. دص =∫ س .دس

- هـ$^{-ص}$ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

نجد جـ

ق(٢)= ٠ ⟸ - هـ^{٠} = ٢ + جـ

-١ =٢+جـ⟸ جـ = -٣

∴ - هـ$^{-ص}$ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ - ٣

---

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى ق هو (٢ س – ٢) جد ق (٢) علما بأن صورة النقطة الحرجة هي (٢)

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٢

∫قَ(س).دس = ∫٢ س – ٢.دس

ق(س) = س^{٢} – ٢س + جـ

نجد جـ

نجد قيمة س الحرجة

قَ(س) = ٢س- ٢ = ٠ ⟸ س = ١

صورة النقطة الحرجة ق(١)=٢ = ١-٢+جـ⟸ جـ =٣

∴ ق(س) = س^{٢} – ٢س + ٣

∴ ق(٢) = ٤ – ٤ + ٣ = ٣

---

٩)إذا كان قً (س) = ٦س حيث (١ ، ٣) هي نقطة حرجة جد ق (س).

الحل : ∫قً (س) . د س = ∫٦ س . د س

قَ (س) = ٣س^{٢} + جـ

نجد جـ⟸قَ (١) = ٠ = ٣ + جـ ⟸ جـ = -٣

∫قَ (س) . د س = ∫٣س^{٢} -٣ . د س

ق (س) = س^{٣} – ٣ س + جـ

ق(١) = ٣ = ١ – ٣ + جـ ⟸ جـ = ٥

∴ق(س) = س^{٣} – ٣س + ٥

SALEM ALSATEB

١٠) إذا كان قً(س)=جاس +هَ^{٢س} ، وكان ق(٠)=$\frac{١}{٤}$

قَ(٠)=$\frac{١}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

الحل:

∫قً(س).دس=∫جاس +هَ^{٢س} .دس

قَ(س) = -جتاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٢}$ + جـ

نجد جـ ⟸ قَ(٠) = -١ + $\frac{١}{٢}$ +جـ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ جـ = ١

∫قَ(س).دس = ∫-جتاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٢}$ + ١ .دس

ق(س) = -حاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٤}$ + س + جـ

نجد جـ ⟸ ق(٠) = ٠ + $\frac{١}{٤}$ + ٠ +جـ = $\frac{١}{٤}$ ⟸ جـ = صفر

ق(س) = - حاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٢}$ + س

---

١١) ق(س) = س^{٢} + ٥ ، هَ(س) = -٢ س جد

هـ (٢) علما بأن ق(س) يمس هـ (س)

الحل :

∫هَ (س) . د س = ∫- ٢ س . د س

هـ (س) = - س^{٢} + جـ

نجد جـ ⟸ق(س) يمس هـ (س)

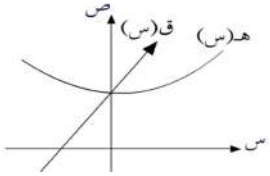
قَ(س) = هَ(س) ⟸ ٢س = -٢س ⟸ س=٠

ق(٠) = هـ (٠) ⟸ ٠ ^{٢} + ٥ = ٠ ^{٢} + جـ ⟸ جـ =٥

∴هـ (س) = - س^{٢} + ٥ ⟸ هـ (٢) = -٤ + ٥ ⟸ هـ (٢) = ١

---

١٢)الشكل أدناه يمثل بياني الاقترانين ق ، هـ . إذا علمت أن ق(س) = ٣س +٤ ،هـ(س) =٢س –٣ ، فما قيمة هـ (٥) ؟



الحل:

∫هَ(س).دس= ∫ ٢س -٣ .دس

هـ(س) = س^{٢} – ٣س +جـ

نجد جـ ⟸ ق يتقاطع مع هـ عندما س =٠

ق(٠) = هـ(٠) ⟸ ٠ = ٤+٠ -٠ +جـ ⟸ جـ = ٤

هـ(س) = س^{٢} – ٣س + ٤

هـ(٥) = ٢٥ -١٥ + ٤ = ١٤

---

١٣)إذا كان ق (س) = ٢س – ٥ هـ(س) = ٩س – ٢

بحيث أن ق(٢) = هـ(٢) ، أوجد ق(١)

الحل :

∫ ق (س) . دس = ∫ ٢س – ٥ . دس

ق(س) = س^{٢} – ٥س + جـ

نجد جـ :

ق(٢) = هـ(٢)

٤ – ١٠ + جـ = ١٨ – ٢

⟸ جـ = ٢٢

∴ ق(س) = س^{٢} – ٥س + ٢٢

ق(١) = ١ – ٥ + ٢٢ = ١٨

---

١٤) إذا كان ∫ قَ(س)+س^{٢}.دس= ٢س^{٣} + جـ س^{٢} +٢ وكان قَ(١)= ٤ ، ق(٢) = ٦ فجد ق(-١) ، قَ(٢) .

الحل :

$\frac{د}{دس}$(∫ قَ(س)+س^{٢}.دس)=$\frac{د}{دس}$(٢س^{٣} + جـ س^{٢} +٢)

⟸ قَ(س)+س^{٢} = ٦س^{٢} + ٢جـ س

⟸ قَ(١) + ١ = ٦+٢جـ ⟸ ٤+١=٦ + ٢جـ

⟸ جـ = - $\frac{١}{٢}$

قً(س)= ٥س^{٢} – س ⟸ قً(٢) = ٢٠ – ٢ = ١٨

⟸ ∫ قَ(س).دس=∫ ٥س^{٢}- س . دس

ق(س) = $\frac{٥ س^{٣}}{٣}$ _ $\frac{س^{٢}}{٢}$ +جـ

نجد جـ ⟸ ق(٢) = ٦ ⟸ ٦ = $\frac{٤٠}{٣}$ -٢ +جـ ⟸ جـ = $\frac{-١٦}{٣}$

ق(س) = $\frac{٥ س^{٣}}{٣}$ _ $\frac{س^{٢}}{٢}$ _ $\frac{١٦}{٣}$

ق(-١) = $\frac{-٥}{٣}$ _ $\frac{١}{٢}$ _ $\frac{١٦}{٣}$ = -١٥

SALEEM ALSATEB

التفسير الفيزيائي للتكامل :

ملاحظات :

ت ← نكامل ع ← نكامل ف

تذكر ان :

١) ت = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ ، ع = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$

٢) تحرك الجسم من السكون ع(٠) = ٠

٣) السرعة الابتدائية تعني السرعة عند ن = ٠

٤) أقصى أرتفاع تعني ع (ن) = ٠

٥) إذا لم يذكر لنا زمن نفرضة صفر

* يحرم شرعا بقاء " ج " ثابت للتكامل

* كلمه معدل التغير تعني $\frac{\text{د الحرف}}{\text{د ن}}$

أسئلة :

١) إذا كان جسم يتسارع وفق العلاقة ت = ٦ن + ٤ فجد المسافة المقطوع بعد مرور ٣ ثواني من بدأالحركة علما بان السرعة الابتدائية للجسم (٢م / ث) وأنه قطع مسافة (٢١م)في أول ثانيتين .

الحل :

ت = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ ⟸ دع = ٦ن + ٤ . دن

⌡ دع = ⌡ ٦ن + ٤ . دن

ع = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ نجد جـ ⟸ ن = ٠ ، ع = ٢

⟸ ٣ × ٠ ^{٢} + ٤ × ٠ + جـ = ٢ ⟸ جـ = ٢

ع = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢ ⟸ $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢

د ف = ٣ن^{٢} + ٤ن + ١٢ . دن

⟸ ⌡ د ف = ⌡ ٣ن^{٢} + ٤ن + ١٢ . دن

⟸ ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ

نجد جـ ⟸ ن = ٢ ، ف = ٢١

⟸ (٢)^{٣} + ٢ (٢)^{٢} + ٤ + جـ = ٢١ ⟸ جـ = ١

ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ١

ف(٣) = ٢٧ + ١٩ + ٦ + ١ = ٥٣

٢) إذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = π ^{٢} جتا π ن ، فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن سرعته الإبتدائية ٨م/ث وأنه قطع مسافة($\frac{١٩}{٦}$) في أول ($\frac{١}{٣}$) ثانية من بدء الحركة .

الحل :

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = π ^{٢} جتا π ن ⟸ دع = π ^{٢} جتا π ن . دن

⟸ ⌡ دع = ⌡ π ^{٢} جتا π ن . دن

ع = π جا π ن + جـ

نجد جـ ⟸ ن = ٠ ، ع = ٨ ⟸ ٨ = ٠ + جـ ⟸ جـ = ٨

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = π جا π ن + ٨ ⟸ ⌡ دف = ⌡ π جا π ن + ٨ دن

ف = - جتا π ن + ٨ن + جـ

نجد جـ ⟸ ن = $\frac{١}{٣}$ ، ف = $\frac{١٩}{٦}$

⟸ $\frac{١٩}{٦}$ = - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ ⟸ جـ = ١

ف(ن) = - جتا π ن + ٨ن + ١

∴ ف(١) = - جتا π + ٨ + ١ = ١٠ م

٣) تحرك جسم بتسارع مقدارة -١٢ م / ث^{٢}

جد معادلة الحركة ، علما بأن يقطع مسافة ٨ م بسرعة ٦ م/ث.

الحل :

ت = -١٢ ⟸ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = - ١٢ ⟸ د ع = -١٢ . د ن

⟸ ⌡ د ع = ⌡ -١٢ . د ن ⟸ ع = -١٢ ن + جـ

نجد جـ ⟸ ن = ٠ ، ع = ٦ ⟸ -١٢ × ٠ + جـ = ٦ ⟸ جـ = ٦

⟸ ع = -١٢ ن + ٦ ⟸ $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = - ١٢ ن + ٦

⟸ ⌡ د ف = ⌡ - ١٢ن + ٦ . دن ⟸ ف = -٦ ن^{٢} + ٦ن + جـ

نجد جـ ⟸ ن = ٠ ، ف = ٨

⟸ -٦ × ٠ ^{٢} + ٦ × ٠ + جـ = ٨ ⟸ جـ = ٨

ف = -٦ن^{٢} + ٦ن + ٨

SALEM ALSATEB

٤) قذف جسم رأسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م / ث وتسارع ثابت مقداره – ١٠ م / ث^{٢} إذا كان ارتفاعه عند السطح بعد مرور ثانية من حركة يساوي ٨٠م جد أقصى ارتفاع يصل له الجسم .

الحل :

ت = ١٠ $\Leftarrow \frac{د ع}{د ن}$ = - ١٠ $\Leftarrow$ ع = $\int$ - ١٠ . د ن

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ع = ٤٠

$\Leftarrow$ ٤٠ = - ١٠ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٠

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ ن + ٤٠ $\Leftarrow \frac{د ف}{د ن}$ = - ١٠ن + ٤٠

$\int$ د ف = $\int$ - ١٠ + ٤٠ . دن $\Leftarrow$ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ١ ، ف = ٨٠

$\Leftarrow$ ٨٠ = - ٥ × ١^{٢} + ٤٠ × ١ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٥

∴ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥

أقصى ارتفاع $\Leftarrow$ ع = ٠ = - ١٠ ن + ٤٠ $\Leftarrow$ ن = ٤

ف(٤) = - ٥ (٤)^{٢} + ٤٠ × ٤ + ٤٥ = ١٢٥

---

٥) قذف كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) متراً عن سطح الارض بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م/ث وبتسارع مقداره (-١٠)م/ث^{٢} . جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود الى سطح الارض .

الحل :

ت = ١٠ $\Leftarrow \frac{د ع}{د ن}$ = - ١٠ $\Leftarrow$ ع = $\int$ - ١٠ . د ن

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ع = ٤٠

$\Leftarrow$ ٤٠ = - ١٠ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٠

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ن + ٤٠ $\Leftarrow \frac{د ف}{د ن}$ = - ١٠ن + ٤٠

$\int$ د ف = $\int$ - ١٠ن + ٤٠ . دن

$\Leftarrow$ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ف = ٤٥

$\Leftarrow$ ٨٠ = - ٥ × (٠)^{٢} + ٤٠ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٥

∴ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥

* تصل الكرة الى سطح الارض عندما ف = صفر

$\Leftarrow$ - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥ = ٠

$\Leftarrow$ ن^{٢} - ٨ن - ٩ = ٠ $\Leftarrow$ (ن - ٩)(ن + ١) = ٠

ن = ٩ ، ن = - ١ تهمل

---

٦) يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = $\frac{١}{ع^{٢}}$ ، ع > ٠ . إذا تحرك الجسم من السكون قطع مسافة $\frac{١٩}{٣}$ بعد مرور ٤ ثواني فجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة

الحل:

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{١}{ع^{٢}} \Leftarrow \int ٢ع . د ع = \int ١ . د ن$

ع^{٢} = ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ع = ٠ $\Leftarrow$ ٠^{٢} = ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٠

ع^{٢} = ن $\Leftarrow$ ع = $\sqrt{ن}$

$\frac{د ف}{د ن} = \sqrt{ن} \Leftarrow \int$ د ف = $\int \sqrt{ن}$. د ن

ف = $\int$ ن$^{\frac{١}{٢}}$. د ن $\Leftarrow$ ف = $\frac{٢}{٣}$ ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٤ ، ف = $\frac{١٩}{٤}$ $\Leftarrow \frac{١٩}{٣} = \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

$\Leftarrow \frac{١٩}{٣} = \frac{١٦}{٣}$ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ١

ف = $\frac{٢}{٣}$ ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + ١

∴ ف(١) = $\frac{٢}{٣}(١)^{\frac{٣}{٢}}$ + ١ = $\frac{٢}{٣}$ + ١ = $\frac{٥}{٣}$

---

٧) يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{ع}$ ، ع > صفر ، ت: تسارع الجسم ، ع: سرعة الجسم فإذا علمت ان السرعة الابتدائية للجسم ٩ م/ث ، وقطع مسافة ٨٠ متراً في ٤ ثواني ، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانيتين من بدأ حركته.

SALEM ALSATEB

الحل:

$\frac{د ع}{د ن} = \sqrt{ع} \Leftarrow د ع = \sqrt{ع}\ .د ن \Leftarrow \int \frac{د ع}{\sqrt{ع}} = \int .د ن$

$\int ع^{-\frac{١}{٢}} .د ع = ن + جـ \Leftarrow ٢ ع^{\frac{١}{٢}} = ن + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن=٠ ، ع=٩ $\Leftarrow$ ٢×٣=٠+جـ $\Leftarrow$ جـ = ٦

$٢ ع^{\frac{١}{٢}} = ن + ٦ \Leftarrow ع = \left(٣+\frac{ن}{٢}\right)^{٢}$

$\Leftarrow \frac{د ف}{د ن} = \left(٣+\frac{ن}{٢}\right)^{٢}$

$\int .د ف = \left(٣+\frac{ن}{٢}\right)^{٢} \int .د ن \Leftarrow ف = \frac{٢}{٣}\left(٣+\frac{ن}{٢}\right)^{٣} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن=٤ ، ف=٨٠ $\Leftarrow$ ٨٠=$\frac{٢٥٠}{٣}$ +جـ $\Leftarrow$ جـ =- $\frac{١٠}{٣}$

$ف = \frac{٢}{٣}\left(٣+\frac{ن}{٢}\right)^{٣} - \frac{١٠}{٣}$

$\therefore ف(٢) = \frac{١٢٨}{٣} - \frac{١٠}{٣} = \frac{١١٨}{٣}$

---

٨) إذا كان معدل استخراج التراب من حفرة هو (٤ن+ ٢ م^{٣} /ساعة)جد حجم التراب المستخرج بعد مرور ثلاث ساعات .

الحل :

$\frac{د ح}{د ن} = ٤ن + ٢ \Leftarrow \int .د ح = \int ٤ن + ٢ \ .د ن$

$\Leftarrow ح = ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ$

فجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ح = ٠

$\Leftarrow ٠ = ٢ \div ٠^{٢} + ٢ \times ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$

$ح = ٢ن^{٢} + ٢ن$

$ح|_{ن=٣} = ٢ \times ٣^{٢} + ٢ \times ٣ = ٢٤ م^{٣}$

---

٩) تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة $\frac{د ت}{د ن} = ٥ن^{٤} + ٢٠ ن$

حيث ت: عدد البكتيريا ، ن: الزمن بالثواني ، إذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي (٣٠)

فجد عددها بعد مرور ثلاث ثواني.

الحل :

$د ت = ٥ ن^{٤} + ٢٠ن \ . د ن \Leftarrow ت = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ١ ، ت = ٣٠

$٣٠ = ١^{٥} + ١٠ \times ١^{٢} + جـ \Leftarrow جـ = ١٩$

$ت = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + ١٩$

$ت|_{ن=٣} = ٣^{٥} + ١٠ (٣)^{٢} + ١٩ = ٣٥٢$

---

١٠) خزان ماء فارغ سعته $\frac{٢١}{٢}$ م^{٣} ، يصب فيه الماء بمعدل (ن + ٢)م^{٣} /د ، أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

الحل :

$\frac{د ح}{د ن} = ن + ٢ \Leftarrow \int .د ح = \int ن + ٢ \ .د ن$

$\Leftarrow ح = \frac{ن^{٢}}{٢} + ٢ن + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ح = ٠

$\Leftarrow ٠ = \frac{٠^{٢}}{٢} + ٢ \times ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$

$\Leftarrow ح = \frac{ن^{٢}}{٢} + ٢ن = \frac{٢١}{٢} \Leftarrow ن^{٢} + ٤ن - ٢١ =$ صفر

(ن+٧)(ن-٣)= صفر $\Leftarrow$ ن=٣ ، ن= -٧ تهمل

---

١١) وضع ١٠٠ سمكة في بركة ماء حيث كان معدل الزياد في عدد السمك يعطي بالعلاقة

$\frac{د س}{ند} = \frac{١}{\sqrt{٢ن+١}}$ سمكة / يوم

حيث س: عدد السمك ، ن : الزمن باليوم ، فما عد السمك بمرور ٢٤ يوم.

الحل :

$دس = \frac{دن}{\sqrt{٢ن+١}} \Leftarrow \int .دس = \int \frac{دن}{\sqrt{٢ن+١}}$

$س = \int (٢ن+١)^{-\frac{١}{٢}} .دن$

$س = (٢ن+١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، س = ١٠٠

$\Leftarrow ١٠٠ = ١ + جـ \Leftarrow جـ = ٩٩ \Leftarrow س = (٢ن+١)^{\frac{١}{٢}} + ٩٩$

$س|_{ن=٢٤} = (٢ \times ٢٤+١)^{\frac{١}{٢}} + ٩٩ = ٧ + ٩٩ = ١٠٦$

SALEM ALSATEB

١٢) آله صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار وكانت قيمتها تناقص بمرور الزمن وفق العلاقة

$\frac{دق}{دن} = -٥٠٠ (ن+٢)^{-٢}$ حيث

ق: قيمتها بعد مرورن سنه من شرائها

إحسب قيمة الآلة بعد مرور (٣) سنوات من شرائها.

الحل :

$دق = -٥٠٠ (ن+٢)^{-٢}.دن$

$\Leftarrow \int.دق = \int -٥٠٠ (ن+٢)^{-٢}.دن$

$ق = ٥٠٠ (ن+٢)^{-١} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن=٠ ، ق=٢٥٠٠

$٢٥٠٠ = ٢٥٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٢٢٥٠$

$ق = ٥٠٠ (ن+٢)^{-١} + ٢٢٥٠$

$ق(٣) = ١٠٠+٢٢٥٠ = ٢٣٥٠$

---

١٣) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{دع}{دن} = ٠.٠٢٥ ع$ ، حيث ع : عدد السكان ، ن : الزمن بالسنوات ، اذا علمت ان عدد السكان في عام (٢٠١٧) يساوي (٢٠٠٠٠٠) نسمة ، فجد عدد السكان بعد (٤٠) عام؟

الحل:

$\int \frac{١}{ع}.دع = \int ٠.٠٢٥.دن$

$لو_{هـ}|ع| = ٠.٠٢٥ ن + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ع(٠) = ٢٠٠٠٠٠ $\Leftarrow$ $لو_{هـ}|٢٠٠٠٠٠| = جـ$

$لو_{هـ}ع = ٠.٠٢٥ ن + لو_{هـ}(٢٠٠٠٠٠)$

المطلوب : ع ، عندما ن = ٤٠

$لو_{هـ}ع = ٠.٠٢٥ \times ٤٠ + لو_{هـ}(٢٠٠٠٠٠)$

$ع = هـ^{١+لو_{هـ}٢٠٠٠٠٠} \Leftarrow |ع|_{ن=٤٠} = ٢٠٠٠٠٠ هـ$

١٤)إذا كان ميل المماس للمنحنى ص يعطى بالعلاقة :

س (ص – ص^{٢}) وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

بيّن أنّ $٢ لو_{هـ}|\frac{ص}{١-ص}| = س^{٢} + ٢ لو_{هـ}٢ - ١$

..... واجب

SALEEM ALSATEEB

Saleem Al-Sateeb

التكامل

حل مباشر على القواعد

- $\int ظاس\ .دس = -لو_{هـ}|جتاس|+جـ$
- $\int ظتاس\ .دس = لو_{هـ}|جاس|+جـ$
- $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\ .دس = لو_{هـ}|ق(س)|+جـ$
- $\int قاس\ .دس = لو_{هـ}|قاس+ظاس|+جـ$
- $\int قتاس\ .دس = لو_{هـ}|قتاس+ظتاس|+جـ$

$\int م^{ن}_{س}\ .دس = \frac{م^{ن+1}_{س}}{ن+1} + جـ$

نخلص من الاقواس

$(\ )^{٢}$

$(\ )^{٣}$

القسمة

- رفع وتوزيع مقام حد واحد
- تحليل : نحلل ،نختصر، نكامل
- قسمة طويلة: درجة البسط اكبرمن او تساوي درجة المقام
- الكسور الجزئية : درجة البسط اقل من درجة المقام، و المقام يحلل الى عوامل خطية اولية

اذا ما قدرت احل مباشرة بروح على الترتيب

ترتيب الاسس و اللوغاريتمات:

- $هـ^{لو_{هـ}م(س)} = م(س)$
- $لو_{هـ} هـ^{م(س)} = م(س)$

Saleem Al-Sateeb

المثلثيات

- المقلوب : $قا = \frac{١}{جتا}$ ، $قتا = \frac{١}{جا}$

ترفع المثلثيات بقيمها $ظا = \frac{جا}{جتا}$

- $ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١$

$ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س - ١$

- جا × جتا

لهما نفس القوة و نفس الزاوية

$جا^{٢}س = ٢$ جاس جتاس

- جا أو جتا (لهما قوة زوجية)

$جا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)$

$جتا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ + جتا٢س)$

- في حالة أن يكون بالمقام (مرافق)
  - $١ \pm جا$
  - $١ \pm جتا$

- $١ - جتا٢س = ٢جا^{٢}س$

$١ + جتا٢س = ٢جتا^{٢}س$

- مفكوك الضرب :

$جاس \times جاص = \frac{١}{٢}(جتا(س-ص) - جتا(س+ص))$

$جتاس \times جتاص = \frac{١}{٢}(جتا(س-ص) + جتا(س+ص))$

$جاس \times جتاص = \frac{١}{٢}(جتا(س-ص) + جا(س+ص))$

- في حالات القسمة نوحد الزوايا

$جا٢س = ٢جاس\ جتاس$

$جتا٢س = جتا^{٢}س - جا^{٢}س$

$جا(أ \pm ب) = جا\ أجتاب \pm جتا\ أ\ جاب$

$جتا(أ \pm ب) = جتا\ أ\ جتاب \mp جا\ أ\ جاب$

$ظا(أ \pm ب) = \frac{ظا أ \pm ظا ب}{١ \mp ظا أ ظا ب}$

SALEEM ALSATEEB

التكامل بالتعويض (عند فشل الترتيب)

قوس مرفوع لقوة ما داخله غير خطي

ص= ما داخل القوس

مثلثي زاويته غير خطية

ص= الزاوية

أسي قوته غير خطية

ص= القوة

ق ، ق/

داخلها مش (س)

ص= ما داخل

ق ، ق/

$\sqrt{س}$ ، $\sqrt[3]{س}$

هـ^س ، لـو_هـ س ، جاس

جتاس ، ظاس

بمكان غير ملائم (قسمة)

ص= وحدة منهم

مثلثي × مثلثي واحد مع شوية تفكير (بشرط ان تكون لهما نفس الزاوية)

جا × جتا

- **فردي × فردي** ⇐ ص= صاحبة القوة الاعلى دون القوة
- **فردي × زوجي** ⇐ صاحبة القوة الزوجية دون القوة
- **زوجي × زوجي** ⇐ لا يوجد تعويض

نانسي — جا٢س = ٢ جاس جتاس

قوة غير متساوية — قوى متساوية

ظا × قا (ننظر الى قوة قا) / فردية : ص=قا / زوجية : ص=ظا

قتا × ظتا (ننظر الى قوة قتا) / فردية : ص=قتا / زوجية : ص=ظتا

حالات القسمة

البسط مشتقة للمقام

نفرض ص= المقام

و الجواب (خاوا) لوغاريتم

*في كثيرات الحدود يمكن تمييز هذه الحالة اذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام بدرجة واحدة

$\int \frac{١}{س^{ن} \pm س} دس$

$\int \frac{١}{س^{ن}(١ \pm س^{١-ن})} دس$

ص= $١ \pm س^{١-ن}$

$\int \frac{(أس+ب)^{ن}}{س^{ن+٢}} دس$

$\int \left(\frac{أس+ب}{س}\right)^{ن} \times \frac{١}{س^{٢}} دس$

ص= $\frac{أس+ب}{س}$

التكامل بالأجزاء (عند فشل الترتيب)

- **لوغاريتمات**
- **كثير حدود × مركب (خطي)**
  - كثير حدود × (خطي)^{ن} — ق / دهـ
  - كثير حدود × مثلثي(زاوية خطية) — ق / دهـ
  - كثير حدود × أسي(زاوية خطية) — ق / دهـ
  - كثير حدود × ق$'$ — ق / دهـ

SALEEM ALSATEEB

تكامل اللوغاريتمات

أجزاء

ما داخل اللوغاريتم كثير حدود

و اللوغاريتم في البسط

ق= اللوغاريتم

دهـ = الباقي

تعويض

ص= اللوغاريتم كامل

أو

ص= ما داخل اللوغاريتم

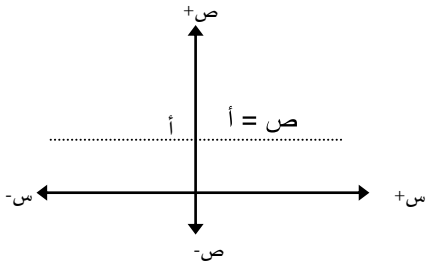
((حسب اللي برا مشتقة مين))

SALEEM ALSATEEB

الرسمات المشهورة :

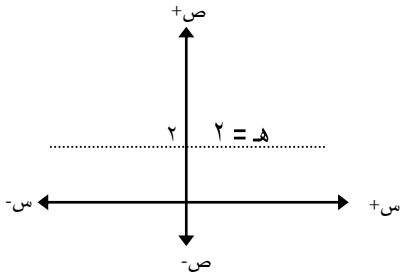
١ الاقتران الثابت :

أ) ص = أ

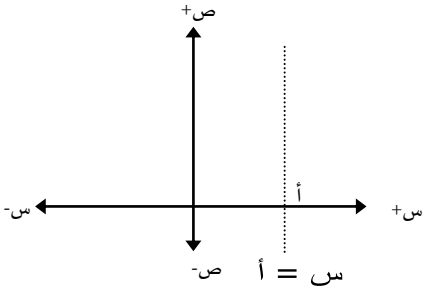


مثال:

ق(س) =٢ ، هـ = ٢

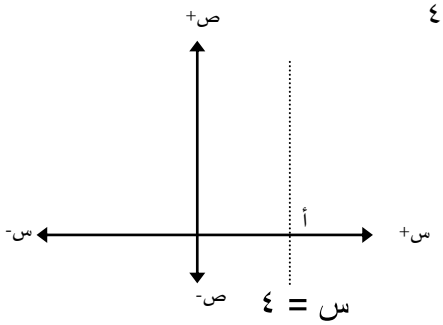


ب) العامود (المستقيم) س = أ (ليس اقتران)



مثال :

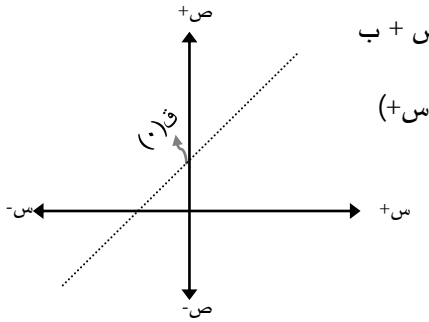
س = ٤



٢ الاقتران الخطي :

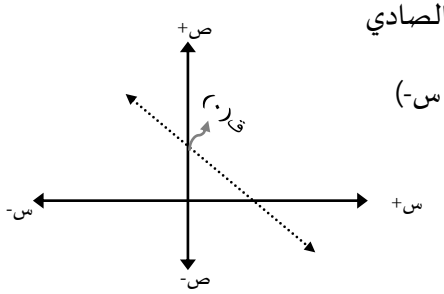
ص = أ س + ب

(معامل س+)



المقطع الصادي

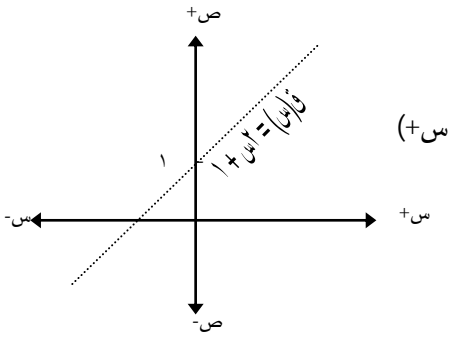
(معامل س-)



مثال (١) :

ق(س) = ٢س+ ١ ، ق(٠) = ١

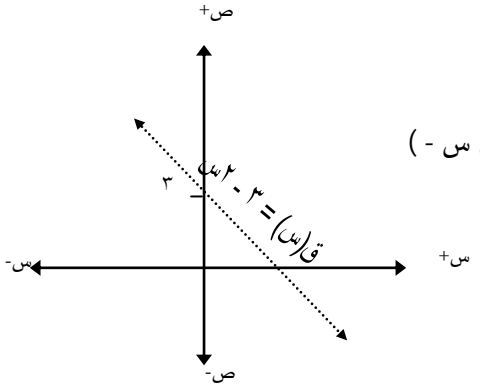
(معامل س+)



مثال(٢) :

ق(س) = ٣ – ٢ س ، ق (٠) = ٣

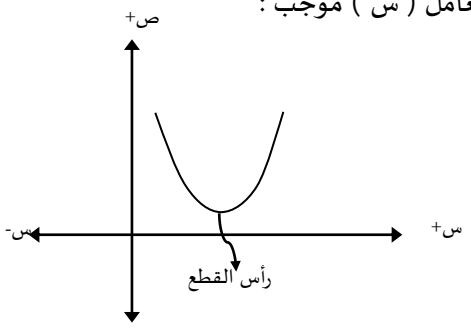
(معامل س -)



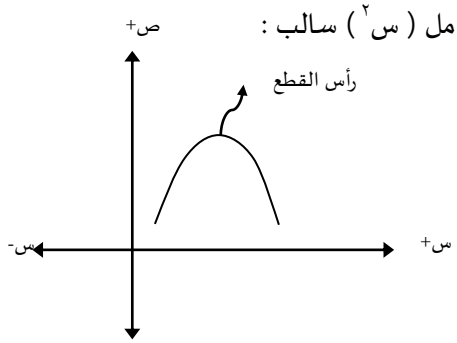
SALEEM ALSATEEB

٣ الاقتران التربيعي :

← معامل (س^{٢}) موجب :



← معامل (س^{٢}) سالب :



رأس القطع : ($\frac{-ب}{٢}$ ، $\frac{ق(-ب)}{٢}$) حيث أن :- أ : معامل س^{٢}

ب : معامل س

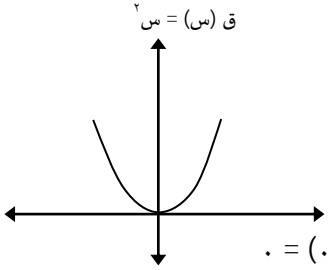
مثال (١) :

ق(س) = س^{٢}

أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

$\frac{-ب}{٢} = \frac{-٠}{١\times٢} = ٠$

رأس القطع (٠ ، ٠) ق(٠) = ٠



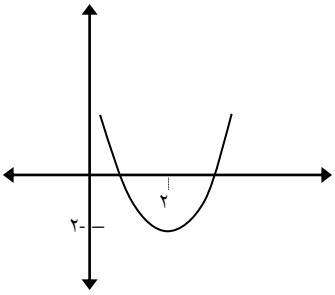
مثال (٢) :

ق(س) = س^{٢} – ٤س +٢

$\frac{-ب}{٢} = \frac{٤+}{٢} = ٢$

ق(٢) = - ٢

رأس القطع (٢ ، - ٢)



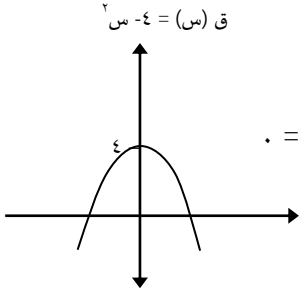
مثال(٣) :

ق(س) = ٤- س^{٢}

رأس القطع = $\frac{-ب}{٢} = \frac{٠}{١-\times٢} = ٠$

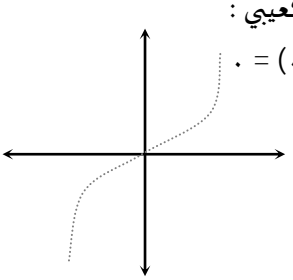
ق(٠) = ٤

∴ رأس القطع (٠ ، ٤)



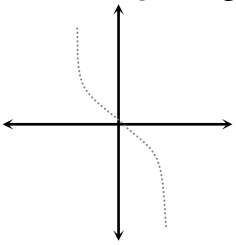
٤ الاقتران التكعيبي :

ق(س) = س^{٣} ، ق(٠) = ٠



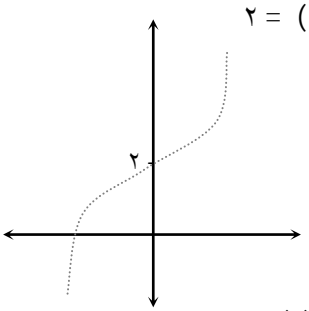
ق(س) = - س^{٣} ، ق(٠) = ٠

سالبة نفس الموجب بس معكوسة

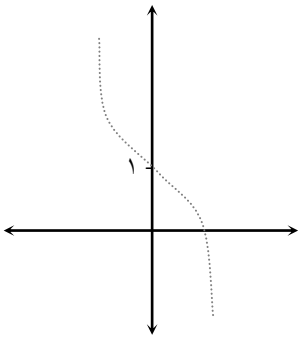


ق(س) = س^{٣} + ٢ ، ق(٠) = ٢

نرفع رسم الاقتران لـ (٢)



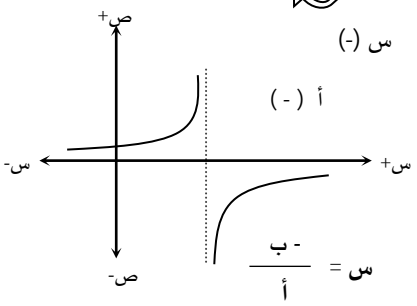
ق(س) = ١ – س^{٣} ، ق(٠) = ١



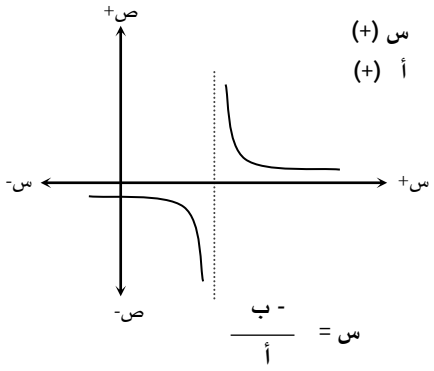
SALEEM ALSATEEB

٥ الاقتران النسبي :

ق(س)= $\frac{د}{أس + ب}$ دائما موجبة

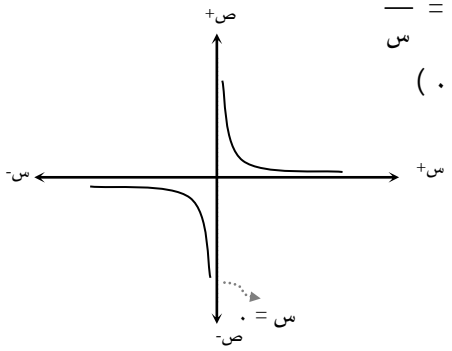


- صفر المقام : س = $\frac{- ب}{أ}$



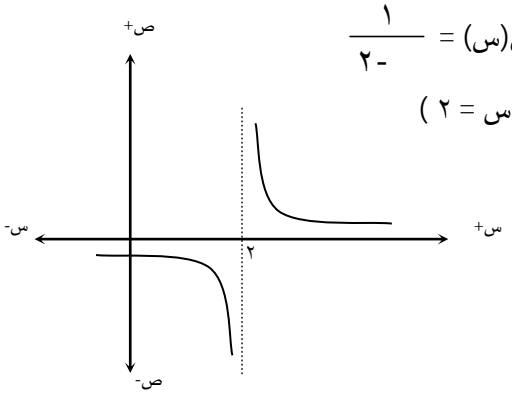
ق(س) = $\frac{١}{س}$

(س = ٠)

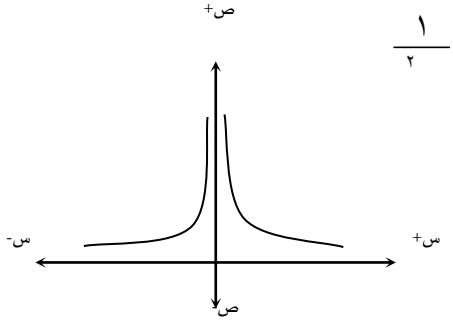


ق(س) = $\frac{١}{-٢}$

(س = ٢)

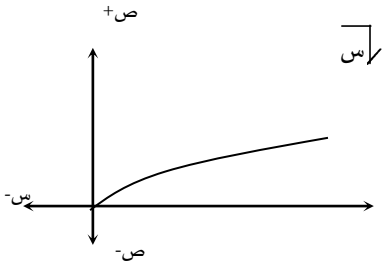


ق(س) = $\frac{١}{٢}$



* حفظ *

ق(س) = $\sqrt{س}$

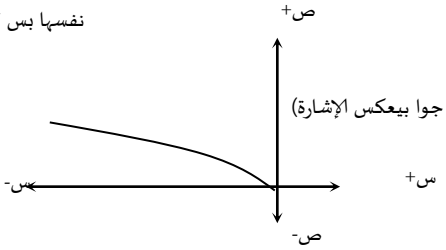


ق(س) = $\sqrt{-س}$

نفسها بس للربع الثاني

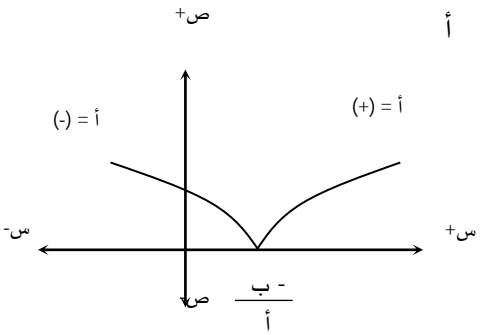
شمال

(سالب جوا بيعكس الإشارة)



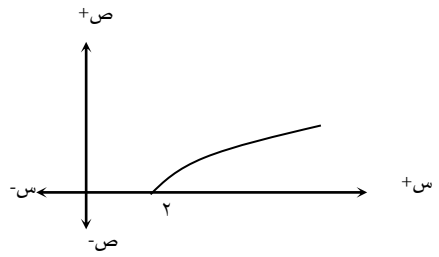
ق(س) = $\sqrt{أ س + ب}$

س = $\frac{- ب}{أ}$

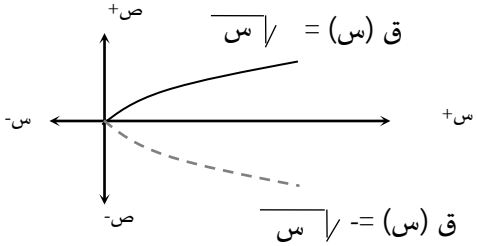


SALEEM ALSATEEB

ق(س) = $\sqrt{س-٢}$ ⇐ س-٢=٠ ⇐ س = ٢



ق (س) = $\sqrt{س}$

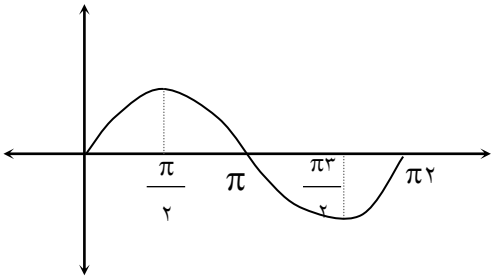


ق (س) =- $\sqrt{س}$

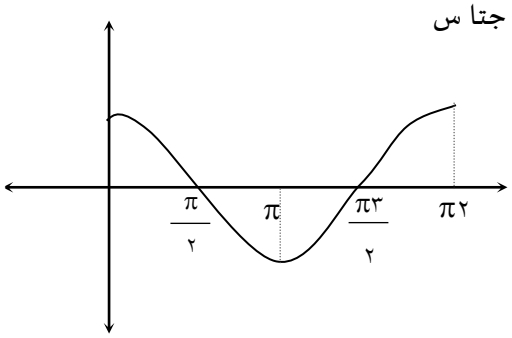
بتنزل الرسمة لتحت

رسم المثلثيات :

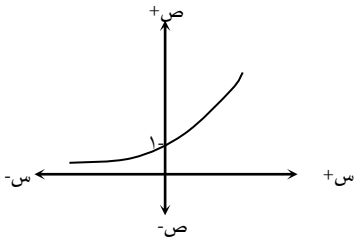
ق (س) = جا س



ق (س) = جتا س

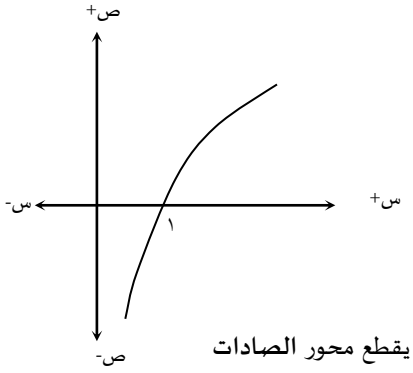


ق (س) = هـ^{س}



* لا يقطع محور السينات

ق(س) = لـو$_{هـ}$ س

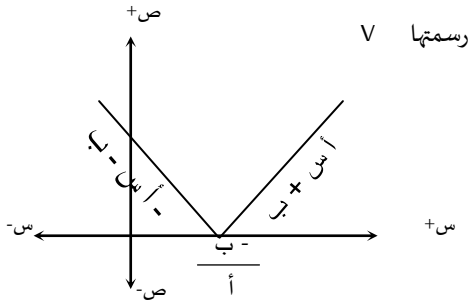


* لا يقطع محور الصادات

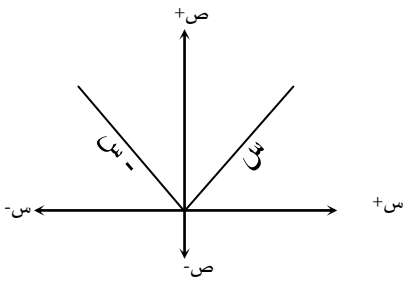
SALEEM ALSATEEB

ق (س) = | أ س + ب |

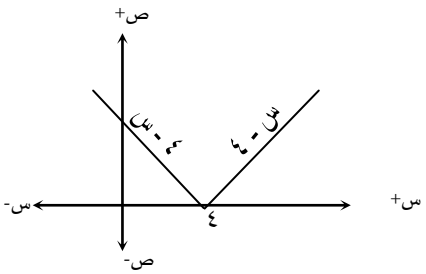
* رسمتها ٧



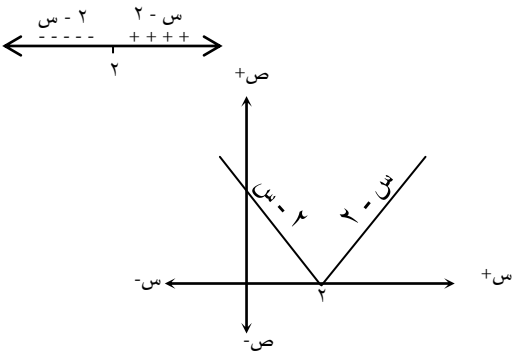
ق (س) = | - س | ⟸ س = ٠



ق (س) = | ٤ - س | ⟸ س = ٤

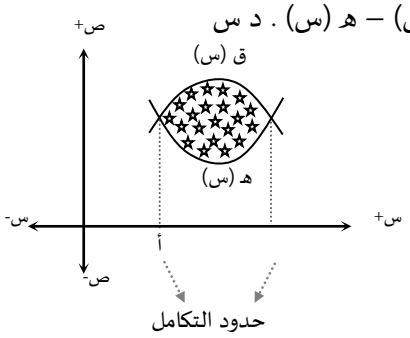


ق (س) = |٢ - س | ⟸ س = ٢



المساحة:

م = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) – هـ (س) . د س



- المساحة المحصورة بين الإقترانين ق (س) ، هـ (س) على الفترة [أ ، ب] .
- مُلاحظات أسئلة المساحة "مفاتيح الحل" :

١) كل ق (س) ، هـ (س) ، ص .. هو اقتران .
٢) كل (س = عدد) هو عمود
٣) معادلة محور السينات ⟸ "ص = ٠" إقتران .
٤) معادلة محور الصادات ⟸ "س = ٠" عمود.
٥) إذا أعطانا فترة [أ ، ب] فإنّ (س = أ ، س = ب) "أعمدة معطاة" .
٦) نهتم بالأعمدة المعطاة.

خطوات الحل :

١) نحدد الاقترانات والأعمدة المعطاة .
٢) نساوي الإقترانات ببعضها.
٣) نضع القانون :

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) – هـ (س) . د س

حيثُ :
ق (س) : الإقتران العلوي ، هـ (س) : الاقتران السفلي.
(ب) : العمود على يمين المساحة / (أ) : العمود على يسار المساحة

** يجب أن تكون المساحة دائما **موجبة** .

SALEEM ALKHATEEB

هناك عدة أنواع من أسئلة المساحة :-

النوع الأول : يعطينا إقترانين ويطلب منا المساحة :-

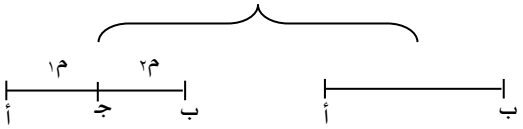
نستخدم قانون

م = $\int_{أ}^{ب}$ |ق(س) – هـ (س)| د س * ولا نحتاج للرسم*

***مُلاحظة :**

بنعمل جدول مكون من : | إقترانات | أعمدة | مساواة |

ولا نحتاج إلى الرسم بل نحتاج إلى **الخط** :-



١) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الإقتران (ق (س) = ٢س +٢) و محور السينات على الفترة [١ ، ٣] ؟

الحل:

اقترانات	أعمدة	مساواة
ق(س) = ٢س+٢	س=١	ق(س) = ص
ص = ٠	س= ٣	٢س+٢=٠
		س = -١ ⇐ ترفض

يرفض اذا كان خارج الفترة — يقبل اذا كان داخل الفترة

م = $\int_{١}^{٣}$ |ق(س) – هـ (س)| د س

= $\int_{١}^{٣}$ |٢س+٢ - ٠ دس | = | س^{٢}+٢س $]_{١}^{٣}$ | = | (٩+٦) –(١+٢)|

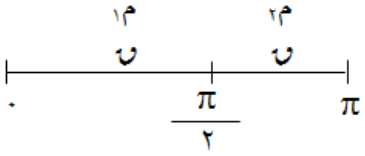
= | ١٥ – ٣ | = ١٢

٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى (ق(س) = جتاس) ، ومحور السنات على الفترة [٠ ،π] ؟

الحل:

اقترانات	أعمدة	مساواة
ق(س) = جتاس	س = ٠	جتاس = ٠
ص = ٠	س = π	(س = $\frac{\pi}{٢}$)

ق(س) = ص



م١ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ |ق(س) – ص| د س

م١ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ |جتاس د س| = | جاس $]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ | = | ١ – ٠ | = ١

م٢ = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ |ق(س) – ص| د س

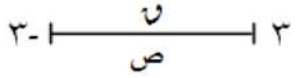
م٢ = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ |جتاس د س| = | جاس $]_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ | = | ٠ – ١ | = ١

م الكلية = م١ + م٢ = ١ + ١ = ٢

٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى (ق(س) = س^{٢}) والمستقيم ص = ٩؟

الحل:

اقترانات	أعمدة	مساواة
ق(س) = س^{٢}		ق(س) = ص
ص= ٩		س^{٢} = ٩
		س = ± ٣



SALEEM ALSATEEB

م= $\int_{-٣}^{٣}$ |ق(س) – ص| د س

م= $\int_{-٣}^{٣}$ | س^{٢}-٩ د س | ⇐ | $\frac{س^{٣}}{٣}$ - ٩س $]_{-٣}^{٣}$ |

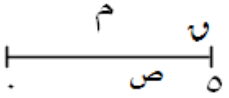
= | (٩-٢٧) – (-٩+٢٧) | = | -١٨– ١٨ | = | -٣٦ | = ٣٦

---

٤) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران (ق(س) = $\sqrt{٥ - س}$) ومحور السينات و ،س= ١ ؟

الحل:

اقترانات	أعمدة	مساوات
ق(س) = $\sqrt{٥-س}$	س=١	ق(س) = ص
ص = ٠		$\sqrt{٥-س}$ = ٠
		(س = ٥)



م= $\int_{١}^{٥}$ |ق(س) – ص| د س

م= $\int_{١}^{٥}$ | ($\sqrt{٥-س}$ - ٠) د س | = $\int_{١}^{٥}$ |($(٥-س)^{\frac{١}{٢}}$) د س|

= | $\frac{-٢}{٣}$ $(٥-س)^{\frac{٣}{٢}}$ $]_{١}^{٥}$ |

= | $\frac{-٢}{٣}$ $\sqrt{(٥-٥)^{٣}}$ - $\frac{-٢}{٣}(١-٥)^{\frac{٣}{٢}}$ |

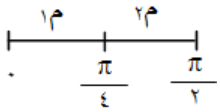
= | ٠ + $\frac{١٦}{٣}$ | = $\frac{١٦}{٣}$

---

٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران (ق(س) = ١ – جا٢س) ومحور السينات على الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ؟

الحل:

اقترانات	أعمدة	مساوات
ق(س) = ١- جا٢س	س=٠	ق(س) = ص
ص = ٠	س= $\frac{\pi}{٢}$	١- جا٢س= ٠
		جا٢س= ١
		⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$



م$_{١}$ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ |ق(س) – ص| د س ⇐ م$_{١}$ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ |١-جا٢س .د س |

= | س+ $\frac{جتا٢س}{٢}$ $]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ | = | $\left(٠+\frac{\pi}{٤}\right)-\left(٠+\frac{١}{٢}\right)$ |

= | $\frac{\pi}{٤}-\frac{١}{٢}$ | = $\frac{\pi}{٤}-\frac{١}{٢}$

م$_{٢}$= $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ |ق(س)– ص| د س ⇐ م$_{٢}$ = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ |١-جا٢س .د س |

= | س+ $\frac{جتا٢س}{٢}$ $]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ | = | $\left(\frac{١}{٢}+\frac{\pi}{٢}\right)-\left(٠+\frac{\pi}{٤}\right)$ |

= | $\frac{\pi}{٤}-\frac{١}{٢}$ | = $\frac{\pi}{٤}-\frac{١}{٢}$

المساحة الكلية = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = $\frac{\pi}{٤}-\frac{١}{٢}+\frac{\pi}{٤}-\frac{١}{٢}$

= $\frac{\pi}{٢}-١$

---

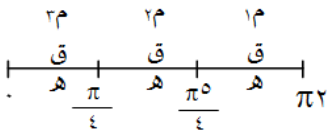
٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

(ق(س)=جاس) ، (هـ(س) = جتاس) على الفترة[٢π ،٠]

اقترانات	أعمدة	مساوات
ق(س) = جاس	س=٠	ق(س) = هـ(س)
هـ(س) = جتاس	س= π٢	$\frac{جاس}{جتاس}=\frac{جتاس}{جتاس}$
		⇐ ظاس = ١

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi^{٥}}{٤}$ ← ربع ثالث
← مرجع

SALEEM ALKATEEB



كل	حا
هـ	π - هـ
π٢ - هـ	π + هـ
جتا	ظا

$م_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |ق(س) - هـ(س)|\ د\ س$

$م_1 = \left| \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جاس - جتاس\ .د\ س \right|$

$= \left| \left[-جتاس - جاس \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}} - (-1-0) \right|$

$= \left| \frac{-2}{\sqrt{2}} + 1 \right| = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$

$م_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi 5}{4}} |ق(س) - هـ(س)|\ د\ س$

$م_2 = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi 5}{4}} جاس - جتاس\ .د\ س \right|$

$= \left| \left[-جتاس - جاس \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi 5}{4}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right|$

$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$م_3 = \int_{\frac{\pi 5}{4}}^{\pi 2} |ق(س) - هـ(س)|\ د\ س = \left| \int_{\frac{\pi 5}{4}}^{\pi 2} جاس - جتاس\ .د\ س \right|$

$= \left| \left[-جتاس - جاس \right]_{\frac{\pi 5}{4}}^{\pi 2} \right|$

$م_3 = \left| (-1 - 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| = 1 + \sqrt{2}$

المساحة الكلية $= م_1 + م_2 + م_3$

$= \sqrt{2} - 1 + 2 + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

النوع الثاني : يعطينا ثلاثة إقترانات أو أكثر: (نضع الجدول ثم نرسم)

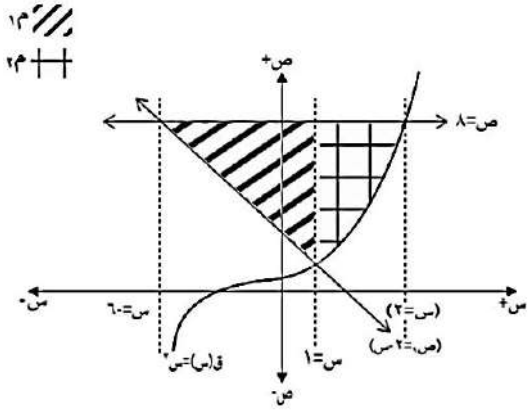
١) أوجد مساحة المنطقة المغلقة لمحصورة بين منحنيات الاقترانات

ق(س) = $س^3$ ص = ٢ − س ، ص = ٨ ؟

الحل:

اقترانات	مساوات
ق(س)=٢-س	ق(س) = ص١
ص١= ٢-س	$س^3$ = ٢-س
ص٢= ٨	$س^3$ + س -٢ = ٠
	(س=١)($س^2$+س+٢=٠)لا تحلل

ق(س) = ص٢	ص١ = ص٢
$س^3$= ٨	٢-س = ٨
(س= ٢)	(س = -٦)



$م_1 = \int_{-6}^{1} ص_2 - ص_1\ دس$

$= \int_{-6}^{1} ٨ - ٢ + س\ دس$

$= \int_{-6}^{1} ٦ + س\ دس = ٦س + \frac{س^2}{2} \Big]_{-6}^{1}$

$= (٦ + \frac{1}{2}) - (-٣٦ + ١٨)$

$= \frac{١٣}{2} + \frac{١٣}{2} = \frac{٢×١٨}{٢×١} = \frac{٣٦}{2} = \frac{٤٩}{2}$

$م_2 = \int_{1}^{2} ص_2 - ق(س)\ دس$

SALEEM ALSATEEB

$\Leftarrow \int_{-١}^{٢} ٨ - س^{٣} . دس \Leftarrow ٨س - [\frac{س^{٤}}{٤}]_{-١}^{٢}$

$= (١٦ - ٤) - (\frac{٨\times٤}{١\times٤} - \frac{١}{٤}) \Leftarrow \frac{٣١-٤٨}{٤} = \frac{١٧}{٤}$

المساحة الكلية $= م_{١} + م_{٢} = \frac{٤٩}{٢} + \frac{١٧}{٤} = \frac{١١٥}{٤}$ #

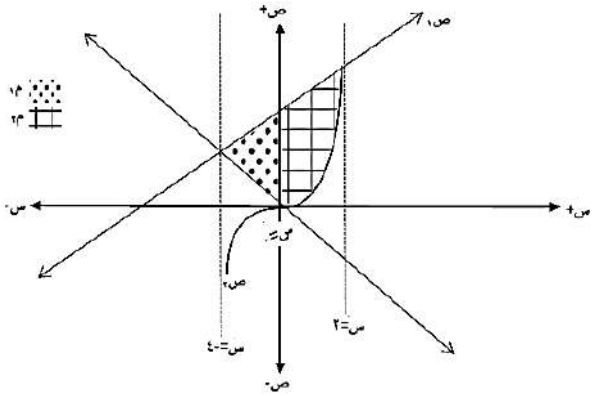
٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين :

(ص – س = ٦ ، ص = $س^{٣}$ ، ٢ص + س = ٠) ؟

الحل:

اقترانات	مساوات
ص١=س+٦	ص١ = ص٢
ص٢=$س^{٣}$	س + ٦ = $س^{٣}$
ص٣=$\frac{-س}{٢}$	$س^{٣}$ – س – ٦ = ٠
	(س=٢)($س^{٢}$ + ٢س+ ٣) =٠ لا تحلل

ص٢ = ص٣	ص١ = ص٣
$س^{٣} = \frac{-س}{٢}$	س + ٦ = $\frac{-س}{٢}$
$س^{٣} + \frac{س}{٢} = ٠$	$\frac{٣س}{٢}$ = -٦
س($س^{٢} + \frac{١}{٢}$)=٠	(س = -٤)
(س=٠)	



$م_{١} = \int_{-٤}^{٠} ص_{١} - ص_{٣} دس$

$= \int_{-٤}^{٠} س + ٦ + \frac{س}{٢} دس = \int_{-٤}^{٠} \frac{٣س}{٢} + ٦ دس$

$= [\frac{٣}{٤}س^{٢} + ٦س]_{-٤}^{٠} = (٠ + ٠) - (٢٤ - ١٢)$

= ٠ + ١٢ = ١٢

$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} ص_{١} - ص_{٢} . دس = \int_{٠}^{٢} س + ٦ - س^{٣} دس$

$= [\frac{س^{٢}}{٢} + ٦س - \frac{س^{٤}}{٤}]_{٠}^{٢} = (٢ + ١٢ - ٤) - (٠) = ١٠$

المساحة الكلية = $م_{١} + م_{٢}$ = ١٢ + ١٠ = ٢٢ #

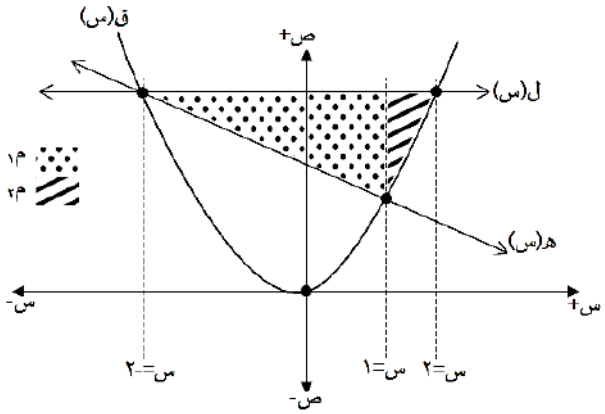
٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات

(ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = ٢ – س ، ل(س) = ٤)

الحل:

اقترانات	مساوات
ق(س)=$س^{٢}$	ق(س) = هـ(س)
هـ(س)= ٢ – س	$س^{٢}$= ٢-س
ل(س)= ٤	$س^{٢}$+س-٢=٠
	(س-١)(س+٢)=٠
	(س=١)(س=-٢)

هـ(س)= ل(س)	ق(س) = ل(س)
٢-س=٤	$س^{٢}$ = ٤
(س=-٢)	(س=٢)(س=-٢)



$= \int_{-٢}^{٢} ٤ - ٢ + س . دس$

$= \int_{-٢}^{١} ٢ + س . دس = ٢س + [\frac{س^{٢}}{٢}]_{-٢}^{١}$

$= (٢ + \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٤}{٢}) = \frac{٥}{٢} + ٢ = \frac{٩}{٢}$

$م_{٢} = \int_{١}^{٢} ل(س) - ق(س) . دس = \int_{١}^{٢} ٤ - س^{٢} . دس$

SALEEM ALSATEEB

$= ٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\ ]_{١}^{٢}$

$= (٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣}) = \frac{١١}{٣} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٥}{٣}$

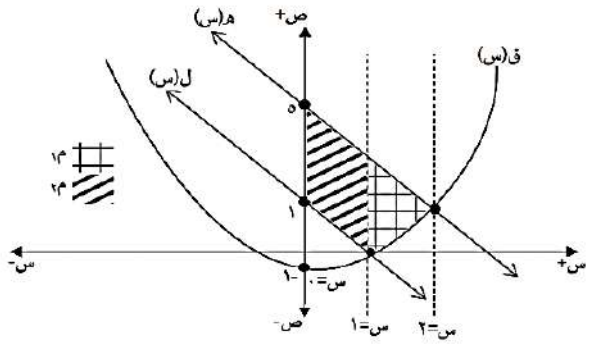
المساحة الكلية $= م_{١} + م_{٢} = \frac{٩}{٢} + \frac{٥}{٣} \Leftarrow \frac{٢٧}{٦} + \frac{١٠}{٦} = \frac{٣٧}{٦}$ #

---

٤) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الإقتران (ق(س) $= س^{٢} - ١$ ، هـ(س) $= ٥ - س$ ، ل(س) $= ١ - س$)؟

الحل:

اقترانات	مساوات	
ق(س) $= س^{٢} - ١$	ق(س) = هـ(س)	هـ(س) = ل(س)
هـ(س) $= ٥ - س$	$س^{٢} - ١ = ٥ - س$	$٥ - س = ١ - س$
ل(س) $= ١ - س$	$س^{٢} + س - ٦ = ٠$	$٥ = ١$
اعمدة	(س-٢)(س+٣)=٠	ق(س) = ل(س)
س=٠	(س=٢)(س=-٣)	$س^{٢} - ١ = ١ - س$
		$س^{٢} + س - ٢ = ٠$
		(س-١) (س+٢)=٠
		(س=١)(س=-٢)



$م_{١} = \int_{١}^{٢} هـ(س) - ق(س)\ دس$

$= \int_{١}^{٢} ٥ - س - س^{٢} + ١\ دس$

$= \int_{١}^{٢} ٦ - س - س^{٢}\ دس = ٦س - \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\ ]_{١}^{٢}$

$= (١٢ - \frac{٤}{٢} - \frac{٨}{٣}) - (٦ - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣})$

$= ١٢ - \frac{٤}{٢} - \frac{٨}{٣} + ٦ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١٣}{٦}$

$م_{٢} = \int_{٠}^{١} هـ(س) - ل(س) = \int_{٠}^{١} ٥ - س - ١\ دس$

$= \int_{٠}^{١} ٥ - ١\ دس = ٤س\ ]_{٠}^{١} = ٤$

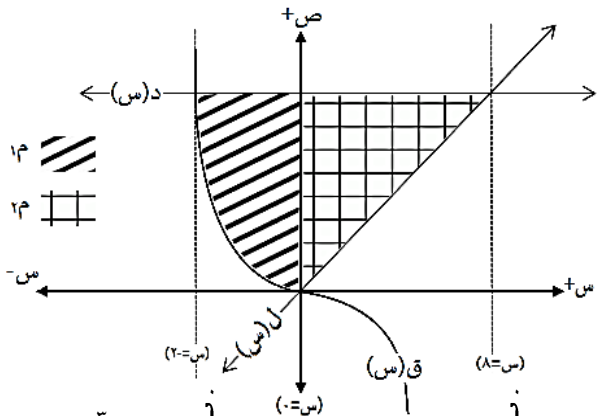
المساحة الكلية $= م_{١} + م_{٢} = \frac{١٣}{٦} + ٤ = \frac{٣٧}{٦}$ #

---

٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين (ق(س) $= -س^{٣}$ ، د(س) $= ٨$ ، ل(س) $= س$) ؟

الحل:

اقترانات	مساوات	
ق(س)= $-س^{٣}$	ق(س) = د(س)	ق(س) = ل(س)
د(س)=٨	$-س^{٣} = ٨$	$-س^{٣} = س$
ل(س)=س	(س=- ٢)	$س^{٣} + س = ٠$
	ل(س)= د(س)	$س(س^{٢} + ١) = ٠$
	(س=٨)	(س=٠)



$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} د(س) - ق(س)\ دس = \int_{-٢}^{٠} ٨ + س^{٣}\ دس$

$= ٨س + \frac{س^{٤}}{٤}\ ]_{-٢}^{٠} = (٠+٠) - (-١٦+٤) = ١٦ - ٤ = ٢$

$م_{٢} = \int_{٠}^{٨} د(س) - ل(س)\ دس = \int_{٠}^{٨} (٨ - س)\ دس$

$= ٨ - \frac{س^{٢}}{٢}\ ]_{٠}^{٨} = (٦٤ - ٣٢) - (٠ - ٠) = ٣٢$

SALEEM ALSATEEB

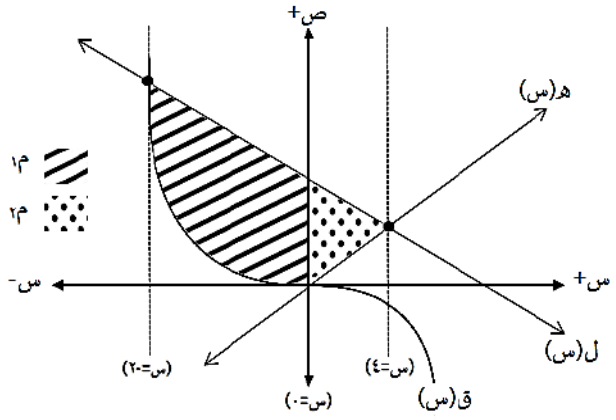
المساحة الكلية = م١ + م٢ = ١٢ + ٣٢ = ٤٤ #

٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الإقترانات الثلاثة (ق(س) = -س^{٣} ، هـ (س) = س ، ل (س) = ٦ – س).

الحل:

اقترانات	مساوات
ق(س)= -س^{٣}	ق(س) = هـ(س)
هـ(س)= $\frac{١}{٢}$س	-س^{٣} = $\frac{١}{٢}$س
ل(س)= ٦-س	س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س = ٠
	س(س^{٢} + $\frac{١}{٢}$)=٠. لا تحلل ⟸ س=٠
	هـ(س) = ل(س)
	$\frac{١}{٢}$س = ٦- س ⟸ $\frac{١}{٢}$س + س = ٦
	س = $\frac{١٢}{٣}$ ⟸ س = ٤
	ق(س) = ل(س) ⟸ -س^{٣} = ٦ – س
	س^{٢} – س + ٦ =٠.

(س=-٢) (س^{٢} – ٢س + ٣) لا تحلل



م١ = $\int_{-٢}^{٤}$ ل(س) – ق(س) دس = $\int_{-٢}^{٤}$ ٦ - س + س^{٣} دس

= ٦س - $\frac{س^{٢}}{٢}$ + $\frac{س^{٤}}{٤}$]$_{-٢}^{٤}$ = (٠)– (-١٢ – ٢ + ٤) = +١٠

م٢ = $\int_{٤}^{٦}$ ل(س) – هـ(س) دس

= $\int_{٤}^{٦}$ ٦ - س - $\frac{١}{٢}$ س دس = $\int_{٤}^{٦}$ ٦ - $\frac{٣}{٢}$ س دس

= ٦س – $\frac{٣}{٤}$ س^{٢}]$_{٤}^{٦}$ = ٢٤ – ١٢ = ١٢

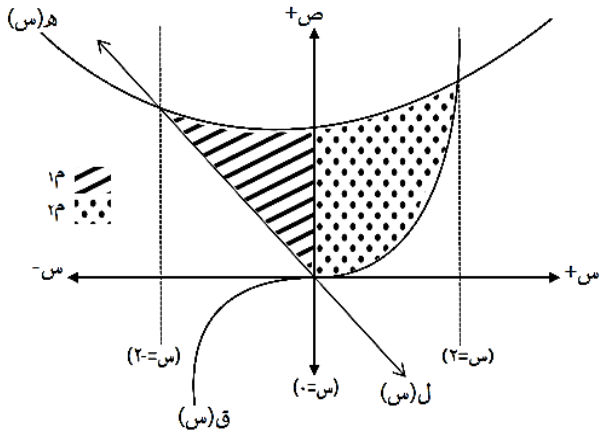
المساحة الكلية = م١ + م٢ = ١٢ + ١٠ = ٢٢ #

٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين : (ق(س) = س^{٣} هـ(س) = س^{٢} + ٤ ، ل(س) = -٤س)؟

الحل:

اقترانات	مساوات	
ق(س)= س^{٣}	ق(س) = هـ(س)	هـ(س) = ل(س)
هـ(س)= س^{٢}+٤	س^{٣} = س^{٢} +٤	س^{٢} +٤ = -٤س
ل(س)= -٤س	س^{٣}-س^{٢}-٤ = ٠	س^{٢} +٤س+٤=٠.
	(س=٢)(س^{٢}+س+٢) لا تحلل	(س=-٢)

ق(س) = ل(س)
س^{٣} = -٤س
س^{٣}+٤س = ٠
(س=٠) (س^{٢} + ٤) لا تحلل



م١ = $\int_{-٢}^{٠}$ هـ(س) – ل(س) دس = $\int_{-٢}^{٠}$ س^{٢}+٤ + ٤س دس

= $\frac{س^{٣}}{٣}$+٤س+٢س^{٢}]$_{-٢}^{٠}$ = (٠) – ($\frac{-٨}{٣}$ -٨ + ٨) = $\frac{٨}{٣}$

م٢ = $\int_{٠}^{٢}$ هـ(س) – ق(س) دس = $\int_{٠}^{٢}$ س^{٢} + ٤ –س^{٣} دس

SALEEM ALSATEEB

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٤س - \frac{س^{٤}}{٤}]_{-٢}^{٠} = (٠) - (٤ + \frac{٨}{٣}) = \frac{٢٠}{٣}$

المساحة الكلية = $م_{١} + م_{٢} = \frac{٨}{٣} + \frac{٢٠}{٣} = \frac{٢٨}{٣}$ #

---

٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين: ق(س) = $س^{٢} - ١$

هـ(س) = ١ – س ، ل(س) = ٣)؟

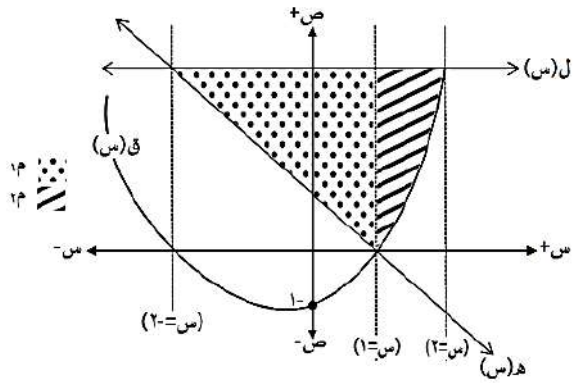
الحل:

اقترانات	مساوات	
ق(س)= $س^{٢}$ -١	ق(س) = هـ(س)	هـ(س)=ل(س)
هـ(س) = ١-س	$س^{٢}$-١= ١-س	١-س = ٣
ل(س)= ٣	$س^{٢}$+س-٢=٠	(س=-٢)
	(س=-٢)(س=١)	

ق(س) = ل(س)

$س^{٢} - ١ = ٣ \Leftarrow س^{٢} = ٤$

(س=٢)(س=-٢)



$م_{١} = \int_{-٢}^{١}$ ل(س) – هـ(س) دس

$= \int_{-٢}^{١}$ ٣ – ١ + س دس = $\int_{-٢}^{١}$ ٢ + س دس

$= ٢س + \frac{س^{٢}}{٢}]_{-٢}^{١} = (٢ + \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٤}{٢})$

$= ٢ + \frac{١}{٢} + ٤ - ٢ = ٦ - \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٢}$

$م_{٢} = \int_{١}^{٢}$ ل(س) – ق(س) دس = $\int_{١}^{٢}$ ٣ – $س^{٢}$ + ١ دس

$= \int_{١}^{٢}$ ٤ – $س^{٢}$ دس

$= ٤س + \frac{س^{٣}}{٣}]_{١}^{٢} = (٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣})$

$= ٨ - \frac{٨}{٣} - ٤ + \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٣}$

المساحة الكلية = $م_{١} + م_{٢} = \frac{٩}{٢} + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦}$

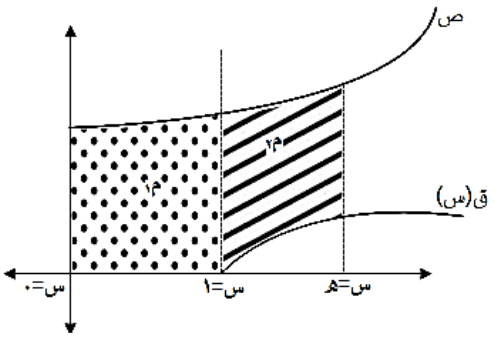
---

٩) جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $لـو_{هـ} س$

و ص = $هـ^{س}$ و المستقيم س = هـ و محوري الاحداثيات

الحل:

الاقترانات	مساوات	
ق(س) = $لـو_{هـ} س$	ص١ = ص٢	ص١ = ق(س)
ص١ = $هـ^{س}$	$هـ^{س} \neq$.	$هـ^{س} \neq لـو_{هـ} س$
ص٢ = .		
ص٢ = ق(س)		
$لـو_{هـ} س$ = .		
الاعمدة		
س= .		
س = هـ		
س=١		



$م_{١} = \int_{.}^{١} هـ^{س}$ دس = $هـ^{س}]_{.}^{١}$ = هـ – ١

$م_{٢} = \int_{١}^{هـ}$ - $لـو_{هـ} س$ + $هـ^{س}$ دس = -س $لـو_{هـ} س$ +س+ $هـ^{س}]_{١}^{هـ}$

(بالاجزاء)

∴ م = $م_{١} + م_{٢}$ = ١ + هـ – ١

م = $م_{١} + م_{٢}$ = -هـ + هـ + $هـ^{هـ}$ – ١ – هـ

= $هـ^{هـ}$ – ١ – هـ

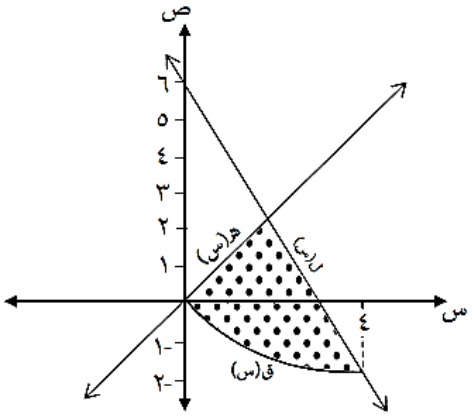
SALEEM ALSATEEB

سؤال: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث:

ق(س)= - $\sqrt{س}$

هـ(س) = س

ل(س)= ٦-٢س



الحل:

$م_1 = \int_{0}^{2}$ هـ(س)- ق(س) .دس

$= \int_{0}^{2}$ س + $\sqrt{س}$.دس = $\int_{0}^{2}$ س + $س^{\frac{1}{2}}$.دس

$= \frac{س^2}{2} + \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}}$ $]_{0}^{2}$ $= \frac{س^2}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{س^3}$ $]_{0}^{2}$

$= (2 + \frac{2}{3} \sqrt{8}) - (0 - 0) = 2 + \frac{2}{3} \sqrt{8}$

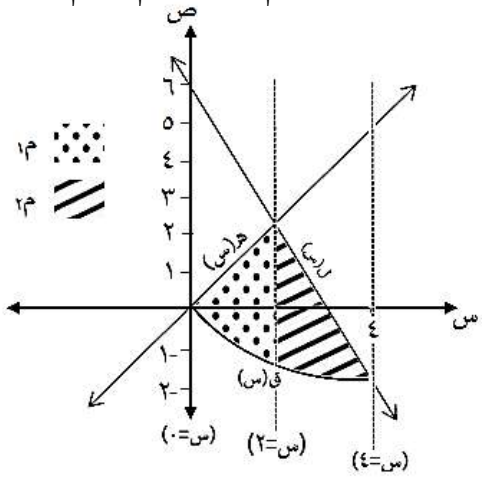
$م_2 = \int_{2}^{4}$ ل(س) – ق(س) .دس = $\int_{2}^{4}$ ٦-٢س + $\sqrt{س}$.دس

$= ٦س - س^2 + \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}}$ $]_{2}^{4}$ $= ٦س - س^2 + \frac{2}{3} \sqrt{س^3}$ $]_{2}^{4}$

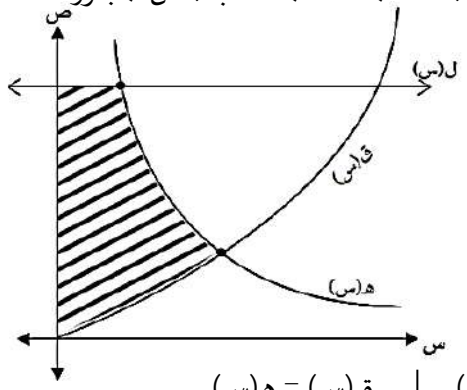
$= (٢٤ - ١٦ + \frac{2}{3} \times 8) - (١٢ - ٤ + \frac{2}{3} \sqrt{8})$

$= 8 + \frac{١٦}{3} - 8 - \frac{2}{3} \sqrt{8} = \frac{١٦}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{8}$

$م_{الكلية} = م_1 + م_2 = 2 + \frac{2}{3} \sqrt{8} + \frac{١٦}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{8} = \frac{٢٢}{3}$



- جد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور



حيث:

ق(س)= $س^2$

هـ(س)= $\frac{1}{س^2}$

ل(س)= ٤

الحل:

ل(س) = هـ(س)	ق(س) = هـ(س)
$\frac{1}{س^2} = ٤$	$س^2 = \frac{1}{س^2}$
$س^4 = ١$	$٤س^2 = ١$
س = ١	$س = \frac{1}{2}$

$م_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}$ ل(س) – ق(س) .دس = $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ ٤ – $س^2$.دس

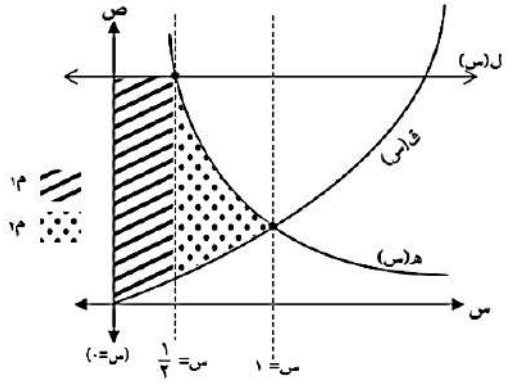
$= ٤س - \frac{س^3}{3}$ $]_{\frac{1}{2}}^{1}$ $= (٤ - \frac{1}{3}) - (٢ - \frac{1}{24}) = \frac{٤٧}{٢٤}$

$م_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}$ هـ(س) – ق(س) .دس = $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ $\frac{1}{س^2}$ - $س^2$.دس

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}$ $س^{-2} - س^2$.دس = $-س^{-1} - \frac{س^3}{3}$ $]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= (-\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) - (-٢ - \frac{1}{24}) = \frac{-٤}{3} - \frac{-٤٩}{٢٤} = \frac{-٤}{3} + \frac{٤٩}{٢٤} = \frac{-٣٢}{٢٤} + \frac{٤٩}{٢٤} = \frac{١٧}{٢٤}$

$م_{الكلية} = م_1 + م_2 = \frac{٤٧}{٢٤} + \frac{١٧}{٢٤} = \frac{٦٤}{٢٤}$



SALEEM ALSATEEB

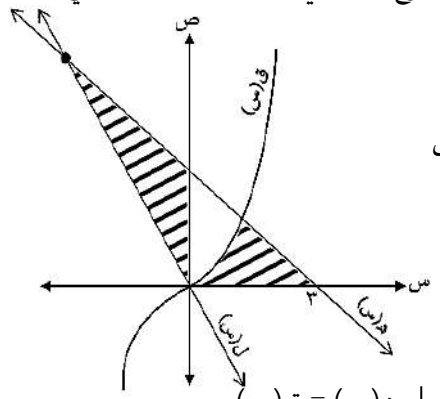
- جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين في الشكل

حيث:

ق(س) = ٢س^{٣}

هـ(س) = ٣ – س

ل(س) = -٢س



الحل:

ل(س) = هـ(س)	هـ(س) = ق(س)
-٢س = ٣ – س	٣ – س = ٢س^{٣} شئنخذ
س = -٣	٢س^{٣} + س – ٣ = ٠
	س= ١

م$_{١}$ = $\int_{-٣}^{١}$ هـ(س) – ل(س) .دس= $\int_{-٣}^{١}$ ٣ – س +٢س .دس

= $\int_{-٣}^{١}$ ٣+س .دس = ٣س + $\frac{س^{٢}}{٢}$ $]_{-٣}^{١}$

= (١ – ٠) – (-٩ + $\frac{٩}{٢}$) = $\frac{٩}{٢}$

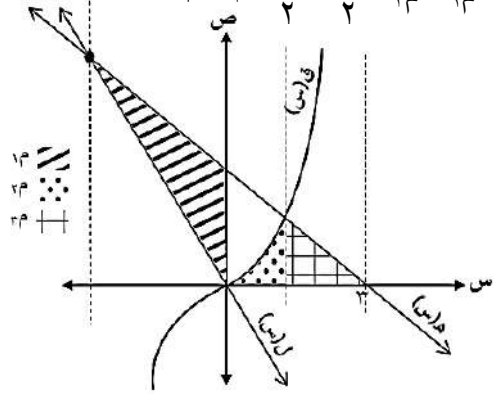
م$_{٢}$ = $\int_{٠}^{١}$ ق(س) .دس = $\int_{٠}^{١}$ ٢س^{٣} .دس = $\frac{س^{٤}}{٤}$ $]_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٢}$ - ٠ = $\frac{١}{٢}$

م$_{٣}$ = $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) .دس = $\int_{١}^{٣}$ ٣ – س .دس = ٣س - $\frac{س^{٢}}{٢}$ $]_{١}^{٣}$

= (٩ - $\frac{٩}{٢}$) – (٣ - $\frac{١}{٢}$) = $\frac{٩}{٢}$ - $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

م$_{الكلية}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ + م$_{٣}$ = $\frac{٩}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ + ٢ = ٧

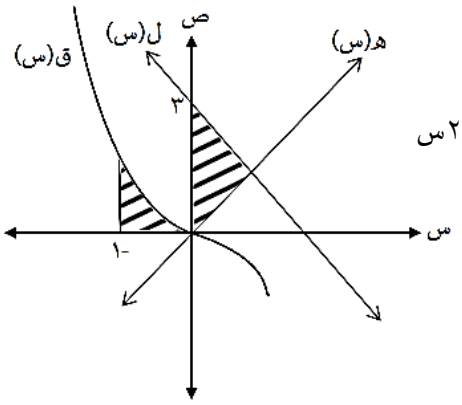


- جد مجموع مساحتي المنقتين المظللتين في الشكل المجاور حيث ان:

ق(س) = -س^{٣}

هـ(س) = س

ل(س) = ٣ – ٢س



الحل:

هـ(س) = ل(س)

س= ٣ – ٢س

س=١

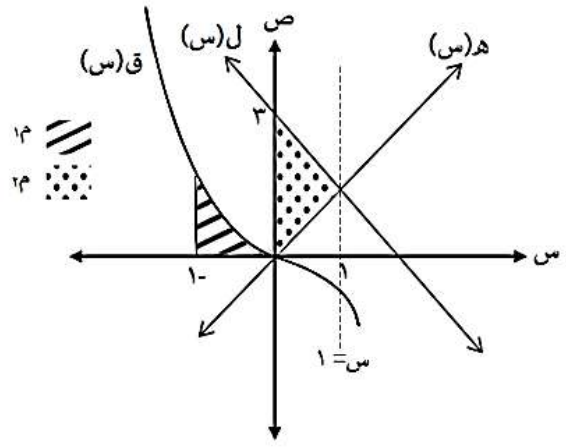
م$_{١}$ = $\int_{-١}^{١}$ ق(س) .دس = $\int_{-١}^{١}$ -س^{٣} .دس = - $\frac{س^{٤}}{٤}$ $]_{-١}^{١}$

= ٠ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

م$_{٢}$ = $\int_{٠}^{١}$ ل(س) – هـ(س) .دس = $\int_{٠}^{١}$ ٣ – ٢س – س .دس

= ٣س - $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ $]_{٠}^{١}$ = (٣ - $\frac{٣}{٢}$) – (٠ – ٠) = $\frac{٣}{٢}$

م$_{الكلية}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٧}{٤}$



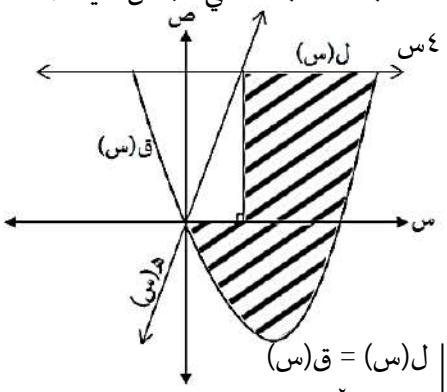
SALEEM ALSATEEB

- جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث :

ق(س) = س^{٢} – ٤س

هـ(س) = ٥س

ل(س) = ٥



الحل:

ل(س) = هـ(س) | ل(س) = ق(س)

٥ = ٥س | ٥ = س^{٢} – ٤س

س= ١ | س^{٢} – ٤س -٥ = .

| (س-٥)(س+١) = .

| س=٥ ، س= -١ تهمل

م$_{١}$ = $\int_{.}^{١}$ ص – ق(س) .دس = $\int_{.}^{١}$. – س^{٢} +٤س .دس

= $\int_{.}^{١}$ ٤س – س^{٢} .دس = ٢س^{٢} - $\frac{س^{٣}}{٣}$ $]_{.}^{١}$

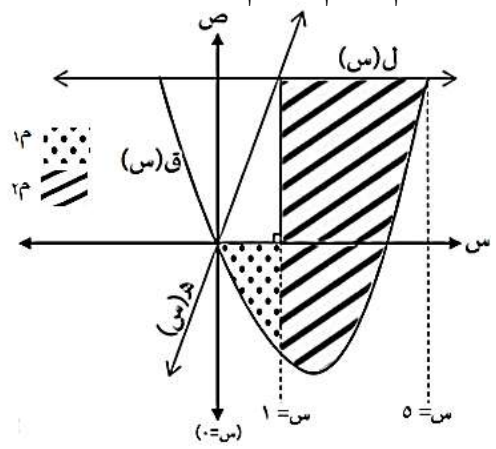
=(١ - $\frac{١}{٣}$) – (. – .) = $\frac{٢}{٣}$

م$_{٢}$ = $\int_{١}^{٥}$ ل(س)- ق(س) .دس = $\int_{١}^{٥}$ ٥ – س^{٢} +٤س .دس

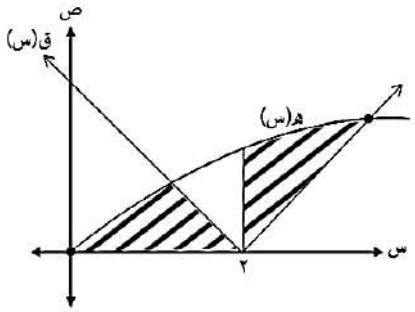
= ٥س – $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ٢س^{٢} $]_{١}^{٥}$

= (٢٥ - $\frac{١٢٥}{٣}$ +٥٠)-(٥-$\frac{١}{٣}$+٢) = $\frac{١٠٠}{٣}$ - $\frac{٢٠}{٣}$ = $\frac{٨٠}{٣}$

م$_{الكلية}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٨٠}{٣}$ = $\frac{٨٢}{٣}$



- جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث:



ق(س) = | س- ٢ |

هـ(س)= $\sqrt{س}$

الحل:

ق(س) = هـ(س)

| س- ٢ | = $\sqrt{س}$

= (س-٢)^{٢} = س ⇐ س^{٢} - ٥س +٤ = .

(س-٤) (س-١) =. ⇐ س=٤ ، س= ١

م$_{١}$ = $\int_{.}^{١}$ هـ(س).دس = $\int_{.}^{١}$ $\sqrt{س}$.دس = $\int_{.}^{١}$ س$^{\frac{١}{٢}}$.دس

= $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ $]_{.}^{١}$ = ($\frac{٢}{٣}$) – (.) = $\frac{٢}{٣}$

م$_{٢}$ = $\int_{١}^{٢}$ ق(س).دس = $\int_{١}^{٢}$ | س- ٢ | .دس = $\int_{١}^{٢}$ ٢ – س .دس

= ٢س- $\frac{س^{٢}}{٢}$ $]_{١}^{٢}$ = (٤-٢) – (٢ - $\frac{١}{٢}$) = ٢- $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

م$_{٣}$ = $\int_{٢}^{٤}$ هـ(س)- ق(س).دس = $\int_{٢}^{٤}$ $\sqrt{س}$ - | س- ٢ | .دس

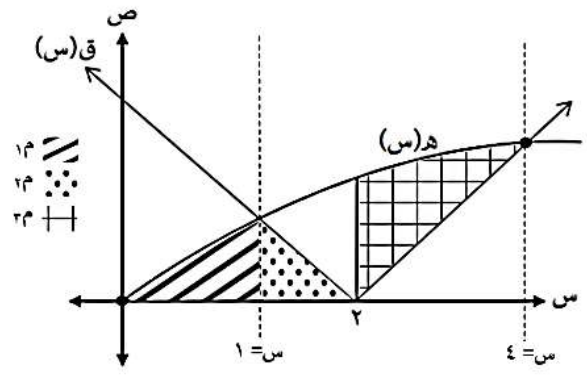
= $\int_{٢}^{٤}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ - س + ٢ دس = $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ - $\frac{س^{٢}}{٢}$ +٢س $]_{٢}^{٤}$

= ($\frac{٢}{٣}$ × ٨ -٨+ ٨) – ($\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٨}$ -٢ +٤)

= $\frac{١٦}{٣}$ - $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٨}$ - ٢ = $\frac{١٠}{٣}$ - $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٨}$

م$_{الكلية}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ + م$_{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١٠}{٣}$ - $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٨}$

= $\frac{٩}{٢}$ - $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٨}$

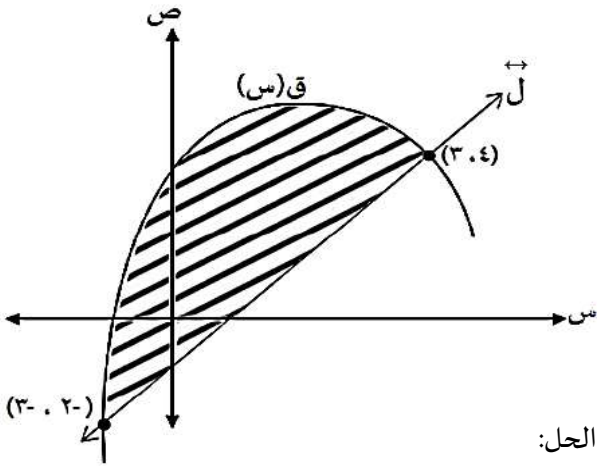


SALEEM ALSATEEB

- جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = ٧ – ٣س – س^{٢}

و المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، -٣) ، (٤ ، ٣)



الحل:

ميل المستقيم ل = $\frac{٦}{٦}$ = ١

و معادلته ص – ٣ = ١ (س – ٤) ⇐ ص = س – ١

المساحة المطلوبة = $\int_{-٢}^{٤}$ (٧ – ٢س- س^{٢}) – (س – ١) .دس

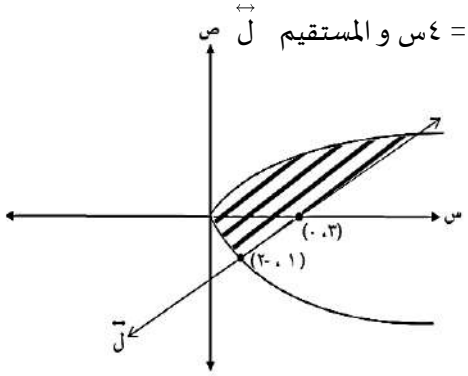
= $\int_{-٢}^{٤}$ (٨ +٢س – س^{٢}).دس

= ٨س + س^{٢} - $\frac{س^{٣}}{٣}$ $]_{-٢}^{٤}$

= ٣٢ + ١٦ - $\frac{٦٤}{٣}$ - (-١٦ + ٤ + $\frac{٨}{٣}$)

= ٦٠ - $\frac{٧٢}{٣}$ = ٦٠ – ٢٤ = ٣٦ وحدة مربعة

- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة ص^{٢} = ٤س و المستقيم ل



الحل :

ص^{٢} = ٤س ⇐ ص = ± ٢ $\sqrt{س}$

معادلة المستقيم ل :

$\frac{ص-٢}{س-١}$ = $\frac{٠-٢}{٣-١}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ⇐ ص = س – ٣

∴ نقطتا التقاطع : ص^{٢} = (س-٣)^{٢} = س^{٢} – ٩س + ٩

س^{٢}-٦س+٩ = ٤س ⇐ س^{٢} -١٠س + ٩ = ٠

(س-٩) (س-١) = ٠ ⇐ س = ١ ، ٩

م$_{الكلية}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$

= $\int_{١}^{٩}$ (٢ $\sqrt{س}$ - - ٢ $\sqrt{س}$).دس + $\int_{١}^{٩}$ (٢ $\sqrt{س}$ - (س-٣)).دس

= $\int_{١}^{٩}$ ٤ $\sqrt{س}$.دس + $\int_{١}^{٩}$ (٢ $\sqrt{س}$ - س +٣).دس

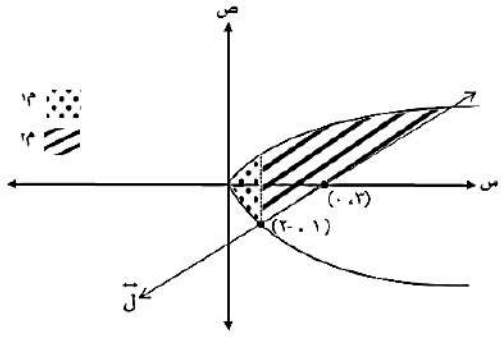
= ٤× $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ $]_{١}^{٩}$ - $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٣س $]_{١}^{٩}$

= ($\frac{٨}{٣}$) – (٠) + ($\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{٩\times٨١}$ - $\frac{٨١}{٢}$ +٢٧)–(٣+ $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٤}{٣}$)

= $\frac{٨}{٣}$ + $\frac{١٠٨}{٣}$ - $\frac{٨١}{٢}$ + ٢٧ - $\frac{٤}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ - ٣

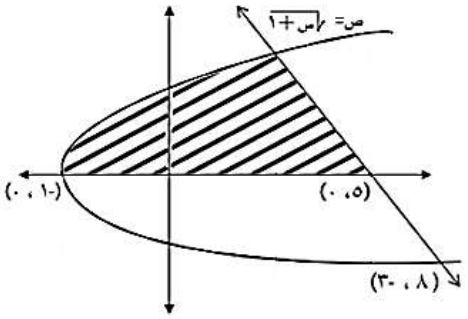
= $\frac{١١٢}{٣}$ - $\frac{٨٠}{٢}$ = ٢٤+ ٤٠ - $\frac{١١٢}{٣}$ = ٢٤+ ١٦ - $\frac{١١٢}{٣}$

= $\frac{١١٢-٤٨}{٣}$ = $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة



SALEEM ALSATEEB

- جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المحصورة بين منحنى ص= $\sqrt{س+١}$.
و المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (٨ ، -٣)



الحل:

معادلة المستقيم المار بالنقطتين :

ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

م = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٣ - ٠}{٨ - ٥} = -١$

ص – ٠ = -١ (س – ٥)

ص = ٥ – س

الاقترانات :

ص$_{١}$ = $\sqrt{س+١}$ ، ص$_{٢}$ = ٥ –س

ص$_{٣}$ = ٠

ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

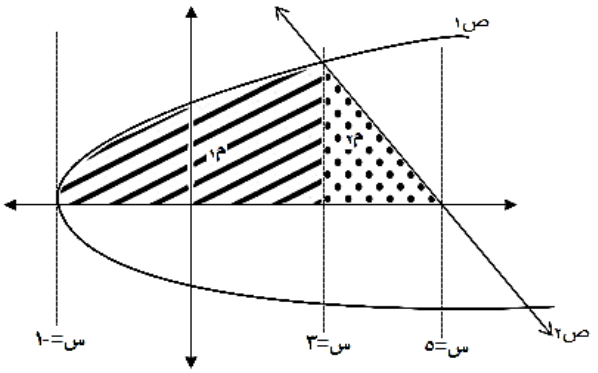
$\sqrt{س+١}$ = ٥ –س ⇐ س + ١ = (٥ – س)^{٢}

س+١ = ٢٥ – ١٠ س + س^{٢}

س^{٢} – ١١ س + ٢٤ = ٠

(س – ٨) (س – ٣) = ٠

س = ٨ تهمل ، س =٣



م$_{١}$ = $\int_{-١}^{٣}$ ص$_{١}$ – ص$_{٣}$.دس = $\int_{-١}^{٣}$ $\sqrt{س+١}$ - ٠ .دس

= $\frac{٢}{٣}$ س+١ $^{\frac{٣}{٢}}$ $_{-١}^{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٤^{٢}}$ - $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{٠}$ = $\frac{١٦}{٣}$

م$_{٢}$ = $\int_{٣}^{٥}$ ص$_{٢}$ – ص$_{٣}$.دس= $\int_{٣}^{٥}$ ٥ –س .دس

= ٥س - $\frac{س^{٢}}{٢}$ $^{٥}_{٣}$ =(٢٥ - $\frac{٢٥}{٢}$) – (١٥ - $\frac{٩}{٢}$)

= $\frac{٢٥}{٢}$ - $\frac{٢١}{٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

م$_{الكلية}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$ + ٢ = $\frac{٢٢}{٣}$

- اوجد قيمة أ بحيث ان المستقيم س=أ يقسم المساحة المحصورة بين س = $\sqrt{ص}$ و المستقيم س = ٢ و محور السينات الى قسمين متساويين

الحل:

س = $\sqrt{ص}$

س^{٢} = ص

م = $\int_{٠}^{٢}$ س^{٢} .دس = $\frac{٨}{٣}$

= $\int_{٠}^{أ}$ س^{٢} .دس = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٨}{٣}$

$\frac{س^{٣}}{٣}$ $^{أ}_{٠}$ = $\frac{٤}{٣}$

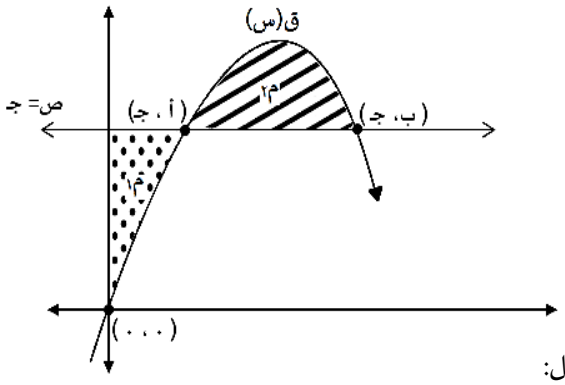
$\frac{أ^{٣}}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

أ = $\sqrt[٣]{٤}$

SALEEM ALSATEEB

SALEEM ALSATEEB

- رسم المستقيم ص = جـ فقطع منحنى الاقتران ق(س) = ٢س – ٣س^{٣} ، في النقطتين (أ ، جـ) ، (ب ، جـ) حيث أ ، ب ، جـ اعداد حقيقية موجبة ، مكونا المنطقتين م$_{١}$ ، م$_{٢}$ كما في الشكل ، جد قيمة جـ التي تجعل مساحتي المنطقتين م$_{١}$ ، م$_{٢}$ متساويتين.



الحل:

$\int_{أ}^{ب}$ (ج – ق(س) .دس = $\int_{أ}^{جـ}$ (ق(س) – جـ) .دس

$\int_{ب}^{جـ}$ (ق(س) – جـ) .دس = - $\int_{ب}^{أ}$ (ق(س) – جـ) .دس

$\int_{ب}^{جـ}$ (ق(س) – جـ) .دس + $\int_{ب}^{أ}$ (ق(س) – جـ) .دس = ٠

$\int_{ب}^{جـ}$ (ق(س) – جـ) .دس = $\int_{ب}^{جـ}$ (٢س – ٣س^{٣} – جـ).دس= ٠

س^{٢} - $\frac{٣س^{٤}}{٤}$ - جـ ب = ٠ ب

ب^{٢} - $\frac{٣ب^{٤}}{٤}$ - جـ ب = ٠ لكن النقطة (ب، جـ) تقع على منحنى ق

ق(ب) = جـ ⇐ ج = ٢ب – ٣ب^{٣}

ب^{٢} - $\frac{٣ب^{٤}}{٤}$ - (٢ب – ٣ب^{٣}) ب = ٠

ب^{٢} - $\frac{٣ب^{٤}}{٤}$ - ٢ب^{٢} + ٣ ب^{٤} = ٠ ⇐ $\frac{٩ب^{٤}}{٤}$ - ب^{٢} = ٠

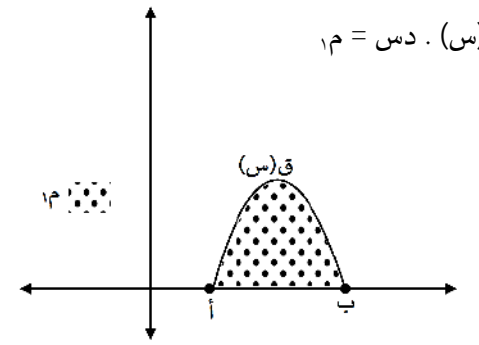
ب^{٢} ($\frac{٩ب^{٢}}{٤}$ - ١) = ٠ ، ب ≠ ٠

$\frac{٩ب^{٢}}{٤}$ = ١ ⇐ ب^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ ⇐ ب = $\frac{٢}{٣}$ ، ب = $\frac{-٢}{٣}$ تهمل

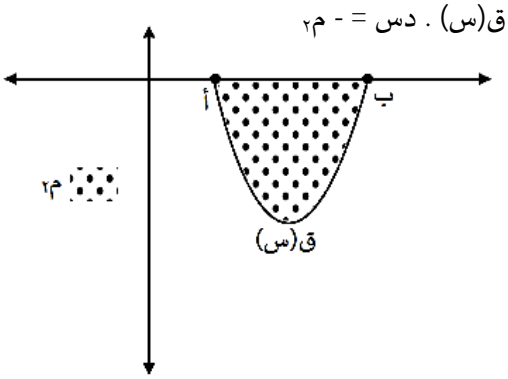
لكن جـ = ٢ ($\frac{٢}{٣}$) – ٣ ($\frac{٢}{٣}$)^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ - $\frac{٨}{٩}$ = $\frac{٤}{٩}$

النوع الرابع

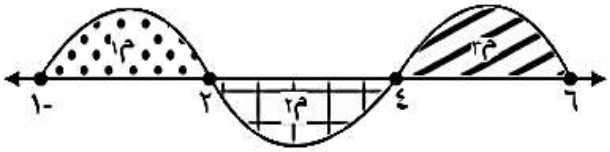
$\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) . دس = م$_{١}$



$\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) . دس = - م$_{٢}$



- بالاعتماد على الرسم لمنحنى ق(س) اذا كان:
م$_{١}$ = ٣ ، م$_{٢}$ = ٩ ، م$_{٣}$ = ٢ ، أوجد كل مما يلي:



١) $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) . دس = م$_{١}$ = ٣

٢) $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) . دس = - م$_{٢}$ = -٩

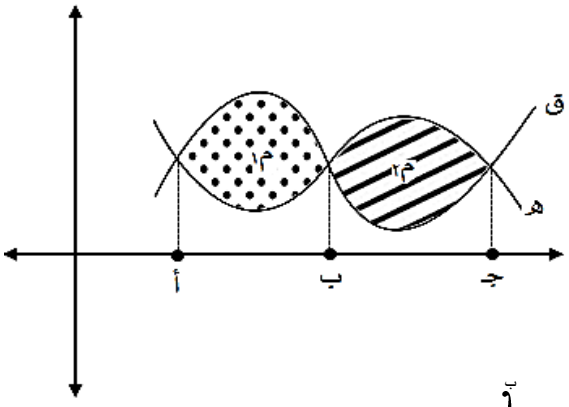
٣) $\int_{-١}^{٦}$ ق(س) . دس = م$_{١}$ - م$_{٢}$ + م$_{٣}$ = ٣ -٩ +٢ = -٤

٤) $\int_{-١}^{٦}$ | ق(س) . دس | = | - ٤ | = ٤

٥) $\int_{-١}^{٦}$ |ق(س)| . دس = م$_{١}$ + م$_{٢}$ + م$_{٣}$ = ٣ +٩ +٢ = ٤

- اذا كانت القيمة المطلقة خارج رمز التكامل ، يحسب التكامل ثم يؤخذ له القيمة المطلقة
- اذا كانت القيمة المطلقة داخل التكامل ، تؤخذ القيمة المطلقة لجميع المساحات ، ثم نجمع

- بالاعتماد على الرسم يمثل منحنى الاقترانين ق، هـ اذا كان م١=٤ ، م٢ = ٧ ، فجد كل مما يلي :



*م١ = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) – هـ(س) . دس = ٤

*م٢= $\int_{ب}^{جـ}$ هـ(س) – ق(س) . دس = ٧

١) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) – هـ(س) . دس = م١ = ٤

٢) $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) – هـ(س) . دس

= ($\int_{أ}^{ب}$ ق(س) – هـ(س) . دس) +($\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) – هـ(س) . دس)

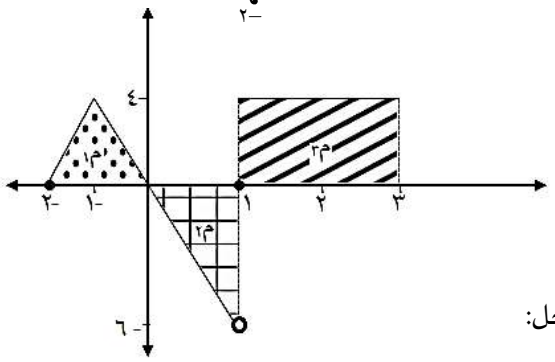
= م١ – م٢ = ٤ – ٧ = -٣

٣) | $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) – هـ(س) . دس | = |-٣| = ٣

٤) $\int_{أ}^{جـ}$ |ق(س) – هـ(س)| . دس = م١ + م٢ = ٤ + ٧

= ١١ المساحة بين ق و هـ على الفترة [أ ، جـ]

- بالاعتماد على الشكل لمنحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [-٢ ، ٣] جد $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) .دس



الحل:

م١= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٤ = ٤

م٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ٦ = ٣

م٣ = ٢ × ٤ = ٨

$\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) .دس

= $\int_{-٢}^{١}$ ق(س) .دس + $\int_{١}^{٣}$ ق(س) .دس + $\int_{١}^{٣}$ ق(س) .دس

= ٤ + -٣ + ٨ = ٩

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المربع = (الضلع)^{٢}

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

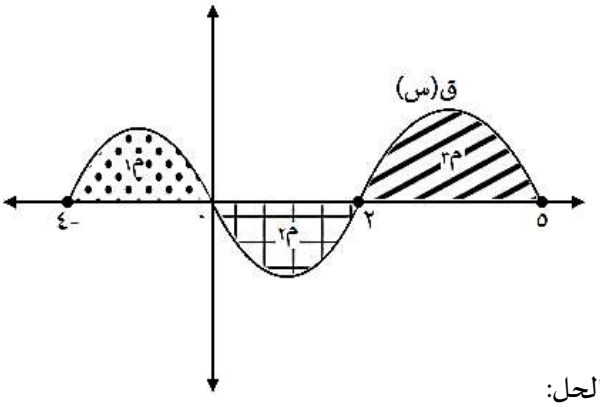
SALEEM ALSATEEB

- معتمدا على الشكل ، و الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، اذا كانت م١ =٧ ، م٢ = ٤ ، م٣ = ٥

جد ما يلي:

١) $\int_{-٤}^{٢} \frac{ق(س)}{٢}$.دس

٢) المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق و محور السينات في الفترة [-٤ ، ٥]



الحل:

$\int_{-٤}^{٠}$ ق(س) .دس = ٧

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س) .دس = -٤

$\int_{-٤}^{٢}$ ق(س) .دس = ٧ + - ٤ = ٣

١) $\int_{-٤}^{٢} \frac{ق(س)}{٢}$.دس = $\frac{-٣}{٢}$

٢) م = م١ + م٢ + م٣

= ٧ + ٤ + ٥ = ١٦

SALEEM ALSATEEB

الفصل الأول :التكامل

أولاً: معكوس المشتقة

- **تدرب (١) ص(٢٢٣)**

بين أن الإقتران م(س) = $س^{٤}$ − جاس − $\frac{١}{٣}$ ، هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ٤$س^{٣}$ − جتاس.

الحل:

ق متصل على ح لانو حاصل طرح متصلين

م/(س) = ٤$س^{٣}$ − جتاس = ق(س)

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

- **تدرب (٢) ص(٢٢٤)**

اذا كان الاقترانان م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، وكان ل(س) = ٣م(س) − ٥هـ(س)، فجد ل/(س) بدلالة ق(س).

الحل:

ل/(س) = ٣ م/(س) - ٥ ق/(س)

= ٣ق(س) − ٥ق(س) = - ٢ق(س)

- **تدرب (٣) ص(٢٢٦)**

اذا كان ق اقترانا متصلا على مجاله، وكان $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$ ن(س)جا ن(س) دس = ١ + $س^{٣}$ ، فجد ق(س).

الحل:

$\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$ ن(س)× − ١دس = ١ + $س^{٣}$

-ق(س) = ٣$س^{٢}$ ----- ق(س) = -٣$س^{٢}$

- **تدرب (٤) ص(٢٢٦)**

اذا كان $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{أ}$ ن/(س)دس = $جا^{٢}$ س − جتاس + ١،

ن/($\frac{\pi}{٤}$) = صفرا ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل: $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{أ}$ ن/(س)دس = $جا^{٢}$ س − جتاس + ١

ق/(س) = ٢جاس جتاس + أجاس

ن/($\frac{\pi}{٤}$) = ٢جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ + أجا $\frac{\pi}{٤}$

= ١ + $\frac{أ}{\sqrt{٢}}$ = صفر ------- أ = − $\sqrt{٢}$

تمارين ومسائل ص(٢٢٧)

١) بين أن الاقتران م(س) = $\frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = (س+١) $^{-٢}$ ، س ≠ −١.

الحل:

ق متصل على ح − {-١} لأنه اقتران نسبي

م/(س) = $\frac{١\times(س+١)-١\times س}{(س+١)^{٢}}$ = $\frac{١}{(س+١)^{٢}}$ = ق(س)

∴م(س) هو معكوس مشتقة الاقتران ق(س)

---

٢) بين ان الاقتران م(س) = $جا^{٢}$س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = جا٢س .

الحل:

ق متصل لأنو اقتران مثلثي

م/(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س = ق(س)

∴م هو معكوس مشتقة الاقتران ق(س)

---

٣) اذا كان م(س) = $س^{٣}$ + ٥$س^{٢}$ − ٣س + جـ ، معكوساً لمشتقة الاقتران ق، فجد ق(-٢).

الحل:

م/(س) = ق(س) = ٣$س^{٢}$ + ١٠س -٣

ق(-٢) = ١٢ − ٢٠ -٣ = -١١

---

٤) اذا كان م(س) = ٢$س^{٤}$ + $\sqrt{س^{٢}+٣}$ معكوساً لمشتقة الاقتران ق، فجد ق(١).

الحل:

م/(س) = ق(س) = ٨$س^{٣}$ + $\frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٣}}$

ق(١) = ٨ + $\frac{٢}{٢\sqrt{٤}}$ = ٨ + $\frac{١}{٢}$ = ٨,٥

SALEEM ALSATEB

٥) اذا كان ق(س) = ٣س^{٢}، فجد م معكوساً لمشتقة الاقتران ق، علماً بأن م(٢) = ٥.

الحل:

م(س) = س^{٣} + جـ

م(٢) = ٨ + جـ = ٥ ------ جـ = -٣

م(س) = س^{٣} - ٣

---

٦) اذا كان الاقترانان م$_{١}$(س)، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان م$_{١}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٥، م$_{٢}$(٢) = ٤ فجد قاعدة م$_{٢}$(س) .

الحل:

م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س + جـ

م$_{٢}$(٢) = ١٢ − ٤ + جـ = ٤ -------- جـ = -٤

م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س - ٤

---

٧) اذا كان ص = $\int \sqrt{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$ ءس فجد $\left|\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢}$.

الحل:

$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$

$\left|\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢} = \sqrt{١٢ + ٨ + ١٢} = ٢$

---

٨) اذا كان $\int ن(س)ءس = س^{٣} - س^{٢} + ٢س + ١$، فجد ق$'$(-٣).

الحل:

ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٢

ق$'$(س) = ٦س − ٢ ------ ق$'$(-٣) = -٢٠

---

٩) اذا كان $\int ن(س)ءس = جاس - جتاس + ٣$ فأثبت أن $ن(\frac{\pi}{٢}) - ن'(\frac{\pi}{٢}) = ٢$.

الحل:

ق(س) = جتاس + جاس ---- $ن(\frac{\pi}{٢}) = ٠ + ١ = ١$

ق$'$(س) = -جاس + جتاس ---- $ن'(\frac{\pi}{٢}) = ٠ + ١ = -١$

$ن(\frac{\pi}{٢}) - ن'(\frac{\pi}{٢}) = ١ + ١ = ٢$

---

١٠) جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

الحل: م(س) = ٠س$^{-١}$ + جـ

لأن م$'$(س) = -١س$^{-٢}$ = $\frac{-١}{س^{٢}}$ = ق(س)

ب) ق(س) = قاس جتاس

الحل: لأن ق(س) = قاس جتاس = $\frac{١}{جتاس} \times جتاس = ١$

∴م(س) = س + جـ لأن م$'$(س) = ١ = ق(س)

جـ) ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

الحل: م(س) = $\sqrt{س}$ لأن م$'$(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = ق(س)

د) ق(س) = ٥ + ٥ظا^{٢}س

الحل: لأن ق(س) = ٥ + ٥ظا^{٢}س = ٥(١+ظا^{٢}س) = ٥قا^{٢}س

∴م(س) = ٥ظاس لأن م$'$(س) = ٥قا^{٢}س = ق(س)

---

١١) اذا كان م(س) = معكوساً لمشتقة الاقتران ق حيث ق(س) = ظتاس + ١ ، فجد م$''$$(\frac{\pi}{٤})$.

الحل:

ق(س) = م$'$(س) = ظتاس + ١

م$''$(س) =-قتا^{٢}س --- م$''$$(\frac{\pi}{٤})$ = -قتا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$ = -٢

ثانياً: التكامل غير المحدود

- تدريب (١) صـ(٢٢٨)

جد كلا ممايأتي:

١) $\int$ ءس

SALEEM ALSATEEB

الحل: $\int 1 \, ds = s + ج$

---

٢) $\int s^{-\frac{1}{4}} \, ds$ **الحل:** $\int s^{-\frac{1}{4}} \, ds = \frac{s^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + ج$

• **تدريب (٢) ص(٢٢٩)**

جد كلا مما يأتي:

١) $\int s^{١٠} \, ds$

الحل: $\int s^{١٠} \, ds = \frac{s^{١١}}{١١} + ج$

---

٢) $\int \frac{1}{\sqrt[٧]{s^{٢}}} \, ds$

الحل: $\int \frac{1}{\sqrt[٧]{s^{٢}}} \, ds = \int s^{-\frac{٢}{٧}} \, ds = \frac{٧}{٥} s^{\frac{٥}{٧}} + ج$

• **تدريب (٣) ص(٢٣١)**

جد كلا مما يأتي:

١) $\int \frac{s^{٢} - ٩s}{\sqrt{s - ٣}} \, ds$

الحل:

$= \int \frac{s(s - ٩)}{\sqrt{s - ٣}} \, ds = \int \frac{s(\sqrt{s} - ٣)(\sqrt{s} + ٣)}{\sqrt{s} - ٣} \, ds$

$\int s^{\frac{٣}{٢}} + ٣s \, ds \; \frac{٢}{٥} s^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٢} s^{٢} + ج$

---

٢) $\int \frac{(٢ - s)^{٣}}{s \sqrt{s}} \, ds$

الحل:

$= \int \frac{٨ - ١٢s + ٦s^{٢} - s^{٣}}{s^{\frac{٣}{٢}}} \, ds$

$= \int ٨s^{-\frac{٣}{٢}} - ١٢s^{-\frac{١}{٢}} + ٦s^{\frac{١}{٢}} - s^{\frac{٣}{٢}} \, ds$

$= -١٦s^{-\frac{١}{٢}} - ٢٤s^{\frac{١}{٢}} + \frac{١٢}{٣} s^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} s^{\frac{٥}{٢}} + ج$

• **تدريب (٤) ص(٢٣٢)**

جد كلا مما ياتي:

١) $\int \frac{٣}{(٧s + ٥)^{٤}} \, ds$

الحل: $\int ٣(٧s + ٥)^{-٤} \, ds \; \frac{٣(٧s + ٥)^{-٣}}{-٣ \times ٧} + ج$

---

٢) $\int s^{٤} (٥ - \frac{٣}{s})^{٤} \, ds$

الحل: $= \int (s(٥ - \frac{٣}{s}))^{٤} \, ds = \int (٥s - ٣)^{٤} \, ds$

$= \frac{(٥s - ٣)^{٥}}{٥ \times ٥} + ج$

• **تدريب (٥) ص(٢٣٤)**

جد كلا من التكاملات الآتية:

١) $\int (قتا٤s ظتا٤s + قتا^{٢} ٣s) \, ds$

الحل: $= \frac{-قتا٤s}{٤} - \frac{ظتا٣s}{٣} + ج$

---

٢) $\int (جتا٤s ظا٤s + \frac{١}{(جتا^{٢} ٦s)}) \, ds$

الحل: $= \int (جتا٤s \times \frac{جا٤s}{(جتا٤s)} + قا^{٢} ٦s) \, ds$

$= \int (جا٤s + قا^{٢} ٦s) \, ds$

$= \frac{-جتا٤s}{٤} + \frac{ظا٦s}{٦} + ج$

• **تدريب (٦) ص(٢٣٥)**

جد كلا من التكاملات الآتية:

١) $\int (قاs + ظاs)^{٢} \, ds$

الحل: $= \int قا^{٢} s + ٢ قاs ظاs + ظا^{٢} s \, ds$

$= \int قا^{٢} s + ٢ قاs ظاs + قا^{٢} s - ١ \, ds$

$= ٢ ظاs + ٢ قاs + ج$

SALEEM ALSATEB

٢) $\int \frac{٣}{١-جتا٢س}$ ءس

الحل: $= \int \frac{٣}{٢جا^{٢}س}$ ءس $= \frac{٣}{٢}\int قتا^{٢}س$ ءس $= -\frac{٣}{٢}ظتاس + جـ$

٣) $\int \frac{جتا٢س}{جا^{٢}س جتا^{٢}س}$ ءس

الحل: $= \int \frac{جتا٢س}{(جاس جتاس)^{٢}}$ ءس $= \int \frac{جتا٢س}{(\frac{جا٢س}{٢})^{٢}}$ ءس

$= ٤\int قتا٢س ظتا٢س$ ءس $= \frac{-٤قتا٢س}{٢} + جـ$

$= -٢قتا٢س + جـ$

٤) $\int (جتاس - جاس)^{٢}$ ءس

الحل: $= \int جتا^{٢}س - ٢جاس جتاس + جا^{٢}س$ ءس

$= \int ١ - جا٢س$ ءس $= س + \frac{جتا٢س}{٢} + جـ$

تمارين ومسائل ص(٢٣٦ - ٢٣٧)

١) جد كلا من التكاملات الآتية:

أ) $\int (س^{٦} + \frac{٣}{س^{٥}} - \sqrt[٥]{س^{٢}})$ ءس

الحل: $= \int س^{٦} + ٣س^{-٥} - س^{\frac{٢}{٥}}$ ءس

$= \frac{س^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤}س^{-٤} - \frac{٥}{٧}س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

ب) $\int (٥ + ٣ص)^{٤}$ ءص

الحل: $= \frac{(٥ + ٣ص)^{٥}}{٣ \times ٥} + جـ$

ج) $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ ءس

الحل: $= \int \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س - ٢}$ ءس

$= \int س^{٢} + ٢س + ٤$ ءس $= \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} + ٤س + جـ$

د) $\int (٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥)^{٥}$ ءس

الحل: $= \int (٢س + ٥)^{١٠}$ ءس $= \frac{(٢س+٥)^{١١}}{٢ \times ١١} + جـ$

هـ) $\int \frac{(س + ٣)^{٢} - ٩}{س}$ ءس

الحل: $= \int \frac{(س + ٣ - ٣)(س + ٣ + ٣)}{س}$ ءس

$= \int (س + ٦)$ ءس $= \frac{س^{٢}}{٢} + ٦س + جـ$

و) $\int (١ - س)(س - ١)^{٥}$ ءس

الحل: $= -\int (س - ١)^{٦}$ ءس $= \frac{-(س-١)^{٧}}{١ \times ٧} + جـ$

ز) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}$ ءس

الحل: $= \int س \sqrt[٣]{\frac{١}{س^{٣}}(٥ - س)}$ ءس $= \int \frac{س}{س} (٥ - س)^{\frac{١}{٣}}$ ءس

$= \int (٥ - س)^{\frac{١}{٣}}$ ءس $= \frac{(٥-س)^{\frac{٤}{٣}}}{-١ \times \frac{٤}{٣}} + جـ$

ح) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}$ ءس

الحل: $= \int \frac{\sqrt{س} \times \sqrt{س} - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}$ ءس

$= \int \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س} - ١)}{\sqrt{س} - ١}$ ءس $= \int \sqrt{س}$ ءس $= \int س^{\frac{١}{٢}}$ ءس

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

ط) $\int \sqrt{س}(\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}})$ ءس

الحل: $= \int س^{\frac{٢}{٣}} + ٥$ ءس $= \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + ٥س + جـ$

SALEEM ALSATEEB

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}}$ د س

الحل: =

$\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}} \times \frac{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}$ د س

$= \int \frac{٥س}{٧س+٣-(٢س+٣)} \times \frac{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}{١}$ د س

$= \int \frac{٥س}{٥س} \times \sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}$ د س

$= \int (٧س+٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}$ د س

$= \frac{(٧س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٧\times\frac{٣}{٢}} - \frac{(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٢\times\frac{٣}{٢}} +$ جـ

---

٢) اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة، بحيث إن ق/(س) = ٣س^{٢} − ٢، وكانت النقطة (٠ ، ١) تقع على منحناه. فجد قاعدة الإقتران.

الحل: $\int$ ن/(س) د س = $\int$ ٣س^{٢} − ٢ د س

ق(س) = س^{٣} − ٢س + جـ

ق(٠) = ٠ − ٠ + جـ = ١ ---- جـ = ١

∴ ق(س) = س^{٣} − ٢س + ١

---

٣) اذا كان ق//(س) = $\frac{٦}{\sqrt{س}}$ ، ومنحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٤ ، ٠)، وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١) ، فجد قاعدة الإقتران.

الحل: $\int$ ن//(س) د س = $\int \frac{٦}{\sqrt{س}}$ د س = $\int$ ٦س$^{-\frac{١}{٢}}$ د س

ن/(س) = $\frac{٦س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}$ + جـ = ١٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

ن/(٤) = ١ ---- ن/(١) = ١٢ + جـ = ١ --- جـ = ١١

$\int$ ن/(س) د س = $\int$ ١٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + ١١ د س

ن(س) = $\frac{١٢س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + ١١س + جـ = ٨س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ١١س + جـ

ق(٤) = ٠ --- ق(٤) = ٨ $\sqrt{(٤)^{٣}}$ + ١١×٤ + جـ = ٠

٦٤ + ٤٤ + جـ = ٠ ---- جـ = -١٠٨

∴ ن(س) = ٨س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ١١س − ١٠٨

---

٤) اذا كان $\int$ (ن/(س) + ٢س) د س = س^{٣} + ب س^{٢} + ١، وكان ق/(١) = ٥، ق(٢) = ٧، فجد ق(-٢).

الحل: $\int$ (ن/(س) + ٢س د س)/ = (س^{٣} + بس^{٢} + ١)/

ق/(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢ب س

ق/(١) + ٢ = ٣ + ٢ب

٥ + ٢ = ٣ + ٢ب ----- ب = ٢

∴ ق/(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٤ س

ق/(س) = ٣س^{٢} + ٢س

$\int$ ن/(س) د س = $\int$ ٣س^{٢} + ٢س د س

ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + جـ

ق(٢) = ٧ ------ ٨ + ٤ + جـ = ٧ ----- جـ = ٥

∴ ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٥

ق(-٢) = -٨ + ٤ + ٥ = ١

---

٥) اذا كان ق//(س) = -٤جتا٢س، وكان للإقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (-٢) عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، فجد قاعدة الإقتران ق.

الحل: $\int$ ن//(س) د س = − $\int$ ٤جتا٢س د س

ق/(س) = -٢جا ٢س + جـ

عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ قيمة صغرى محلية

ق/($\frac{\pi}{٢}$)=صفر ، ق($\frac{\pi}{٢}$)= -٢

ق/($\frac{\pi}{٢}$)= -٢جا π = جـ = صفر ---- جـ = ٠

$\int$ ن/(س) د س = − ٢جا٢س د س

ق(س) = جتا٢س + جـ

ق($\frac{\pi}{٢}$)= = جتا π + جـ = -١ + جـ = -٢ --- جـ = -١

∴ ق(س) = جتا٢س - ١

---

٦) جد كلا من التكاملات الآتية:

أ) $\int$ ($\frac{٥}{جا^{٢}س} - \frac{٣}{جتا^{٢}س}$) د س

الحل:

SALEEM ALSATEEB

∫٥قتا٢س – ٣قا٢س ؤس = –٥ظتاس – ٣ظاس+جـ

ب) ∫ (جا٢س+جتا٢س)/(١+جتا٢س) ؤس

الحل:

= ∫ ١/(٢جتا٢س) ؤس = ١/٢ ∫قا٢س ؤس = ١/٢ +ظاس+جـ

جـ) ∫(ظتاس+قتاس)٢ ؤس

الحل:

= ∫ظتا٢س – ٢قتاسظتاس+قتا٢س ؤس

= ∫قتا٢س – ١ – ٢قتاسظتاس+قتا٢س ؤس

= ∫٢قتا٢س – ١ – ٢قتاسظتاس ؤس

= –٢ظتاس – س – ٢قتاس +جـ

د) ∫ (جاس+جتا٢س)/(١–جا٢س) ؤس

الحل:

= ∫ (جاس+جتا٢س)/(جتا٢س) ؤس = ∫ جاس/(جتا٢س) + (جتا٢س)/(جتا٢س) ؤس

= ∫قاسظاس + ١ؤس =قاس + س+جـ

هـ) ∫ (١–جا٢س)/(جا٢س/٢ × جتا٢س/٢) ؤس

الحل:

= ∫ (١–جا٢س)/(جاس/٢ × جتاس/٢)٢ ؤس = ∫ (١–جا٢س)/(١/٢ جاس)٢ ؤس

= ∫ (١–جا٢س)/(١/٢ جاس)٢ ؤس = ٤∫قتا٢س ؤس – ١ = ٤(–ظتاس –س)+جـ

و) ∫ (١–جا٢س)/(جاس–جتاس) ؤس

الحل:

= ∫ (١–جا٢س)/(جاس–جتاس) ؤس

= ∫ (جاس–جتاس)٢/(جاس–جتاس) ؤس

= ∫جاس–جتاس ؤس =جتاس–جاس+جـ

ز) ∫ جتا٣س/جتاس ؤس

الحل:

= ∫ جتا(س + ٣س)/جتاس ؤس

= ∫ جتاسجتا٢س/جتاس – جاسجا٢س/جتاس ؤس

= ∫جتا٢س – جاس×٢جاسجتاس/جتاس ؤس

= ∫جتا٢س–٢جا٢س ؤس

= ∫جتا٢س–٢× ١/٢ (١ –جتا٢س)ؤس

= ∫٢جتا٢س – ١ؤس = ٢جا٢س/٢ –س +جـ

ح) ∫ ؤس/(جا٢س–جا٤س)

الحل:

= ∫ ١/(جا٢س(١–جا٢س)) ؤس = ∫ (جا٢س+جتا٢س)/(جا٢سجتا٢س) ؤس

= ∫ ١/(جتا٢س) + ١/(جا٢س) ؤس = ∫قا٢س+قتا٢س ؤس

= ظاس–ظاس+جـ

ط) ∫قاس (ظاس+جتاس)ؤس

الحل:

= ∫قاسظاس+قاسجتاس ؤس

= ∫قاسظاس + ١ؤس =قاس + س+جـ

SALEEM ALSATEB

ي) $\int$ جا٦س جا٤س ds

الحل:

$= \frac{1}{2}\int$ (جتا٢س − جتا١٠س) ds

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{جا٢س}}{2} - \frac{\text{جا١٠س}}{10}\right) + \text{ج}$

ك) $\int$ جتا^{2}س ds

الحل:

$= \frac{1}{2}\int (1 + \text{جتا٢س})\,ds = \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{\text{جا٢س}}{2}\right) + \text{ج}$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س} - 5}{1 - \text{جا}^{2}\text{س}}\,ds$

الحل:

$= \int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س} - 5}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,ds = \int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} - \frac{5}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,ds$

$= \int$ جتاس − ٥قا^{2}س ds = جاس − ٥ظاس + ج

م) $\int$ جتا٣س جتا٧س ds

الحل:

$= \frac{1}{2}\int$ (جتا(−٤س) + جتا١٠س) ds

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{جا}-٤\text{س}}{-4} + \frac{\text{جا١٠س}}{10}\right) + \text{ج}$

ن) $\int$ (جتا^{4}س − جا^{4}س) ds

الحل:

$= \int$ (جتا^{2}س − جا^{2}س)(جتا^{2}س − جا^{2}س) ds

$= \int$ جتا٢س × ١ ds $= \frac{\text{جا٢س}}{2} + \text{ج}$

س) $\int \frac{1}{\text{قاس} - 1}\,ds$

الحل:

$= \int \frac{1}{\frac{1}{\text{جتاس}} - 1}\,ds = \int \frac{1}{\frac{1 - \text{جتاس}}{\text{جتاس}}}\,ds$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}\,ds = \int \frac{\text{جتاس} + \text{جتا}^{2}\text{س}}{1 - \text{جتا}^{2}\text{س}}\,ds$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{2}\text{س}} + \frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}}\,ds = \int$ قتاس ظتاس + ظتا^{2}س ds

$= \int$ قتاس ظتاس + قتا^{2}س − ١ ds $=$ − قتاس − ظتاس − س + ج

ع) $\int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جاس}}\,ds$

الحل:

$= \int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جاس}} \times \frac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}}\,ds = \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^{2}\text{س}}{1 - \text{جا}^{2}\text{س}}\,ds$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,ds = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} + \frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,ds$

$= \int$ قاس ظاس + ظا^{2}س ds $= \int$ قاس ظاس + قا^{2}س − ١ ds

$=$ قاس ظاس + قا^{2}س − ١ ds

ثالثاً: التكامل المحدود

- **تدرب (١) ص(٢٣٩)**

اذا كان ق اقترانا متصلاً، ق(١) = ٤، ق(٢) = ١٢،

$\int_{1}^{2}$ أ ق$'$(س) ds = ١٦ فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

$\int_{1}^{2}$ أ ق$'$(س) ds = أ ق(س)$\Big]_{1}^{2}$ = أ ق(٢) − أ ق(١)

٢ أ − ١ أ = ١٨ = ١٦ ------ أ = ٢

- **تدرب (٢) ص(٢٣٩)**

احسب قيمة كل من التكاملين الآتيين:

١) $\int_{2}^{7}$ ٤س ds

SALEEM ALSATEB

الحل: $\int_{٢}^{٧} ٤س\,ودس = ٢س^{٢}\Big]_{٢}^{٧} = (٤٩\times٢) - (٤\times٢) = ٩٠$

---

٢) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,ودس$

الحل: fsa

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,ودس = ظاس\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} = ظا(\frac{\pi}{٤}) - ظا(\frac{\pi}{٦}) = ١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$

- **تدرب (٣) ص(٢٤٠)**

اذا كان $\int_{١+ب}^{٢+٣ب} ٥س\,ودس = ٤٠$ فجد قيمة الثابت ب.

الحل: $= ٥(٢ + ٣ب - ١ - ب)$

$= ٥(٢ب + ١) = ١٠ب + ٥ = ٤٠$

$١٠ب = ٣٥$ ---- $ب = ٣,٥$

- **تدرب (٤) ص(٢٤١)**

اذا كان $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,ودس = ٢$ ، فجد

$\int_{\sqrt{٨}}^{\sqrt{٧}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,ودس$.

الحل: $\int_{\sqrt{٨}}^{\sqrt{٧}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,ودس = -٢$

- **تدرب (٥) ص(٢٤٢)**

اذا كان $\int_{١}^{٣} (٤ن(س) + ٧هـ(س))\,ودس = ١٩$ ،

$\int_{١}^{٣} ٣ن(س)\,ودس = ٩$، فاحسب قيمة $\int_{٣}^{١} ٥هـ(س)\,ودس$.

الحل: $\int_{١}^{٣} ٣ن(س)\,ودس = ٩ \leftarrow \int_{١}^{٣} ن(س)\,ودس = ٣$

$\int_{١}^{٣} (٤ن(س) + ٧هـ(س))\,ودس = ٤\int_{١}^{٣} ن(س)\,ودس + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ودس = ١$

$٤ \times ٣ + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ودس = ١٩$

$\leftarrow ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ودس = ٧ \leftarrow \int_{١}^{٣} هـ(س)\,ودس = ١$

المطلوب: $\int_{٣}^{١} ٥هـ(س)\,ودس = -٥\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ودس = -٥ \times ١ = -٥$

- **تدرب (٦) ص(٢٤٣)**

اذا كان ع = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi٣}{٤}} قتا^{٢}س\,ودس$ ، ل = $\int_{\frac{\pi٣}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,ودس$ فما قيمة (ع + ل) ؟

الحل: ع + ل = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi٣}{٤}} قتا^{٢}س\,ودس + \int_{\frac{\pi٣}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,ودس$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi٣}{٤}} قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س\,ودس = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi٣}{٤}} -١\,ودس$

$= -١(\frac{\pi٣}{٤} - \frac{\pi}{٤}) = \frac{-\pi}{٢}$

- **تدرب (٧) ص(٢٤٥)**

اذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ن(س) + ٣)\,ودس = -١٧$،

$\int_{٢}^{٥} \frac{ن(س)}{٣}\,ودس = -٢$ ، فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ن(س) - ١)\,ودس$.

الحل: $\int_{٩}^{٢} (٢ن(س) + ٣)\,ودس = ٢\int_{٩}^{٢} ن(س)\,ودس + ٣\int_{٩}^{٢} ودس$

$= ٢\int_{٩}^{٢} ن(س)\,ودس + ٣(٢ - ٩) = -١٧$

$\leftarrow ٢\int_{٩}^{٢} ن(س)\,ودس = ٦ \leftarrow \int_{٩}^{٢} ن(س)\,ودس = ٣$

SALEEM ALSATEB

$\int_{٢}^{٥} \frac{ن(س)}{٣}$ د س $= \frac{١}{٣} \int_{٢}^{٥} ن(س)$ د س $= -٢$

$\leftarrow \int_{٢}^{٥} ن(س)$ د س $= -٦$

$\int_{٢}^{٩} ن(س)$ د س $= \int_{٢}^{٥} ن(س)$ د س $+ \int_{٥}^{٩} ن(س)$ د س

$-٣ = -٦ + \int_{٥}^{٩} ن(س)$ د س $\leftarrow \int_{٥}^{٩} ن(س)$ د س $= ٣$

المطلوب: $\int_{٥}^{٩} (٤ن(س) - ١)$ د س $= ٤\int_{٥}^{٩} ن(س)$ د س $- \int_{٥}^{٩} ١$ د س

$= ٤ \times ٣ - ١(٩ - ٥) = ١٢ - ٤ = ٨$

- **تدريب (٨) ص(٢٤٥)**

جد $\int_{٠}^{\pi^{٢}} \sqrt{\frac{١ - جتا٢س}{٢}}$ د س

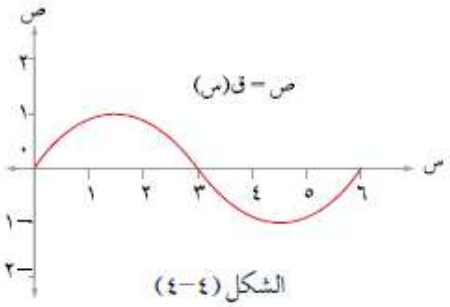
الحل: $= \int_{٠}^{\pi^{٢}} \sqrt{جا^{٢}س}$ د س $= \int_{٠}^{\pi^{٢}} |جاس|$ د س

$\int_{٠}^{\pi} جاس$ د س $= \int_{\pi}^{\pi^{٢}} -جاس$ د س $= -جتاس]_{\pi}^{\pi^{٢}} + جتاس]_{٠}^{\pi}$

$= (١) - (-١) + (١) - (-١) = ٤$

- **تدريب (٩) ص(٢٤٧)**

اعتماداً على الشكل (٤-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المتصل على الفترة [٠ ، ٦] أجب عن كل مما يأتي:



الشكل (٤-٤)

ما إشارة $\int_{١}^{٣} ن(س)$ د س ، لماذا؟

الحل: $ن(س) \geq ٠ \; \forall س \in [١،٣] \leftarrow \int_{١}^{٣} ن(س)$ د س ≥ ٠

ما إشارة $\int_{٣}^{٦} ن(س)$ د س ، لماذا؟

الحل: $ن(س) \geq ٠ \; \forall س \in [٣،٦] \leftarrow \int_{٣}^{٦} ن(س)$ د س ≥ ٠

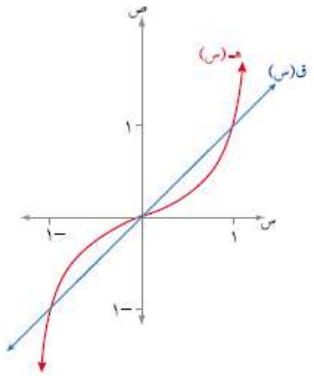
- **فكر وناقش ص(٢٤٨)**

من الشكل $ن(س) \leq هـ(س)$ على الفترة [-٢ ، ٥]

$\therefore \int_{-٢}^{٥} ن(س)$ د س $\leq \int_{-٢}^{٥} هـ(س)$ د س

- **تدريب (١٠) ص(٢٤٨)**

اعتماداً على الشكل (٤-٦) الذي يمثل منحنيي الإقترانين ق، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كل مما يأتي، مبرراً اجابتك:



الشكل (٤-٦)

١) $\int_{٠}^{١} ن(س)$ د س ، $\int_{٠}^{١} هـ(س)$ د س

الحل: من الرسم $هـ(س) \leq ن(س)$ على الفترة [-١ ، ٠]

$\therefore \int_{-١}^{٠} هـ(س)$ د س $\leq \int_{-١}^{٠} ن(س)$ د س

٢) $\int_{-١}^{٠} ن(س)$ د س ، $\int_{-١}^{١} هـ(س)$ د س

الحل: من الرسم $ن(س) \leq هـ(س)$ على الفترة [٠ ، ١]

$\therefore \int_{٠}^{١} ن(س)$ د س $\leq \int_{٠}^{١} هـ(س)$ د س

SALEEM ALSATEEB

• تدريب (١١) ص(٢٤٩)

اذا علمت أن م ≤ $\int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2}$ ءس ≤ك، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دون حساب قيمة $\int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2}$ ءس .

الحل:

ن(س) = $\frac{س}{1+س^2}$ ← ن′(س) = $\frac{(1+س^2)(1)-(س)(2س)}{(1+س^2)^2}$

= $\frac{1-س^2}{(1+س^2)^2}$

١ − س٢ = ٠ --- س = ١ ، س = -١ تهمل

١ + س٢ ≠ ٠

ق(١) = $\frac{1}{2}$ ، ق(٠) = ٠

∴ ٠ ≤ ن(س) ≤ $\frac{1}{2}$ ،س∈ [٠،١]

$\int_{0}^{1}$ ٠ءس ≤ $\int_{0}^{1}$ ن(س)ءس ≤ $\int_{0}^{1}$ $\frac{1}{2}$ ءس ← ٠ ≤ $\int_{0}^{1}$ ن(س)ءس ≤ $\frac{1}{2}$

∴ م = ٠ ، ن = $\frac{1}{2}$

• فكر وناقش ص(٢٤٩)

حل مثال (١٥) بطريقة اخرى.

الحل: ق(س) = ٣ + جتا٢س

ق′(س) = ٢جاس جتاس = ٠

جاس = ٠ ← س = ٠ ، π ، ٢π

جتاس = ٠ ← س = $\frac{\pi}{2}$ ، س = $\frac{3\pi}{2}$

ق(٠) = ٤،ق(π) = ٤،ق(٢π) = ٤،ق($\frac{\pi}{2}$) = ٣،ق($\frac{3\pi}{2}$) = ٣

٣ ≤ $\int_{0}^{2\pi}$ ن(س)ءس ≤ ٤ ، س∈ [٠،٢π]

$\int_{0}^{2\pi}$ ٣.ءس ≤ $\int_{0}^{2\pi}$ ن(س)ءس ≤ $\int_{0}^{2\pi}$ ٤.ءس

← ٦π ≤ $\int_{0}^{2\pi}$ ن(س)ءس ≤ ٨π

تمارين ومسائل ص(٢٥٠ - ٢٥١)

١) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ $\frac{1}{س^2}$ ءس

الحل: = $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ س$^{-2}$ ءس = − س$^{-1}$]$_{\frac{1}{2}}^{1}$ = $\frac{-1}{س}$]$_{\frac{1}{2}}^{1}$

= (−١) − (−٢) = −١ + ٢ = $\frac{3}{8}$

ب) $\int_{0}^{3}$ (س^2 − |س − ١|)ءس

الحل: = $\int_{0}^{3}$ س^2 ءس − $\int_{0}^{3}$ |س − ١|ءس

= = $\frac{س^3}{3}$]$_{0}^{3}$ − ($\int_{0}^{1}$ (١ − س)ءس + $\int_{1}^{3}$ (س − ١)ءس)

= (٩ − ٠) − (س − $\frac{س^2}{2}$]$_{0}^{1}$ + $\frac{س^2}{2}$ − س]$_{1}^{3}$)

= ٩ − ((١ − $\frac{1}{2}$) − (٠ − ٠) + ($\frac{9}{2}$ − ٣) − ($\frac{1}{2}$ − ١))

= ٩ − ($\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{2}$ + $\frac{1}{2}$) = ٩ − $\frac{5}{2}$ = $\frac{13}{2}$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا٢س ءس

الحل: = = $\frac{-جتا2س}{2}$]$_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ = ($\frac{-جتا\pi}{2}$) − ($\frac{-جتا\frac{\pi}{2}}{2}$)

= $\frac{1}{2}$ − ٠ = $\frac{1}{2}$

د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}$ (س + جتاس)ءس

الحل: = $\frac{س^2}{2}$ + جاس]$_{\frac{\pi}{2}}^{0}$ = (٠ + جا٠) − ($\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2}$ + جا$\frac{\pi}{2}$)

= $\frac{-\pi^2}{8}$ − ١

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\sqrt{1+جا2س}}{جاس+جتاس}$ ءس

الحل: = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\sqrt{جا^2س+جتا^2س+2جاس جتاس}}{جاس+جتاس}$ ءس

SALEEM ALSATEB

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(\text{جاس}+\text{جتاس})^{2}}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\,ds = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\text{جاس}+\text{جتاس}|}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\,ds$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جاس}+\text{جتاس}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\,ds = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1.ds = 1(\frac{\pi}{2}-0) = \frac{\pi}{2}$

و) $\int_{2}^{2}(٩س-٧)^{٥}\,ds$

الحل: $\int_{2}^{2}(٩س-٧)^{٥}\,ds$ = صفر

ز) $\int_{-1}^{3}(س-١)(س^{٢}+س+١)ds$

الحل: $= \int_{-1}^{3}(س^{٣}-١)ds = [\frac{س^{٤}}{٤}-س]_{-1}^{3}$

$= (\frac{٨١}{٤}-٣)-(\frac{١}{٤}+١) = \frac{٦٩}{٤}-\frac{٥}{٤} = \frac{٦٤}{٤} = ١٦$

ح) $\int_{0}^{1} \sqrt{س}(\sqrt{س}+٢)^{٢}\,ds$

الحل: =

$\int_{0}^{1} \sqrt{س}(س+٤\sqrt{س}+٤)ds = \int_{0}^{1} س^{\frac{٣}{٢}}+٤س+٤س^{\frac{١}{٢}}\,ds$

$= [\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}}+٢س^{٢}+\frac{٨}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}]_{0}^{1} =$

$(\frac{٢}{٥}+٢+\frac{٨}{٣})-(٠+٠+٠) = \frac{٧٦}{١٥}$

ط) $\int_{2}^{4}\frac{١}{(س-١)^{٢}}\,ds$

الحل: $= \int_{2}^{4}(س-١)^{-٢}\,ds = [\frac{(س-١)}{-١\times١}]_{2}^{4}$

$= (\frac{-١}{٣})-(-١) = \frac{٢}{٣}$

ي) $\int_{1}^{3}\frac{٢س^{٣}-٤س^{٢}+٥}{س^{٢}}\,ds$

الحل: $= \int_{1}^{3}٢س-٤+٥س^{-٢}\,ds = [س^{٢}-٤س-س^{-١}]_{1}^{3}$

$= (٩-١٢-\frac{١}{٣})-(١-٤-١)$

$= \frac{-١٠}{٣}+٤ = \frac{٢}{٣}$

ك) $\int_{2}^{3}\sqrt{٩س^{٢}-١٢س+٤}\,ds$

الحل: $= \int_{2}^{3}\sqrt{(٣س-٢)^{٢}}\,ds = \int_{2}^{3}|٣س-٢|ds$

$= \int_{2}^{3}٣س-٢.ds = [\frac{٣}{٢}س^{٢}-٢س]_{2}^{3}$

$= (\frac{٢٧}{٢}-٦)-(٦-٤) = \frac{١٥}{٢}-\frac{٤}{٢} = \frac{١١}{٢}$

ل) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\text{جتاس}-\text{جاس})ds$

الحل: $= [\text{جاس}+\text{جتاس}]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = (١-٠)-(٠+١) =$ صفر

---

٢) اذا كان ق(س) = $\int_{0}^{-٢}(\int_{0}^{2}٤ds-٣س^{٢})ds$ ، فجد ق/(-١) .

الحل: $= \int(-٨-٣س^{٢})ds$

ق/(س) = -٨ - ٣س^{٢} = ق/(-١) = -٨-٣ = -١١

---

٣) $\int_{ب}^{2}٢ب\,ds$ = -٣٠ ، حيث ب ∈ ح ، فجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{ب}^{2}٢ب\,ds = ٢ب(٢-ب) = ٤ب-٢ب^{٢} =$ -٣٠

← ب^{٢} - ٢ب - ١٥ = ٠

(ب - ٥)(ب + ٣) = ٠ ب = ٥ ب = -٣

SALEEM ALSATEEB

٤) اذا كان $\int_{0}^{جـ} (١ - س)\,ds = ٠$ ، حيث جـ $\in$ ح، فجد قيمة جـ .

الحل: $= \int_{0}^{جـ} س - س^{٢}\,ds = \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \Big]_{0}^{جـ}$

$= (\frac{جـ^{٢}}{٢} - \frac{جـ^{٣}}{٣}) - (٠ - ٠) = جـ^{٢}(\frac{١}{٢} - \frac{جـ}{٣}) = ٠$

$\frac{١}{٢} - \frac{جـ}{٣} = ٠ \leftarrow جـ = ٠$ أو $جـ = \frac{٣}{٢}$

---

٥) اذا كان $\int_{-١}^{٣} ٣س^{٢} - ٢\int_{0}^{جـ} ٣\,ds = -٢٠$، فجد قيمة الثابت جـ .

الحل:

$= \int_{-١}^{٣} ٣س^{٢} - ٢(\frac{٣}{٢})(جـ) = \int_{-١}^{٣} ٣س^{٢} - ٣جـ^{٢}\,ds$

$= س^{٣} - ٣جـ^{٢}س \Big]_{-١}^{٣} = (٢٧ - ٩جـ^{٢}) - (-١ + ٣جـ^{٢})$

$٢٨ - ١٢جـ^{٢} = -٢٠ \leftarrow ١٢جـ^{٢} = ٤٨ \leftarrow جـ^{٢} = ٤$

$\leftarrow جـ = \pm ٢$

---

٦) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س & ، -٣ < س \leq ٠ \\ س & ، ٠ < س \leq ٤ \end{cases}$ ، فجد

$\int_{-٣}^{٤} ن(س)\,ds$.

الحل: $\int_{-٣}^{٤} ن(س)\,ds = \int_{-٣}^{٠} -س\,ds + \int_{٠}^{٤} س\,ds$

$-\frac{س^{٢}}{٢} \Big]_{-٣}^{٠} + \frac{س^{٢}}{٢} \Big]_{٠}^{٤}$.

$(٠) - (\frac{-٩}{٢}) + (٨) - (٠) = \frac{٢٥}{٢}$

---

٧) اذا كان $\int_{٢}^{ب} (٢س - ٣)\,ds = ٢٠$، فجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{٢}^{ب} (٢س - ٣)\,ds = س^{٢} - ٣س \Big]_{٢}^{ب}$

$= (ب^{٢} - ٣ب) - (٤ - ٦) = ٢٠$

$ب^{٢} - ٣ب - ١٨ = ٠$

$(ب - ٦)(ي + ٣) = ٠$

$ب = ٦$ ، $ب = -٣$

---

٨) اذا كان $\int_{١}^{٣} (٢ن(س) + \frac{١}{س^{٢}} - ٦)\,ds = ١٢$ ، فجد $\int_{١}^{٣} (\frac{ن(س)}{٢} - س^{٢})\,ds$.

الحل: $= ٢\int_{١}^{٣} ن(س)\,ds + \int_{١}^{٣} س^{-٢}\,ds - ٦.ds$

$= ٢\int_{١}^{٣} ن(س)\,ds - س^{-١} \Big]_{١}^{٣} - ٦(٣ - ١) = ١٢$

$= ٢\int_{١}^{٣} ن(س)\,ds - (\frac{١}{٣} - ١) - ١٢ = ١٢$

$= ٢\int_{١}^{٣} ن(س)\,ds = \frac{٧٠}{٣} \leftarrow \int_{١}^{٣} ن(س)\,ds = \frac{٣٥}{٣}$

المطلوب:

$\int_{١}^{٣} \frac{ن(س)}{٢} - س^{٢}\,ds = \frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} ن(س)\,ds - \int_{١}^{٣} س^{٢}\,ds$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - \frac{س^{٣}}{٣} \Big]_{١}^{٣} = \frac{٣٥}{٦} (-٩ - \frac{١}{٣})$

$= \frac{٣٥}{٦} - \frac{٢٦}{٣} = \frac{١٧}{٦}$

---

٩) $\int_{٩}^{٢} (٢ن(س) + ٣)\,ds = -١٧$ ، $\int_{٢}^{٥} \frac{ن(س)}{٣}\,ds = -٢$

فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ن(س) - ١)\,ds$.

الحل: $\int_{٩}^{٢} (٢ن(س) + ٣)\,ds = ٢\int_{٩}^{٢} ن(س)\,ds + ٣\int_{٩}^{٢} ds$

$= ٢\int_{٩}^{٢} ن(س)\,ds + ٣(٢ - ٩) = -١٧$

$\leftarrow ٢\int_{٩}^{٢} ن(س)\,ds = ٦ \leftarrow \int_{٩}^{٢} ن(س)\,ds = ٣$

SALEEM ALSATEEB

$\int_{-2}^{2} \frac{ن(س)}{٣} ءس = \frac{١}{٣} \int_{-2}^{2} ن(س) ءس = -٢$

$\leftarrow \int_{-2}^{2} ن(س) ءس = -٦$

$\int_{-2}^{٩} ن(س) ءس = \int_{-2}^{٥} ن(س) ءس + \int_{٥}^{٩} ن(س) ءس$

$-٣ = -٦ + \int_{٥}^{٩} ن(س) ءس \leftarrow \int_{٥}^{٩} ن(س) ءس = ٣$

المطلوب: $\int_{٥}^{٩} (٤ن(س) - ١) ءس = ٤ \int_{٥}^{٩} ن(س) ءس - \int_{٥}^{٩} ١ ءس$

$= ٤ \times ٣ - ١(٩ - ٥) = ١٢ - ٤ = ٨$

---

١٠) دون حساب تكامل المقدار $\int_{\cdot}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢} س + ٢} ءس$ بين أن

$\frac{\pi}{٥} \geq \int_{\cdot}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢} س + ٢} ءس \geq \frac{\pi}{٢}$.

الحل: $ق(س) = \frac{١}{٣جتا^{٢} س + ٢}$

$ق'(س) = \frac{-٦ جاس جتاس}{(٣جتا^{٢} س + ٢)^{٢}}$

$\leftarrow -٦$ جاس جتاس $= ٠ \leftarrow$ جاس $= ٠ \leftarrow س = ٠ ، \pi$

$\leftarrow$ جتا س $= ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

$\leftarrow ٣جتا^{٢} س + ٢ \neq ٠$.

$ق(٠) = \frac{١}{٥} ، \quad ق(\pi) = \frac{١}{٥} ، \quad ق(\frac{\pi}{٢}) = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٥} \geq ن(س) \geq \frac{١}{٢} ، \quad س \in [٠، \pi]$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥} ءس \geq \int_{٠}^{\pi} ن(س) ءس \geq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢} ءس$

$\frac{\pi}{٥} \geq \int_{٠}^{\pi} ن(س) ءس \geq \frac{\pi}{٢}$

---

١١) اذا علمت أن $ك \geq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}} ءس \geq ٢$ ، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دون حساب قيمة $\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}} ءس$.

الحل: $ن(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$

$ن'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^{٢}}}$

$\leftarrow س = ٠$

$\leftarrow ٩ - س^{٢} = ٠ \leftarrow س = ٣ ، س = -٣$

$ق(٠) = ٣ ، ق(٣) = ٠ ، ق(-٣) = ٠$

$٠ \leq ن(س) \leq ٣ ، \quad س \in [-٣، ٣]$

$\int_{-٣}^{٣} ٠ ءس \leq \int_{-٣}^{٣} ن(س) ءس \leq \int_{-٣}^{٣} ٣ ءس$

$٠ \leq \int_{-٣}^{٣} ن(س) ءس \leq ١٨ \leftarrow م = ٠ ، ك = ١٨$

---

١٢) اذا كان ق اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية، وكان ق(٠) = ٥، $ق''(س) = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} ن'(س) ءس = ٣$ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

الحل: $ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$

ق(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٥ --- جـ = ٥

$ق'(س) = ٢أس + ب$

$ق''(س) = ٢أ = ٤$ --- أ = ٢

$\int_{٠}^{١} ن'(س) ءس = \int_{٠}^{١} ٤س ءس = ٢س^{٢} + س]_{٠}^{١}$

$= (٢ + ب) - (٠ + ٠) = ٣$ --- ب = ١

$\therefore ق(س) = ٢س^{٢} + س + ٥$

---

١٣) جد كثير حدود ق(س)من الدرجة الأولى بحيث

$\int_{-١}^{١} ن(س) ءس = ٤ ، \int_{١}^{٣} ن(س) ءس = ٢$.

الحل: $ق(س) = أس + ب$

$\int_{-١}^{١} ن(س) ءس = \int_{-١}^{١} أس ءس = \frac{١}{٢} س^{٢} + س]_{-١}^{١}$

$(\frac{١}{٢} + ب) - (\frac{١}{٢} - ب)$ --- ٢ب = ٤ ، ب = ٢

$\int_{١}^{٣} ن(س) ءس = \int_{١}^{٣} أس + ٢ ءس = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢س]_{١}^{٣}$

$= (\frac{١٩}{٢} + ٦) - (\frac{١}{٢} + ٢) = ١٤ - ٤ = ٢ \leftarrow أ = \frac{٦}{٤}$

SALEEM ALSATEB

∴ق(س) = $\frac{٣}{٢}$ س + ٢

رابعاً: اقتران اللوغاريتم الطبيعي

- **تدرب (١) ص(٢٥٤)**

جد ق/(س) لكل مما يأتي:

١) ن(س) = لـو$_{هـ}$(٢ − جتاس)

الحل: ن/(س) = $\frac{\text{جاس}}{٢-\text{جتاس}}$

---

٢) ن(س) = لـو$_{هـ}$|٢س + ٥|

الحل: ن/(س) = $\frac{٢}{٢س+٥}$

- **فكر وناقش ص(٢٥٤)**

حل مثال (٢) بطريقة أخرى

الحل:

ن(س) = لـو$_{هـ}$($\frac{\text{جتاس}}{\sqrt{٤-٣س^{٢}}}$) = لـو$_{هـ}$ جتاس − لـو$_{هـ}$ $\sqrt{٤-٣س^{٢}}$

= لـو$_{هـ}$ جتاس − $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$(٤ − ٣س^{٢})

ن/(س) = $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{١}{٢} \times \frac{-٦س}{٤-٣س^{٢}}$

- **تدرب (٢) ص(٢٥٥)**

جد كلا من التكاملات الآتية :

١) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩-٢س}$ دس

الحل: = $-\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|٩ − ٢س|$]_{٢}^{٤}$

= $-\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ + $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ ٥ = $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ ٥

---

٢) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{قا}^{٢}س}{٢+\text{ظاس}}$ دس

الحل: = لـو$_{هـ}$|٢ − ظاس|$]_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

= لـو$_{هـ}$ ٣ − لـو$_{هـ}$ ١ = لـو$_{هـ}$ ٣

تمارين ومسائل ص(٢٥٦ - ٢٥٧)

١) جد المشتقة الأولى لكل من الإقترانات الآتية:

أ) ن(س) = لـو$_{هـ}$ ٢س

الحل: ن/(س) = $\frac{٢}{٢س}$

ب) ن(س) = لـو$_{هـ}$ جا^{٣} ٥س

الحل: ن/(س) = لـو$_{هـ}$ جا^{٣} ٥س = ٣لـو$_{هـ}$ جا(٥س)

ن/(س) = $\frac{٣ \times \text{جتا}٥س \times ٥}{\text{جا}٥س}$

جـ) ن(س) = لـو$_{هـ}$|س^{٢} + ٤س − ٥|

الحل: ن/(س) = $\frac{٢س+٤}{س^{٢}+٤س-٥}$

د) ن(س) = لـو$_{هـ}$(س^{٢} + ٥س + ٣)

الحل: ن/(س) = $\frac{٢س+٥}{س^{٢}+٥س+٣}$

هـ) ن(س) = س^{٣} لـو$_{هـ}$ س

الحل: ن/(س) = س^{٣} × $\frac{١}{س}$ + لـو$_{هـ}$ س × ٣س^{٢}

و) ن(س) = لـو$_{هـ}$(٢ + $\sqrt{س}$)

الحل: ن/(س) = $\frac{٠ + \frac{١}{٢\sqrt{س}}}{٢+\sqrt{س}}$

ز) ن(س) = لـو$_{هـ}$ س^{٣} ظاس

الحل: ن(س) = لـو$_{هـ}$ س^{٣} ظاس = لـو$_{هـ}$ س^{٣} + لـو$_{هـ}$ ظاس

= ٣لـو$_{هـ}$ س + لـو$_{هـ}$ ظاس

ن/(س) = $\frac{٣س}{س} + \frac{\text{قا}^{٢}س}{\text{ظاس}}$

SALEEM ALKHATEEB

ح) $ن(س) = لـو_{هـ}(\frac{س}{س^{٢}+١})$

الحل:

$ن(س)=لـو_{هـ}(\frac{س}{س^{٢}+١}) = لـو_{هـ}س - لـو_{هـ}(س^{٢}+١)$

$ن'(س)=\frac{١}{س} - \frac{٢س}{س^{٢}+١}$

ط) $ن(س) = (لـو_{هـ}س)^{٣}$

الحل: $ن'(س)=٣(لـو_{هـ}س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

ي) $ن(س) = لـو_{هـ}\frac{(٤س^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢س)^{٥}}$

الحل: $ن(س)=لـو_{هـ}\frac{(٤س^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢س)^{٥}}$

$= ٦لـو_{هـ}(٤س^{٢}+٥) - ٥لـو_{هـ}(٧-٢س)$

$ن'(س)=٦\times\frac{٨س}{٤س^{٢}+٥} - ٥\times\frac{-٢}{٧-٢س}$

ك) $ن(س) = لـو_{هـ}\sqrt[٣]{٥س^{٣}+٤س}$

الحل: $ن(س)=لـو_{هـ}\sqrt[٣]{٥س^{٣}+٤س}$

$= \frac{١}{٣}لـو_{هـ}(٥س^{٣}+٤س)$

$ن'(س)=\frac{١}{٣}\times\frac{١٥س^{٢}+٤}{٥س^{٣}+٤س}$

ل) $ن(س) = ظا(لـو_{هـ}س)$

الحل: $ن'(س)=قا^{٢}(لـو_{هـ}س)\times\frac{١}{س}$

---

٢) اذا كان $ن(س) = لـو_{هـ}(س+\sqrt{س^{٢}-١})$ ، أثبت ان

$ن'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$.

الحل: $ن'(س)=\frac{١+\frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}}}{س+\sqrt{س^{٢}-١}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}\times\frac{\sqrt{س^{٢}-١}+س}{س+\sqrt{س^{٢}-١}} = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$

---

٣) اذا كان $\int(ن'(س)-س)ﻫس = لـو_{هـ}|قاس+ظاس| + س^{٢}$

فأثبت أن ق/(س) = ٣س + قاس .

الحل: $ن'(س)-س = \frac{قاسظاس+قا^{٢}س}{قاس+ظاس} + ٢س$

$ن'(س)-س = \frac{قاس(ظاس+قاس)}{قاس+ظاس} + ٢س$

$ن'(س)-س = قاس + ٢س \leftarrow ن'(س) = قاس + ٣س$

---

٤) بين ان الإقتران ﻫ(س) $= لـو_{هـ}$ جاس هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ظتاس.

الحل: ق متصل على الفترة ح ماعدا س $\in \pi\mathbb{N}$: ص $\in \mathbb{N}$

ﻫ'(س) $= \frac{جتاس}{جاس} =$ ظتاس $=$ ن(س)

---

٥) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int\frac{٢س}{س^{٢}+٣}ﻫس$

الحل: $= لـو_{هـ}|س^{٢}+٣| + جـ$

ب) $\int\frac{١+جتاس}{س+جاس}ﻫس$

الحل: $لـو_{هـ}|س+جاس| + جـ$

جـ) $\int\frac{٥+٥ظتاس^{٢}}{ظتاس}ﻫس$

الحل:

$لـو_{هـ}٥ظاس + ٥ظتاس = -لـو_{هـ}|جتاس| + ٥لـو_{هـ}|جاس| + جـ$

SALEEM ALSATEEB

د) $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٥}$ دس

الحل: لـو$_{هـ}|س^{٣}+٥|+$جـ

هـ) $\int \frac{س+٥}{س}$ دس

الحل: $= \int ١+\frac{٥}{س}$ دس $= س+٥$لـو$_{هـ}|س|+$جـ

و) $\int_{٣}^{٥} \frac{س-٢}{س^{٢}-٤}$ دس

الحل: $= \int_{٣}^{٥} \frac{س-٢}{(س-٢)(س+٢)}$ دس $= \int_{٣}^{٥} \frac{١}{س+٢}$ س

$= س+٥$لـو$_{هـ}|س+٢|\Big]_{٣}^{٥}$ $=$لـو$_{هـ}٧-$لـو$_{هـ}٥$

ز) $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢س|}{س^{٢}+١}$ دس

الحل: $= \int_{-١}^{٠} \frac{-٢س}{س^{٢}+١}$ دس $+ \int_{٠}^{٢} \frac{٢س}{س^{٢}+١}$ دس

$=-$لـو$_{هـ}|س^{٢}+١|\Big]_{-١}^{٠}+$لـو$_{هـ}|س^{٢}+١|\Big]_{٠}^{٢}$

$=-$لـو$_{هـ}١+$لـو$_{هـ}٢+$لـو$_{هـ}٥-$لـو$_{هـ}١$

$=$لـو$_{هـ}٢+$لـو$_{هـ}٥ =$لـو$_{هـ}١٠$

ح) $\int \frac{جا٣س}{١+جتا٣س}$ دس

الحل: $= -\frac{١}{٣}\int \frac{-٣جا٣س}{١+جتا٣س}$ دس $= -\frac{١}{٣}$لـو$_{هـ}|١+جتا٣س|+$جـ

ط) $\int \frac{٢س-١}{س(س-١)}$ دس

الحل: $= \int \frac{٢س-١}{س^{٢}-س}$ دس $=$ لـو$_{هـ}|س^{٢}-س|+$جـ

ي) $\int ظاس$ دس

الحل: $= \int \frac{جاس}{جتاس}$ دس $= -$لـو$_{هـ}|جتاس|+$جـ

---

٦) جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) ن(س) $= \left(\frac{٢س}{س^{٢}+٤}\right)$

الحل: $\int$ ن(س) دس $= \int \frac{٢س}{س^{٢}+٤}$ دس

ق(س) $=$لـو$_{هـ}|س^{٢}+٤|+$جـ

ب) ن(س) $= \left(\frac{٣جتا٣س}{٥+جا٣س}\right)$

الحل: $\int$ ن(س) دس $= \int \frac{٣جتا٣س}{٥+جا٣س}$ دس

ق(س) $=$لـو$_{هـ}|٥+جا٣س|+$جـ

خامساً: مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

- **تدرب (١) ص(٢٥٩)**

جد ق/(س) لكل مما يأتي:

١) ق(س) $=$ هـ^{جاس}

الحل: ن/(س) $=$ هـ^{جا} $\times$جتاس

---

٢) ق(س) $= س^{٤}$هـ^{٢س}

الحل: ن/(س) $= س^{٤} \times$ هـ$^{٢س} \times ٢ +$ هـ$^{٢س} \times ٤س^{٣}$

- **تدرب (٢) ص(٢٥٩)**

جد ق/(س) لكل مما يأتي:

١) ن(س) $=$سلـو$_{هـ}$هـ$^{س^{٢}}$

الحل: ن(س) $=$سلـو$_{هـ}$هـ$^{س^{٢}} = س \times س^{٢} = س^{٣}$

ق/(س) $= ٣س^{٢}$

---

٢) ن(س) $=$هـ^{٣}لـو$_{هـ}(١+جاس)}$

SALEEM ALSATEB

الحل: ق(س) = هـ^{٣لـو هـ(١+جاس)} = هـ^{لـو هـ(١+جاس)^٣}

= (١ + جاس)^٣

ق/(س) = ٣(١ + جاس)^٢ × (جتاس)

• **تدريب (٣) ص(٢٦١)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int_{0}^{1} (1+هـ^{س})^{٢}\, د س$

الحل: $= \int_{0}^{1} 1 + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س}\, د س$

$= س + ٢هـ^{س} + \frac{هـ^{٢س}}{٢} \Big]_{0}^{1}$

$= (١ + ٢هـ + \frac{هـ^{٢}}{٢}) - (٠ + ٢هـ^{٠} + \frac{هـ^{٠}}{٢})$

$= ١ + ٢هـ + \frac{هـ^{٢}}{٢} - \frac{٥}{٢} = ٢هـ + \frac{هـ^{٢}}{٢} - \frac{٣}{٢}$

---

٢) $\int هـ^{٣س}(١+هـ^{٢س})\, د س$

الحل: $\int هـ^{٣س}(١+هـ^{٢س})\, د س = \int هـ^{٣س} + هـ^{٥س}\, د س$

$= \frac{هـ^{٣س}}{٣} + \frac{هـ^{٥س}}{٥} + جـ$

تمارين ومسائل ص(٢٦٢ - ٢٦٣)

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = س + هـ^{٩س}

الحل: $\frac{د ص}{د س} = ١ + هـ^{٩س} \times ٩$

ب) ص = س^٣ + هـ^{٦ - ٥س^٤}

الحل: $\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢} + هـ^{٦-٥س^{٤}} \times (-٢٠س^{٣})$

جـ) ص = جا هـ^{٢س}

الحل: $\frac{د ص}{د س} = جتا(هـ^{٢س}) \times هـ^{٢س} \times ٢$

د) ص = $\sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢هـ^{٢س}}{٢\sqrt{١+هـ^{٢س}}}$

هـ) ص = هـ^{$\frac{١}{س}$} + لـو هـ $\sqrt{س}$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = هـ^{\frac{١}{س}} \times \frac{-١}{س^{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{س}\sqrt{س}}$

و) ص = هـ^{٥} + لـو هـ قاس

الحل: $\frac{د ص}{د س} = ٠ + \frac{قاس ظاس}{قاس} = ظاس$

ز) ص = هـ^{٤لـو هـ س^٣ + ٢}

الحل: $\frac{د ص}{د س} = هـ^{لـو هـ(س^{٣}+٢)^{٤}} = (س^{٣} + ٢)^{٤}$

ح) ص = $\frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{(هـ^{٥س})+(هـ^{٢س}\times٢)-(١+هـ^{٢س})(هـ^{٥س}\times٥)}{(هـ^{٥س})^{٢}}$

ط) ص = هـ^{٢} + س^٣ هـ^{جاس}

الحل:

$\frac{د ص}{د س} = ٠ + (س^{٣})(هـ^{جاس} \times جتاس) + (هـ^{جاس})(٣س^{٢})$

ي) ص = $(هـ^{٤س+٥})^{٦}$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = ٦(هـ^{٤س+٥})^{٥}(هـ^{٤س+٥} \times ٤)$

---

٢) اذا كان ص = هـ^{ظاس} + لـو هـ جتاس + $\int_{0}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{د س}{١+ظا^{٢}س}$

وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١، فجدقيمة الثابت أ.

الحل: $\frac{د ص}{د س} = هـ^{ظاس} \times قا^{٢}س + أ \times \frac{-جاس}{جتاس} + ٠$

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}} = هـ^{ظا\frac{\pi}{٤}} \times قا^{٢}\frac{\pi}{٤} - أ ظا\frac{\pi}{٤} = هـ \times ٢ - أ$

$= ٢هـ + ١ \leftarrow أ = -١$

SALEEM ALSATEEB

٣) اذا كان ن ً(س)=جاس + هـ ٢س ، ن(٠) = ١/٤ ،
ن ً(٠) = ١/٢ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

الحل: ∫ ن ً(س)=∫جاس + هـ ٢س ؤس

ن ً(س) = −جتاس + هـ ٢س/٢ +جـ

ن ً(٠) = −١ + هـ٠/٢ +جـ = ١/٢ ⟹ جـ = ١

∫ ن ً(س) =∫−جتاس + هـ ٢س/٢ + ١ ؤس

ن(س) = −جاس + هـ ٢س/٤ + س+جـ

ن(٠) = ٠ + هـ٠/٤ +٠+جـ = ١/٤ ⟹ جـ = ٠

∴ ن(س) = −جاس + هـ ٢س/٤ + س

---

٤) اذا كان هـ ص س = س − ص ، فأثبت ان

ؤص/ؤس = (ص ٢ − ص س + ١)/(س ٢ − س ص + ١) .

الحل: هـ ص س (ص + س × ؤص/ؤس) = ١ − ؤص/ؤس

ص هـ ص س + س هـ ص س . ؤص/ؤس = ١ − ؤص/ؤس

س هـ ص س × ؤص/ؤس + ؤص/ؤس = ١ − ص هـ ص س

ؤص/ؤس (س هـ ص س + ١) = ١ − ص هـ ص س

ؤص/ؤس = (١−ص هـ ص س)/(س هـ ص س+١) = (١−ص(س−ص))/(س(س−ص)+١) = (١−س ص+ص ٢)/(س ٢−س ص+١)

---

٥) اذا كان ص = هـ أس ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي
تحقق المعادلة الآتية: ص// - ٥ص/ + ٦ص = صفراً.

الحل: ص ً=أ هـ أس ← ص ً ً=أ ٢ هـ أس

التعويض : ص ً ً−٥ص ً+٦ص = ٠

أ ٢ هـ أس − ٥أ هـ أس + ٦هـ أس = ٠

هـ أس (أ ٢ − ٥أ + ٦) = ٠

هـ أس ≠ ٠ ، أ ٢ − ٥أ + ٦ = ٠ ← (أ − ٣)(أ − ٢) = ٠

أ = ٣ ، أ = ٢

---

٦) اذا كان ق(س) = ٣ ل(س) ، حيث ل(س) قابل للإشتقاق،
فأثبت ان : ٣ ل(س) × ل ً(س)لـو هـ ٣ .

الحل: لـو هـ ن(س) =لـو هـ ٣ ل(س) = ل(س)×لـو هـ ٣

ن ً(س)/ن(س) = ل ً(س)×لـو هـ ٣

ن ً(س) = ن(س) × ل ً(س)×لـو هـ (٣)

ن ً(س) = ٣ ل(س) × ل ً(س)×لـو هـ (٣)

---

٧) اذا كان ∫ ن ً(س)ؤس = هـ ١−س ٢ + ٤هـ ،
ن ً(ب) = −٢ب ، ب ≠ صفراً فجد قيمة (قيم) الثابت ب.

الحل: (∫ ن(س)ؤس)ً = (هـ ١−س ٢ + ٤هـ)ً

ن ً(س) = هـ ١−س ٢ × −٢س + ٠

ن ً(ب) = هـ ١−ب ٢ × −٢ب + ٠ = −٢ب

هـ ١−ب ٢ = ١ ← ١ − ب ٢ = ٠

ب ٢ = ١ ، ب = ±١

---

٨) جد كلا من التكاملات الآتية:

أ) ∫ هـ ٧س ؤس

الحل: = هـ ٧س/٧ +جـ

ب) ∫ ٣هـ ٣س ؤس من ٠ إلى ١

الحل: = [هـ ٣س] من ٠ إلى ١ = هـ ٣ − هـ ٠ = هـ ٣ − ١

جـ) ∫ هـ ٤ ؤس من ١ إلى ٣

الحل: هـ ٤(٣ − ١) = ٢هـ ٤

د) ∫ (٤هـ ٤س − ٣)/(هـ ٤س − ٣س) ؤس

الحل: لـو هـ |هـ ٣س − ٣س| +جـ

SALEEM ALSATEB

هـ) $\int \frac{هـ^{٣س} - ٢٧}{هـ^{س} - ٣} \, د س$

الحل: $= \int \frac{(هـ^{س} - ٣)(هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩)}{(هـ^{س} - ٣)} \, د س$

$= \int هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩ \, د س$

$= \frac{هـ^{٢س}}{٢} + ٣هـ^{س} + ٩س + جـ$

و) $\int هـ^{٥ + لـو_{هـ} جتاس} \, د س$

الحل: $= \int هـ^{٥} \times هـ^{لـو_{هـ} جتاس} \, د س = \int هـ^{٥} \times جتاس \, د س$

$= هـ^{٥} جاس + جـ$

ز) $\int_{١}^{هـ^{٢}} \frac{١}{هـ - ١} \, د س$

الحل: $= \frac{١}{هـ - ١}(هـ^{٢} - ١) = \frac{(هـ - ١)(هـ + ١)}{هـ - ١} = هـ + ١$

ح) $\int ٣س هـ^{٢ + لـو_{هـ} س^{٢}} \, د س$

الحل: $= \int ٣س \times هـ^{٢} \times هـ^{لـو_{هـ} س^{٢}} \, د س$

$= \int ٣س \times هـ^{٢} \times س^{٢} \, د س = \int ٣هـ^{٢} س^{٣} \, د س$

$= \frac{٣هـ^{٢} س^{٤}}{٤} + جـ$

ط) $\int هـ^{٥س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٤هـ^{س} + ٤} \, د س$

الحل: $= \int هـ^{٥س} \sqrt{(هـ^{س} + ٢)^{٢}} \, د س$

$= \int هـ^{٥س}(هـ^{س} + ٢) د س = \int هـ^{٦س} + ٢هـ^{٥س} \, د س$

$= \frac{هـ^{٦س}}{٦} + \frac{٢هـ^{٥س}}{٥} + جـ$

ي) $\int (هـ^{٢س+٥})^{٢} \, د س$

الحل: $= \int هـ^{٤س} + ١٠هـ^{٢س} + ٢٥ \, د س$

$= \frac{هـ^{٤س}}{٤} + ٥هـ^{٢س} + ٢٥س + جـ$

الفصل الثاني : طرائق التكامل

أولاً : التكامل بالتعويض

• تدريب (١) ص(٢٦٦)

جد كلا من التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٢}(٦س + ٥)^{٣} \, د س$

الحل: ص= $٦س^{٣}+٥$ | $\int س^{٢}(ص)^{٣} \frac{د ص}{١٨س^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٨س^{٢}$ | $= \int \frac{ص^{٣}}{١٨} د ص = \frac{ص^{٤}}{٧٢} + جـ$

$د س = \frac{د ص}{١٨س^{٢}}$ | $= \frac{(٦س^{٣}+٥)^{٤}}{٧٢} + جـ$

---

٢) $\int (س + ٣) \sqrt[٥]{س^{٢} + ٦س - ٤} \, د س$

الحل: $= \int (س + ٣)(س^{٢} + ٦س - ٤)^{\frac{١}{٥}} \, د س$

ص = $س^{٢} + ٦س - ٤$ | $= \int (س + ٣)(ص)^{\frac{١}{٥}} \frac{د ص}{٢س+٦}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س + ٦$ | $= \int \frac{ص^{\frac{١}{٥}}}{٢} د ص = \frac{ص^{\frac{٦}{٥}}}{١٢} + جـ$

$د س = \frac{د ص}{٢س+٦}$ | $= \frac{٥}{١٢}(س^{٢} + ٦س - ٤)^{\frac{٦}{٥}} + جـ$

---

٣) $\int \frac{١٠س - ٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢} - س + ١)^{٢}}} \, د س$

الحل: $= \int (١٠س - ٥)(س^{٢} - س + ١)^{\frac{-٢}{٣}} \, د س$

ص = $س^{٢} - س + ١$ | $= \int (١٠س - ٥)(ص)^{\frac{-٢}{٣}} \frac{د ص}{٢س-١}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س - ١$ | $= \int ٥ص^{\frac{-٢}{٣}} د ص = ١٥ص^{\frac{١}{٣}} + جـ$

$د س = \frac{د ص}{٢س-١}$ | $= ١٥ \sqrt[٣]{س^{٢} - س + ١} + جـ$

• تدريب (٢) ص(٢٦٧)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

SALEEM ALSATEEB

١) $\int س^{٧} \sqrt{س^{٤} - ٣}\, ءس$

الحل:

$ص = س^{٤} - ٣$
$\frac{ءص}{ءس} = ٤س^{٣}$
$ءس = \frac{ءص}{٤س^{٣}}$

$= \int س^{٧} ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{٤س^{٣}} = \int \frac{س^{٤}}{٤} \times ص^{\frac{١}{٢}} ءص$
$= \int \frac{ص+٣}{٤} \times ص^{\frac{١}{٢}} ءص = \int \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}+٣ص}{٤} ءص$
$= \frac{١}{٤}(\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٢} ص^{٢}) + ج$
$= \frac{١}{٤}(\frac{٢}{٥}(س^{٤} - ٣)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٢}(س^{٤} - ٣)^{٢}) + ج$

---

٢) $\int ٢س^{٥}(س^{٢} + ٥)^{٤}\, ءس$

الحل:

$ص = س^{٢} + ٥$
$\frac{ءص}{ءس} = ٢س$
$ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$= \int ٢س^{٥} ص^{٤} \frac{ءص}{٢س}$
$= \int س^{٤} ص^{٤}\, ءص = \int (ص-٥)^{٢} ص^{٤}\, ءص$
$= \int (ص^{٢} - ١٠ص + ٢٥) ص^{٤}\, ءص$
$= \int ص^{٦} - ١٠ص^{٥} + ٢٥ص^{٤}\, ءص$
$= \frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{١٠ص^{٦}}{٦} + ٥ص^{٥} + ج$
$= \frac{(س^{٢}+٥)^{٧}}{٧} - \frac{٥}{٣}(س^{٢} + ٥)^{٦} + ٥(س^{٢} + ٥)^{٥} + ج$

- **تدرب (٣) ص(٢٦٨)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\, ءس$

الحل: $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\, ءس = \int (\frac{٢س+١}{س})^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}}\, ءس$

$ص = \frac{٢س+١}{س}$
$ص = ٢ + \frac{١}{س}$
$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^{٢}}$
$ءس = -٢س.ءص$

$= \int ص^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \times -س^{٢}\, ءص$
$= \int -ص^{٥}\, ءص = \frac{-ص^{٦}}{٦} + ج$
$= (٢ + \frac{١}{س})^{٦} + ج$

---

٢) $\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧} + ٥س^{٣}}\, ءس$

الحل:

$= \int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}(س^{٤} + ٥)}\, ءس = \int س^{٣}(س^{٤} + ٥)^{\frac{١}{٣}}\, ءس$

$ص = س^{٤} + ٥$
$\frac{ءص}{ءس} = ٤س^{٣}$
$ءس = \frac{ءص}{٤س^{٣}}$

$= \int س^{٣}(ص)^{\frac{١}{٣}} \frac{ءص}{٤س^{٣}}$
$= \int \frac{١}{٤} ص^{\frac{١}{٣}}\, ءص = \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$
$= \frac{٣}{٤}(س^{٤} + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

---

٣) $\int \sqrt[٣]{٤س^{٥} + ٢س^{٣}}\, ءس$

الحل: $= \int س^{٣} \sqrt[٣]{٤س^{٢} + ٢}\, ءس$

$ص = ٤س^{٢} + ٢$
$\frac{ءص}{ءس} = ٨س$
$ءس = \frac{ءص}{٨س}$

$= \int س(ص)^{\frac{١}{٣}} \frac{ءص}{٨س} = \int \frac{١}{٨} ص^{\frac{١}{٣}}\, ءص$
$= \frac{٣}{٣٢} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$
$= \frac{٣}{٣٢}(٤س^{٢} + ٢)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

---

٤) $\int (٧س^{٥} - ٢س)^{٣}\, ءس$

الحل:

$= \int س^{٣}(٧س^{٤} - ٢)^{٣}\, ءس$

$ص = ٧س^{٤} - ٢$
$\frac{ءص}{ءس} = ٢٨س^{٣}$
$ءس = \frac{ءص}{٢٨س^{٣}}$

$= \int س^{٣}(ص)^{٣} \frac{ءص}{٢٨س^{٣}}$
$= \frac{١}{٢٨} \int ص^{٣}\, ءص = \frac{١}{١١٢} ص^{٤} + ج$
$= \frac{١}{١١٢}(٧س^{٤} - ٢)^{٤} + ج$

- **تدرب (٤) ص(٢٦٩)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int س \sqrt[٤]{س^{٢} + ٩}\, ءس$

الحل:

$ص = س^{٢} + ٩$
$\frac{ءص}{ءس} = ٢س$
$ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$= \int_{٩}^{٢٥} س(ص)^{\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{٢س}$
$= \frac{١}{٢} \int_{٩}^{٢٥} ص^{\frac{١}{٢}}\, ءص = \frac{١}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٩}^{٢٥}$
$= \frac{١}{٣} \sqrt[٣]{(٢٥)^{٣}} - \frac{١}{٣} \sqrt[٣]{(٩)^{٣}}$

SALEEM ALKATEEB

س = ٠ ← ص = ٩ $= \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٢٧}{٣} = \frac{٩٨}{٣}$

س = ٤ ← ص = ٢٥

---

٢) $\int_{١}^{٢} س \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٧}} ؤس$

الحل:

$= \int_{١}^{٢} (\frac{س+١}{س})^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} ؤس$

$ص = \frac{س+١}{س}$	$= \int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} ص^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \times -س^{٢} ؤص$
$ص = ١ + \frac{١}{س^{٢}}$	$= \int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} -ص^{٥} ؤص$
$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{-١}{س^{٣}}$	$= [\frac{-ص^{٦}}{٦}]_{٢}^{\frac{٣}{٢}}$
$ؤس = -س^{٢} ؤص$	$= (\frac{-(\frac{٣}{٢})^{٦}}{٦}) - (\frac{-(٢)^{٦}}{٦})$
س = ١ ← ص = ٢	
$س = \frac{٧}{٢}$ ← ص =	

• تدرب (٥) ص(٢٧٠)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int (س^{٢} + ١) جا(س^{٣} + ٣س + ١) ؤس$

الحل:

ص = $س^{٣} + ٣س + ١$	$= \int (س^{٢} + ١) جا(ص) \frac{ؤص}{٣س^{٢} + ٣}$
$\frac{ؤص}{ؤس} = ٣س^{٢} + ٣$	$= \frac{١}{٣} \int جاص ؤص = \frac{-١}{٣} جتاص + جـ$
$ؤس = \frac{ؤص}{٣س^{٢} + ٣}$	$= \frac{-١}{٣} جتا(س^{٣} + ٣س + ١) + جـ$

---

٢) $\int س ظا^{٢}(س^{٢} + ٥) ؤس$

الحل:

ص = $س^{٢} + ٥$	$= \int س ظا^{٢} ص \frac{ؤص}{٢س} = \frac{١}{٢} \int ظا^{٢} ص ؤص$
$\frac{ؤص}{ؤس} = ٢س$	$= \frac{١}{٢} \int قا^{٢} ص - ١ ؤص$
$ؤس = \frac{ؤص}{٢س}$	$= \frac{١}{٢} (ظاص - ص) + جـ$

$= \frac{١}{٢} (ظا(س^{٢} + ٥) - (س^{٢} + ٥)) + جـ$

---

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^{٢}} ؤس$

الحل:

$ص = \frac{٣}{س}$	$= \int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \frac{هـ^{ص}}{س^{٢}} \times \frac{-س^{٢}}{٣} ؤص$
$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{-٣}{س^{٢}}$	$= \int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \frac{هـ^{ص}}{-٣} ؤص = [\frac{هـ^{ص}}{-٣}]_{٢}^{\frac{٣}{٢}}$
$ؤس = \frac{-س^{٢}}{٣} ؤص$	
س = ١ ← ص = ٣	$= \frac{هـ^{\frac{٣}{٢}}}{-٣} - \frac{هـ^{٣}}{-٣}$
$س = \frac{٣}{٢}$ ← ص =	

• تدرب (٦) ص(٢٧٢)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int ظا^{٥} ٣س قا^{٢} ٣س ؤس$

الحل:

ص = ظا٣س	$= \int ص^{٥} قا^{٢} ٣س . \frac{ؤص}{٣قا^{٢}٣س}$
$\frac{ؤص}{ؤس} = قا^{٢} ٣س \times ٣$	$= \frac{١}{٣} \int ص^{٥} ؤص = \frac{١}{١٨} ص^{٦} + جـ$
$ؤس = \frac{ؤص}{٣قا^{٢}٣س}$	$= \frac{ظا^{٦}٣س}{١٨} + جـ$

---

٢) $\int \frac{جتا٢س}{قتا^{٥}٢س} ؤس$

الحل: $= \int جتا٢س جا^{٥}٢س ؤس$

ص = جا٢س	$= \int جتا٢س ص^{٥} \frac{ؤص}{٢جتا٢س}$
$\frac{ؤص}{ؤس} = ٢جتا٢س$	$= \int \frac{ص^{٥}}{٢} ؤص = \frac{ص^{٦}}{١٢} + جـ$
$ؤس = \frac{ؤص}{٢جتا٢س}$	$= \frac{جا^{٦}٢س}{١٢} + جـ$

---

٣) $\int جا^{٣} س ؤس$

SALEEM ALSATEB

الحل: $= \int جا^{٢}س جاس ؤس = \int (١ - جتا^{٢}س) جاس ؤس$

$ص = جتاس \Rightarrow \frac{ؤص}{ؤس} = -جاس \Rightarrow ؤس = \frac{ؤص}{-جاس}$

$= \int (١ - ص^{٢}) جاس \frac{ؤص}{-جاس} = \int ص^{٢} - ١ ؤص = \frac{ص^{٣}}{٣} - ص + جـ$

$= \frac{جتا^{٣}س}{٣} - جتاس + جـ$

---

٤) $\int جا^{٤}٥س جتا^{٣}٥س ؤس$

الحل:

$ص = جا٥س \Rightarrow \frac{ؤص}{ؤس} = جتا٥س \times ٥ \Rightarrow ؤس = \frac{ؤص}{٥جتا٥س}$

$= \int ص^{٥} جتا^{٣}٥س \frac{ؤص}{٥جتا٥س} = \int \frac{ص^{٥}}{٥} (جا^{٥}٥س) ؤص$

$= \int \frac{ص^{٥}}{٥} (١ - ص^{٢}) ؤص$

$= \int \frac{ص^{٥}}{٥} - \frac{ص^{٧}}{٥} ؤص$

$= \frac{جا^{٥}٥س}{٥} - \frac{جا^{٧}٥س}{٥} + جـ$

تمارين ومسائل ص(٢٧٣ - ٢٧٤)

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} (س + ٣) \sqrt{س^{٢} + ٦س} ؤس$

الحل:

$= \int_{٠}^{٢} (س + ٣)(س^{٢} + ٦س)^{\frac{١}{٢}} ؤس$

$ص = س^{٢} + ٦س \Rightarrow \frac{ؤص}{ؤس} = ٢س + ٦ \Rightarrow ؤس = \frac{ؤص}{٢س + ٦}$

$= \int_{٠}^{١٦} (س + ٣)(ص)^{\frac{١}{٢}} \frac{ؤص}{٢س + ٦}$

$= \int_{٠}^{١٦} \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{٢} ؤص = \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

$= \frac{(س^{٢} + ٦س)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

س = ٠ ← ص = ٠

س = ٢ ← ص = ١٦

ب) $\int \frac{٢س + ٣}{٢س^{٢} - ٦س - ٥} ؤس$

الحل: $= \frac{١}{٢} \int \frac{٤س - ٦}{٢س^{٢} - ٦س - ٥} ؤس$

$= \frac{١}{٢} لـو_{هـ} |٢س^{٢} - ٦س - ٥| + جـ$

جـ) $\int \frac{٢}{(٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥)^{٧}} ؤس$

الحل: $= \int \frac{٢}{(٢س - ٥)^{١٤}} ؤس = \int ٢(٢س - ٥)^{-١٤} ؤس$

$= \frac{٢(٢س - ٥)^{-١٣}}{-١٣ \times ٢} + جـ$

د) $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{س^{٢} - ٤س + ٤} ؤس$

الحل: $= \int_{٣}^{٤} \frac{٧}{(س - ٢)^{٢}} ؤس = \int_{٣}^{٤} ٧(س - ٢)^{-٢} ؤس$

$= \int_{٣}^{٤} \frac{٧(س-٢)^{-١}}{-١} = \left[\frac{-٧}{س-٢}\right]_{٣}^{٤} = \frac{-٧}{-٢} + ٧ = \frac{-٧}{٢}$

هـ) $\int \frac{ظتا^{٢}\frac{١}{س}}{س^{٢}} ؤس$

الحل:

$ص = \frac{١}{س} \Rightarrow \frac{ؤص}{ؤس} = \frac{-١}{س^{٢}} \Rightarrow ؤس = س^{٢} ؤص$

$= \int \frac{ظتا^{٢}ص}{س^{٢}} \times -س^{٢} ؤص$

$= \int ظتا^{٢}ص ؤص = -\int قتا^{٢}ص - ١ ؤص$

$= -(-ظتاص - ص) + جـ$

$= ظتا\frac{١}{س} + \frac{١}{س} + جـ$

و) $\int \frac{(٥ + \sqrt{س})^{٧}}{\sqrt{س}} ؤس$

الحل:

$ص = \sqrt{س} \Rightarrow ص^{٢} = س \Rightarrow ٢ص ؤص = ١ ؤس$

$= \int \frac{(٥+ص)^{٧}}{ص} \times ٢ص ؤص$

$= \int ٢(٥ + ص)^{٧} ؤص$

$= \frac{٢(٥+ص)^{٨}}{٨ \times ١} + جـ$

SALEEM ALSATEEB

$= \frac{٢(٥+\sqrt{س})^{٨}}{٨} + جـ$

ز) $\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{٢س+١}{س}}\, ءس$

الحل:

$ص = \frac{٢س+١}{س} = ٢ + \frac{١}{س}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-١}{س^{٢}}$

$ء س = -س^{٢}\, ء ص$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \times ص^{\frac{١}{٢}} \times -س^{٢}\, ء ص$

$= \int -ص^{\frac{١}{٢}}\, ء ص = \frac{-٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{-٢}{٣} (٢ + \frac{١}{س})^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

ح) $\int_{١}^{هـ^{٣}} \frac{١}{س \sqrt{١+لـو_{هـ} س}}\, ءس$

الحل:

$ص = ١ + لـو_{هـ} س$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س}$

$ء س = س\, ء ص$

$= \int_{١}^{٣} \frac{١}{س \sqrt{ص}} \times س\, ء ص$

$= \int_{١}^{٣} ص^{\frac{-١}{٢}}\, ء ص = ٢ ص^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{٣}$

$= ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{١}$

$= ٢\sqrt{٣} - ٢$

س = ١ ← ص = ١

س = $هـ^{٢}$ ← ص = ٣

ط) $\int هـ^{س^{٣}+٢} لـو_{هـ} س\, ءس$

الحل: $= \int هـ^{س^{٣}} \times هـ^{لـو_{هـ} س^{٢}}\, ءس = \int س^{٢} هـ^{س^{٣}}\, ءس$

$ص = س^{٣}$

$\frac{ء ص}{ء س} = ٣س^{٢}$

$ء س = \frac{ء ص}{٣س^{٢}}$

$= \int س^{٢} هـ^{ص} \frac{ء ص}{٣س^{٢}}$

$= \int \frac{هـ^{ص}}{٣}\, ء ص$

$= \frac{هـ^{ص}}{٣} + جـ = \frac{هـ^{س^{٣}}}{٣} + جـ$

ي) $\int \frac{س^{٣}}{(س+١)^{٥}}\, ءس$

الحل: $= \int (\frac{س}{(س+١)})^{٣} \times \frac{١}{(س+١)^{٢}}\, ءس$

$ص = \frac{س}{س+١}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س+١) \times ١ - س \times ١}{(س+١)^{٢}} = \frac{١}{(س+١)^{٢}}$

$ء س = (س+١)^{٢}\, ء ص$

$\int ص^{٣} \times \frac{١}{(س+١)^{٢}} (س+١)^{٢}\, ء ص = \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{٤} (\frac{س}{س+١})^{٤} + جـ$

ك) $\int \sqrt[٣]{س^{\frac{-٣}{٤}} + ١}\, ءس$

الحل: $= \int \sqrt[٣]{\frac{١}{س^{\frac{٣}{٤}}} + ١}\, ءس = \int \sqrt[٣]{\frac{١+س^{\frac{٣}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٤}}}}\, ءس$

$= \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٤}}} (١ + س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{١}{٣}}\, ءس$

$ص = ١ + س^{\frac{٣}{٤}}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣}{٤} س^{\frac{-١}{٤}} = \frac{٣}{٤ س^{\frac{١}{٤}}}$

$ء س = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٤}}\, ء ص$

$= \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٤}}} (ص)^{\frac{١}{٣}} . \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٤}}\, ء ص$

$= \frac{٤}{٣} \int ص^{\frac{١}{٣}}\, ء ص = ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= (١ + س^{\frac{٣}{٤}})^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

ل) $\int جتا^{٣} س\, (١+جاس)^{٧}\, ءس$

الحل:

$ص = ١ + جاس$

$\frac{ء ص}{ء س} = جتاس$

$ء س = \frac{ء ص}{جتاس}$

$= \int جتا^{٣} س\, (ص)^{٧} \frac{ء ص}{جتاس}$

$= \int جتا^{٢} س\, (ص)^{٧}\, ء ص$

$= \int (١ - جا^{٢} س) ص^{٧}\, ء ص$

$= \int (١ - ص^{٢}) ص^{٧}\, ء ص = \int ص^{٧} - ص^{٩}\, ء ص$

$= \frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{(١+جاس)^{٨}}{٨} - \frac{(١+جاس)^{١٠}}{١٠} + جـ$

---

٢) اذا كان $\int_{١}^{٨} ق(س)\, ءس = ١٨$، فجد قيمة

$\int_{١}^{٢} س^{٢} ق(س^{٣})\, ءس$.

الحل:

SALEEM ALSATEB

$$\int_{1}^{2} س^{2} ن(ص) \frac{د ص}{3 س^{2}}$$

ص = $س^{3}$

$\frac{د ص}{د س} = 3 س^{2}$

$د س = \frac{د ص}{3 س^{2}}$

س = ١ ← ص=١

س=٢ ← ص=٨

$$= \int_{1}^{8} \frac{1}{3} ن(ص) د ص$$

$$= \frac{1}{3} \times 18 = 16$$

---

٣) اذا كان $\int_{0}^{1} ن(س) د س = 8$ ، فجد قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3 جتا(2س) ن(جا2س) د س$.

الحل:

$$\int_{0}^{1} 3 جتا(2س) ن(ص) \frac{د ص}{2 جتا2س}$$

ص =جا2س

$\frac{د ص}{د س} = 2 جتا2س$

$د س = \frac{د ص}{2 جتا2س}$

س = ٠ ← ص=٠

س= $\frac{\pi}{4}$ ← ص=١

$$= \int_{0}^{1} \frac{3}{2} ن(ص) د ص = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

---

٤) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int هـ^{جاس} لـو_{هـ} جتاس \, د س$

الحل:

$$= \int هـ^{جاس} \times هـ^{لـو_{هـ} جتاس} د س = \int جتاس \, هـ^{جاس} د س$$

ص =جاس

$\frac{د ص}{د س}$ =جتاس

$د س = \frac{د ص}{جتاس}$

$$= \int جتاس \, هـ^{ص} \frac{د ص}{جتاس}$$

$$= \int هـ^{ص} د ص = هـ^{ص} + جـ$$

$$= هـ^{جاس} + جـ$$

ب) $\int_{0}^{2} \frac{س^{3}}{\sqrt{(س^{2} + 9)^{3}}} د س$

الحل: $= \int_{0}^{2} س^{3} (س^{2} + 9)^{\frac{-3}{2}} د س$

ص = $س^{2}$+٩

$د س = \frac{د ص}{2 س}$

س=٠ ← ص=٩

س=٢ ← ص=١٣

$$= \int_{9}^{13} س^{3} ص^{\frac{-3}{2}} \frac{د ص}{2 س}$$

$$= \int_{9}^{13} \frac{س^{2}}{2} \times ص^{\frac{-3}{2}} د ص$$

$$= \int_{9}^{13} \frac{1}{2} (ص^{2} - 9) ص^{\frac{-3}{2}} د ص$$

$$= \int_{9}^{13} \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{2}} - 9 ص^{\frac{-3}{2}} د ص$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + 18 ص^{\frac{1}{2}} \right]_{9}^{13}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{(13)^{3}} + 18 \sqrt{13} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{(9)^{3}} + 18 \sqrt{9}\right)$$

جـ) $\int \frac{1 - ظا^{2} س}{جتا^{2} س} د س$

الحل: $= \int (1 - ظا^{2} س) قا^{2} س \, د س$

ص =ظاس

$\frac{د ص}{د س} = قا^{2} س$

$د س = \frac{د ص}{قا^{2} س}$

$$= \int (1 - ص^{2}) قا^{2} س \frac{د ص}{قا^{2} س}$$

$$= \int 1 - ص^{2} \, د ص = ص - \frac{ص^{3}}{3} + جـ$$

$$= ظاس - \frac{ظاس^{3}}{3} + جـ$$

د) $\int \frac{جاس \sqrt{جا^{2} س + 4}}{قاس} د س$

الحل:

$$= \int جاس جتاس (جا^{2} س + 4)^{\frac{1}{2}} د س$$

ص =$جا^{2}$ س + ٤

$\frac{د ص}{د س} = 2 جاس جتاس$

$د س = \frac{د ص}{2 جاس جتاس}$

$$= \int جاس جتاس (ص)^{\frac{1}{2}} \frac{د ص}{2 جاس جتاس}$$

$$= \int \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{2} د ص = \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ$$

$$= \frac{(جا^{2} س + 4)^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ$$

هـ) $\int قتا^{4} 6 س ظتا^{3} 6 س \, د س$

الحل:

SALEEM ALSATEEB

ص =قتا٦س

$\frac{ص}{س}$ = −قتا٦س ظتا٦س × ٦

س = $\frac{ص}{-٦ قتا٦س ظتا٦س}$

= ∫ ص ٤ × ظتا ٣ ٦ س. $\frac{ص}{-٦ قتا٦س ظتا٦س}$

= ∫ $\frac{ص^{٤}}{-٦}$ × ظتا ٣ ٦ س ص

= $\frac{-١}{٦}$ ∫ ص ٤ ×(قتا ٢ ٦ س − ١)ص = $\frac{-١}{٦}$ ∫ ص ٤ (ص ٢ − ١)ص

= $\frac{-١}{٦}$ ∫ ص ٦ − ص ٤ ص = $\frac{-١}{٦}$ ($\frac{ص^{٧}}{٧}$ − $\frac{ص^{٥}}{٥}$)+جـ

= $\frac{-١}{٦}$ ($\frac{قتا^{٧}٦س}{٧}$ − $\frac{قتا^{٥}٦س}{٥}$)+جـ

و) ∫ جتا ٤ س س

الحل:

= ∫ ($\frac{١}{٢}$(١ +جتا٢س)) ٢ س

= $\frac{١}{٤}$ ∫ ١ + ٢ جتا٢س + $\frac{١}{٢}$(١ +جتا٤س)س

= $\frac{١}{٤}$ (س + $\frac{٢جا٢س}{٢}$) + $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{جا٤س}{٤}$)+جـ

ز) ∫ $\frac{جا٢س}{(١ +جتا^{٢}س)^{٥}}$ س

الحل: = ∫ جا٢س(١ +جتا ٢ س) −٥ س

ص =١ +جتا ٢ س	= ∫ جا٢س(ص) −٥ $\frac{ص}{-جا٢س}$
$\frac{ص}{س}$ = −٢جاس جتاس	= ∫ − ص −٥ ص = $\frac{ص^{-٤}}{٤}$ +جـ
س = $\frac{ص}{-جا٢س}$	= $\frac{(١ +جتا^{٢}س)^{-٤}}{٤}$ +جـ

ح) ∫ جا ٢ س × هـ جتا٢س س

الحل:

ص =جتا ٢ س	= ∫ جا٢ س × هـ ص $\frac{ص}{-جا٢س}$
$\frac{ص}{س}$ = −٢جاس جتاس	= ∫ −هـ ص ص = −هـ ص +جـ
س = $\frac{ص}{-جا٢س}$	= − هـ جتا ٢ س +جـ

ط) ∫ $\frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ − س \sqrt[٣]{س}}$ س

الحل:

= ∫ $\frac{س^{\frac{١}{٣}}}{٥ − س^{\frac{٤}{٣}}}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ∫ $\frac{س^{\frac{٢}{٣}}}{٥ − س^{\frac{٤}{٣}}}$ س

= $\frac{٣}{٤}$ لـو هـ |٥ − س $^{\frac{٤}{٣}}$| +جـ

ي) ∫ قا ٤ س س

الحل: = ∫ قا ٢ س × قا ٢ س س = ∫ (ظا ٢ س + ١)× قا ٢ س س

ص =ظاس	= ∫ (ص ٢ + ١)× قا ٢ س $\frac{ص}{قا^{٢}س}$
$\frac{ص}{س}$ =قا ٢ س	= ∫ ص ٢ + ١ ص = $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص+جـ
س = $\frac{ص}{قا^{٢}س}$	= $\frac{ظا^{٣}س}{٣}$ +ظاس+جـ

ك) ∫ $\frac{١}{\sqrt{س}(٢+\sqrt{س})}$ س

الحل:

ص = $\sqrt{س}$	= ∫ $\frac{١}{ص(٢+ص)}$ × ٢ص.ص
ص ٢ = س	= ∫ $\frac{٢}{٢+ص}$.ص
٢ص.ص = ١.س	= ٢لـو هـ |٢ + ص|+جـ
	= ٢لـو هـ |٢ + $\sqrt{س}$|+جـ

ل) ∫ $\frac{\sqrt[٣]{ظتاس + ٣}}{٢ − ٢جتا^{٢}س}$ س

الحل:

= ∫ $\frac{\sqrt[٣]{ظتاس + ٣}}{٢جا^{٢}س}$ س = ∫ ٢قتا ٢ س(ظتاس + ٣) $^{\frac{١}{٣}}$ س

ص =ظتاس + ٣	= ∫ ٢قتا ٢ س ص ٣ $\frac{ص}{-قتا^{٢}س}$
$\frac{ص}{س}$ = −قتا ٢ س	= ∫ − ٢ص ٣ ص = $\frac{-ص^{٤}}{٢}$ +جـ
س = $\frac{ص}{-قتا^{٢}س}$	= $\frac{-(ظتاس+٣)^{٤}}{٢}$ +جـ

SALEEM ALKHATEEB

م) $\int$ جاس (١+جتا٢س)^{٥} ءس

الحل:

$= \int$ جاس (٢جتا^{٢}س)^{٥} ءس $= \int$ ٣٢جاسجتا^{١٠}س ءس

$$\left.\begin{array}{l} ص = جتاس \\ \frac{ءص}{ءس} = -جاس \\ ءس = \frac{ءص}{-جاس} \end{array}\right| = \int \frac{٣٢ جاس\, ص^{١٠}\, ءص}{-جاس}$$

$= \int -٣٢ ص^{١٠}$ ءص $= \frac{-٣٢}{١١} ص^{١١} +$ جـ

$= \frac{-٣٢}{١١} (جتاس)^{١١} +$ جـ

ن) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{جتاس - جتا^{٣}س}$ ءس

الحل: $= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{جتاس(١ - جتا^{٢}س)}$ ءس

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{جتاس \times جا^{٢}س}$ ءس $= \int_{٠}^{\pi} (جتاس)^{\frac{١}{٢}} \times$ جاس ءس

$$\left.\begin{array}{l} ص = جتاس \\ \frac{ءص}{ءس} = -جاس \\ ءس = \frac{ءص}{-جاس} \end{array}\right| = \int_{١}^{٠} ص^{\frac{١}{٢}} \times جاس \frac{ءص}{-جاس}$$

$= \int_{١}^{٠} - ص^{\frac{١}{٢}}$ ءص $= \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{١}^{٠}$

$= (٠) - (\frac{٢}{٣}) = \frac{٢}{٣}$

س=٠ ← ص=١

س=$\frac{\pi}{٢}$ ← ص=٠

س) $\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{٢س+١}{س}}$ ءس

الحل:

ص $= \frac{٢س+١}{س} = ٢ + \frac{١}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^{٢}}$

ءس $= -س^{٢}$ ءص

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \times ص^{\frac{١}{٢}} \times -س^{٢}$ ءص $= \int - ص^{\frac{١}{٢}}$ ءص

$= \frac{-٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} +$ جـ $= \frac{-٢}{٣} (\frac{٢س+١}{س})^{\frac{٣}{٢}} +$ جـ

ع) $\int$ جتا٢س (جاس−جتاس)^{٨} ءس

الحل: $= \int$ جتا٢س ((جاس−جتاس)^{٢})^{٤} ءس

$= \int$ جتا٢س (جا^{٢}س − ٢جاسجتاس +جتا^{٢}س)^{٤} ءس

$= \int$ جتا٢س (١−جا٢س)^{٤} ءس

$$\left.\begin{array}{l} ص = ١ - جا٢س \\ \frac{ءص}{ءس} = -٢ جتا٢س \\ ءس = \frac{ءص}{-٢ جتا٢س} \end{array}\right| = \int جتا٢س\, ص^{٤} \frac{ءص}{-٢ جتا٢س}$$

$= \int \frac{ص^{٤}}{-٢}$.ءص $= \frac{-ص^{٥}}{١٠} +$ جـ

$= \frac{(١-جا٢س)^{٥}}{-١٠} +$ جـ

---

٥) أثبت أن $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س-١)^{ن}}{س^{ن+٢}}$ ءس $=$

$\left.\begin{array}{l} \frac{-١}{ن+١} \quad ، \quad \text{حيث ان ن عدد فردي} \\ \frac{١}{ن+١} \quad ، \quad \text{حيث أن ن عدد زوجي} \end{array}\right\}$

الحل: $= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س-١)^{ن}}{س} \times \frac{١}{س^{٢}}$ ءس

$$\left.\begin{array}{l} ص = \frac{س-١}{س} \\ = ١ - \frac{١}{س} \\ \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س^{٢}} \\ ءس = س^{٢} ءص \\ س=\frac{١}{٢} \leftarrow ص=-١ \\ س=١ \leftarrow ص=٠ \end{array}\right| = \int_{-١}^{٠} ص^{ن} \times \frac{١}{س^{٢}}$$ ءس

$= \int_{-١}^{٠} ص^{ن}$.ءص $= \frac{ص^{ن+١}}{ن+١} \Big]_{-١}^{٠}$

$= ٠ - (\frac{-١}{ن+١})^{ن+١} = \frac{-(-١)^{ن+١}}{ن+١}$

اذا كان ن = عدد فردي

$\leftarrow = \int = -\frac{١}{ن+١}$

اذا كان ن = عدد زوجي

$\leftarrow = \int = \frac{-١}{ن+١} = \frac{١}{ن+١}$

---

٦) اكتب الفرض المناسب لإيجاد كل من التكاملات الآتية، بطريقة التكامل بالتعويض(دون إجراء التكامل):

أ) $\int$ جتا^{١٠}س جا^{٧}س ءس

الحل: ص = جتاس

ب) $\int$ جتا^{٥}س جا^{٧}س ءس

SALEEM ALSATEB

الحل: ص = جاس

ج) $\int$ظا^{٥}س قا^{٤}س دس

الحل:ص = ظاس

د) $\int$ظا^{٣}س قا^{٥}س دس

الحل: ص = قاس

هـ) $\int$ظتا^{٦}س قتا^{٤}س دس

الحل: ص = ظتاس

و) $\int$ظتا^{٧}س قتا^{٤}س دس

الحل: ص = ظتاس

ثانياً: التكامل بالأجزاء

- **تدريب (١) ص(٢٧٦)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int$س جتاس دس

الحل: ق = س ← دق = ١.دس

$\int$دهـ = $\int$س جتاس دس ← هـ = جاس

= س جاس − $\int$جاس دس

= س جاس + جتاس + جـ

---

٢) $\int$س جا٥س دس

الحل: ق = س ← دق = ١.دس

$\int$دهـ = $\int$جا٥س دس ← هـ = $\frac{-\text{جتا٥س}}{٥}$

= − س $\frac{\text{جتا٥س}}{٥}$ + $\int\frac{\text{جتا٥س}}{٥}$ دس

= − س $\frac{\text{جتا٥س}}{٥}$ + $\frac{\text{جا٥س}}{٢٥}$ + جـ

---

٣) $\int$(٢س−٣)هـ^{س} دس

الحل: ق = ٢س − ٣ ← دق = ٢.دس

$\int$دهـ = $\int$هـ^{س} دس ← هـ = هـ^{س}

= (٢س − ٣)هـ^{س} − $\int$٢هـ^{س} دس

(٢س − ٣)هـ^{س} − ٢هـ^{س} + جـ

---

٤) $\int$س قا^{٢}س دس

الحل: ق = س ← دق = ١.دس

$\int$دهـ = $\int$قا^{٢}س دس ← هـ = ظاس

= س ظاس − $\int$ظاس دس = س ظاس + لـو$_{هـ}$ |جتاس| + جـ

- **تدريب (٢) ص(٢٧٨)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int$س جا^{٢}س دس

الحل: ق = س ← دق = ١.دس

$\int$دهـ = $\int$جا^{٢}س دس

هـ = $\frac{١}{٢}$ $\int$(١−جتا٢س)دس = $\frac{١}{٢}$ (س − $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$)

= $\frac{١}{٢}$ س (س − $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$) − $\int\frac{١}{٢}$ (س − $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$)دس

= $\frac{١}{٢}$ س (س − $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$) − $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + $\frac{\text{جتا٢س}}{٤}$) + جـ

---

٢) $\int$س لـو$_{هـ}$ س^{٣} دس

الحل: ن = لـو$_{هـ}$ س^{٣} ← دن = $\frac{٣}{\text{س}}$

$\int$دهـ = $\int$س دس ← هـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

= $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لـو$_{هـ}$ س^{٣} − $\int\frac{٣}{٢}$س دس

= $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لـو$_{هـ}$ س^{٣} − $\frac{٣}{٤}$س^{٢} + جـ

SALEEM ALSATEEB

٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ٣س جاس \, دس$

الحل: ق = ٣س ← دق = ٣دس

د هـ = جاس دس ← هـ = −جتاس

= − ٣س جتاس + ∫ ٣جتاس دس

= − ٣س جتاس + ٣جا $\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= (٠ + ٣×١) − (٠ + ٠) = ٣

---

٤)

ق	د هـ
$س^{٣}$ +	$هـ^{س}$
$٣س^{٢}$ -	$هـ^{س}$
٦س +	$هـ^{س}$
٦ -	$هـ^{س}$
صفر	$هـ^{س}$

$$\int \frac{س}{١ - جتا٢س} \, دس$$

الحل: = $\int \frac{س}{٢جا^{٢}س} \, دس = \int \frac{س}{٢} قتا^{٢} س \, دس$

ن = $\frac{س}{٢}$ ← دن = $\frac{١}{٢}$ دس

د هـ = $قتا^{٢} س \, دس$ ← هـ = −ظتاس

= $\frac{-س}{٢}$ ظتاس + $\frac{١}{٢}$ ∫ ظتاس دس

= $\frac{-س}{٢}$ ظتاس + $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ |جاس| + جـ

- **تدرب (٣) ص(٢٧٩)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٢} هـ^{س} \, دس$

الحل:

= $س^{٢} هـ^{س} - ٢س هـ^{س} + ٢هـ^{س}$ + جـ

---

٢) $\int س (لـو_{هـ} س)^{٢} \, دس$

الحل: ن = $(لـو_{هـ} س)^{٢}$ ← دن = ٢لـو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$

د هـ = س دس ← هـ = $\frac{س^{٢}}{٢}$

$\frac{س^{٢}}{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - \int س لـو_{هـ} س \, دس$

ن = لـو$_{هـ}$ س ← دن = $\frac{١}{س}$ دس

د هـ = س دس ← هـ = $\frac{س^{٢}}{٢}$

= $\frac{س^{٢}}{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - (\frac{س^{٢}}{٢} لـو_{هـ} س - \int \frac{س^{٢}}{٢} دس)$

= $\frac{س^{٢}}{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - \frac{س^{٢}}{٢} لـو_{هـ} س + \frac{س^{٢}}{٤}$ + جـ

- **تدرب (٤) ص(٢٧٩)**

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٣} هـ^{س} \, دس$

الحل:

ق	د هـ
$س^{٢}$ +	$هـ^{س}$
٢س -	$هـ^{س}$
٢ +	$هـ^{س}$
صفر	$هـ^{س}$

∴ $\int س^{٣} هـ^{س} \, دس$ =

$س^{٣} هـ^{س} - ٣س^{٢} هـ^{س} + ٦س هـ^{س} - ٦هـ^{س}$ + جـ

---

٢) $\int س^{٢} جتا٤س \, دس$

SALEEM ALSATEEB

الحل:

ق	×هـ
$س^{٢}$ +	جتا٤س
٢س -	$\frac{جا٤س}{٤}$
٢ +	$\frac{-جتا٤س}{١٦}$
صفر	$\frac{-جا٤س}{٦٤}$

$\therefore \int س^{٢} جتا٤س \, ×س =$

$س^{٢} \frac{جا٤س}{٤} + ٢س \frac{جتا٤س}{١٦} - \frac{٢جا٤س}{٦٤} + جـ$

---

٣) $\int (س^{٢} - س) جا٢س \, ×س$

الحل:

$\therefore \int (س^{٢} - س) جا٢س \, ×س =$

$(س^{٢} - س) \frac{-جتا٢س}{٢} + (٢س - ١) \frac{جا٢س}{٤} - \frac{٢جتا٢س}{٨} + جـ$

---

٤) $\int س^{٢} (٢س + ١)^{٥} \, ×س$

الحل:

$\therefore \int س^{٢} (٢س + ١)^{٥} \, ×س =$

$س^{٢} \frac{(٢س+١)^{٦}}{١٢} - ٢س \frac{(٢س+١)^{٧}}{١٦٨} + ٢ \frac{(٢س+١)^{٨}}{٢٦٨٨} + جـ$

- تدرب (٥) ص(٢٨٠)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int قا^{٢} س هـ \, ×\sqrt{ظاس}$ ×س

الحل: ص = $\sqrt{ظاس}$ ← $ص^{٢}$ = ظاس

$٢ص ×ص = قا^{٢} س ×س ⇐ ×س = \frac{٢ص}{قا^{٢} س} ×ص$

$\int قا^{٢} س هـ^{ص} \frac{٢ص}{قا^{٢} س} ×ص = \int ٢ص هـ^{ص} ×ص$

ن = ٢ص ← ×ن = ٢ص.×ص

$\int ×هـ = \int هـ^{ص} ×ص ← هـ = هـ^{ص}$

$= ٢ص هـ^{ص} - \int ٢هـ^{ص} ×ص = ٢ص هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + جـ$

$٢\sqrt{ظاس} هـ^{\sqrt{ظاس}} - ٢هـ^{\sqrt{ظاس}} + جـ$

---

٢)

ق	×هـ
$س^{٢}$ -س +	جا٢س
٢س-١ -	$\frac{-جتا٢س}{٢}$
٢ +	$\frac{-جا٢س}{٤}$
صفر	$\frac{جتا٢س}{٨}$

$\int جا٢س هـ^{جاس} \, ×س$

الحل:

ص =جاس

$\frac{×ص}{×س}$ =جتاس

ق	×هـ
$س^{٢}$	$(٢س + ١)^{٥}$
٢س	$\frac{(٢س+١)^{٦}}{١٢}$
٢	$\frac{(٢س+١)^{٧}}{١٦٨}$
صفر	$\frac{(٢س+١)^{٨}}{٢٦٨٨}$

$×س = \frac{×ص}{جتاس}$

$\int ٢جاس جتاس هـ^{ص} \frac{×ص}{جتاس} = \int ٢ص هـ^{ص} ×ص$

ن = ٢ص ← ×ن = ٢ص.×ص

$\int ×هـ = \int هـ^{ص} ×ص ← هـ = هـ^{ص}$

$= ٢ص هـ^{ص} - \int ٢هـ^{ص} ×ص = ٢ص هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + جـ$

SALEEM ALSATEEB

$= ((\sqrt{٣})^{٣} + ٣\sqrt{٣}\,لـو_{هـ}\sqrt{٣} - \frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٣} + ٣\sqrt{٣}) -$
$((١ + ٣لـو_{هـ}١ - (\frac{١}{٣} + ٣))$

تمارين ومسائل ص(٢٨٢)

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{\pi} (٢س+١)جتا٣س\,دس$

الحل:

$ع = ٢س + ١ \leftarrow دع = ٢.دس$

$دهـ = جتا٣س\,دس \leftarrow هـ = \frac{جا٣س}{٣}$

$(٢س + ١)\frac{جا٣س}{٣} - \int \frac{٢}{٣}جا٣س\,دس$

$(٢س + ١)جا٣س + \frac{٢}{٩}جتا٣س \Big]_{٠}^{\pi}$

$(٠ + \frac{-٢}{٩}) - (\frac{٢}{٩} + ٠) = \frac{-٤}{٩}$

ب) $\int س^{٢}\,لـو_{هـ}س\,دس$

الحل:

$ع = لـو_{هـ}س \leftarrow دع = \frac{١}{س}دس$

$دهـ = س^{٢}\,دس \leftarrow هـ = \frac{س^{٣}}{٣}$

$= \frac{س^{٣}}{٣}لـو_{هـ}س - \int \frac{س^{٢}}{٣}دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣}لـو_{هـ}س - \frac{س^{٣}}{٩} + جـ$

جـ) $\int_{-٢}^{١} ٥س\sqrt{س + ٣}\,دس$

الحل:

$ع = ٥س \leftarrow دع = ٥.دس$

$دهـ = \sqrt{س + ٣}\,دس \leftarrow هـ = \frac{-٢}{٣}(س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{-١٥}{٣}س(س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} - \int \frac{-١٠}{٣}(س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}دس$

$= \frac{-١٠}{٣}س(س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{٣}(س + ٣)^{\frac{٥}{٢}} \Big]_{-٢}^{١}$

$= (\frac{-١٠}{٣} \times ٨ - \frac{٤}{٣} \times ٣٢) - (\frac{-٢٠}{٣} \times ١ - \frac{٤}{٣} \times ١)$

$٢جاسهـ^{جاس} - ٢هـ^{جاس} + جـ$

---

٣) $\int جتا\sqrt{٢س + ١}\,دس$

الحل:

$ص = \sqrt{٢س + ١}$

$ص^{٢} = ٢س + ١$

$٢ص\,دص = ٢.دس$

$دس = ص\,دص$

$= \int ص\,جتاص\,دص$

$ع = ص \leftarrow دع = ١.دص$

$دهـ = جتاص\,دص \leftarrow هـ = جاص$

$= ص\,جاص - \int جاص\,دص = ص\,جاص + جتاص + جـ$

$\sqrt{٢س + ١}\,جا\sqrt{٢س + ١} + جتا\sqrt{٢س + ١} + جـ$

---

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ٣قا^{٤}س\,لـو_{هـ}ظاس\,دس$

الحل:

$ص = ظاس$

$\frac{دص}{دس} = قا^{٢}س$

$دس = \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$س = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow ص = ١$

$س = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ص = \sqrt{٣}$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣قا^{٢}س\,لـو_{هـ}ص\,\frac{دص}{قا^{٢}س} = \int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣قا^{٢}س\,لـو_{هـ}ص\,دص$

$= \int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(ص^{٢} + ١)لـو_{هـ}ص\,دص$

$ع = لـو_{هـ}ص \leftarrow دع = \frac{١}{ص}.دص$

$دهـ = ٣(ص^{٢} + ١)دص \leftarrow هـ = ٣(\frac{ص^{٣}}{٣} + ص)$

$= (ص^{٣} + ٣ص)لـو_{هـ}ص - \int ص^{٢} + ٣.دص$

$= ص^{٣} + ٣ص\,لـو_{هـ}ص - (\frac{ص^{٣}}{٣} + ٣ص) \Big]_{١}^{\sqrt{٣}}$

SALEEM ALSATEB

د) $\int \frac{س جاس}{جتا^{٣} س} ءس$

الحل: $= \int س ظاس قا^{٢} س ءس$

ن $= س \leftarrow ءن = ١.ءس$

$\int ءهـ = \int ظاس قا^{٢} س ءس$

ص $= ظاس \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = قا^{٢} س \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{قا^{٢} س}$

$هـ = \int ص \times قا^{٢} س \frac{ءص}{قا^{٢} س} = \int ص ءص = \frac{ص^{٢}}{٢} = \frac{ظا^{٢} س}{٢}$

$= \frac{س}{٢} ظا^{٢} س - \int \frac{ظا^{٢} س}{٢} ءس = \frac{س}{٢} ظا^{٢} س - \int \frac{قا^{٢} س - ١}{٢} ءس$

$= \frac{س}{٢} ظا^{٢} س - \frac{١}{٢} (ظاس - س) + جـ$

هـ) $\int قا^{٢} س لـو_{هـ} ظاس ءس$

الحل:

ص $= ظاس \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = قا^{٢} س \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{قا^{٢} س}$

$\int قا^{٢} س لـو_{هـ} ص \frac{ءص}{قا^{٢} س} = \int لـو_{هـ} ص ءص$

ن $= لـو_{هـ} ص \leftarrow ءن = \frac{١}{ص} ءص$

$\int ءهـ = \int ءص \leftarrow هـ = ص$

$= ص لـو_{هـ} ص - \int ١.ءص = ص لـو_{هـ} ص - ص + جـ$

ظاس $لـو_{هـ}$ ظاس $- ظاس + جـ$

و) $\int \frac{س}{هـ^{٢س}} ءس$

الحل: $= \int س هـ^{-٢س} ءس$

ن $= س \leftarrow ءن = ١.ءس$

$\int ءهـ = \int هـ^{-٢س} ءس \leftarrow هـ = \frac{هـ^{-٢س}}{-٢}$

$= \frac{س}{-٢} هـ^{-٢س} + \int \frac{هـ^{-٢س}}{٢} ءس = \frac{س}{-٢} هـ^{-٢س} - \frac{هـ^{-٢س}}{٤} + جـ$

ز) $\int جتا \sqrt[٣]{س} ءس$

الحل:

ص $= \sqrt[٣]{س}$

ص $^{٣} = س$

$٣ ص^{٢} ءص = ١.ءس$

$\Leftarrow \int ٣ ص^{٢} جتاص ءس$

ق	ءهـ
$٣ ص^{٢}$ +	جتاص
$٦ ص$ −	جاص
٦ +	−جتاص
صفر	−جاص

$= ٣ ص^{٢} جاص + ٦ ص جتاص - ٦ جاص + جـ$

ح) $\int جتاس لـو_{هـ}$ جاس ءس

الحل:

ص $= جاس$

$\frac{ءص}{ءس} = جتاس$

$ءس = \frac{ءص}{جتاس}$

$\int جتاس لـو_{هـ} ص \frac{ءص}{جتاس} = \int لـو_{هـ} ص ءص$

ن $= لـو_{هـ} ص \leftarrow ءن = \frac{١}{ص} ءص$

$\int ءهـ = \int ١.ءص \leftarrow هـ = ص$

$= ص لـو_{هـ} ص - \int ١.ءص = ص لـو_{هـ} ص - ص + جـ$

$= جاس لـو_{هـ}$ جاس $- جاس + جـ$

ط) $\int س (جاس + جتاس)^{٢} ءس$

الحل:

$= \int س (جا^{٢} س + ٢ جاس جتاس + جتا^{٢} س) ءس$

$= \int س (١ + جا٢س) ءس$

ن $= س \leftarrow ءن = ١.ءس$

$\int ءهـ = \int ١ + جا٢س.ءس \leftarrow هـ = س - \frac{جتا٢س}{٢}$

$= س (س - \frac{جتا٢س}{٢}) - \int س - \frac{جتا٢س}{٢}.ءس$

$= س (س - \frac{جتا٢س}{٢}) - (\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{جا٢س}{٤}) + جـ$

ي) $\int هـ^{س} جتا٣س ءس$

SALEEM ALSATEEB

الحل:

ق	×د هـ
هـ س +	جتا٣س
هـ س -	$\frac{\text{جا٣س}}{٣}$
هـ س	$\frac{-\text{جتا٣س}}{٩}$

$\therefore \int هـ^{س} \text{جتاس} \, د س =$

$هـ^{س} \frac{\text{جا٣س}}{٣} + \frac{هـ^{س} \text{جتا٣س}}{٩} - \frac{١}{٩} \int هـ^{س} \text{جتا٣س} \, د س$

$\frac{١٠}{٩} \int هـ^{س} \text{جتا٣س} \, د س = \frac{هـ^{س}}{٣} \text{جا٣س} + \frac{هـ^{س}}{٩} \text{جتا٣س}$

$\therefore \int هـ^{س} \text{جتاس} \, د س = \frac{٩}{١٠} (\frac{هـ^{س}}{٣} \text{جا٣س} + \frac{هـ^{س}}{٩} \text{جتا٣س}) + ج$

ك) $\int \frac{\text{لـو}_{هـ} (س + ٣)}{\sqrt{س + ٣}} \, د س$

الحل: $= \int (س + ٣)^{\frac{-١}{٢}} \text{لـو}_{هـ} (س + ٣) \, د س$

$ع = \text{لـو}_{هـ} (س + ٣) \leftarrow د ع = \frac{١}{س + ٣} د س$

$\int د ه = \int (س + ٣)^{\frac{-١}{٢}} . د س \leftarrow ه = ٢(س + ٣)^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢(س + ٣)^{\frac{١}{٢}} \text{لـو}_{هـ} (س + ٣) - \int ٢(س + ٣)^{\frac{-١}{٢}} . د س$

$= ٢(س + ٣)^{\frac{١}{٢}} \text{لـو}_{هـ} (س + ٣) - ٤(س + ٣)^{\frac{١}{٢}} + ج$

ل) $\int (س^{٢} - ٢س) \sqrt{س + ٣} \, د س$

الحل:

ق	×د هـ
س^{٢} + ٢س +	هـ^{س}
٢س + ٢ -	هـ^{س}
٢ +	هـ^{س}
صفر	هـ^{س}

$= \frac{٢}{٣} (س^{٢} - س)(س + ٣)^{\frac{١}{٢}} -$

$\frac{٤}{١٥} (٢س - ١)(س + ٣)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١٦}{١٠٥} (س + ٣)^{\frac{٧}{٢}} + ج$

م) $\int قا^{٢} س \, \text{لـو}_{هـ} \, \text{جاس} \, د س$

الحل:

$ع = \text{لـو}_{هـ} \text{جاس} \leftarrow د ع = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} د س$

$\int د ه = \int قا^{٢} س . د س \leftarrow ه = \text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\text{ظاس} \, \text{لـو}_{هـ} \, \text{جاس} - \int ١ . د س = \text{ظاس} \, \text{لـو}_{هـ} \, \text{جاس} - س + ج$

ن) $\int ٢ هـ^{س} \, \text{جاس} \, \text{جتاس} \, د س$

الحل: $= \int هـ^{س} \, \text{جا٢س} \, د س$

ق	×د هـ
هـ س +	جا٢س
هـ س -	$\frac{-\text{جتا٢س}}{٢}$
هـ س	$\frac{-\text{جا٢س}}{٤}$

$\int هـ^{س} \text{جا٢س} \, د س = \frac{-هـ^{س}}{٢} \text{جتا٢س} +$

$\frac{هـ^{س}}{٤} \text{جا٢س} - \frac{١}{٤} \int هـ^{س} \, \text{جا٢س} \, د س$

$\Leftarrow \frac{٥}{٤} \int هـ^{س} \, \text{جا٢س} \, د س = \frac{-هـ^{س}}{٢} \text{جتا٢س} + \frac{هـ^{س}}{٤} \text{جا٢س}$

$\int هـ^{س} \, \text{جا٢س} \, د س = \frac{٤}{٥} (\frac{-هـ^{س}}{٢} \text{جتا٢س} + \frac{هـ^{س}}{٤} \text{جا٢س}) + ج$

س) $\int (س^{٢} + ٢س) هـ^{س} \, د س$

الحل:

ق	×د هـ
س^{٢} − س +	$(س + ٣)^{\frac{١}{٢}}$
٢س − ١ -	$\frac{٢}{٣} (س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}$
٢ +	$\frac{٤}{١٥} (س + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$
صفر	$\frac{٨}{١٠٥} (س + ٣)^{\frac{٧}{٢}}$

$= (س^{٢} + ٢س) هـ^{س} - (٢س + ٢) هـ^{س} + ٢ هـ^{س} + ج$

SALEEM ALSATEEB

ع) $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(١+س)^{٢}}$ ءس

الحل: $= \int س\ هـ^{س}(١+س)^{-٢}$ ءس

ن $= س هـ^{س} \leftarrow$ ءن $= (س هـ^{س} + هـ^{س})$ءس.

ءهـ $= \int (س+١)^{-٢}$ ءس. $\leftarrow هـ = -(س+١)^{-١}$

$- س هـ^{س} \times (س+١)^{-١} + \int (س هـ^{س} + هـ^{س})(س+١)^{-١}$ ءس.

$= \frac{-س هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}(س+١)(س+١)^{-١}$ ءس.

$= \frac{-س هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}$ ءس $= \frac{-س هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + ج$

---

٢) اذا كان $\int_{١}^{٢} ق(س)$ءس $= ٣$ ، ق(١) $= ٥$ ، ق(٢) $= ٨$،

فاحسب قيمة $\int_{١}^{٢} س\ ق'(س)$ءس .

الحل:

ق $= س$ ءهـ $= ن'(س)$

ءن $=$ ءس هـ $= ق(س)$

$= [ن(س)س]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} ق(س)$ءس

$= ٢ق(س) - ق(١) - ٣$

$= ٢ \times ٨ - ٥ - ٣ = ١٦ - ٨ = ٨$

---

٣) اذا كان ق اقتراناً قابلاً للإشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وكان $\int_{١}^{٢} ق(س)$ءس $= ١٠$، ق(٢) $= ٣$، ق(١) $= -١$، فجد قيمة $\int_{١}^{١} س^{٥}\ ق'(س^{٣}+١)$ءس .

الحل:

(تعويض) ص $= س^{٣} + ١ \leftarrow$ ءص $= ٣س^{٢}$ ءس

س $= ٠ \leftarrow$ ص $= ١$ ، س $= ١ \leftarrow$ ص $= ٢$

$= \int_{١}^{٢} س^{٥} ق'(ص) \frac{ءص}{٣س^{٢}} = \frac{١}{٣} \int_{١}^{٢} س^{٣}\ ق'(ص)$ءص

$= \frac{١}{٣} \int_{١}^{٢} (ص-١) ق'(ص)$ءص

(اجزاء) ن $= ص - ١$ ءهـ $= ن'(ص)$

ءن $=$ ءص هـ $= ن(ص)$

$= [(ص-١)ن(ص)]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} ق(ص)$ءص

$= \frac{١}{٣}(٢-١)ق(٢) - (١-١)ق(١) - ١٠$

$= \frac{١}{٣}(٣ - ٠ - ١٠) = \frac{-٧}{٣}$

ثانياً: التكامل بالأجزاء

- تدريب (١) صـ(٢٨٤)

جد $\int \frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣}$ ءس

الحل:

$\frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{٥}{(س-٣)(س-١)}$

$= \frac{أ}{س-٣} = \frac{ب}{س-١} = \frac{أ(س-١) + ب(س-٣)}{(س-٣)(س-١)}$

س $= ١ \leftarrow ٥ = -٢ب$ ب $= \frac{-٥}{٢}$

س $= ٣ \leftarrow ٥ = ٢أ$ أ $= \frac{٥}{٢}$

$= \int \frac{\frac{-٥}{٢}}{س-٣}$ ءس $+ \int \frac{\frac{٥}{٢}}{س-١}$ ءس

$= \frac{-٥}{٢}$ لـو|س $- ٣| + \frac{٥}{٢}$ لـو|س $- ١|$

- تدريب (٢) صـ(٢٨٥)

جد $\int \frac{س - ١٣}{٢س^{٢} - ٧س + ٣}$ ءس

الحل:

$\frac{س - ١٣}{٢س^{٢} - ٧س + ٣} = \frac{س - ١٣}{(٢س - ١)(س - ٣)}$

SALEEM ALSATEEB

$$= \frac{أ}{٢س-١} + \frac{ب}{س-٣} = \frac{أ(س-٣)+ب(٢س-١)}{(٢س-١)(س-٣)}$$

$س=٣ \leftarrow ١٠=٥ب \leftarrow ب=-٢$

$س=\frac{١}{٢} \leftarrow -١٢,٥=-٢,٥أ$

$أ=\frac{-٥و١٢}{-٥و٢}=٥$

$$= \int \frac{٥}{٢س-١}ءس + \int \frac{-٢}{س-٣}ءس$$

$$= ٥لـو|٢س-١| + ٢لـو|س-٣|$$

• تدرب (٣) ص(٢٨٦)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{س^{٢}+س+٥}{س^{٢}+س}ءس$

الحل: بالقسمة الطويلة

$$= \int ١ءس + \int \frac{٥}{س^{٢}+س}ءس$$

$$\frac{٥}{س^{٢}+س} = \frac{٥}{س(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+١}$$

$$= \frac{أ(س+١)+بس}{س(س+١)}$$

$س=٠ \leftarrow ٥=أ$

$س=-١ \leftarrow ٥=-ب \quad \leftarrow ب=-٥$

$$= \int \frac{٥}{س}ءس + \int \frac{-٥}{س+١}ءس$$

$٥لـو|س| + ٥لـو|س+١| + ج$

---

٢) $\int_{٢}^{٣} \frac{س^{٣}+س}{س-١}ءس$

الحل: بالقسمة الطويلة

$$= \int_{٢}^{٣} س^{٢}+س+٢ءس + \int_{٢}^{٣} \frac{٢}{س-١}ءس$$

$$\left[\frac{س^{٣}}{٣}+\frac{س^{٢}}{٢}+٢س\right]_{٢}^{٣} + ٢لـو|س-١|_{٢}^{٣}$$

$$= (\frac{٢٧}{٣}+\frac{٩}{٢}+٦)-(\frac{٨}{٣}+\frac{٤}{٢}+٤)+٢(لـو_{هـ}٢-لـو_{هـ}١)$$

$$= ١٥+\frac{٩}{٢}-\frac{٨}{٣}-٦+٢لـو_{هـ}٢$$

$$= ٩+\frac{٩}{٢}-\frac{٨}{٣}+٢لـو_{هـ}٢$$

$$= \frac{٥٤}{٦}+\frac{١٦}{٦}=\frac{٢٧}{٦}+٢لـو_{هـ}٢ = \frac{٦٥}{٦}+٢لـو_{هـ}٢$$

• تدرب (٤) ص(٢٨٨)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{قا^{٢}س}{٥ظا^{٢}س-٣ظاس-٢}ءس$

الحل:

ص =ظاس ءص =قا^{٢}س

$$\int \frac{قا^{٢}س}{٥ص^{٢}-٣ص-٢} \times \frac{ءص}{قا^{٢}س}$$

$$\int \frac{١}{٥ص^{٢}-٣ص-٢}ءص$$

$$\frac{١}{٥ص^{٢}-٣ص-٢} = \frac{١}{(٥ص+٢)(ص-١)}$$

$$= \frac{أ}{٥ص+٢} + \frac{ب}{ص-١} = \frac{أ(ص-١)+ب(٥ص+٢)}{(٥ص+٢)(ص-١)}$$

$ص=١ \leftarrow ١=٧ب \leftarrow ب=\frac{١}{٧}$

$ص=\frac{-٢}{٥} \leftarrow ١=أ(\frac{-٢}{٥}-١) = \frac{-٧}{٥}أ \leftarrow أ=\frac{-٧}{٥}$

$$= \int \frac{\frac{-٥}{٧}}{٥ص+٢}ءص + \int \frac{\frac{١}{٧}}{ص-١}ءص$$

$$= \frac{-٥}{٧\times٥}لـو|٥ص+٢| + \frac{١}{٧}لـو|ص-١|$$

$$= \frac{-٥}{٧\times٥}لـو|٥ظاس+٢| + \frac{١}{٧}لـو|ظاس-١|$$

$$= \frac{-١}{٧}لـو|٥ظاس+٢| + \frac{١}{٧}لـو|ظاس-١| + ج$$

---

٢) $\int \frac{\sqrt{٣}س-١}{\sqrt{٣}س^{٢}-٤}ءس$

الحل:

SALEEM ALSATEEB

$ص = \sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{3}}$

$ع ص = \frac{1}{3} س^{\frac{-2}{3}} ع س = \frac{1}{3 \sqrt[3]{س^2}} ع س$

$\int \frac{ص - 1}{ص^2 - 4} \times 3 \sqrt[3]{س^2} ع ص$

$\int \frac{ص - 1}{ص^2 - 4} \times 3 ص^2 ع ص = \int \frac{3ص^3 - 3ص^2}{ص^2 - 4} ع ص$

بالقسمة الطويلة $= \int 3ص - 3 + \frac{|2ص - 2|}{ص^2 - 4}$

$= \frac{|2ص - 2|}{(ص - 2)(ص + 2)} = \frac{أ}{(ص - 2)} + \frac{ب}{(ص + 2)}$

$= \frac{أ(ص + 2) + ب(ص - 2)}{(ص - 2)(ص + 2)}$

ص = ٢ ← ١٢ = ٤أ ← ١٢ − ٢×١٢ = ٤أ ← أ = ٣

ص = -٢ ← ١٢ = -٤ب ← ١٢ − -٢×١٢ = -٤ب ← ب = ٩

$\int 3ص - 3 + \int \frac{3}{ص - 2} + \int \frac{9}{ص + 2}$

$\frac{3ص^2}{2} - 3ص + 3لو|ص - 2| + 9لو|ص + 2|$

$= \frac{3(\sqrt[3]{س})^2}{2} - 3 \sqrt[3]{س} +$

$3لو|\sqrt[3]{س} - 2| + 9لو|\sqrt[3]{س} + 2| + جـ$

---

٣) $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{س + 1} - 1}{\sqrt{س + 1} + 1} ع س$

الحل:

$ص = \sqrt{س + 1}$ $ع ص = \frac{1}{2 \sqrt{س + 1}} ع س$

س = ٠ ← ص = ١

س = ٣ ← ص = ٢

$\int_{1}^{2} \frac{ص - 1}{ص + 1} \times 2 \sqrt{س + 1} ع ص = \int_{1}^{2} \frac{2ص^2 - 2ص}{ص + 1} ع ص$

$= \int_{1}^{2} 2ص - 4 + \int_{1}^{2} \frac{4}{ص + 1} ع ص$

$\frac{2ص^2}{2} - 4ص]_{1}^{2} + 4لو|ص + 1|]_{1}^{2}$

$= 1 + 4(لو_{هـ} 3 - لو_{هـ} 2)$

تمارين ومسائل ص(٢٨٩)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{7}{س^2 - 3س - 10} ع س$

الحل:

$\frac{7}{س^2 - 3س - 10} = \frac{7}{(س - 5)(س + 2)}$

$= \frac{أ}{س - 5} + \frac{ب}{س + 2} = \frac{أ(س + 2) + ب(س - 5)}{(س - 5)(س + 2)}$

س = ٥ ← ٧ = ٧أ ← أ = ١

س = -٢ ← ٧ = -٧ب ← ب = -١

$= \int \frac{1}{س - 5} + \int \frac{-1}{س + 2} = لو|س - 5| - لو|س + 2|$

---

٢) $\int_{1}^{3} \frac{2س}{س^2 - 4س - 12} ع س$

الحل:

$\frac{2س}{(س - 6)(س + 2)} = \frac{أ}{س - 6} + \frac{ب}{س + 2}$

$= \frac{أ(س + 2) + ب(س - 6)}{(س - 6)(س + 2)}$

س = ٦ ← ١٢ = ٨أ ← أ = $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

س = −٢ ← −٤ = −٨ب ← ب = $\frac{1}{2}$

$= \int_{1}^{3} \frac{\frac{3}{2}}{س - 6} + \int_{1}^{3} \frac{\frac{1}{2}}{س + 2}$

$= \frac{3}{2} لو|س - 6|]_{1}^{3} + \frac{1}{2} لو|س + 2|]_{1}^{3}$

---

٣) $\int_{-1}^{1} \frac{|1 - س|}{س^2 - 5س + 6} ع س$

الحل:

١-س = ٠

	س − ١		١ − س
	---------	+ + +	
١-		١	

SALEEM ALSATEB

$= \int_{-1}^{1} \frac{1-س}{س^2-٥س+٦} ءس$

$= \frac{1-س}{س^2-٥س+٦} = \frac{1-س}{(س-٣)(س-٢)}$

$= \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-٢} = \frac{أ(س-٢)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س-٢)}$

$س=٢ \leftarrow -١ = -ب \leftarrow ب = ١$

$س=٣ \leftarrow -٢ = أ$

$= \int_{-1}^{1} \frac{-٢}{س-٣} + \int_{-1}^{1} \frac{١}{س-٢}$

$= -٢لـو|س-٣|]_{-1}^{1} + لـو|س-٢|]_{-1}^{1}$

$-٢(لـو٢-لـو٤)+(لـو١-لـو٣)$

---

٤) $\int \frac{س^3+٤س-٨}{س^2-٩} ءس$

الحل:

$\int س + \int \frac{١٣س-٨}{س^2-٩}$

$\frac{١٣س-٨}{س^2-٩} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣}$

$= \frac{أ(س+٣)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$

$س=-٣ \leftarrow -٤٧ = -٦ب \leftarrow ب = \frac{٤٧}{٦}$

$س=٣ \leftarrow ١٦أ = ٣١ \leftarrow أ = \frac{٣١}{٦}$

$= \int س + \int \frac{\frac{٣١}{٦}}{س-٣} + \int \frac{\frac{٤٧}{٦}}{س+٣}$

$\frac{س^2}{٢} + \frac{٣١}{٦}لـو|س-٣| + \frac{٤٧}{٦}لـو|س+٣|$

---

٥) $\int_{1}^{} \frac{٣س^2+٣}{٣س^2-س-٤} ءس$

الحل:

بالقسمة الطويلة $= \int ١ ءس + \int_{1}^{} \frac{س+٧}{٣س^2-س-٤}$

$= \frac{س+٧}{(٣س-٤)(س+١)} = \frac{أ}{٣س-٤} + \frac{ب}{س+١}$

$= \frac{أ(س+١)+ب(٣س-٤)}{(٣س-٤)(س+١)}$

$س=-١ \leftarrow ٦ = -٧ب \leftarrow ب = \frac{-٦}{٧}$

$س=\frac{٤}{٣} \leftarrow \frac{٤}{٣}+٧ = (\frac{٤}{٣}+١)أ$

$\leftarrow \frac{٢٥}{٣} = \frac{٧}{٣}أ \leftarrow أ = \frac{٢٥}{٧}$

$= \int_{1}^{} ١ ءس + \int_{1}^{} \frac{\frac{٢٥}{٧}}{٣س-٤} ءس + \int_{1}^{} \frac{\frac{-٦}{٧}}{س+١} ءس$

$= س + \frac{٢٧}{٣\times٧}لـو|٣س-٤| - \frac{٦}{٧}لـو|س+١|]_{1}^{}$

$١ - \frac{٦}{٧}لـو_هـ ٢ - \frac{٢٥}{٢١}لـو_هـ ٤$

---

٦) $\int \frac{ظاس}{٢٥-(لـو_هـ جتاس)^2} ءس$

الحل:

$ص = لـو_هـ جتاس \quad ءص = \frac{-جاس}{جتاس} ءس \quad ءس = \frac{ءص}{-ظاس}$

$\int \frac{ظاس}{٢٥-ص^2} \times \frac{ءص}{-ظاس} = \int \frac{-١}{٢٥-ص^2} ءص$

$\frac{-١}{٢٥-ص^2} = \frac{أ}{٥-ص} + \frac{ب}{٥+ص}$

$= \frac{أ(٥+ص)+ب(٥-ص)}{(٥-ص)(٥+ص)}$

$ص=٥ \leftarrow -١ = ١٠أ \leftarrow أ = \frac{-١}{١٠}$

$ص=-٥ \leftarrow -١ = -١٠ب \leftarrow ب = \frac{-١}{١٠}$

$\int \frac{\frac{-١}{١٠}}{٥-ص} - \int \frac{\frac{١}{١٠}}{٥+ص} = \frac{-١}{١٠}لـو|٥-ص| - \frac{١}{١٠}لـو|٥+ص| + جـ$

$\frac{-١}{١٠}لـو|٥-لـو_هـ جتاس| - \frac{١}{١٠}لـو|٥+لـو_هـ جتاس| + جـ$

---

٧) $\int \frac{١}{١+هـ^{-س}} ءس$

الحل:

$ص = هـ^{-س} \quad ءص = -هـ^{-س} ءس \quad ءس = \frac{ءص}{-هـ^{-س}}$

$\int \frac{١}{١+ص} \times \frac{ءص}{-هـ^{-س}} = \int \frac{١}{ص(١+ص)} ءص$

SALEEM ALSATEB

$= \int \frac{1}{ص(ص+1)} د ص$

$\frac{1}{ص(ص+1)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+1} = \frac{أ(ص+1)+ب ص}{ص(ص+1)}$

$ص = 0 \leftarrow 1 = أ$

$ص = -1 \leftarrow 1 = -ب \leftarrow ب = -1$

$= \int \frac{1}{ص} + \frac{-1}{ص+1} = لـو_{هـ}|ص| - لـو_{هـ}|ص+1|$

$= لـو_{هـ}|هـ^{س}| - لـو_{هـ}|هـ^{س}+1| + جـ$

---

٨) $\int \frac{هـ^{3س}}{هـ^{2س} - 3هـ^{س} - 4} د س$

الحل:

$هـ^{س} = ص \quad د س = \frac{د ص}{هـ^{س}} = \frac{د ص}{ص}$

$= \int \frac{ص^{3}}{ص^{2} - 3ص - 4} \times \frac{د ص}{ص} = \int \frac{ص^{2}}{ص^{2} - 3ص - 4} د ص$

بالقسمة الطويلة $= \int 1 د ص + \int \frac{3ص + 4}{ص^{2} - 3ص - 4}$

$= \frac{3ص + 4}{(ص-4)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-4} + \frac{ب}{ص+1}$

$= أ(ص+1) + ب(ص-4) = 3ص + 4$

$ص = -1 \leftarrow ب = \frac{-1}{5}$

$ص = 4 \leftarrow 5أ = 16 \leftarrow أ = \frac{16}{5}$

$= \int 1 + \frac{\frac{16}{5}}{ص-4} + \frac{\frac{-1}{5}}{ص+1}$

$= ص + \frac{16}{5} لـو|ص-4| - \frac{1}{5} لـو|ص+1| + جـ$

$= هـ^{س} + \frac{16}{5} لـو|هـ^{س}-4| - \frac{1}{5} لـو|هـ^{س}+1| + جـ$

---

٩) $\int_{9}^{16} \frac{\sqrt{س}}{س-4} د س$

الحل:

$ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^{2} = س \quad 2ص د ص = د س$

$س = 9 \leftarrow ص = 3$

$س = 16 \leftarrow ص = 4$

$\int_{3}^{4} \frac{ص}{ص^{2}-4} \times 2ص د ص = \int_{3}^{4} \frac{2ص^{2}}{ص^{2}-4} د ص$

$\int_{3}^{4} (2 + \frac{8}{ص^{2}-4}) د ص$

$\frac{8}{ص^{2}-4} = \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+2}$

$أ(ص+2) + ب(ص-2) = 8$

$ص = -2 \leftarrow ب = -2$

$ص = 2 \leftarrow أ = 2$

$= \int_{3}^{4} (2 + \frac{2}{ص-2} + \frac{-2}{ص+2}) د ص$

$= [2ص + 2لـو|ص-2| - 2لـو|ص+2|]_{3}^{4}$

$8 + 2لـو_{هـ}2 - 2لـو_{هـ}6 - (6 + 2لـو_{هـ}1 - 2لـو_{هـ}5)$

---

١٠) $\int \frac{جتاس}{1 + 3جاس - جتا2س} د س$

الحل:

$\frac{جتاس}{1 + 3جاس - (1 - 2جا^{2}س)}$

$= \frac{جتاس}{1 + 3جاس - 1 + 2جا^{2}س}$

$ص = جاس \quad د ص = جتاس د س \quad د س = \frac{د ص}{جتاس}$

$= \int \frac{جتاس}{3ص - 2ص^{2}} \times \frac{د ص}{جتاس} = \int \frac{1}{3ص - 2ص^{2}} د ص$

$\frac{1}{ص(3+2ص)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{3+2ص}$

$= \frac{أ(3+2ص) + ب ص}{ص(3+2ص)}$

$ص = 0 \leftarrow 1 = 3أ \leftarrow أ = \frac{1}{3}$

$ص = \frac{-3}{2} \leftarrow 1 = \frac{-3}{2} ب \leftarrow ب = \frac{-2}{3}$

$= \int \frac{\frac{1}{3}}{ص} + \frac{\frac{-2}{3}}{3+2ص} د ص$

$= \frac{1}{3} لـو|ص| - \frac{2}{2 \times 3} لـو|3+2ص|$

$\frac{1}{3} لـو|جاس| - \frac{2}{2 \times 3} لـو|3+2جاس| + جـ$

SALEEM ALSATEEB

---

١١) $\int_{٩}^{٤} (\text{لـو}_{٥} (س^{٢} - ٩)) \, ٥س$

الحل:

ن = لـو(س^{٢} - ٩) ٥هـ = ٥س

٥ن = $\frac{٢س}{س^{٢}-٩}$ هـ = س

$\int_{٩}^{٤} (\text{لـو}_{٥} (س^{٢} - ٩)) \, ٥س = [\text{لـو}_{٥} (س^{٢} - ٩)] - \int_{٩}^{٤} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}-٩} \, ٥س$

$= [\text{لـو}(س^{٢} - ٩)] - (\int_{٩}^{٤} ٢س \times \frac{١٨}{س^{٢}-٩} \, ٥س)$

$= \frac{١٨}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣}$

$= \frac{أ(س+٣)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$

س = ٣ ← ١٨ = ٦أ ← أ = ٣

س = -٣ ← ١٨ = -٦ب ← ب = -٣

$= [\text{لـو}_{٥} (س^{٢} - ٩)] - (\int_{٩}^{٤} ٢س \times \frac{٣}{س-٣} + \int_{٩}^{٤} \frac{-٣}{س+٣})$

$\text{لـو}_{٥} (س^{٢} - ٩) - (٢س + ٣\text{لـو}|س - ٣| - ٣\text{لـو}|س + ٣|) + ج$

---

١٢) $\int \frac{س}{س^{٤} + س^{٢}} \, ٥س$

الحل:

ص = س^{٢} ٥ص = ٢س٥س ٥س = $\frac{٥ص}{٢س}$

$\int \frac{\cancel{س}}{ص^{٢} + ص} \times \frac{٥ص}{\cancel{٢س}} = \frac{١}{٢} \int \frac{١}{ص^{٢} + ص} \, ٥ص$

$= \frac{١}{ص^{٢} + ص} = \frac{١}{ص(ص+١)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+١}$

$= \frac{أ(ص+١) + ب ص}{ص(ص+١)}$

ص = ٠ ← ١ = أ

ص = -١ ← ١ = -ب ← ب = -١

$= \frac{١}{٢} (\int (\frac{١}{ص} + \frac{-١}{ص+١})) = \frac{١}{٢} (\text{لـو}|ص| - \text{لـو}|ص+١|)$

$= \frac{١}{٢} (\text{لـو}|س^{٢}| - \text{لـو}|س^{٢} + ١|) + ج$

---

١٣) $\int_{٩}^{١٦} \frac{٥س}{س - ٣\sqrt{س} + ٢}$

الحل:

ص = $\sqrt{س}$ ← ص^{٢} = س

٢ص٥ص = ٥س

س = ٩ ← ص = ٣

س = ١٦ ← ص = ٤

$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص \, ٥ص}{ص^{٢} - ٣ص + ٢} = \frac{٢ص}{(ص-٢)(ص-١)}$

$= \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص-١} = \frac{أ(ص-١) + ب(ص-٢)}{(ص-٢)(ص-١)}$

ص = ١ ← ٢ = -ب ← ب = -٢

ص = ٢ ← ٤ = أ

$= \int_{٣}^{٤} \frac{٤}{ص-٢} + \int_{٣}^{٤} \frac{-٢}{ص-١}$

$= ٤\text{لـو}|ص-٢|]_{٣}^{٤} + -٢\text{لـو}|ص-١|]_{٣}^{٤}$

$= ٤(\text{لـو}_{هـ}٢ - \text{لـو}_{هـ}١) - ٢(\text{لـو}_{هـ}٣ - \text{لـو}_{هـ}٢)$

---

١٤) $\int \frac{\sqrt{س-٢} + ١}{\sqrt{٤س-٨} - ٢} \, ٥س$

الحل:

$= \int \frac{\sqrt{س-٢} + ١}{٢\sqrt{س-٢} - ٢} \, ٥س$

ص = $\sqrt{س-٢}$

٥ص = $\frac{١}{٢\sqrt{س-٢}} ٥س$

← ٥س = ٢$\sqrt{س-٢}$ ٥ص = ٢ص٥ص

$= \int \frac{(ص+١)}{٢ص-٢} ٢ص \, ٥ص = \int \frac{٢ص^{٢} + ٢ص}{٢ص-٢}$

$= \int \frac{\cancel{٢}ص(ص^{٢} + ص)}{\cancel{٢}(ص-١)}$ بالقسمة الطويلة

$= \int ص + ٢ + \frac{٢}{ص-١} = \frac{ص^{٢}}{٢} + ٢ص + ٢\text{لـو}|ص-١|$

$= \frac{(\sqrt{س-٢})^{٢}}{٢} + ٢\sqrt{س-٢} + ٢\text{لـو}|\sqrt{س-٢} - ١|$

SALEEM ALSATEEB

١٥) $\int \sqrt{1-هـ^{س}}\,د س$

الحل:

$ص = \sqrt{1-هـ^{س}}$

$ص^{٢} = 1-هـ^{س} \leftarrow هـ^{س} = 1-ص^{٢}$

$٢ص\,د ص = -هـ^{س}\,د س$

$\int ص \times \frac{٢ص\,د ص}{-هـ^{س}} = \int \frac{٢ص^{٢}}{-(1-ص^{٢})}\,د ص$

$= \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-1}\,د ص$ بالقسمة الطويلة

$= \int ٢\,د ص + \int \frac{٢}{ص^{٢}-1}\,د ص$

$\frac{٢}{ص^{٢}-1} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1} = \frac{أ(ص+1)+ب(ص-1)}{(ص-1)(ص+1)}$

$ص = 1 \leftarrow ٢ = ٢أ \leftarrow أ = 1$

$ص = -1 \leftarrow ٢ = -٢ب \leftarrow ب = -1$

$\int ٢\,د ص + \int \frac{1}{ص-1}\,د ص + \int \frac{-1}{ص+1}\,د ص$

$٢ص + لـو|ص-1| - لـو|ص+1|$

$٢\sqrt{1-هـ^{س}} + لـو\left|\sqrt{1-هـ^{س}}-1\right| - لـو\left|\sqrt{1-هـ^{س}}+1\right|$

---

١٦) $\int \frac{قا^{٢}س}{٥-قا^{٢}س}\,د س$

الحل:

$\int \frac{قا^{٢}س}{٥-(1+ظا^{٢}س)}\,د س = \int \frac{قا^{٢}س}{٤-ظا^{٢}س}\,د س$

$ص = ظاس \quad د ص = قا^{٢}س\,د س$

$= \int \frac{قا^{٢}س}{٤-ص^{٢}} \times \frac{د ص}{قا^{٢}س} = \int \frac{1}{٤-ص^{٢}}\,د ص$

$= \frac{أ}{٢-ص} + \frac{ب}{٢+ص} = \frac{أ(٢+ص)+ب(٢-ص)}{(٢+ص)(٢-ص)}$

$ص = ٢ \leftarrow ١ = ٤أ \leftarrow أ = \frac{1}{٤}$

$ص = -٢ \leftarrow ١ = ٤ب \leftarrow ب = \frac{1}{٤}$

$= \int \frac{\frac{1}{٤}}{٢-ص} + \int \frac{\frac{1}{٤}}{٢+ص}$

$= -\frac{1}{٤}لـو|٢-ص| + \frac{1}{٤}لـو|٢+ص|$

$= -\frac{1}{٤}لـو|٢-ظاس| + \frac{1}{٤}لـو|٢+ظاس| + جـ$

---

١٧) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٨+جا^{٢}س}\,د س$

الحل:

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٨+١-جا^{٢}س}\,د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٩-جا^{٢}س}\,د س$

$ص = جاس \quad د ص = جتاس\,د س$

$س = ٠ \leftarrow ص = جا٠ = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow جا\frac{\pi}{٢} = 1$

$\int_{0}^{1} \frac{جتاس}{٩-ص^{٢}} \times \frac{د ص}{جتاس} = \int_{0}^{1} \frac{1}{٩-ص^{٢}}\,د ص$

$= \frac{أ}{٣-ص} + \frac{ب}{٣+ص} = \frac{أ(٣+ص)+ب(٣-ص)}{(٣-ص)(٣+ص)}$

$ص = ٣ \leftarrow ١ = ٦أ \leftarrow أ = \frac{1}{٦}$

$ص = -٣ \leftarrow ١ = ٦ب \leftarrow ب = \frac{1}{٦}$

$= \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{٦}}{٣-ص} + \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{٦}}{٣+ص}$

$\frac{1}{٦}لـو|٣-ص|]_{0}^{1} + \frac{1}{٦}لـو|٣+ص|]_{0}^{1}$

$-\frac{1}{٦}(لـو_{هـ}٢ - لـو_{هـ}٣) + \frac{1}{٦}(لـو_{هـ}٤ - لـو_{هـ}٣)$

---

١٨) $\int \frac{د س}{س(لـو_{هـ}س)^{٢}-٤س}$

الحل:

$= \int \frac{د س}{س((لـو_{هـ}س)^{٢}-٤)}$

$ص = لـو_{هـ}س \leftarrow د ص = \frac{1}{س}د س$

$\int \frac{د ص \times س}{س(ص^{٢}-٤)} = \int \frac{1}{ص^{٢}-٤}\,د ص$

$= \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢} = \frac{أ(ص+٢)+ب(ص-٢)}{(ص-٢)(ص+٢)}$

$ص = ٢ \leftarrow ١ = ٤أ \leftarrow أ = \frac{1}{٤}$

SALEEM ALSATEB

ص = −٢ ← −٤ب = ١ ← ب = $\frac{-١}{٤}$

$\int_{٠}^{٤} \frac{١}{ص-٢}$ − $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{ص+٢}$ = $\frac{١}{٤}$ لـو|ص − ٢| − $\frac{١}{٤}$ لـو|ص + ٢|

$\frac{١}{٤}$ لـو|لـو$_{هـ}$ س − ٢| − $\frac{١}{٤}$ لـو|لـو$_{هـ}$ س + ٢| + جـ

الفصل الثالث :تطبيقات التكامل

أولاً : المساحة

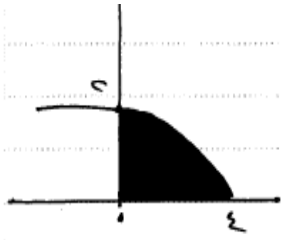
- تدرب (١) ص(٢٩٣)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ − $\sqrt{س}$ ، وكل من محوري السينات والصادات

الحل:

٢ − $\sqrt{س}$ = ٠ ← $\sqrt{س}$ = ٢

⇐ س = ٤



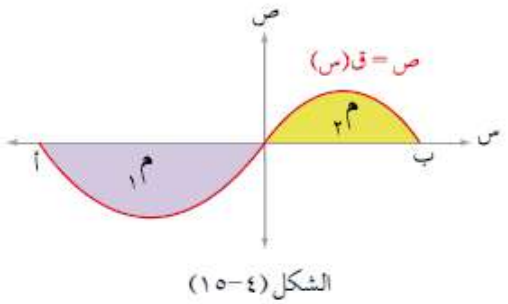
$\int_{٠}^{٤}$ |٢ − $\sqrt{س}$| دس

= [٢س − $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{٠}^{٤}$

= ٨ − $\frac{١٦}{٣}$ = $\frac{٨}{٣}$

- تدرب (٢) ص(٢٩٤)

يمثل الشكل (٤-١٥) المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ، ومحورالسينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت ان مساحة المنطقة (م$_{١}$) تساوي (٨) وحدات مربعة ، ومساحة المنطقة (م$_{٢}$) تساوي (٥) وحدات مربعة فجد $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس.



الشكل (٤-١٥)

الحل:

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس + $\int_{ب}^{ب}$ ق(س) دس

= −٨ + ٥

= −٣

- تدرب (٣) ص(٢٩٤)

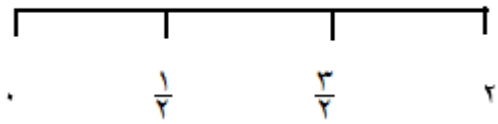
جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) =جتا(πس) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢].

الحل:

جتاπس = ٠ ← πس = $\frac{\pi}{٢}$ ← س = $\frac{١}{٢}$

← πس = $\frac{\pi ٣}{٢}$ ← س = $\frac{٣}{٢}$

+ + + + + − − − − − + + + + +



م = $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}}$ جتاπس + $\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}}$ −جتاπس + $\int_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$ جتاπس

= [$\frac{جاπس}{\pi}$]$_{٠}^{\frac{١}{٢}}$ + [$\frac{-جاπس}{\pi}$]$_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}}$ + [$\frac{جاπس}{\pi}$]$_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

= $\frac{١}{\pi}$ + $\frac{٢}{\pi}$ + $\frac{١}{\pi}$ = $\frac{٤}{\pi}$

- تدرب (٤) ص(٢٩٦)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س)= ٤س^{٢} − ٣س ، هـ(س) = ٥س .

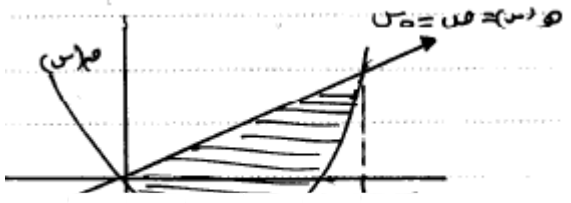
الحل:

ق(س) = هـ(س)

٤س^{٢} − ٣س = ٥س ← ٤س^{٢} − ٨س = ٠

← ٤س(س − ٢) = ٠ ← س = ٠

س = ٢



SALEEM ALSATEEB

م = $\int_{0}^{2}$ (٥س − (٤س^{٢} − ٣س)) دس

= $\int_{0}^{2}$ (٨س − ٤س^{٢}) دس = ٤س^{٢} − $\frac{٤}{٣}$ س^{٣}]$_{0}^{٢}$

= ١٦ − $\frac{٣٢}{٣}$ = $\frac{٤٨}{٣}$ − $\frac{٣٢}{٣}$ = $\frac{١٦}{٣}$

• تدريب (٥) ص(٢٩٧)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س)= ١+ جاس ، هـ(س) = ١ + جتاس في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi٣}{٢}$] .

الحل:

١ +جاس =١ +جتاس ← جاس =جتاس

س = $\frac{\pi٥}{٤}$ ∋ [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi٣}{٢}$]

م = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi٥}{٤}}$ (جاس−جتاس) دس + $\int_{\frac{\pi٥}{٤}}^{\frac{\pi٣}{٢}}$ جتاس−جاس دس

= −جتاس − جاس]$_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi٥}{٤}}$ + جاس+جتاس]$_{\frac{\pi٥}{٤}}^{\frac{\pi٣}{٢}}$

= ($\frac{١+}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) − (−١) + (٠ + ١−) − ($\frac{١-}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

= $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ + ١ − ١ + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$

• تدريب (٦) ص(٢٩٩)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

ق(س)= س^{٢} − ١ ، هـ(س) = ١− س ، ل(س) = ٣ .

الحل:

١- ن(س) = هـ (س)

س^{٢} − ١ = ١ − س ← س^{٢} + س − ٢ = ٠

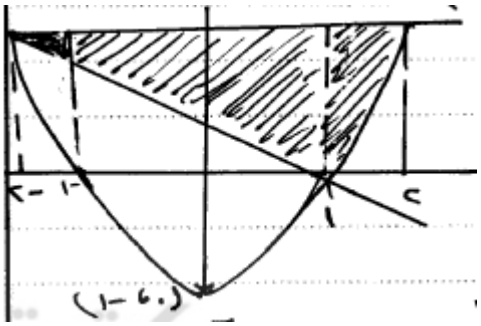
(س + ٢)(س − ١) = ٠ ← س = ١، س = −٢

٢- ن(س) = ل (س)

س^{٢} − ١ = ٣ ← س^{٢} = ٤ ← س = ±٢

٣- هـ(س) = ل (س)

١ − س = ٣ ← س = −٢



م = $\int_{-٢}^{١}$ (٣−١+ س) دس + $\int_{١}^{٢}$ (٣−س^{٢} + ١) دس

= $\int_{-٢}^{١}$ (٢ + س) دس + $\int_{١}^{٢}$ (٤ −س^{٢}) دس

= ٢س − $\frac{س^{٢}}{٢}$]$_{-٢}^{١}$ + ٤س − $\frac{س^{٣}}{٣}$]$_{١}^{٢}$ = $\frac{٣٧}{٦}$

• تدريب (٧) ص(٣٠٠)

حل المسالة الواردة في مقدمة الدرس.

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المستطيل − المساحة تحت المنحنى

مساحة المستطيل = ١٢ × ٢٨ = ٣٣٦

نجد المساحة تحت ن(س) = ٨ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = ٠

س^{٢} = ١٦ ← س = ±٤

م = $\int_{-٤}^{٤}$ |٨ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}| دس = ٨س − $\frac{١}{٦}$ س^{٣}]$_{-٤}^{٤}$

=

(٣٢ + $\frac{٦٤}{٦}$) − (−٣٢ + $\frac{٦٤}{٦}$) = ٦٤ − $\frac{١٢٨}{٦}$ = $\frac{١٢٨}{٦}$

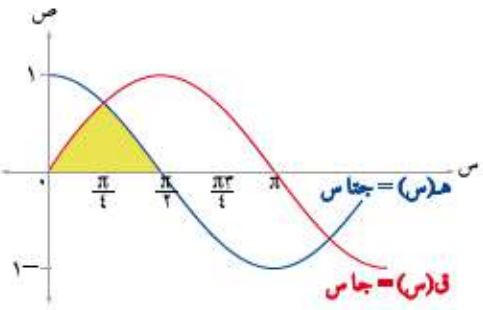
المساحة المظللة = ٣٣٦ − $\frac{١٢٨}{٣}$ = $\frac{٨٨٠}{٣}$

تكلفة الدهان = $\frac{٨٨٠}{٣}$ × ٤٠

تمارين ومسائل ص(٣٠١)

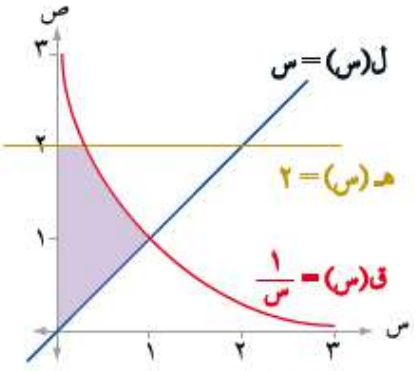
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كل من الأشكال الآتية:

SALEEM ALSATEB



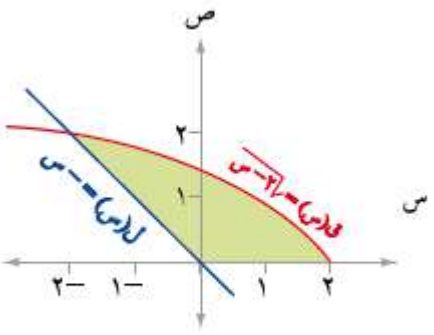
الشكل (٤-٢٤)

الحل: م = $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جاس\,ds + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\,ds$



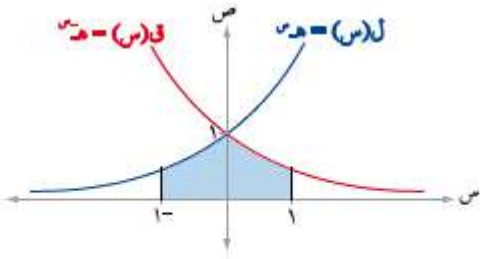
الشكل (٤-٢٥)

الحل: م = $\int_{0}^{\frac{1}{2}} (٢ - س)\,ds + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{١}{س} - س)\,ds$



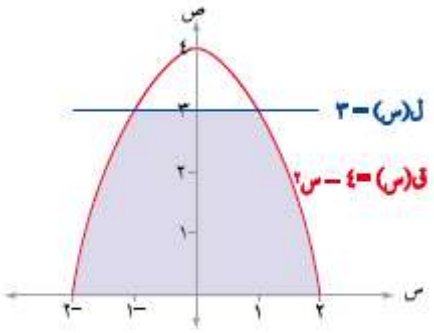
الشكل (٤-٢٦)

الحل: م = $\int_{-2}^{0} (\sqrt{٢ - س} - (-س))\,ds + \int_{0}^{٢} \sqrt{٢ - س}\,ds$



الشكل (٤-٢٧)

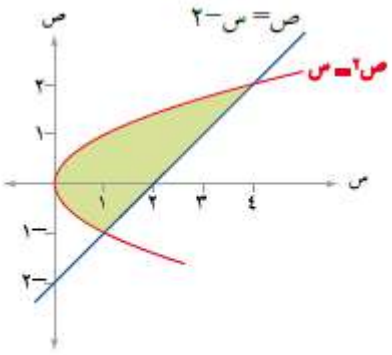
الحل: م = $\int_{-1}^{0} هـ^{-س}\,ds + \int_{0}^{1} هـ^{س}\,ds$



الشكل (٤-٢٨)

الحل:

م = $\int_{-2}^{-1} (٤ - س^{٢})\,ds + \int_{-1}^{1} ٣\,ds + \int_{1}^{٢} (٤ - س^{٢})\,ds$



الشكل (٤-٢٩)

SALEEM ALSATEEB

الحل:

$$م = \int_{0}^{1} (\sqrt{س} + \sqrt{س})\,د س + \int_{1}^{4} (\sqrt{س} - س + ٢)\,د س$$

---

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤س^{٣} – ٤س، ومحور السينات.

الحل:

$$٤س^{٣} - ٤س = ٠ \leftarrow ٤س(س^{٢} - ١)$$

$$س = ٠ \leftarrow س = \pm ١$$

$$م = \int_{-١}^{0} (٤س^{٣} - ٤س)\,د س + \int_{0}^{١} (٤س^{٣} - ٤س)\,د س$$

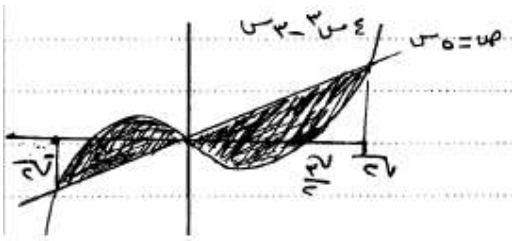
$$م = ٢$$

---

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٤س^{٣} – ٣س ، هـ(س) = ٥س.

الحل: $٤س^{٣} - ٣س = ٥س \leftarrow ٤س^{٣} - ٨س = ٠$

$$٤س(س^{٢} - ٢) = ٠ \leftarrow س = ٠ \quad ،\quad س = \pm \sqrt{٢}$$



م =

$$\int_{-\sqrt{٢}}^{0} (٤س^{٣} - ٣س - ٥س) + \int_{0}^{\sqrt{٢}} (٥س - ٤س^{٣} + ٣س)$$

$$م = ٨$$

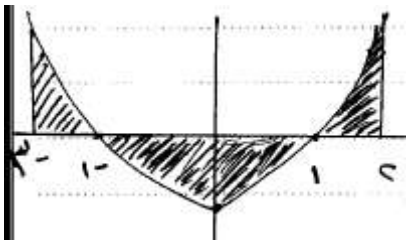
---

٤) اذا كان ق(س) = ٣س^{٢} – ٣، جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = -٣، س = ٢.

الحل:

$$٣س^{٢} - ٣ = ٠ \leftarrow ٣س^{٢} = ٣$$

$$س^{٢} = ١ \leftarrow س = \pm ١$$



$$م = \int_{-٣}^{-١} (٣س^{٢} - ٣) + \int_{-١}^{١} (-٣س^{٢} + ٣) + \int_{١}^{٢} (٣س^{٢} - ٣)$$

$$م = ٢٨$$

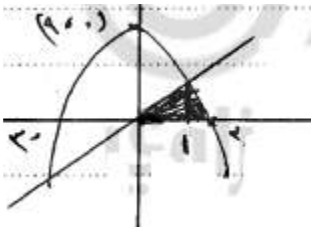
---

٥) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين المستقيم ص = ٨س، ومنحنى الاقتران ص = ٩ – س^{٢} ومحور السينات.

الحل:

$$٩ - س^{٢} = ٨س \leftarrow س^{٢} + ٨س - ٩ = ٠$$

$$(س + ٩)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = -٩ \quad ،\quad س = ١$$



$$م = \int_{0}^{١} ٨س + \int_{١}^{٣} ٩ - س^{٢}$$

$$= ٤س^{٢}\Big]_{0}^{١} + ٩س - \frac{س^{٣}}{٣}\Big]_{١}^{٣}$$

$$= \frac{٤٠}{٣}$$

---

٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانيين ق(س) = جاس، هـ(س) = جا٢س الواقعة في الربع الاول.

الحل:

جاس = جا٢س

جاس – ٢جاسجتاس = ٠

جاس (١ – ٢جتاس) = ٠

جاس = ٠ ← س = ٠

جتاس = $\frac{١}{٢}$ ← س = $\frac{\pi}{٣}$

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{٣}} |جا٢س - جاس| = \int_{0}^{\frac{\pi}{٣}} (جا٢س - جاس)$$

$$م = \frac{١}{٤}$$

SALEEM ALSATEB

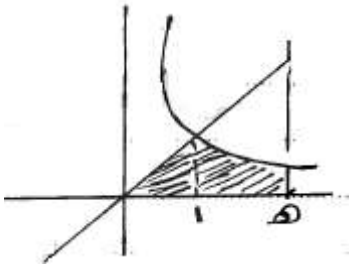
٧) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ ، ومحور السينات والمستقيم ٢س – ص = ٠، والمستقيم هـ – س = صفرا(هـ: العدد النيبيري) .

الحل:

ص = ٢س ، $\frac{٢}{س}$

$\frac{٢}{س}$ = ٢س ← ٢س^{٢} = ٢

س^{٢} = ١ ← س = ±١ س = -١ تهمل



م = $\int_{٠}^{١}$ ٢س دس + $\int_{١}^{هـ}$ $\frac{٢}{س}$ دس

= ١ + ٢ = ٣ وحدات

---

٨) جد مساحة المنطقة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١-س^{٢}، ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ والمستقيم ص=س – ١.

الحل:

ن(س) ، ص = ٥ – س

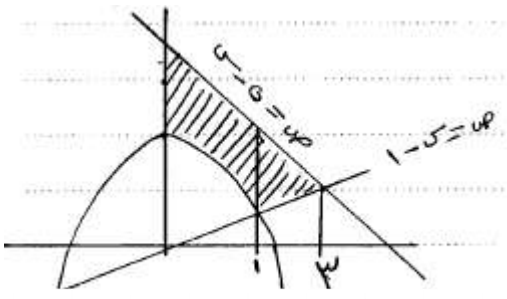
١ – س^{٢} = ٥ – س ← س^{٢} – س + ٤ = ٠ لا تحلل

لايوجد نقاط تقاطع

ن(س) ، ص = س – ١

١ – س^{٢} = س – ١ ← س^{٢} + س – ٢ = ٠

(س + ٢)(س – ١) = ٠ ← س = -٢ ، س = +١



---

٩) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين ق(س) = ١ + س^{٣}، ل(س) = س^{٢} + ٥ والمستقيمين س+ص-١=٠ ، ٣ – س = ٠.

الحل:

١- ن(س) ، ل(س) ← ١ + س^{٣} = س^{٢} + ٥

← س^{٣} – س^{٢} – ٤ = ٠ بالتجريب س = ٢

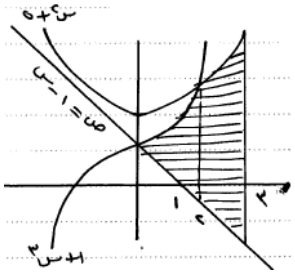
٢- ن(س) ، ص = ١ – س

← ١ + س + س – ١ = ٠ ← س^{٣} + س = ٠

← س(س^{٢} + ١) = ٠ ← س = ٠

٣- ل(س) ، ص = ١ – س

س^{٢} + ٥ = ١ – س ← س^{٢} + س + ٤ = ٠ لايوجد نقاط تقاطع



م =

$\int_{٠}^{٢}$ ١ + س^{٣} – (١ – س) + $\int_{٢}^{٣}$ س^{٢} + ٥ – (١ – س)

= $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٣} + س) دس + $\int_{٢}^{٣}$ (س^{٢} + س + ٤) دس

م = $\frac{١١٣}{٦}$

SALEEM ALSATEEB

١٠) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٤، والمستقيم ص=٢س+٤ ، والمحورين الإحداثيين.

الحل:

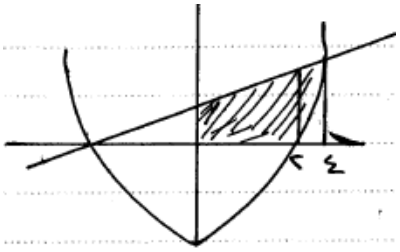
١- ن(س) ، ص = ٢س + ٤

س^{٢} − ٤ = ٢س + ٤ ← س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠

(س − ٤)(س + ٢) = ٠ ← س = ٤ ، س = −٢

٢- ٢س + ٤ = ٠ ← س = −٢

٣- س^{٢} − ٤ = ٠ ← س = ±٢



م = $\int_{-٢}^{٠}$(٢س + ٤)ds + $\int_{٠}^{٤}$(٢س + ٤) − (س^{٢} − ٤)ds

= $\int_{-٢}^{٠}$(٢س + ٤)ds + $\int_{٠}^{٤}$−س^{٢} + ٢س + ٨ds

م = $\frac{٦٤}{٣}$

---

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة ص^{٢}= ٤س والمستقيم س − ص = ٣.

الحل:

ص = س − ٣ ، ص^{٢} = ٤س ← ص = ±٢$\sqrt{س}$

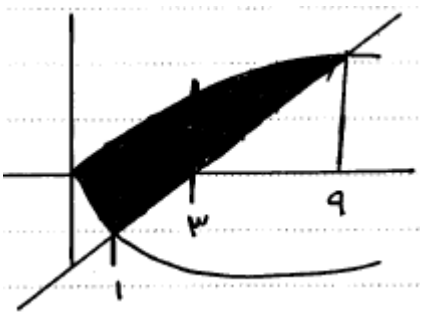
١- س − ٣ مع ٢$\sqrt{س}$

٢$\sqrt{س}$ = س − ٣ بالتربيع

٤س = س^{٢} − ٦س + ٩ ← س^{٢} − ١٠س + ٩ = ٠

(س − ٩)(س − ١) = ٠ ← س = ٩ ، س = ١

٢- س − ٣ مع −٢$\sqrt{س}$ ← س = ٩ ، س = ١

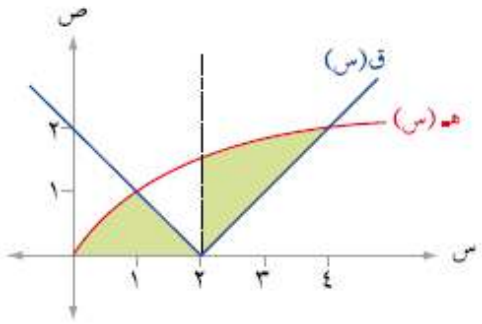


م = $\int_{٠}^{١}$٢$\sqrt{س}$ − (−٢$\sqrt{س}$) + $\int_{١}^{٩}$٢$\sqrt{س}$ − س + ٣

م = $\frac{٦٤}{٣}$

---

١٢) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤ − ٣٠) حيث ق(س) = |س − ٢| ، هـ(س) = $\sqrt{س}$.



الشكل (٤−٣٠)

الحل: م = $\int_{٠}^{١}$$\sqrt{س}$ + $\int_{١}^{٢}$٢ − س + $\int_{٢}^{٤}$($\sqrt{س}$ − س + ٢)

= $\frac{٢٧-٨}{٦}\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

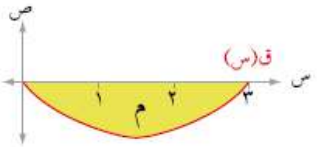
---

١٣) معتمداً الشكل (٤ - ٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٣] اذا كانت مساحة المنطقة (م) تساوي ٦ وحدات مربعة فجد $\int_{٠}^{٣}$(٢ − ن(س))ds.

الحل:

$\int_{٠}^{٣}$٢ − $\int_{٠}^{٣}$ن(س)ds

٢(٣-٠) − (-٦)=٦+٦=١٢



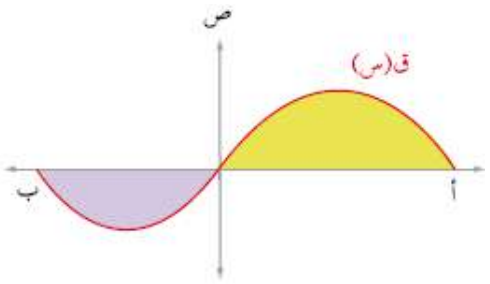
الشكل (٤−٣١)

---

١٤) معتمدا الشكل (٤ - ٣٢) ، اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحمور السينات

SALEEM ALSATEEB

تساوي (١٤) وحدة مربعة وكان $\int_{ب}^{أ} ن(س)$ ءس = ٦ فما قيمة $\int_{أ}^{ب} ن(س)$ ءس.



الشكل (٤-٣٢)

الحل:

$\int_{أ}^{ب} ن(س)$ ءس = ١٤ − ٦ = ٨ ← $\int_{ب}^{أ} ن(س)$ ءس = −٨

ثانياً: المعادلات التفاضلية

- **تدرب (١) ص(٣٠٥)**

حل المعادلة التفاضلية:

(س^{٢} − ٣س)ءص = هـ$^{-ص}$ (س^{٢} + س − ١٢)ءس

الحل:

$\frac{ءص}{هـ^{-ص}} = \int \frac{(س^{٢}+س-١٢)}{س^{٢}-٣س}$ ءس

هـ^{ص} ءص = $\int \frac{(س^{٢}+س-١٢)}{س^{٢}-٣س}$ ءس

= $\int \frac{(س+٤)(س-٣)}{س(س-٣)}$ ءس

= $\int \frac{س+٤}{س}$ ءس = $\int ١ + \frac{٤}{س}$ ءس

هـ^{ص} = س + ٤لـو|س| + جـ

- **تدرب (٢) ص(٣٠٦)**

اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي س $\sqrt{}$ س+٣لـو$_{هـ}$، فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٤) ، حيث ان هـ: العدد النيبيري.

الحل:

ميل المماس × ميل العمودي = -١

$\frac{ءص}{ءس} \times \sqrt{س+٣لـو_{هـ}س} = -١$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س\sqrt{س+٣لـو_{هـ}س}}$

$\int ءص = \int \frac{-١}{س\sqrt{س+٣لـو_{هـ}س}}$ ءس بالتعويض

ص = ٣+لـو$_{هـ}$ س ← ءص = $\frac{١}{س}$ ءس

= $\int \frac{-١}{س\sqrt{ص}} \times س$ ءص = $\int$ − ص$^{-\frac{١}{٢}}$ ءص

= − ٢ص$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

ص = −٢(٣+لـو$_{هـ}$ س)$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

- **تدرب (٣) ص(٣٠٧)**

يسير جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{ع}$ ، حيث ع > ٠ ، ت:تسارع الجسيم، ع: سرعة الجسيم. فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته ٩م/ث، وقطع مسافة (٨٠) متراً في (٤) ثوان، فجد المسافة التي قطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء حركته.

الحل:

ت = $\sqrt{ع}$

$\frac{ءع}{ءن} = \frac{ءع}{\sqrt{ع}}$ ← $\frac{ءع}{ءن} = \sqrt{ع}$

ع$^{-\frac{١}{٢}}$ ءع = $\int$ ءن ← ٢ع$^{\frac{١}{٢}}$ = ن + جـ

ع(٠) = ٩ ← ٢$\sqrt{٩}$ = ٠ + جـ ← جـ = ٦

$\frac{٢}{٢}$ ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{ن+٦}{٢}$ ← تربيع الطرفين ← ع = (٣ + $\frac{ن}{٢}$)^{٢}

$\frac{ءف}{ءن} = (٣+\frac{ن}{٢})^{٢}$ ← ءف = $\int (٣+\frac{ن}{٢})^{٢}$ ءن

ف = $\frac{(٣+\frac{١}{٢}ن)^{٣}}{٣\times\frac{١}{٢}}$ + جـ

عندما ن = ٤ ← ف = ٨٠

$\frac{٢}{٣}(٣+٤\times\frac{١}{٢})^{٣}$ + جـ = ٨٠

$\frac{٢}{٣}(٥)^{٣}$ + جـ = ٨٠ ← جـ + ١٢٥ × $\frac{٢}{٣}$

SALEEM ALSATEB

جـ = ٨٠ − ٢٥٠/٣ = −١٠/٣

ف(ن) = ٢/٣ (١/٢ ن + ٣)^٣ − ١٠/٣

ف(٢) = ٢/٣ (١/٢ ٢ + ٣)^٣ − ١٠/٣

= ٢/٣ × ٤^٣ − ١٠/٣ = ١٢٨/٣ − ١٠/٣ = ١١٨/٣

• تدرب (٤) ص(٣٠٧)

قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) متراً عن سطح الأرض الى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (-١٠) م/ث٢. جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود الى سطح الأرض.

الحل:

ت(ن) = −١٠

ع(ن) = −١٠ ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ← جـ = ٤٠

ع(ن) = −١٠ ن + ٤٠

ف(ن) = ∫(−١٠ ن + ٤٠) د ن = −٥ ن^٢ + ٤٠ ن + جـ

ف(٠) = ٤٥ ← جـ = ٤٥

ف(ن) = −٥ ن^٢ + ٤٠ ن + ٤٥

يعود لسطح الأرض ف(ن) = ٠

−٥ ن^٢ + ٤٠ ن + ٤٥ = ٠

ن^٢ − ٨ ن − ٩ = ٠ ← (ن − ٩)(ن + ١) = ٠

ن = ٩ ن = −١ (مرفوضة)

تمارين ومسائل ص(٣٠٨ - ٣٠٩)

١) حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

أ) س^٣ د ص/د س = ص س

الحل:

س^٣ د ص = ص د س ← ∫ د ص/ص = ∫ د س/س^٣

لـو|ص| = ∫ س^−٣ د س = س^−٢/−٢ + جـ

|ص| = هـ^(−١/٢ س^٢) + جـ

ب) د س − ٣ د ص = جتاس د س

الحل:

٣ د ص = د س − جتاس د س

٣ د ص = (١ − جتاس) د س

∫ ٣ د ص = ∫ (١ − جتاس) د س

٣ ص = (س − جاس) + جـ

ج) هـ^−ص جاس − د ص/د س جتا^٢ س = ٠

الحل:

هـ^−ص جاس = د ص/د س جتا^٢ س

هـ^−ص/جاس = د ص/جتا^٢ س د س

هـ^ص د ص = ظاس قاس د س

∫ هـ^ص د ص = ∫ ظاس قاس د س

هـ^ص = قاس + جـ

د) قا^٢ س/٢ د ص − جا^٢ س/٢ د س = ٠

الحل:

قا^٢ س/٢ د ص = جا^٢ س/٢ د س = ٠

د ص = جا^٢ س/٢ / قا^٢ س/٢ د س ← د ص = جا^٢ س/٢ جتا^٢ س/٢ د س

= (١/٢ جاس)^٢ د س = ١/٤ جا^٢ س د س

∫ د ص = ∫ ١/٤ (١ − جتا٢س) د س

ص = ∫ ١/٨ (١ − جتا٢س) د س = ١/٨ (س − جا٢س/٢) + جـ

هـ) د ص/د س = ١ − ص + س^٢ − ص س^٢

الحل:

د ص/د س = (١ − ص) + س^٢ (١ − ص)

= (١ − ص)(١ + س^٢)

د ص/١−ص = (١ + س^٢) د س ← ∫ د ص/١−ص = ∫ (١ + س^٢) د س

−لـو|١ − ص| = س + س^٣/٣ + جـ

SALEEM ALSATEEB

و) $(س^{٢}+٣س)\frac{ص}{س}=هـ^{-٢ص}(س+١)(س^{٢}-٩)$

الحل:

$$\frac{ص}{هـ^{-٢ص}}=\frac{(س+١)(س^{٢}-٩)}{(س^{٢}+٣س)}س$$

$$هـ^{٢ص}ص=\frac{(س+١)(س-٣)(س+٣)}{س(س+٣)}س$$

$$هـ^{٢ص}ص=\frac{س^{٢}-٢س-٣}{س}س$$

$$\int هـ^{٢ص}ص=\int(س-٢-\frac{٣}{س})س$$

$$\frac{هـ^{٢ص}}{٢}=\frac{س^{٢}}{٢}-٢س-٣لـو|س|+جـ$$

---

٢) آلة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠)دينار، اذا كانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{ن}{ن}=\frac{-٥٠٠}{(١+ن)^{٢}}$ حيث ق: قيمة الآلة بعد ن من شرائها ، فاحسب قيمة هذه الآلة بعد (٣) سنوات من شرائها.

الحل:

$ن=٢٥٠٠$ $ن=٠$ زمن الشراء

المطلوب ق عند ن =٣

$$ن=-٥٠٠(١+ن)^{-٢}ن$$

$$\int ن=-\int ٥٠٠(١+ن)^{-٢}ن$$

$$ن=\frac{-٥٠٠(١+ن)^{-١}}{-١}+جـ=\frac{٥٠٠}{١+ن}+جـ$$

$$ن(٠)=\frac{٥٠٠}{١+٠}+جـ$$

$$٢٥٠٠=٥٠٠+جـ\leftarrow جـ=٢٠٠٠$$

$$ن(ن)=\frac{٥٠٠}{١+ن}+٢٠٠٠$$

$$ن(٣)=\frac{٥٠٠}{١+٣}+٢٠٠٠$$

$$=\frac{٥٠٠}{٤}+٢٠٠٠=٢١٢٥ \text{ دينار}$$

---

٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س}+١}$ حيث هـ: العدد النيبيري.

فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٠ ، ١).

الحل:

$$\frac{ص}{س}=\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س}+١}=\frac{\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}}}{\frac{هـ^{س}+١}{١}}=\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}(هـ^{س}+١)}$$

$$\int هـ^{ص}ص=\int\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١}س$$

بالتعويض ع $=هـ^{س}\leftarrow ع=هـ^{س}س$

$$\int\frac{هـ^{س}}{ع+١}\times\frac{ع}{هـ^{س}}\leftarrow\int\frac{١}{ع+١}ع$$

$$هـ^{ص}=لـو_{هـ}|ع+١|+جـ$$

$$=لـو_{هـ}|هـ^{س}+١|+جـ$$

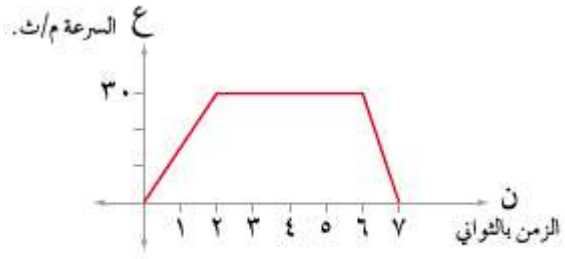
$$(٠ ، ١)\leftarrow هـ^{٠}=لـو_{هـ}|هـ^{٠}+١|+جـ$$

$$جـ=١-لـو_{هـ}|هـ+١|$$

$$هـ^{ص}=لـو_{هـ}|هـ^{س}+١|+١-لـو_{هـ}|هـ+١|$$

---

٤) يمثل الشكل (٤ – ٣٣) العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم فجد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧].



الشكل (٤–٣٣)

الحل:

نجد العلاقة ع(ن) من الرسم

$$ع(ن)=\begin{cases}١٥ن & ، \quad ٢\geq ن\geq ٠\\ ٣٠ & ، \quad ٦\geq ن\geq ٢\\ -٣٠ن+٢١٠ & ، \quad ٧\geq ن\geq ٦\end{cases}$$

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، ٠)،(٦ ، ٣٠)

$$ف(ن)=\int_{٠}^{٢}١٥ن+\int_{٢}^{٦}٣٠ع+\int_{٦}^{٧}(-٣٠ن+٢١٠)$$

$$=\left[\frac{١٥ن^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢}+٣٠(٦-٢)+\left[\frac{-٣٠ن^{٢}}{٢}+٢١٠ن\right]_{٦}^{٧}$$

$$+١٢٠+٣٠(\frac{-٣٠\times٤٩}{٢}+٧\times٢١٠)$$

$$-(\frac{-٣٠\times٣٦}{٢}+٦\times٢١٠)$$

SALEEM ALSATEB

$= ١٥٠ + (-٧٣٥ + ١٤٧٠) - (-٥٤٠ + ١٢٦٠)$

$= ١٥٠ + ٧٣٥ - ٧٢٠ = ١٥٠ + ١٥ = ١٦٥$

ملاحظة يمكن حلها عن طريق المساحة

مساحة شبه المنحرف $= \frac{١}{٢}(٧ + ٤) \times ٣٠ = ١٦٥$

$ف(ن) = \int_{٠}^{٧} ع(ن) \, د ن = ١٦٥$

---

٥) ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقا للعلاقة $ت = -٤ ع^{\frac{٣}{٢}}$ ، حيث $ع > ٠$، ت:تسارع الجسيم، ع:سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤سم/ث. أثبت أن $ف = ٢ن \sqrt{ع}$.

الحل:

$$\frac{د ع}{د ن} = -٤ ع^{\frac{٣}{٢}} \leftarrow \frac{د ع}{ع^{\frac{٣}{٢}}} = -٤ د ن$$

$$\int ع^{-\frac{٣}{٢}} \, د ع = \int -٤ \, د ن$$

$$-٢ ع^{-\frac{١}{٢}} = -٤ن + جـ$$

$ع(٠) = ٤ \leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{٤}} = جـ \leftarrow جـ = -١$

$$\frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن - ١ \leftarrow \sqrt{ع} = \frac{-٢}{-٤ن - ١} = \frac{٢}{٤ن + ١}$$

بالتربيع $ع = \frac{٤}{(٤ن + ١)^{٢}} = ٤(٤ن + ١)^{-٢}$

$$\frac{د ف}{د ن} = ٤(٤ن + ١)^{-٢} \leftarrow ف = \int ٤(٤ن + ١)^{-٢} \, د ن$$

$$= \frac{٤(٤ن + ١)^{-١}}{-١ \times ٤} = \frac{-١}{٤ن + ١} + جـ$$

$ف(٠) = ٠ \leftarrow \frac{-١}{١} = جـ \leftarrow جـ = ١$

$$ف = \frac{-١}{٤ن + ١} + ١ = \frac{٤ن}{٤ن + ١} = ٢ن \left(\frac{٢}{٤ن + ١}\right)$$

$$ف = ٢ن \sqrt{ع}$$

---

٦) قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (-١٠)م/ث^{٢}، اذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء حركته يساوي (٨٠)متراً ، فجد أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم.

الحل:

$ت(ن) = -١٠$

$ع(ن) = \int -١٠ \, د ن = -١٠ ن + جـ$

$ع(٠) = ٤٠ = جـ \leftarrow جـ = ٤٠$

$ع(ن) = -١٠ ن + ٤٠$

$ف(ن) = \int ع(ن) \, د ن = \int -١٠ ن + ٤٠$

$= -٥ن^{٢} + ٤٠ن + جـ$

$ف(١) = ٨٠ = -٥(١)^{٢} + ٤٠ \times ١ + جـ$

$٨٠ = ٣٥ + جـ \leftarrow جـ = ٤٥$

$ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥$

وعندما يصل الجسم الى اقصى ارتفاع $ع(ن) = ٠$

$ع(ن) = -١٠ ن + ٤٠ = ٠ \leftarrow ن = ٤$

$ف(٤) = ١٢٥$

---

٧) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{د ع}{د ن} = ٠,٠٢٥ ع$ حيث ع: عدد السكان، ن: الزمن بالسنوات، اذا علمت ان عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥)، فجد عدد سكانها بعد (٤٠) عاماً.

الحل:

$$\frac{د ع}{د ن} = ٠,٠٢٥ ع$$

$$\int \frac{د ع}{ع} = \int ٠,٠٢٥ \, د ن$$

$لـو_{هـ} |ع| = ٠,٠٢٥ ن + جـ$

$ع(٠) = ٢٠٠٠٠٠$

$لـو_{هـ} ٢٠٠٠٠٠ = جـ$

$لـو_{هـ} ع = ٠,٠٢٥ ن + لـو_{هـ} ٢٠٠٠٠٠$

$ع = هـ^{٠,٠٢٥ ن + لـو_{هـ} ٢٠٠٠٠٠} = ٢٠٠٠٠٠ هـ^{٠,٠٢٥ ن}$

$ع(٤٠) = ٢٠٠٠٠٠ هـ^{٠,٠٢٥ \times ٤٠} = ٢٠٠٠٠٠ هـ^{١}$

أسئلة الوحدة ص (٣١٠ - ٣١٥)

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٤س + ١} \, د س$

SALEEM ALSATEEB

الحل:

$$\int_{٢}^{٣}(٤س+١)^{\frac{١}{٢}}\,ds = \left[\frac{(٤س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤\times\frac{٣}{٢}}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{(١+\frac{٣}{٢}\times٤)}{٦} - \frac{(١+٢\times٤)}{٦}$$

$$= \frac{٧}{٦} - \frac{٩}{٦} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$$

ب) $\int \frac{س قا^{٢}س - س ظا^{٢}س}{\sqrt[٣]{س}}\,ds$

الحل:

$$\int \frac{س(قا^{٢}س - ظا^{٢}س)}{\sqrt[٣]{س}}\,ds$$

$$\int \frac{س\times١}{س^{\frac{١}{٣}}}\,ds = \int س\times س^{\frac{-١}{٣}}\,ds$$

$$= \int س^{\frac{٢}{٣}}\,ds = \frac{٥}{٣}س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

جـ) $\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}\,ds$

الحل:

$$= \int \frac{(س^{٢} - س^{٤})^{\frac{١}{٢}}}{س^{٢}\times س^{٣}}\,ds = \int (\frac{س^{٢} - س^{٤}}{س^{٤}})^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}}$$

$$= \int (\frac{١}{س^{٢}} - ١)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}}$$

$ص = \frac{١}{س^{٢}} - ١ \leftarrow ds = \frac{-٢س}{س^{٤}} \leftarrow ds = \frac{-٢}{س^{٣}}\,ds$

$$= \int ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}} \times \frac{س^{٣}}{-٢} = \frac{-١}{٢} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}$$

$$= \frac{-١}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{-١}{٣}(\frac{١}{س^{٢}} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

د) $\int ظتاس لـو_{هـ} جاس\,ds$

الحل:

$ص = لـو_{هـ} جاس \leftarrow ds = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس ds$

$$= \int ظتاس \times ص \times \frac{ds}{ظتاس} = \int ص\,ds$$

$$= \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ = \frac{(لـو_{هـ} جاس)^{٢}}{٢} + جـ$$

هـ) $\int (س^{٨} - ٤س)^{٦}\,ds$

الحل:

$$= \int (س(س^{٧} - ٤))^{٦}\,ds = \int س^{٦}(س^{٧} - ٤)^{٦}\,ds$$

$ص = س^{٧} - ٤ \leftarrow ds = ٧س^{٦}\,ds$

$$= \int س^{٦} ص^{٦} \frac{ds}{٧س^{٦}} = \frac{١}{٧}\int ص^{٦}\,ds$$

$$\frac{ص^{٧}}{٤٩} + جـ = \frac{(س^{٧} - ٤)^{٧}}{٤٩} + جـ$$

و) $\int قا^{٤}س لـو_{هـ} ظاس\,ds$

الحل:

$ص = ظاس \leftarrow ds = قا^{٢}س\,ds$

$$= \int قا^{٢}س \times قا^{٢}س \times لـو_{هـ} ص \frac{ds}{قا^{٢}س}$$

$$= \int (١ + ظا^{٢}س) \times لـو_{هـ} ص\,ds$$

$$= \int (١ + ص^{٢}) \times لـو_{هـ} ص\,ds$$

$ع = لـو_{هـ} ص \leftarrow dع = \frac{١}{ص}$

$هـ = (١ + ص^{٢}) \leftarrow هـ = ص + \frac{ص^{٣}}{٣}$

$$= (ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) لـو_{هـ} ص - \int \frac{١}{ص}(ص + \frac{ص^{٣}}{٣})$$

$$= (ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) لـو_{هـ} ص - \int ص + \frac{ص^{٢}}{٣}$$ (اكمال الحل)

ز) $\int \sqrt[٣]{٢س^{٥} - س^{٣}}\,ds$ (خطأ في الكتاب)

الحل:

$$\int \sqrt[٣]{س^{٣}(٢س^{٢} - ١)}\,ds = \int س \sqrt[٣]{(٢س^{٢} - ١)}$$

$ص = ٢س^{٢} - ١ \leftarrow ds = ٤س\,ds$

$$= \int س \times ص^{\frac{١}{٣}} \times \frac{ds}{٤س}$$

SALEEM ALKHATEEB

$= \frac{1}{4}\int ص^{\frac{1}{3}}\,ds ص = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}ص^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{3}{16}(2س^{2}-1)^{\frac{4}{3}}+ج$

ح) $\int_{1}^{1} \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س}+2هـ^{س}+1}\,ds$

الحل:

$ص = هـ^{س} \leftarrow \frac{ds ص}{ds س} = هـ^{س} \leftarrow ds س = \frac{ds ص}{ص}$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$س = 1 \leftarrow ص = هـ$

$= \int_{1}^{هـ} \frac{ص}{ص^{2}+2ص+1}\frac{ds ص}{ص} = \int_{1}^{هـ} \frac{1}{ص^{2}+2ص+1}\,ds ص$

$= \int_{1}^{هـ} \frac{1}{(ص+1)^{2}}\,ds ص = \int_{1}^{هـ}(ص+1)^{-2}\,ds ص$

$= \left[\frac{(ص+1)^{-1}}{-1\times 1}\right]_{1}^{هـ} = \left[\frac{1}{ص+1}\right]_{1}^{هـ} = \frac{1}{هـ+1}-\frac{1}{2}$

ط) $\int جا(لـو_{هـ} س)\,ds س$

الحل:

$ق = جا(لـو_{هـ} س) \leftarrow ds ق = جتا لـو_{هـ} س \times \frac{1}{س}$

$ds هـ = ds س \leftarrow هـ = س$

$= س جا لـو_{هـ} س - \int جتا لـو_{هـ} س \times \frac{1}{س} \times س$

$= س جا لـو_{هـ} س - \int جتا لـو_{هـ} س\,ds س$

$\int جتا لـو_{هـ} س\,ds س \Leftarrow$

$ق = جتا لـو_{هـ} س \leftarrow ds ق = -جا لـو_{هـ} س \times \frac{1}{س}$

$ds هـ = ds س \leftarrow هـ = س$

$\int جا(لـو_{هـ} س)\,ds س = س جا(لـو_{هـ} س)$

$-(س جتا لـو_{هـ} س) - \int -جا(لـو_{هـ} س) \times \frac{1}{س} \times س$

$\int جا(لـو_{هـ} س)\,ds س = س جا(لـو_{هـ} س)$

$-س جتا لـو_{هـ} س - \int جا لـو_{هـ} س$

$2\int جا لـو_{هـ} س = س جا لـو_{هـ} س - س جتا لـو_{هـ} س$

ي) $\int \frac{س^{3}}{2س^{4}+س^{8}}\,ds س$

الحل:

$= \int \frac{س^{3}}{س^{8}(\frac{2}{س^{4}}+1)}\,ds س = \int \frac{1}{س^{5}(\frac{2}{س^{4}}+1)}\,ds س$

$ص = \frac{2}{س^{4}}+1 \leftarrow ds ص = \frac{-2\times 4 س^{3}}{س^{8}}$

$ds ص = \frac{-8}{س^{5}}\,ds س$

$\int \frac{1}{س^{5}\times ص}\times\frac{-س^{5}}{8}\,ds ص = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{ص}\,ds ص$

$-\frac{1}{8}لـو|ص|+ج = -\frac{1}{8}لـو\left|\frac{2}{س^{4}}+1\right|+ج$

ك) $\int \frac{\sqrt{4س+12}-3}{\sqrt{س+3}+3}\,ds س$

الحل:

$= \int \frac{2\sqrt{س+3}-3}{\sqrt{س+3}+3}\,ds س$

$ص = \sqrt{س+3} \leftarrow ds ص = \frac{1}{2\sqrt{س+3}}\,ds س$

$\leftarrow ds ص \times 2ص = ds س$

$= \int \frac{2ص-3}{ص+3}\times 2ص\,ds ص = \int \frac{4ص^{2}-6ص}{ص+3}\,ds ص$

بالقسمة الطويلة

$= \int (4ص-18)\,ds ص + \int \frac{54}{ص+3}\,ds ص$

$= \frac{4ص^{2}}{2} - 18ص + 54 لـو|ص+3|+ج$

$= 2(\sqrt{س+3})^{2} - 18(\sqrt{س+3}) + 54 لـو\left|\sqrt{س+3}+3\right|+ج$

ل) $\int لـو_{هـ}(س^{2}+2س)\,ds س$

الحل:

SALEEM ALSATEB

ن =لـو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٢س) ← ن$'$ = $\frac{٢س+٢}{س^{٢}+٢س}$

ن$'$هـ = ن$'$س ← هـ = س

= س لـو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٢س) - $\int \frac{٢س+٢}{س^{٢}+٢س}$ بالقسمة الطويلة

= $\int$ ٢ن$'$س + $\int \frac{-٢س}{س^{٢}+٢س}$ كسور جزئية

$\frac{أ}{س}+\frac{ب}{س+٢} = \frac{أ(س+٢)+ب س}{س(س+٢)}$ (اكمال الحل)

---

٢) حل المعادلة التفاضلية ٣ظاص - $\frac{ن'ص}{ن'س}$قاس = ٠

الحل:

٣ظاص = $\frac{ن'ص}{ن'س}$قاس

$\frac{٣ظاص}{ن'ص} = \frac{قاس}{ن'س}$ ← $\frac{٣قاس}{ن'ص} = \frac{ن'س}{قاس}$

$\frac{١}{٣}\int$ ن'ص × $\frac{جتاص}{جاص} = \int$ جتاس ن'س

$\frac{١}{٣}\int$ ظتاص ن'ص = $\int$ جتاس ن'س

$\frac{١}{٣}$لـو|جاس| =جاس+جـ

---

٣) اذا كان ص^{٢} =لـو$_{هـ}$ س ص - هـ$^{س^{٢}}$ ، فجد $\frac{ن'ص}{ن'س}$.

الحل:

٢ص ص$'$ = $\frac{س \times ص' + ص}{س ص}$ - ٢س هـ$^{س^{٢}}$

٢ص ص$'$ = $\frac{ص'}{ص} + \frac{١}{س}$ - ٢س هـ$^{س^{٢}}$

٢ص ص$'$ - $\frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س}$ - ٢س هـ$^{س^{٢}}$

ص$'$(٢ص - $\frac{١}{ص}$) = $\frac{١}{س}$ - ٢س هـ$^{س^{٢}}$

ص$'$ = $\frac{\frac{١}{س} - ٢س هـ^{س^{٢}}}{٢ص - \frac{١}{ص}}$

---

٤) اذا كان م(س) = س^{٣} + ب س^{٢} - ١ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س)، ق(٢) = ٢٤، فجد قيمة الثابت ب.

الحل:

م$'$(س) = ٣س^{٢} + ٢ب س = ن(س)

ن(٢) = ١٢ + ٤ب = ٢٤ ← ٤ب = ١٢ ← ب = ٣

---

٥) اذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س)، وكان $\int_{-١}^{٣}$ (م(س) - هـ(س))ن'س = ١٢ ، فجد $\int_{٠}^{٤}$ ٢س م(س)ن'س + $\int_{٠}^{٤}$ ٢س هـ(س)ن'س.

الحل:

م(س) - هـ(س) =جـ ثابت

$\int_{-١}^{٣}$ جـ ن'س = ١٢ ← جـ × ٤ = ١٢ ← جـ = ٣

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س م(س)ن'س + $\int_{٠}^{٤}$ ٢س هـ(س)ن'س

= $\int_{٠}^{٤}$ ٢س (م(س) - هـ(س))ن'س

= $\int_{٠}^{٤}$ ٢س × ٣ن'س = $\int_{٠}^{٤}$ ٦س ن'س

= ٣س^{٢}]$_{٠}^{٤}$ = ٣ × ١٦ = ٤٨

---

٦) اذا كان $\int_{٣}^{١}$ (٢ن(س) + $\int_{٠}^{٢}$ ٢م ٢ن'س)ن'س = ١٤ ، فجد $\int_{١}^{٣}$ ٣ن(س)ن'س.

الحل:

$\int_{٣}^{١}$ (٢ن(س) + [٢م]$_{٠}^{٢}$)ن'س = ١٤

= $\int_{٣}^{١}$ (٢ن(س) + ٤)ن'س = ١٤

= ٢$\int_{٣}^{١}$ ن(س)ن'س + ٤(١ - ٣) = ١٤ ← ٢$\int_{٣}^{١}$ ن(س)ن'س - ٨ = ١٤

$\int_{٣}^{١}$ ن(س)ن'س = $\frac{٢٢}{٢}$ = ١١

← ٣$\int_{١}^{٣}$ ن(س)ن'س = ٣ × -١١ = -٣٣

SALEEM ALSATEB

٧) اذا كان ن(س) = س^{٢} − $\int_{٠}^{١}$(٣س^{٢} − ٢ص)دص فجد ن$'$(س).

الحل:

ن$'$(س) = ٢س − ٣س^{٢} − $\int_{٠}^{١}$٢صدص

= ٢س − ٣س^{٢} + ص^{٢} $]_{٠}^{١}$ = س − ٣س^{٢} + ١

---

٨) اذا كان $\int_{-١}^{١}$(٤ن(س) + ٣)دس = ١٨ ، $\int_{١}^{٤}$٢ن(س)دس = ٢٠ ، فجد $\int_{٤}^{-١}$(٢س − ن(س))دس.

الحل:

$\int_{-١}^{١}$٤ن(س)دس + $\int_{-١}^{١}$٣دس = ١٨ = ٤$\int_{-١}^{١}$ن(س) + ٦ = ١٨

$\int_{-١}^{١}$ن(س) = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

$\int_{١}^{٤}$ن(س)دس = ٢٠ ← $\int_{١}^{٤}$ن(س)دس = ١٠

$\int_{٤}^{-١}$٢س − $\int_{٤}^{-١}$ن(س)دس

= س^{٢} $]_{٤}^{-١}$ − ($\int_{٤}^{١}$ن(س)دس + $\int_{١}^{-١}$ن(س)دس)

= (١ − ١٦) − (−١٠ + ٣)

= −١٥ − (−١٣) = −١٥ + ١٣ = −٢

---

٩) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = أ $\sqrt[٣]{ع}$ ، ع > ٠، حيث ت:تسارع الجسيم، ع: سرعة الجسيم. اذا تحرك الجسيم من السكون فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨سم/ث بعد (٣) ثوان نت بدء حركته.

الحل:

$\frac{دع}{دن}$ = أ ع$^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{دع}{ع^{\frac{١}{٣}}}$ = أدن ← ع$^{\frac{٢}{٣}}$ = أدن

$\frac{٣}{٢}$ ع$^{\frac{٢}{٣}}$ = أن + جـ لكن ع(٠) = ٠ ← جـ = ٠

$\frac{٣}{٢}$ ع$^{\frac{٢}{٣}}$ = أن

ع(٣) = ٨ ← $\frac{٣}{٢}$ (٨)$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٣ × أ

$\frac{٣}{٢}$ × ٤ = ١٣ ← ٦ = ١٣ ← أ = ٢

---

١٠) اذا كام ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{١ - جتا^{٢}س}$ فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(٠، \frac{\pi}{٤})$.

الحل:

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{هـ^{\frac{١}{٢}ص}}{جا^{٢}س}$ ← $\frac{دص}{هـ^{\frac{١}{٢}ص}}$ = $\frac{دس}{جا^{٢}س}$

$\int$ هـ$^{-\frac{١}{٢}ص}$دص = $\int$قتا^{٢}س دس

−٢هـ$^{-\frac{١}{٢}ص}$ = −ظتاس + جـ

−٢هـ^{٠} = −١ + جـ ← جـ = −١

−٢هـ$^{-\frac{١}{٢}ص}$ = −ظتاس − ١ ← هـ$^{-\frac{١}{٢}ص}$ = $\frac{١}{٢}$ظتاس + $\frac{١}{٢}$

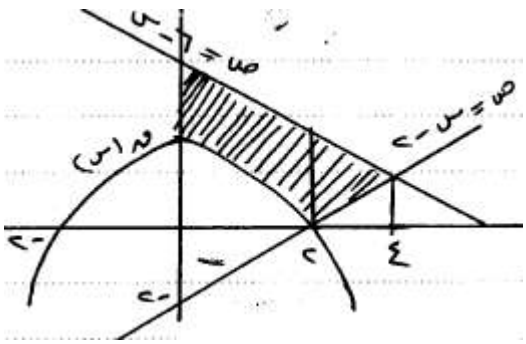
−$\frac{١}{٢}$ص = لـو($\frac{١}{٢}$ظتاس + $\frac{١}{٢}$)

ص = −٢لـو|$\frac{١}{٢}$ظتاس + $\frac{١}{٢}$|

---

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة في الربع الأول والمحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = ٤ − س^{٢}، ومحور الصادات والمستقيمين ص = س -٢، ص = ٦ − س.

الحل:



SALEEM ALSATEEB

نجد نقاط التقاطع

١- ب مع س=٢

$٤ - س^{٢} = س - ٢ = س^{٢} + س - ٦ = ٠$

$س = -٣$ (مرفوض) ، $س = ٢$

٢- ب مع $٦ - س$

$٤ - س^{٢} = ٦ - س \leftarrow س^{٢} - س + ٢ \neq ٠$

لا تحلل لايوجد نقاط تقاطع

٣- $ص = س - ٢$ مع $ص = ٦ - س$

$س - ٢ = ٦ - س \leftarrow ٢س = ٨ \leftarrow س = ٤$

$م = \int_{٠}^{٢} (٦ - س - ٤ + س^{٢}) + \int_{٢}^{٤} ٦ - س - س + ٢$

$م = \int_{٠}^{٢} (٢ - س + س^{٢}) + \int_{٢}^{٤} ٨ - ٢س$

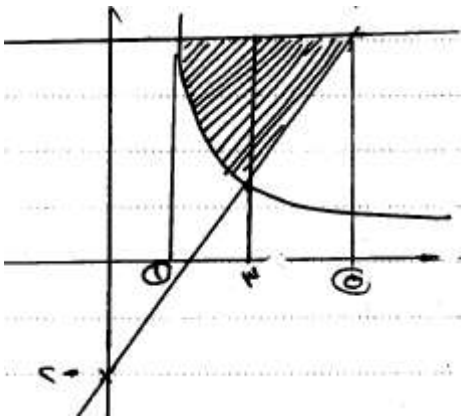
..... الجواب $م = \frac{٢٦}{٣}$

---

١٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

$ق(س) = \frac{٣}{س}$ ، $هـ(س) = س - ٢$ ، $ل(س) = ٣$.

الحل:



ب، هـ

$\frac{٣}{س} = س - ٢ \leftarrow س^{٢} - ٢س = ٣$

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠ \leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -١$

ل، ب $\leftarrow \frac{٣}{س} = ٣ \leftarrow س = ١$

ل، هـ $\leftarrow س - ٢ = ٣ \leftarrow س = ٥$

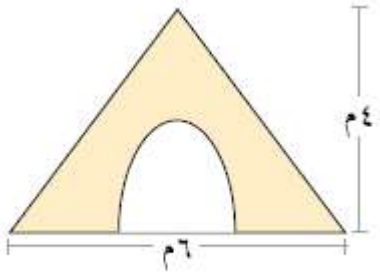
$م = \int_{١}^{٣} (٣ - \frac{٣}{س}) دس + \int_{٣}^{٥} ٣ - س + ٢$

$٣س - ٣لو|س| \Big]_{١}^{٣} + ٥س - \frac{س^{٢}}{٢} \Big]_{١}^{٣}$

..... الجواب $م = ٨ - ٣لو_{هـ}$

---

١٣) الشكل (٤ – ٣٤) يمثل الواجهة الامامية لأخد المباني، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران $ب(س) = ٢ - \frac{١}{٢}س^{٢}$ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة؟ اذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار.



الشكل (٤–٣٤)

الحل:

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث - المساحة تحت المنحنى

$= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ -$ المساحة تحت المنحنى

$= ٢ - \frac{١}{٢}س^{٢} = ٠ \leftarrow \frac{١}{٢}س^{٢} = ٢$

$٢س^{٢} = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$م = \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{١}{٢}س^{٢}) دس = ٢س - \frac{١}{٢}\frac{س^{٣}}{٣} \Big]_{-٢}^{٢}$

$(\frac{٨}{٦} - ٤) - (\frac{٨}{٦} + ٤-) = \frac{٨}{٦} - ٤ + \frac{٨}{٦} - ٤$

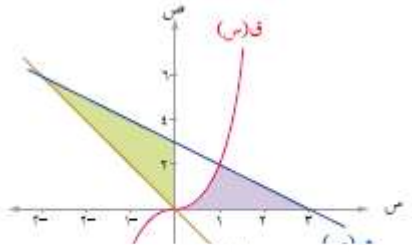
$٨ - \frac{١٦}{٦} = \frac{٨}{٣} - ٨ = \frac{٢٤-٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$

المساحة المظللة $= ١٢ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٠}{٣}$

التكلفة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٢٠}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ =ينار

---

١٤) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبينتين في الشكل (٤ – ٣٥) حيث $ق(س) = ٢س^{٣}$ ، $هـ(س) = ٣ - س$، $ل(س) = -٢س$.



الشكل (٤–٣٥)

SALEEM ALSATEEB

الحل:

تقاطع ق(س) مع هـ(س)

$٢س^{٣} = ٣ - س \leftarrow ٢س^{٣} + س + ٣ = ٠$

$س = ١$ بالتجريب

$ق'(س) \Leftarrow ٢س^{٣} = -٢س \leftarrow ٢س^{٣} + ٢س = ٠$

$٢س(س^{٢} + ١) = ٠ \leftarrow س = ٠$

$هـ'(س) \Leftarrow ٣ - س = -٢س$

$\leftarrow ٢س = س - ٣ \leftarrow س = -٣$

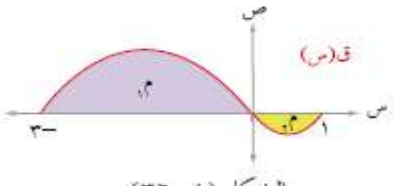
$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ - س + ٢س) + \int_{٠}^{١} ٢س^{٣} + \int_{١}^{٣} ٣ - س$

$٣س + \frac{س^{٢}}{٢}]_{-٣}^{٠} + س^{٣}]_{٠}^{١} + ٣س - \frac{س^{٢}}{٢}]_{١}^{٣}$

$\frac{٩}{٢} + ١ + \frac{١}{٢} - ٩ - \frac{٩}{٢} + ٣ = ٧$

---

١٥) اعتمادا على الشكل (٤ – ٣٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [-٣ ، ١] حيث $م_{١}$ = (١٠) وحدات مربعة، $م_{٢}$ = (٤) وحدات مربعة، فجد $\int_{-٣}^{١} س ق(س) (١ - س^{٢}) ؛س$.



الشكل (٤–٣٦)

الحل:

$ص = ١ - س^{٢} \leftarrow ؛ص = -٢س ؛س$

$س = ٠ \leftarrow ص = ١$

$س = ٢ \leftarrow ص = -٣$

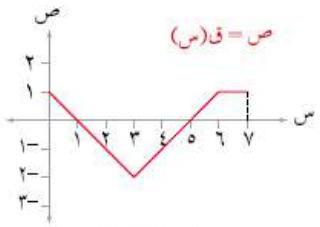
$\int_{١}^{-٣} س ق(ص) \times \frac{؛ص}{-٢س} = \frac{-١}{٢} \int_{-٣}^{١} ق(ص) ؛ص$

$= \frac{-١}{٢} \int_{-٣}^{١} ق(ص) ؛ص$

$= \frac{-١}{٢} \times (١٠ + -٤) = \frac{-١}{٢} \times ٦ = -٣$

---

١٦) اعتمد على الشكل (٤ – ٣٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في ايجاد كل مما يأتي:



الشكل (٤–٣٧)

أ) $\int_{٠}^{٧} ق(س) ؛س$

الحل: مساحة المثلث = $= \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ٤ = ٤$

مساحة شبه المنحرف $\frac{١}{٢}(٢ + ١) \times ١ = \frac{٣}{٢}$

$= \int_{٠}^{٧} ق(س) ؛س = \frac{١}{٢} - ٤ + \frac{٣}{٢} = \frac{٤}{٢} - ٤ + ٢ = -٢$

ب) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)| ؛س$

الحل:

$= \int_{٠}^{٧} |ق(س)| ؛س = |\frac{٤}{٢}| + |-٤| = ٢ + ٤ = ٦$

ج) $\left| \int_{٠}^{٧} ق(س) ؛س \right|$

الحل:

$= \left| \int_{٠}^{٧} ق(س) ؛س \right| = |٢ - ٤| = |-٢| = ٢$

---

١٧) جد كلا من التكاملات الآتية:

أ) $\int جا \sqrt{س} جتا^{٣} \sqrt{س} ؛س$

الحل:

$ص = \sqrt{س} \quad ، \quad ص^{٢} = س \quad ، \quad ٢ص ؛ص = ؛س$

$\int جا ص جتا^{٣} ص \times ٢ص ؛ص$

$ع = ٢ص \leftarrow ؛ع = ٢ ؛ص$

SALEEM ALSATEEB

هـ $= \int$ جاص جتا^{٣} ص

وبالتعويض ع $=$ جتاص $\leftarrow$ دع $=$ $-$جاص دص

هـ $= \int$ جاص ع$^{٣} \times \frac{دع}{-جاص}$

$= هـ = -\int ع^{٣} دع = \frac{-ع^{٤}}{٤} + جـ = \frac{-جتا^{٤} ص}{٤}$

$\frac{-٢ص جتا^{٤} ص}{٤} - \int \frac{-٢ جتا^{٤} ص}{٤} + جـ$

$\frac{-ص جتا^{٤} ص}{٢} + \frac{١}{٢} \int جتا^{٤} ص + جـ$

$\frac{-ص جتا^{٤} ص}{٢} + \frac{١}{٢} \int \frac{١}{٢} (١ + جتا ٢ص))^{٢}$

..... اكمل الحل

ب) $\int س \sqrt[٣]{س^{٢} + ١}$ دس

الحل:

ص $= س^{٢} + ١ \leftarrow$ دص $= ٢س دس$

$\int س ص^{\frac{١}{٣}} \times \frac{دص}{٢س} = \frac{١}{٢} \int ص^{\frac{١}{٣}} دص$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} = \frac{٣}{٨} (س^{٢} + ١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{قا^{٤} س}{ظا^{٢} س - ٣ظاس + ٢}$ دس

الحل:

ص $=$ ظاس $\leftarrow$ دص $=$ قا^{٢} س

س $= ٠ \leftarrow$ ظا$٠ = ٠$

س $= \frac{\pi}{٦} \leftarrow$ ظا$\frac{\pi}{٦} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{قا^{٢} س \times قا^{٢} س}{ص^{٢} - ٣ص + ٢} \times \frac{دص}{قا^{٢} س} = \int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{١ + ص^{٢}}{ص^{٢} - ٣ص + ٢}$

بالقسمة الطويلة $\int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} ١ + \int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{٣ص - ١}{ص^{٢} - ٣ص + ٢}$

$\frac{٣ص - ١}{ص^{٢} - ٣ص + ٢} = \frac{٣ص - ١}{(ص - ٢)(ص - ١)}$

$= \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص - ١} = \frac{أ(ص - ١) + ب(ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص - ١)}$

ص $= ١ \leftarrow ٢ = -ب \leftarrow ب = -٢$

ص $= ٢ \leftarrow ٥ = أ$

$= \int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} ١ دص + \int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{٥}{ص - ٢} + \int_{\frac{١}{\sqrt{٣}}}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{-٢}{ص - ٢}$

$= ص + ٥ لو|ص - ٢| - ٢ لو|ص - ٢|$

د) $\int \frac{ظتاس قتاس}{٩ - ٤قتا^{٢} س}$ دس

الحل:

ص $=$ قتاس $\leftarrow$ دص $= -$قتاس ظتاس دس

$\int \frac{ظتاس قتاس}{٩ - ٤ص^{٢}} \times \frac{-دص}{ظتاس قتاس} = \int \frac{-دص}{٩ - ٤ص^{٢}}$

$\frac{-١}{٩ - ٤ص^{٢}} = \frac{-١}{(٣ - ٢ص)(٣ + ٢ص)}$

$= \frac{أ}{٣ - ٢ص} + \frac{ب}{٣ + ٢ص} = \frac{أ(٣ + ٢ص) + ب(٣ - ٢ص)}{(٣ - ٢ص)(٣ + ٢ص)}$

ص $= \frac{٣}{٢} \leftarrow -١ = ١٦أ \leftarrow أ = \frac{-١}{٦}$

ص $= \frac{-٣}{٢} \leftarrow -١ = ٦ب \leftarrow ب = \frac{-١}{٦}$

$\int \frac{\frac{-١}{٦}}{٣ - ٢ص} + \int \frac{\frac{-١}{٦}}{٣ + ٢ص}$

.....

هـ) $\int_{٢}$ س^{٤} هـ س^{٣} $+$ لـو هـ س دس

الحل:

$\int_{٢}$ س$^{٤} \times$ هـ س$^{٣} \times$ هـ لـو هـ س دس

$= \int_{٢}$ س$^{٤} \times$ هـ س$^{٣} \times$ س دس $= \int_{٢}$ س^{٥} هـ س^{٣} دس

ص $=$ س$^{٣} \leftarrow$ دص $= ٣$ س^{٢} دس

س $= ٠ \leftarrow$ ص $= ٠$ ، س $= ٢ \leftarrow$ ص $= ٨$

$= \int_{٠}^{٨}$ س^{٥} هـ ص $\times \frac{دص}{٣س^{٢}}$

SALEEM ALSATEEB

$= \frac{1}{3}\int_{0}^{8} س^{3} هـ^{ص}\, د ص = \frac{1}{3}\int_{0}^{8} ص هـ^{ص}\, د ص$

تكامل بالأجزاء $ن = ص \leftarrow د ن = د ص$

$د هـ = هـ^{ص} \leftarrow هـ = هـ^{ص}$

$= \frac{1}{3}(ص هـ^{ص}]_{0}^{8} - \int_{0}^{8} هـ^{ص}\, د ص)$

$= \frac{1}{3}(ص هـ^{ص}]_{0}^{8} - هـ^{ص}]_{0}^{8}) = \frac{1}{3}(٧ هـ^{8} + ١)$

و) $\int جا٣س قتاس\, د س$

الحل:

$= \int \frac{جا٣س}{جاس}\, د س = \int \frac{جا(س+٢س)}{جاس}\, د س$

$= \int \frac{جاس جتا٢س}{جاس}\, د س + \int \frac{جتاس + جا٢س}{جاس}\, د س$

$= \int جتا٢س\, د س + \int \frac{جتاس + ٢جاس جتاس}{جاس}\, د س$

$= \int جتا٢س\, د س + \int ٢جتا^{٢}س\, د س$

$= \frac{جا٢س}{٢} + \int ٢(\frac{١}{٢}(١ + جتا٢س))\, د س$

$= \frac{جا٢س}{٢} + (س + \frac{جا٢س}{٢}) + ج$

ز) $\int \frac{٢جا٣س جتاس}{جتا٢س}\, د س$

الحل:

$= \int \frac{٢(\frac{١}{٢}(جا(٣س + س) + جا(٣س - س)))}{جتا٢س}\, د س$

$= \int \frac{جا٤س}{جتا٢س} + \frac{جا٢س}{جتا٢س}\, د س$

$= \int \frac{٢جا٢س جتا٢س}{جتا٢س} + جا٢س$

$= \int ٢جا٢س + \int ظا٢س$

$= -\frac{جتا٢س}{٢} + \frac{١}{٢} لـو|ا س|$

ح) $\int \frac{س + جاس}{١ + جتاس}\, د س$

الحل:

$\int \frac{س}{١ + جتاس} + \int \frac{جاس}{١ + جتاس}\, د س$

$= \int \frac{س}{١ + ٢جتا^{٢}\frac{١}{٢}س - ١} + \int \frac{جاس}{١ + ٢جتا^{٢}\frac{١}{٢}س - ١}\, د س$

$= \int \frac{س}{٢جتا^{٢}\frac{١}{٢}س} + \int \frac{جاس}{٢جتا^{٢}\frac{١}{٢}س}\, د س$

$= \frac{١}{٢}\int س قا^{٢}\frac{١}{٢}س + \int \frac{٢جا\frac{س}{٢}جتا\frac{س}{٢}}{٢جتا^{٢}\frac{س}{٢}}\, د س$

$\frac{١}{٢}\int س قا^{٢}\frac{١}{٢}س \leftarrow$ تكامل بالأجزاء

$ن = س \leftarrow د ن = د س$

$د هـ = قا^{٢}\frac{١}{٢}س \leftarrow هـ = ٢ظا\frac{١}{٢}س$

$= \frac{١}{٢}(٢س ظا\frac{س}{٢} - \int ٢ظا\frac{١}{٢}س) + \int ظا\frac{س}{٢}\, د س$

$= س ظا\frac{س}{٢} - \int ظا\frac{١}{٢}س\, د س + \int ظا\frac{س}{٢}\, د س$

$= س ظا\frac{س}{٢} + ج$

ط) $\int \frac{٤ لـو_{هـ} س}{(س - ١)}\, د س$

الحل:

$= \int ٤(س - ١)^{-٢} لـو_{هـ} س\, د س$

$ن = لـو_{هـ} س \leftarrow د ن = \frac{١}{س}$

$د هـ = ٤(س - ١)^{-٢} \leftarrow هـ = \frac{٤(س-١)^{-١}}{-١}$

$= \frac{-٤}{س-١} لـو_{هـ} س - \int \frac{-٤}{س(س-١)}\, د س$ كسور جزئية

$= \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} = \frac{أ(س-١) + ب س}{س(س-١)}$

$س = ١ \leftarrow -٤ = ب$

$س = ٠ \leftarrow -٤ = -أ \leftarrow أ = ٤$

$= \frac{-٤}{س-١} لـو_{هـ} س + \int \frac{٤}{س} + \int \frac{-٤}{س-١}$

ي) $\int (ظاس + قاس)^{١٠} قاس\, د س$

الحل:

ص $= ظاس + قاس$

SALEEM ALSATEEB

← ص ع =قا^{٢} س+قاس ظاس
= قاس(قاس+ظاس) ←قاس × ص
= $\int$ ص^{١٠} × قاس $\frac{\text{ص ع}}{\text{قاس} \times \text{ص}}$ = $\int$ ص^{٩} ع ص
= $\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠}$ + جـ = $\frac{(\text{ظاس}+\text{قاس})^{١٠}}{١٠}$ + جـ

---

١٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة (٤) بدائل، واحد فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله ، وكان $\int_{-١}^{١}$ ن(س) ع س = هـ $^{\text{جا}٢\text{س}}$ − ٤ لـو$_{\text{هـ}}$ جتاس − ١ ،فإن ق(٠) = :

أ) ١ ب) هـ ج) ٢هـ **د) ٢**

---

(٢) اذا كان $\int_{-١}^{١}$ ن(س) ع س = س^{٥} + جاس + ٣ ، فغن ق(س) تساوي :

أ) ٥س^{٤} + جتاس ب) $\frac{١}{٦}$ س^{٦} − جتاس + ٣س + جـ

ج) ٥س^{٤} - جتاس د) $\frac{١}{٦}$ س^{٦} − جتاس

---

(٣)اذا كان ق اقتراناً معرفاً على الفترة [-١ ، ٢] و كان ن(س) ≥ ٤ ≥ ١ فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٢}$ ٢ن(س) ع س ؟

أ) ٦ **ب) ٢٤** ج) ٣ د) ١٢

---

(٤) اذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ ٢ن(س) ع س = ١٠ ، $\int_{-٢}^{١}$ ن(س) ع س = ٤ ،

فإن $\int_{١}^{٣}$ (٢ن(س) + ٣) ع س تساوي:

أ) ٥ ب) ١٤ **ج) ٨** د) ٢٤

---

(٥) $\int_{١}^{آ}$ ن ′(هـ(س)) × هـ ′(س) ع س يساوي:

أ) ق(ب) − ق(أ) **ج) ق(هـ (ب)) − ق(هـ (أ))**

ب) ق′(ب) − ق′(أ) د) ق′(هـ (ب)) − ق′(هـ (أ))

---

(٦) اذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق و كان $\int_{-١}^{٢}$ (م(س) − هـ(س)) ع س = ١٢ فما قيمة $\int_{-١}^{٢}$ س (م(س) − هـ(س)) ع س ؟

أ) ٣ ب) ٤,٥ **ج) ١٢** د) ١٨

---

(٧) اذا كان $\int_{١}^{٩}$ س ن(س) ع س = ٤ ، فما قيمة $\int_{٠}^{٢}$ هـ$^{\text{س}}$ ن($\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}$) ع س ؟

أ) ١ **ب) ٨** ج) ٢ د) ٤

---

(٨) اذا كان ن(س)=هـ^{٢} + لـو$_{\text{هـ}}$ جاس فإن ق′(س) تساوي:

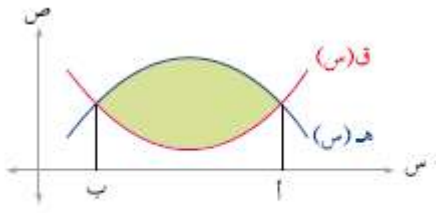
أ) ظتاس ب) -ظتاس

ج) ٢هـ + ظتاس د) هـ^{٢} + ظتاس

---

(٩) معتمدا الشكل (٤ – ٣٨)، اذا علمت ان مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانيين ق ، هـ تساوي (٦) وحدات مربعة وكان $\int_{١}^{آ}$ ن(س) ع س = ١٠ ، فإن $\int_{١}^{آ}$ هـ(س) ع س = :

أ) ١٠ ب) ٦ **ج) ١٦** د) -٤



الشكل (٤–٣٨)

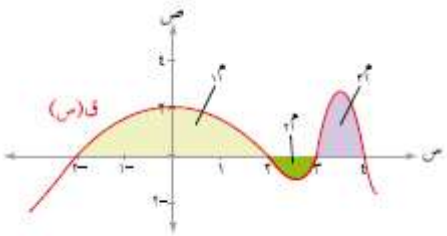
---

(١٠) معتمداً الشكل (٤ – ٣٩) الذي يبين المساحة بين منحنى ق(س) ومحور السينات، اذا علمت أن م$_{١}$ = ٤,٨

SALEEM ALSATEB

وحدات مربعة، م٢ = ٠,٨ وحدة مربعة، م٢ = ٢ وحدة مربعة، فإن $\int_{-٢}^{٤} ق(س) ٤س$ تساوي:

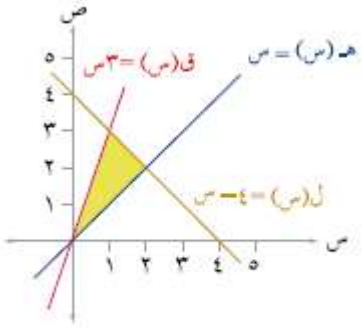
أ) ٥,٦ ب) ٦ ج) ٦,٨ د) ٧,٦



الشكل (٤-٣٩)

---

(١١) معتمداً الشكل (٤ – ٤٠) ما مساحة المنطقة المظللة؟



الشكل (٤-٤٠)

أ) $\int_{٠}^{١} (٣س - س) ٤س$

ب) $\int_{٠}^{١} ٢س ٤س + \int_{١}^{٢} (٤ - ٢س) ٤س$

ج) $\int_{٠}^{١} ٢س ٤س + \int_{١}^{٢} (٤ - س) ٤س$

د) $\int_{١}^{٢} (٣س - س) ٤س$

SALEEM ALSATEEB

إعداد الأستاذ :

سليم الخطيب / 0786230407

www.facebook.com/saleemal5ateeb

Email:saleem_al5ateeb@yahoo.com

أكاديمية سليم الخطيب

مركز زهرة النظم الثقافي

الوحدات - شارع مادبا - قرب ألبان ضبعة - فوق مطعم OK

هاتف : 06 477 33 55 - موبايل : 0787 800 852