قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة (١)

$$\int أ \, ءس = أ س + جـ$$

حيث أ ، جـ ثوابت .

القاعدة (٢)

$$\int س^{ن} \, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$$

القاعدة (٣)

$$\int \left(ق_{١}(س) \pm ق_{٢}(س) \pm ق_{٣}(س)\right) ءس = \int ق_{١}(س)ءس \pm \int ق_{٢}(س)ءس \pm \int ق_{٣}(س)ءس + جـ$$

القاعدة (٤)

$$\int (أس + ب)^{ن} \, ءس = \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$$

القاعدة (٥)

$$\int جتاس \, ءس = جاس + جـ$$
$$\int جاس \, ءس = -جتاس + جـ$$
$$\int قا^{٢}س \, ءس = ظاس + جـ$$
$$\int قتا^{٢}س \, ءس = -ظتاس + جـ$$
$$\int (قاس ظاس) \, ءس = قاس + جـ$$
$$\int (قتاس ظتاس) \, ءس = -قتاس + جـ$$

ويمكن تعميم قواعد تكامل الاقتران الدائري كما يلي :

$$\int جتا أس \, ءس = \frac{١}{أ} جا أس + جـ$$
$$\int جا أس \, ءس = -\frac{١}{أ} جتا أس + جـ$$
$$\int قا^{٢} أس \, ءس = \frac{١}{أ} ظا أس + جـ$$
$$\int قتا^{٢} أس \, ءس = -\frac{١}{أ} ظتا أس + جـ$$
$$\int (قا أس ظا أس) \, ءس = \frac{١}{أ} قا أس + جـ$$
$$\int (قتا أس ظتا أس) \, ءس = -\frac{١}{أ} قتا أس + جـ$$

☠ لايمكن توزيع التكامل على عمليتي الضرب والقسمة

اوجد قيمة كل مما يلي :

(١)	$\int س^{٣} \, ءس$
(٢)	$\int س^{٥} \, ءس$
(٣)	$\int س \, ءس$
(٤)	$\int س^{-٦} \, ءس$
(٥)	$\int س^{-٤} \, ءس$
(٦)	$\int س^{-٢} \, ءس$
(٧)	$\int س^{\frac{٢}{٥}} \, ءس$
(٨)	$\int س^{\frac{١}{٣}} \, ءس$
(٩)	$\int س^{\frac{٥}{٧}} \, ءس$
(١٠)	$\int س^{\frac{-٥}{٧}} \, ءس$
(١١)	$\int س^{\frac{-٣}{٤}} \, ءس$
(١٢)	$\int \sqrt[٣]{س} \, ءس$
(١٣)	$\int \sqrt[٥]{س^{٢}} \, ءس$
(١٤)	$\int -٢س^{٤} \, ءس$
(١٥)	$\int ٤س^{٣} \, ءس$
(١٦)	$\int -٢س^{-٣} \, ءس$
(١٧)	$\int (٤س^{٣} + ٣س^{٢} + ٥) \, ءس$
(١٨)	$\int (\sqrt[٣]{س} + س + س^{-٦} + ٧س - ٤) \, ءس$
(١٩)	$\int \left((س-٥)^{٢} + \frac{٨}{س^{٢}}\right) ءس$

(٢٠)	$\int (س+3)^{2}\, ءس$
(٢١)	$\int (2س+3)^{2}\, ءس$
(٢٢)	$\int \left(\frac{2}{3}س+3\right)^{4} ءس$
(٢٣)	$\int س^{2}\left(3س^{4}-3س+4\right) ءس$
(٢٤)	$\int (6-4س)^{6}\, ءس$
(٢٥)	$\int \sqrt[3]{6س-4}\; ءس$
(٢٦)	$\int \sqrt{5-3س}\; ءس$
(٢٧)	$\int \sqrt[5]{6-2س}\; ءس$
(٢٨)	$\int \frac{س^{2}-1}{س+1}\, ءس$
(٢٩)	$\int \frac{س^{3}-8}{س-2}\, ءس$
(٣٠)	$\int (س+3)(س-4)\, ءس$
(٣١)	$\int (2س+3)(س^{3}-4)\, ءس$
(٣٢)	$\int \frac{3س^{3}-س^{2}+س}{س}\, ءس$
(٣٣)	$\int \frac{5س^{3}-3س^{2}+س}{س^{5}}\, ءس$
(٣٤)	$\int \frac{3}{س^{3}}\, ءس$
(٣٥)	$\int \frac{6}{س^{-2}}\, ءس$
(٣٦)	$\int س\sqrt{س}\; ءس$
(٣٧)	$\int س^{2}\sqrt[3]{س}\; ءس$
(٣٨)	$\int \sqrt[3]{س^{2}}\sqrt{س}\; ءس$
(٣٩)	$\int \frac{س-1}{\sqrt{س}-1}\, ءس$
(٤٠)	$\int \frac{س-1}{\sqrt[3]{س}}\, ءس$
(٤١)	$\int \frac{س^{2}+4س+3}{س+1}$
(٤٢)	$\int س^{5}\left(\frac{2س+1}{س}\right)^{5} ءس$
(٤٣)	$\int س^{6}\left(4+\frac{1}{س}\right)^{6} ءس$
(٤٤)	$\int س^{4}\left(\frac{2\sqrt{س}+1}{س^{2}}\right)^{2} ءس$
(٤٥)	$\int س\sqrt[3]{\frac{5-3س}{س^{3}}}\, ءس$
(٤٦)	$\int \frac{\sqrt{س}+1}{س+\sqrt{س}}\, ءس$
(٤٧)	$\int \frac{س^{2}-س}{\sqrt{س}-1}\, ءس$
(٤٨)	$\int \frac{س^{3}-4س^{2}}{\sqrt{س}-2}\, ءس$
(٤٩)	$\int \frac{س^{2}-9س}{\sqrt{س}-3}\, ءس$
(٥٠)	$\int \frac{(2-س)^{3}}{س\sqrt{س}}\, ءس$
(٥١)	$\int \frac{3}{(7س+5)^{4}}\, ءس$
(٥٢)	$\int س^{4}\left(5-\frac{3}{س}\right)^{4} ءس$
(٥٣)	$\int (4س^{2}-12س+9)^{4}\, ءس$
(٥٤)	$\int (9س^{2}+6س+1)^{5}\, ءس$
(٥٥)	$\int (4س^{2}+20س+25)^{5}\, ءس$
(٥٦)	$\int \frac{(س+3)^{2}-9}{س}\, ءس$

(٥٧)	$\int \frac{(\text{هـ}-٢)^{٢}-٤}{\text{هـ}}\,\text{ءهـ}$
(٥٨)	$\int \text{س}\sqrt[٣]{\frac{٥}{\text{س}^{٣}}-\frac{١}{\text{س}^{٢}}}\,\text{ءس}$
(٥٩)	$\int \sqrt{\text{س}}\,\sqrt[٦]{\frac{٤}{\text{س}^{٢}}-\frac{٣}{\text{س}^{٣}}}\,\text{ءس}$
(٦٠)	$\int \frac{١}{\text{س}}\sqrt[٣]{٦\text{س}^{٤}-\text{س}^{٣}}\,\text{ءس}$
(٦١)	$\int \frac{٥\text{س}}{\sqrt{٧\text{س}+٣}+\sqrt{٢\text{س}+٣}}\,\text{ءس}$
(٦٢)	$\int \frac{٢\text{س}}{\sqrt{٦\text{س}-٥}-\sqrt{٤\text{س}-٥}}\,\text{ءس}$
(٦٣)	$\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{٣\text{س}-٤}-\sqrt{٨\text{س}+١}}\,\text{ءس}$
(٦٤)	$\int \sqrt[٣]{\text{س}}\left(\sqrt[٣]{\text{س}}+\frac{٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right)\text{ءس}$
(٦٥)	$\int (\text{جاس}-\text{جتاس})\,\text{ءس}$
(٦٦)	$\int (\text{جاس}-\text{قتا}^{٢}\text{س}+٦\text{قاس ظاس})\,\text{ءس}$
(٦٧)	$\int (\text{جا٤س}+\text{جتا٣س})\,\text{ءس}$
(٦٨)	$\int (\text{قا}^{٢}\text{س}+٢\text{قا٢س ظا٢س}+\text{جتا٨س})\,\text{ءس}$
(٦٩)	$\int \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$
(٧٠)	$\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$
(٧١)	$\int \text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$
(٧٢)	$\int \text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$
(٧٣)	$\int \text{ظتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$
(٧٤)	$\int \text{جاس جتاس}\,\text{ءس}$
(٧٥)	$\int \text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$
(٧٦)	$\int \frac{١}{١+\text{جاس}}\,\text{ءس}$
(٧٧)	$\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$
(٧٨)	$\int (\text{قا}^{٢}\text{س}-\text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$
(٧٩)	$\int \frac{٣}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$
(٨٠)	$\int \frac{١-\text{جتا٢س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{ءس}$
(٨١)	$\int \left(\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}-\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$
(٨٢)	$\int \frac{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{ءس}$
(٨٣)	$\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{جا}^{٣}\text{س جتاس}}\,\text{ءس}$
(٨٤)	$\int (\text{قاس}+\text{ظاس})^{٢}\,\text{ءس}$
(٨٥)	$\int \left(\frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}-\frac{٤}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\right)\text{ءس}$
(٨٦)	$\int (\text{جتاس}+\text{جاس})^{٢}\,\text{ءس}$
(٨٧)	$\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}}{١+\text{جتا٢س}}\,\text{ءس}$
(٨٨)	$\int (\text{ظتاس}-\text{قتاس})^{٢}\,\text{ءس}$
(٨٩)	$\int \frac{\text{جاس}+\text{جتا}^{٢}\text{س}}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$
(٩٠)	$\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$
(٩١)	$\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}-\text{جا}^{٤}\text{س}}$
(٩٢)	$\int \text{قاس}(\text{ظاس}+\text{جتاس})\,\text{ءس}$

(٩٣)	$\int$ جا٦س جا٤س ءس
(٩٤)	$\int$ جا٣س جا٧س ءس
(٩٥)	$\int$ جتا٣س جتا٧س ءس
(٩٦)	$\int$ جتا٢س جتا٦س ءس
(٩٧)	$\int \frac{١}{\text{قاس} - ١}$ ءس
(٩٨)	$\int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}}$ ءس
(٩٩)	$\int$ (جتا^{٤}س − جا^{٤}س) ءس
١٠٠	$\int \sqrt{١ + \text{جا٢س}}$ ، ٠ $\le$ س $\le \frac{\pi}{٣}$
١٠١	$\int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$ ءس
١٠٢	$\int \frac{١}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}}$ ءس
١٠٣	$\int$ (جاس + ٢جتاس)^{٢} ءس
١٠٤	$\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ ءس

جا(أ + ب) = جاأجتاب + جتاأ جاب
جا(أ − ب) = جاأجتاب − جتاأ جاب
جتا(أ + ب) = جتاأجتاب − جاأ جاب
جتا(أ − ب) = جتاأجتاب + جاأ جاب

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)
جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

تذكر :

جاس جاص = $\frac{١}{٢}$(جتا(س − ص) − جتا(س + ص))
جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$(جا(س + ص) + جا(س − ص))
جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$(جتا(س + ص) + جتا(س − ص))

جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جا $\frac{١}{٢}$(س − ص)
جاس + جاص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جتا $\frac{١}{٢}$(س − ص)
جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جا $\frac{١}{٢}$(س − ص)
جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(س + ص) جتا $\frac{١}{٢}$(س − ص)

معكوس المشتقة

ليكن ق(س)=٢س ، فما هو الاقتران الذي مشتقته ٢س؟

نلاحظ أن هناك مجموعة من الاقترانات التي مشتقتها ٢س مثل : س^{٢}+٣ ، س^{٢}-٥ ، ... وبشكل عام فان م(س)=س^{٢}+جـ

اذا كان ق(س) اقترانا متصلاً على [أ ،ب] فان م(س) يسمى معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) اذا كان مَ(س)=ق(س) لكل س∈ (أ، ب)

السؤال الأول : بين أن الاقتران م(س) هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) في كل مما يلي :

(١) م(س) =جاس+جتاس, ق(س) =جتاس–جاس

(٢) م(س) =جا^{٢}س+جتا٢س, ق(س) = –جا٢س

(٣) م(س) =ظاس – س, ق(س) =ظا^{٢}س

(٤) م(س) = (جاس+جتاس)^{٢}, ق(س) = ٢جتا٢س

لايجاد معكوس المشتقة للاقتران ق(س) نكامل الاقتران ق(س)

م(س)=∫ق(س)ءس

اوجد معكوساً لمشتقة الاقترانات التالية :

١. ق(س) =جتاس
٢. ق(س) = ٤س^{٣}
٣. ق(س) = ٧
٤. ق(س) =قا^{٢}س + ٥س^{٤}
٥. ق(س) = قاس (ظاس+قاس)
٦. ق(س) =ظا^{٢}س

ملاحظات مهمة :

- لكل اقتران مثل ق(س) هناك عدد لانهائي من معكوس مشتقته .
- حاصل طرح معكوسي مشتقة الاقتران ق(س) هو دائماً ثابت .
- مشتقة حاصل طرح معكوسي مشتقة الاقتران ق(س) هو دائماً صفر.

١. اذا كان م(س) . هـ(س) هما معكوسي مشتقة الاقتران ق(س) فاجب عما يلي :

- $\frac{ء}{ءس}$ (٤هـ(س) – م(س))
- $\frac{ء}{ءس}$ (٧هـ(س) – ٤(س)) – ق(س)

٢. اذا كان م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران ق(س) وكان م(س)=س^{٣}+ ب س^{٢} -١ وكان ق(٢)=٢٤ فاوجد قيمة الثابت ب.

٣. اذا كان م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران ق(س) وكان م(س)=س^{٢}+ ب س^{٣} -٢ وكان قَ(٢)=٥ فاوجد قيمة الثابت ب.

٤. اذا كان م(س)=س^{٣}+٥س^{٢}-٣س+جـ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) فجد ق(-٢)

٥. اذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان م(س)=٣س^{٢}-٢س+٥ وكان هـ(٢)=٤ فاوجد قاعدة الاقتران هـ(س).

ان العملية التي تربط بين التفاضل والتكامل هي عملية عكسية حيث :

$$\frac{د}{دس}\int ق(س)\,دس = ق(س)$$

اي ان مشتقة التكامل هو الاقتران الاصلي

وكذلك :

$$\int ق'(س)\,دس = ق(س) + جـ$$

اي ان تكامل المشتقة هو الاقتران الاصلي + جـ

تدريبات متنوعة

١. اذا كان $ق(س) = \int \frac{س+٢}{س^{٣} - س}\,دس$ أوجد $ق'(٢)$

٢. إذا كانت $ص = \int \frac{\sqrt{٣ + س + س^{٢}}}{س+١}\,دس$ أوجد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$

٣. اذا كان $\int ق(س)\,دس = س^{٤} + س + ٤$ اوجد $ق(١)$، $ق'(١)$، $ق''(١)$

٤. اذا كان $\int ق(س)\,دس = جا^{٢}٢س + ظاس + جـ$ أوجد $ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

٥. إذا كان $\int (ق(س) + س^{٢})\,دس = ٣س^{٣} - ٢س^{٢} + ٦$ أوجد $ق'(٢)$

٦. إذا كان $\int (ق(س) - أس^{٢})\,دس = س^{٣} - بس + جـ$ ، وكان $ق'(-٢) = -٢٤$ أوجد $ق'(٣)$

٧. $\int ق'(س)\,دس = س^{٢} + ٣س + ٣$ ، $ق(١)=٢$ أوجد $ق(٤)$

٨. اذا كان $\int (ق'(س) + ٢س)\,دس = س^{٣} + أس^{٢} + ١$ وكان $ق'(١) = ٥$ ، $ق(٢) = ٧$ أوجد قيمة كل مما يلي : أ ، $ق(٠)$ ، $ق(٤)$

٩. إذا كان $ق''(س) = جاس$ ، $ق'(\pi) = -١$ ، $ق(\pi) = ٠$ فاوجد قاعدة الاقتران ق(س)

١٠. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص) هو $٣س^{٢} + ٢س + ٧$ وكان $ق(٢)=٨$ فأوجد قاعدة الاقتران ق(س)

١١. إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١،٥) يساوي ٤ ، $ق'(س) = ٢أس - ٨$ وكان فأوجد قاعدة الاقتران ق(س)

١٢. إذا كان للاقتران ق(س) نقطة حرجة هي (٠،٥)
وكان ق′(س) = ٦س + ٢ أوجد قاعدة الاقتران ق(س)

١٣ . اذا كان

∫ ق(س) دس = جاس − جتاس + ث ، أثبت أن   ق($\frac{\pi}{2}$) − ق′($\frac{\pi}{2}$) = ٢

١٤. اذا كان قً(س)=-٤جتا٢س وكان للاقتران
ق(س)قيمة صغرى محلية قيمتها -٢ عند س= $\frac{\pi}{2}$
فجد قاعدة الاقتران ق.

١٥. اذا كان

س ق(س) − ∫ ٣س ق(س) دس = ∫ ق′(س) دس

وكان ق(٢)=٤ ، اوجد قَ(٢)

١٦ . اذا كان

∫ ٢ق′(س) دس = ٢س + جاس − ∫ جتاس ق′(س) دس

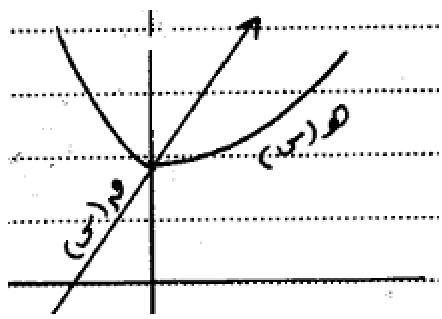
فجد قَ(٠)

١٧. اذا كان

∫ (ق′(س) + س^{٢}) دس = ٢س^{٣} + بس^{٢} + ٢

وكان قَ(١)=٤ ، ق(٢)=٦ فجد ق(-١)

١٨. الشكل المجاور يمثل منحنيي الاقترانين ق(س) .
هـ(س) فاذا علمت ان ق(س)=٣س+٤ ، هَـ(س)=٢س-٣
فما قيمة هـ(٥)



التكامل المحدود وخصائص التكامل المحدود

اذا كان ق(س) اقترانا متصلاً على [أ . ب] . م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق فيسمى $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$ بالتكامل المحدود حيث

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{ب} م'(س)\,دس = [م(س)]_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ)$$

احسب قيمة كل مما يلي :

(١) $\int_{1}^{2} (2س - 2)\,دس$

(٢) $\int_{1}^{2} (س^{3} + 4س + 5)\,دس$

(٣) $\int_{0}^{1} (5س^{4} + 8س^{3} + 4س - 3)\,دس$

(٤) $\int_{1}^{4} \left(\frac{4}{س^{3}} + \frac{3}{\sqrt{س}} - 4\right)\,دس$

(٥) $\int_{0}^{1} (س\sqrt{س})\,دس$

(٦) $\int_{1}^{4} \frac{1 + \sqrt{س}}{\sqrt{س}}\,دس$

(٧) اذا كان ق(-٢)=-٨ ، ق(٣)=٥ فجد $\int_{-2}^{3} ق'(س)\,دس$

(٨) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} جتاس\,دس$

(٩) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (جتاس - جاس)\,دس$

(١٠) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} ظتاس\,قتاس\,دس$

(١١) $\int_{1}^{2} \left(\int_{1}^{2} (س^{2} + 2ص)\,دص \right) دس$

قاعدة :

$\int_{أ}^{ب} جـ\,دس = جـ(ب - أ)$ ، حيث جـ عدد حقيقي.

(١٢) $\int_{3}^{7} 5\,دس$

(١٣) $\int_{-4}^{6} 4\,دس$

(١٤) $\int_{1}^{ب} 5\,دس$ = ١ اوجد ب

(١٥) $\int_{ب}^{3} 4\,دس$ = ١٢ اوجد ب

(١٦) $\int_{-ب}^{ب} 4\,دس$ = ٤ اوجد ب

(١٧) $\int_{3-ب}^{2ب+1} 5\,دس$ = ١٢ اوجد ب

(١٨) $\int_{4}^{ب} س\,دس$ = ١٢ اوجد ب

(١٩) $\int_{-1}^{3} \left(3س^{2} - 2\int_{0}^{ب} 3ص\,دص \right) دس$ = ١٢ اوجد قيمة ب

(٢٠) اوجد اقتران كثير من الدرجة الاولى بحيث

$\int_{-1}^{1} ق(س)\,دس = 4$ ، $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 2$

(٢١) اذا كان ن عدد صحيح موجب فما هي مجموعة قيمة ن التي تجعل المساواة صحيحية .

$$\int_{-١}^{١} س^{ن} ءس = ٢ \int_{٠}^{١} س^{ن} ءس$$

(٢٢) اذا كان

$$\int_{١}^{ب} \sqrt{س}\, ءس = ٥ \qquad \int_{١}^{ب} \frac{٢س}{\sqrt{س}}\, ءس$$

(٢٣) اوجد اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية بحيث

ق(٠)=ق(١)=٠ و $\int_{٠}^{١} ق(س)ءس = ١$

خصائص التكامل المحدود

اولاً : الخاصية الخطية :

$$\int_{أ}^{ب} جـ ق(س)ءس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)ءس$$

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)ءس$$

ثانياً:

$$\int_{ب}^{ب} ق(س)ءس = ٠$$

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس = - \int_{ب}^{أ} ق(س)ءس$$

ثالثاً : خاصية الاضافة

اذا كان ق قابلاً للتكامل على فترة مغلقة تحوي الاعداد ا ، ب ، جـ فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)ءس$$

رابعاً : خاصية المقارنة

١.اذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ، ب] ، ق(س)≥٠ لكل س∈[أ، ب] فان $\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس \geq ٠$

٢.اذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ، ب] ، ق(س)≤٠ لكل س∈[أ، ب] فان $\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس \leq ٠$

٣.اذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ، ب] ، ق(س)≥هـ(س) لكل س∈[أ، ب] فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)ءس \geq \int_{أ}^{ب} هـ(س)ءس$$

تمارين متنوعة على خصائص التكامل

(١) اذا كان

$$\int_{١}^{٣} هـ(س)ءس = ٢ ، \int_{١}^{٣} ق(س)ءس = ٨$$

فاوجد قيمة كل مما يلي :

$$\int_{١}^{٢} (ق(س) + هـ(س))ءس$$

$$\int_{١}^{٢} \left(٢ق(س) - \frac{هـ(س)}{٢}\right)ءس$$

$$\int_{١}^{٢} (٢ق(س) - ٢س + ٣هـ(س))ءس$$

(٢) اذا كان

$$\int_{١}^{٢} (٢ق(س) + ٢س)ءس = ٩$$

$$\int_{١}^{٢} (ق(س) + ٣س^{٢})ءس$$

(٣)

$$\int_{٣}^{٣} س\sqrt{س^{٢} + ١}\, ءس$$

(٤) اوجد قيمة ب بحيث أن :

$$\int_{٢}^{ب} (٢\text{س} + ٢)\, ء\text{س} = ٠$$

(٥) اوجد قيمة ب بحيث أن

$$\int_{-٢}^{ب} (٣\text{س}^{٢} - ٤)\, ء\text{س} = ٠$$

(٦) اذا كان $\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ٦$

فاوجد قيمة كل مما يلي :

$$\int_{١}^{٣} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٥)\, ء\text{س}$$

$$\int_{٣}^{١} (٤\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{س})\, ء\text{س}$$

$$\int_{٣}^{١} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - ٣\text{س}^{٢}\right) ء\text{س}$$

(٧) اذا كان

$$\int_{-٣}^{٧} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ٥ ، \int_{-٣}^{٠} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ١٠$$

فاوجد $\int_{٠}^{٧} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س}$

(٨) اذا كان

$$\int_{١}^{٥} ٢\text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ٨ ، \int_{١}^{٧} ٣\text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = -٦$$

جـ د $\int_{٥}^{٧} ٤\text{ق}(\text{س})\, ء\text{س}$

(٩)

$$\int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = -٥ ، \int_{١}^{٣} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\, ء\text{س} = ٢$$

جـ د $\int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س}$

(١٠) اذا كان

$$\int_{١}^{٥} ٢\text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ١٨ ، \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ١٣$$

جـ د $\int_{٣}^{٢} (\text{ق}(٢\text{س} - ١) - ٣)\, ء\text{س}$

(١١) اذا كان $\int_{-١}^{٢} (٣\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٤)\, ء\text{س} = ٣$

وكان $\int_{٣}^{١} (\text{ق}(\text{س} + ١) - ٣\text{س}^{٢})\, ء\text{س} = ٢٧$

اوجد $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س}$

(١٢) اذا كان $\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, ء\text{س} = ٤$ وكان

$$\int_{٠}^{٣} (ب\,\text{ق}(٣ - \text{س}) + ٦\text{س} + ١)\, ء\text{س} = ٤٢$$

اوجد قيمة الثابت ب

(١٣) اذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل عى مجاله وكان

$$\int_{-١}^{٢} (\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\, ء\text{س} = ١٢$$

فأوجد كلاً مما يلي :

$$\int_{-١}^{٢} ٢\text{س}\ \text{م}(\text{س})\, ء\text{س} + \int_{٢}^{-١} ٢\text{س}\ \text{هـ}(\text{س})\, ء\text{س}$$

$$\int_{-١}^{٢} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{م}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\, ء\text{س}$$

(١٤) اذا كان م(س) ، هـ(س) هما معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان

$$\int_{0}^{3} \left(\text{س م(س)} - \text{س هـ(س)}\right) \text{ءس} = 18$$

اوجد

$$\int_{1}^{4} \text{س هـ(س) ءس} + \int_{4}^{1} \text{س م(س) ءس}$$

(١٥) اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 & 0 \le \text{س} \le 2 \\ \text{س} + 10 & 2 < \text{س} \le 4 \end{cases}$$

فاوجد قيمة كل مما يلي

$$\int_{1}^{2} \text{ق(س) ءس} \quad ، \quad \int_{0}^{2} \text{ق(س) ءس}$$

$$\int_{0}^{4} \text{ق(س) ءس} \quad ، \quad \int_{2}^{4} \text{ق(س) ءس}$$

$$\int_{1}^{3} \text{ق(س) ءس}$$

(١٦) اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^3 & 0 \le \text{س} \le 2 \\ 2\text{س} + 2 & 2 < \text{س} \le 6 \end{cases}$$

اوجد

$$\int_{1}^{4} \text{ق(س) ءس}$$

(١٧) $\int_{0}^{4} |2\text{س} - 2| \, \text{ءس}$

(١٨) $\int_{1}^{3} \sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4} \, \text{ءس}$

(١٩) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + \text{جتا}2\text{س}} \, \text{ءس}$

(٢٠) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\text{جاس}| \, \text{ءس}$

(٢١) $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}2\text{س}}{2}} \, \text{ءس}$

(٢٢) $\int_{2}^{3} \sqrt{9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4} \, \text{ءس}$

(٢٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \text{جا}2\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{ءس}$

(٢٤) $\int_{-1}^{2} 3\text{س}|\text{س}| \, \text{ءس}$

(٢٥) $\int_{0}^{3} [\tfrac{1}{2}\text{س} + 4] \, \text{ءس}$

(٢٦) $\int_{0}^{2} \left[3 - \frac{1}{2}\text{س}\right] \text{ءس}$

(٢٧) $\int_{2}^{4} [5 - \text{س}] \, \text{ءس}$

(٢٨) $\int_{1}^{4} \left[\frac{1}{3}\text{س} + 2\right] \text{ءس}$

(٢٩) $\int_{1}^{3} \left(2\text{س} - [\text{س} - 2]\right) \text{ءس}$

(٣٠) اذا كان $\int_{1}^{\text{ب}} \left[\frac{1}{3}\text{س}\right] \text{ءس} = 7$ اوجد ب

(٣١) اذا كان $\int_{١}^{\text{ب}} \left[\frac{١}{٣}\text{س} - ١\right] \text{دس} = ٥$

اوجد قيمة الثابت ب

(٣٢) اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س} - ٢| ، & ٠ \le \text{س} < ٤ \\ [٢\text{س}] ، & ٤ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

اوجد $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س)} \text{دس}$

(٣٣) اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س} - ٥]|\text{س} - ١| ، & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ \frac{٣}{\sqrt{\text{س} + ١}} ، & ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

فجد $\int_{٠}^{٤} \text{ق(س)} \text{دس}$

(٣٤) اذا كان $-٢ \le \text{ق(س)} \le ٤$. س $\in [١ ، ٥]$ فاوجد قيمة م ، ن بحيث أن

$$\text{م} \le \int_{١}^{٥} \text{ق(س)} \text{دس} \le \text{ن}$$

(٣٥) اذا كان $-٣ \le \text{ق(س)} \le ٢$. س $\in [٢ ، ٤]$ فاوجد قيمة م ، ن بحيث أن

$$\text{م} \le \int_{٢}^{٤} (٢\text{ق(س)} + ٣) \text{دس} \le \text{ن}$$

(٣٦) اذا كان $-٢ \le \text{ق(س)} \le ٣$. س $\in [١ ، ٣]$ فاوجد قيمة م ، ن بحيث أن

$$\text{م} \le \int_{١}^{٣} \text{ق}^{٢}\text{(س)} \text{دس} \le \text{ن}$$

(٣٧) اذا كان $-٢ \le \text{ق(س)} \le ١$. س $\in [١ ، ٣]$ فاوجد قيمة م ، ن بحيث أن

$$\text{م} \le \int_{١}^{٣} \text{ق}^{٢}\text{(س)} \text{دس} \le \text{ن}$$

(٣٨) اذا كان $-٣ \le \text{ق(س)} \le -١$. س $\in [١ ، ٣]$ فاوجد قيمة م ، ن بحيث أن

$$\text{م} \le \int_{١}^{٣} \text{ق}^{٢}\text{(س)} \text{دس} \le \text{ن}$$

(٣٩) اذا كان $٣ \le \text{ق(س)} \le ٧$. س $\in [٢ ، ٤]$ فاثبت أن

$$-٢٢ \le \int_{٢}^{٤} (٣ - ٢\text{ق(س)}) \text{دس} \le -٦$$

(٤٠) اذا كان $١ \le \text{ق(س)} \le ٤$. س $\in [٢ ، ٥]$ فاوجد أقل قيمة وأكبر قيمة لـ

$$\int_{٢}^{٥} (٣\text{ق(س)} - ٦) \text{دس}$$

(٤١) اثبت دون اجراء التكامل أن

$$٠ \le \int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}} \text{دس} \le ٥٠$$

(٤٢) أثبت دون اجراء التكامل أن

$$٥\pi \le \int_{-٥}^{٥} \left(٣ + \frac{١}{٢}\text{جتاس}\right) \text{دس} \le ٧\pi$$

(٤٣) دون أجراء التكامل للاقتران ق(س)=$\text{س}^{٢}$ +٥ اوجد أقل قيمة واكبر قيمة

$$\int_{-٣}^{٥} \text{ق(س)} \text{دس}$$

(٤٤) اثبت دون اجراء التكامل أن

$$\frac{\pi}{٢} \ge \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا^{٢}س \, ءس \ge ٠$$

(٤٥) اوجد أقل قيمة واكبر قيمة للمقدار

$$\int_{-٤}^{-١} (س^{٢}+١) \, ءس$$

(٤٦) أوجد أقل قيمة وأكبر قيمة للمقدار

$$\int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}} \, ءس$$

(٤٧) أوجد اقل قيمة واكبر قيمة للمقدار

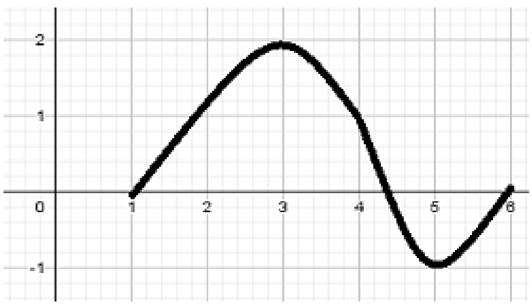
$$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س+٢} \, ءس$$

(٤٨) اوجد اقل قيمة وأكبر قيمة للمقدار

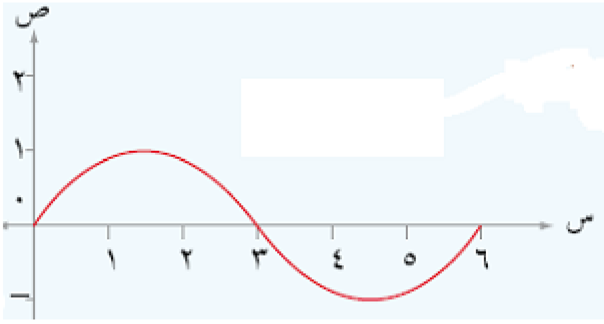
$$\int_{١}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩} \, ءس$$

$$\int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}} \, ءس$$

(٤٩) معتمدا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في [١ ، ٦] أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار



(٥٠) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المتصل على الفترة [٠ ، ٦] اجب عن الاسئلة التالية :



أ. ما إشارة $\int_{١}^{٣} ق(س) \, ءس$

ب. ما إشارة $\int_{٣}^{٦} ق(س) \, ءس$

ج. أوجد اكبر قيمة وأصغر قيمة $\int_{٠}^{٦} ق(س) \, ءس$

(٥١) دون اجراء التكامل أثبت أن

$$\int_{٠}^{١} س^{٢} \, ءس \le \int_{٠}^{١} س \, ءس$$

$$\int_{١}^{٢} س^{٢} \, ءس \ge \int_{١}^{٢} س \, ءس$$

$$\int_{\frac{٧}{٢}}^{٦} \frac{٩}{س+٢} \, ءس < \int_{\frac{٧}{٢}}^{٦} \frac{س^{٢}}{س+٢} \, ءس$$

(٥٢) اوجد اقل قيمة وأكبر قيمة للمقدار

$$\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{س^{٣}+١}} \, ءس$$

اقتران اللوغاريتم الطبيعي

اولاً : خصائص اقتران اللوغاريتم الطبيعي

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,١ = ٠$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ق(س)}} = \text{ق(س)}$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,(\text{س ص}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

ثانياً : مشتقة الاقتران اللوغاريتمي

اذا كان $\text{ك(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ق(س)}$ فان

$\text{ك}'\text{(س)} = \frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{ق(س)}}$

اوجد مشتقة كل من الاقترانات التالية

(١) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

(٢) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}$

(٣) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\sqrt{\text{س}}$

(٤) $\text{ق(س)} = \text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

(٥) $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

(٦) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

(٧) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(٧ + \text{س}^{٢}\right)^{٤}$

(٨) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢ - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}\right)$

(٩) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{قاس}}{\sqrt[٣]{١ + ٢\text{س} - \text{س}^{٢}}}\right)$

(١٠) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جتاس}\right)$

(١١) $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{ظاس}\right)$

ثالثاً : التكامل

$\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,|\text{س}| + \text{جـ}$

$\int \frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{ق(س)}}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,|\text{ق(س)}| + \text{جـ}$

جد قيمة كل من التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٣}{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢} - ٥}\,\text{ءس}$

(٣) $\int \text{ظتاس}\,\text{ءس}$

(٤) $\int \text{ظاس}\,\text{ءس}$

(٥) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٤}{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٦) $\int \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}\,\text{ءس}$

(٧) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢\text{س}}\,\text{ءس}$

(٨) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢ + \text{ظاس}}\,\text{ءس}$

(٩) $\int \frac{١ + \text{جتاس}}{\text{س} + \text{جاس}}\,\text{ءس}$

(١٠) $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

(١١) $\int \frac{١}{\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}\,\text{ءس}$

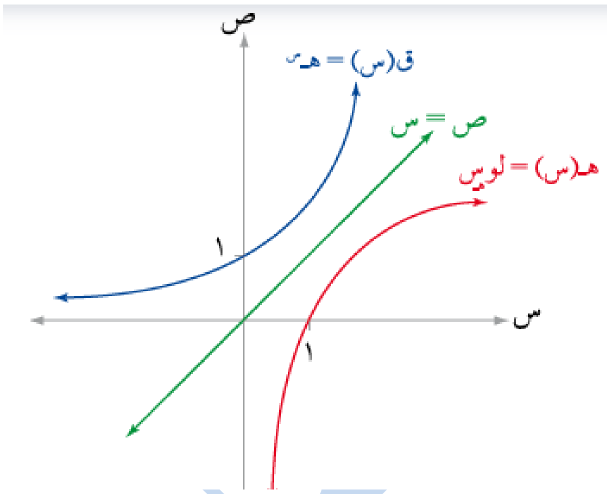
(١٢) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}}\,\text{ءس}$

إذا كان ق(س) = لـو$_{هـ}$ (س + $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$) أثبت أنَّ قَ(س) = $\dfrac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

إذا كان $\int$ (قَ(س) − س) ءس = لـو$_{هـ}$ |قاس + ظاس| + س^{٢} فأثبت أنَّ:

قَ(س) = ٣س + قاس

الاقتران الاسي



مشتقة الاقتران الاسي

قاعدة : اذا كان ق(س)=هـ^س فان قَ(س)= هـ^س

اثبت القاعدة اعلاه.

تعميم

$$ق(س) = هـ^{م(س)} \Leftarrow قَ(س) = مَ(س)\, هـ^{م(س)}$$

اوجد مشتقة كل مما يلي

(١) $ق(س) = هـ^{س^٢}$

(٢) $ق(س) = هـ^{٣س^٢ - ٢}$

(٣) $ق(س) = هـ^{٢س^٢\ ٥س - ٤}$

(٤) $ق(س) = هـ^{جاس}$

(٥) $ق(س) = سهـ^{س}$

(٦) $ق(س) = هـ^{س^٢} جاس$

(٧) $ق(س) = هـ^{\sqrt{س}}$

(٨) $ق(س) = لو_{هـ} س + هـ^{ظاس}$

(٩) $ق(س) = \frac{س + هـ^{س^٢}}{هـ^{٣س}}$

(١٠) $ق(س) = جاهـ^{س}$

(١١) $ق(س) = لو_{هـ} جاهـ^{س}$

(١٢) $ق(س) = \left(هـ^{٢س - س^٢}\right)^٥$

(١٣) $ق(س) = \sqrt[٣]{\left(هـ^{٣س}\right)^٤}$

(١٤) $ق(س) = لو_{هـ} هـ^{س^٢}$

(١٥) $ق(س) = هـ^{لو_{هـ} س^٢}$

(١٦) $ق(س) = \sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س + ١)}$

(١٧) $ص = جاس\, هـ^{س}$ اثبت أن

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} - \frac{دص}{دس} + ٢ص = ٠$$

(١٨) $هـ^{سص} = س + ص$ اثبت أن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١ - سص - ص^٢}{س^٢ + سص - ١}$$

(١٩) $ص = س^٢ لو_{هـ} س$ اثبت أن

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٢ص}{س^٢} + ٣$$

(٢٠)

إذا كان $ص = هـ^{أس}$ ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ

$صً - ٥صَ + ٦ص =$ صفرًا

(٢١)

إذا كان $ص = هـ^{ظاس} + أ لو_{هـ} جتاس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{دس}{١ + ظا^٢س}$

وكان $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٢هـ + ١$ ، فجد قيمة الثابت أ .

(٢٢)

إذا كان $قً(س) = جاس + هـ^{٢س}$

$ق(٠) = \frac{١}{٤}$ ، $قَ(٠) = \frac{١}{٢}$

فجد قاعدة الاقتران ق.

(٢٣)

إذا كان $ق(س) = ٣^{ل(س)}$ فأثبت أنَّ:

$قَ(س) = ٣^{ل(س)} \times لَ(س)\, لو_{هـ} ٣$

(٢٤)

إذا كان $\int قَ(س)\, دس = هـ^{١-س^{٢}} + ٤هـ$

فجد قيمة (قيم) الثابت ب

$قَ(ب) = -٢ب$ ، $ب \neq$ صفرًا

<u>تكامل الاقتران الاسي</u>

قاعدة

$$\int هـ^{س}\, دس = هـ^{س} + جـ$$

$$\int هـ^{(أس+ب)}\, دس = \frac{هـ^{(أس+ب)}}{أ} + جـ$$

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية :

(١) $\int هـ^{٤س}\, دس$

(٢) $\int ٥هـ^{٦-٥س}\, دس$

(٣) $\int (هـ^{٢} - هـ^{٤س})\, دس$

(٤) $\int (هـ^{٢}س - ٤هـ^{٤س})\, دس$

(٥) $\int \frac{هـ^{٢} - ٥هـ^{٥س}}{هـ^{٢}س^{٢} - ٥هـ^{٥س}}\, دس$

(٦) $\int \frac{هـ^{٢} - ٥هـ^{٥س}}{هـ^{٢}س^{٢} - ٥هـ^{٥س}}\, دس$

(٧) $\int هـ^{٥+لو_{هـ}جتاس}\, دس$

(٨) $\int (هـ^{٢س+٥})^{٢}\, دس$

(٩) $\int هـ^{٥س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٤هـ^{س} + ٤}\, دس$

(١٠) $\int \frac{هـ^{٣س} - ٢٧}{هـ^{س} - ٣}\, دس$

(١١) $\int_{٠}^{هـ} هـ^{٢س}\, دس$

(١٢) $\int_{٠}^{هـ} ٢س\, هـ^{٢\, لو_{هـ}س}\, دس$

(١٣) $\int_{٠}^{هـ} \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}\, دس$

(١٤) $\int \sqrt{هـ^{س}}\, دس$

(١٥) $\int \sqrt[٥]{هـ^{١٠س}}\, دس$

ن (١٦) م $(\text{س}) = \text{س}\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}$

س مشـ تقة الاقـ تران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\text{هـ}^{\text{س}}$

$$\int_{٠}^{٢}\left(٤\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{٢}\right)\text{ءس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}\,\text{ءس} = ٢٨$$

قـ يمة الـ ثابـ ت أ

ن(اذا كان) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ب جتاس}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+\text{جاس}}\,\text{ءس}$

$$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}} = -٢$$

قـ يمة الـ ثابـ ت ب

(١٨) $\text{ص} = \text{هـ}^{٤\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ءس}}{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$$

(١٩) $\int \text{ب ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|٢-٤\text{س}| - \int ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$

وكا ن $\text{ق}'(٠) = ٢$

فـ جد قـ يمة ب

التكامل بالتعويض

(١) $\int ٣س^{٢}\left(س^{٣}+٥\right)^{٧}\,ءس$

(٢) $\int س\left(س^{٢}-٣\right)^{٣}\,ءس$

(٣) $\int ٢س\,جتا\,س^{٢}\,ءس$

(٤) $\int \left(٣س+٤\right)^{٥}\,ءس$

(٥) $\int \left(٦س-١٥\right)\left(س^{٢}-٥س+٦\right)^{٥}\,ءس$

(٦) $\int \left(٦س+٣\right)\sqrt{٣س^{٢}+٣س+٢}\,ءس$

(٧) $\int \frac{٢س}{\sqrt{٤-س^{٢}}}\,ءس$

(٨) $\int س\sqrt{٢-س}\,ءس$

(٩) $\int_{٠}^{٣} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+٢}}\,ءس$

(١٠) $\int \frac{١}{س^{٢}+٦س+٩}\,ءس$

(١١) $\int \frac{س+١}{\left(س^{٢}+٢س+١\right)^{٣}}\,ءس$

(١٢) $\int س^{٣}\sqrt{س^{٢}+١}\,ءس$

(١٣) $\int س^{٥}\sqrt{س^{٣}+٢}\,ءس$

(١٤) $\int \frac{\left(س+١\right)^{٥}}{س^{٧}}\,ءس$

(١٥) $\int \frac{\left(س+١\right)^{٧}}{س^{٩}}\,ءس$

(١٦) $\int \frac{\left(٣س^{٢}+٢\right)^{٣}}{س^{٩}}\,ءس$

(١٧) $\int \frac{\left(٢س^{٣}+٤\right)^{٤}}{س^{١٦}}\,ءس$

(١٨) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٧}-س^{٣}}\,ءس$

(١٩) $\int \left(س^{٥}-٣س\right)^{٣}\,ءس$

(٢٠) $\int \left(س^{٨}-٤س\right)^{٦}\,ءس$

(٢١) $\int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{٢س+١}{س}}\,ءس$

(٢١) $\int \left(س-١\right)^{٣}\left(س^{٢}-٢س+٥\right)^{٧}\,ءس$

(٢٣) $\int \sqrt{\left(\frac{١}{س^{٢}}-س^{٢}\right)^{٢}+٤}\,ءس$

(٢٤) $\int_{٠}^{١} س^{٢}\,هـ^{س^{٣}+١}\,ءس$

(٢٥) $\int س\,هـ^{س^{٢}}\,ءس$

(٢٦) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \text{جا}\sqrt{\text{س}} \, \text{ءس}$

(٢٧) $\int \text{جا٢س}\, \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{ءس}$

(٢٨) $\int \text{جا}^4\text{س} \, \text{ءس}$

(٢٩) $\int \frac{\text{هـ}^{\frac{3}{\text{س}}}}{\text{س}^2} \, \text{ءس}$

(٣٠) $\int \text{جتا}^4\text{س} \, \text{ءس}$

(٣١) $\int \text{جا}^4\text{س جتاس} \, \text{ءس}$

(٣٢) $\int \text{قا}^4\text{س} \, \text{ءس}$

(٣٣) $\int \text{قا}^6\text{س} \, \text{ءس}$

(٣٤) $\int \text{جتا}^3\text{س جا}^3\text{س} \, \text{ءس}$

(٣٥) $\int \text{جتا}^3\text{س جا}^5\text{س} \, \text{ءس}$

(٣٦) $\int \text{ظا}^4\text{س قا}^2\text{س} \, \text{ءس}$

(٣٧) $\int \text{قا}^7\text{س ظاس} \, \text{ءس}$

(٣٨) $\int \text{قا}^5\text{س ظا}^3\text{س} \, \text{ءس}$

(٣٩) $\int \text{جا}^3\text{س} \, \text{ءس}$

(٤٠) $\int \text{جتا}^5\text{س} \, \text{ءس}$

(٤١) $\int \frac{\text{س جاس}^2}{\text{جتا}^2\text{س}^2} \, \text{ءس}$

(٤٢) $\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{قتا}^2\text{س}} \, \text{ءس}$

(٤٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جاس} - \text{جا}^3\text{س}} \, \text{ءس}$

(٤٤) $\int \text{قا}^2\text{س} \sqrt{\text{ظاس}} \, \text{ءس}$

(٤٥) $\int \text{س}^8 \left(\frac{2}{\text{س}} - \frac{3}{\text{س}^2} \right)^4 \text{ءس}$

(٤٦) $\int \text{س} \sqrt[3]{\frac{2 + 5\text{س}}{\text{س}^3}} \, \text{ءس}$

(٤٧) $\int \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س}^4} \, \text{ءس}$

(٤٨) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^2\text{س} - \text{جا}^4\text{س}} \, \text{ءس}$

(٤٩) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س} - \text{س}^3}}{\text{س}^4} \, \text{ءس}$

(٥٠) $\int \frac{\sqrt{\text{س}} + 9}{\sqrt{\text{س}}^{\,5}} \, \text{ءس}$

(٥١) $\int \sqrt[3]{\text{س}^3 + \text{س}^5} \, \text{ءس}$

(٥٢) $\int \frac{2}{\text{س}^2 \sqrt{\text{س}^2 + 1}} \, \text{ءس}$ ؛ $\text{س} > 0$

(٥٣) $\int \sqrt[3]{\text{س}^6 + \text{س}^9} \, \text{ءس}$

(٥٤) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{16} + \text{س}^{12}}}$

(٥٥) $\int \frac{\text{جاس جتاس}}{(1 - 2\text{جا}^2\text{س})^3} \, \text{ءس}$

(٥٦) $\int \frac{4}{(\text{٥جاس} - \text{جتاس})^2} \, \text{ءس}$

(٥٧) $\int_{1}^{2} \text{س}^{4} \sqrt{\left(\frac{2-\text{س}}{\text{س}^{2}}\right)^{3}}\ \text{ءس}$

(٥٨) $\int \frac{2\text{س}-3}{3\text{س}^{2}-6\text{س}-5}\ \text{ءس}$

(٥٩) $\int \frac{2}{\left(4\text{س}^{2}-20\text{س}+25\right)^{7}}\ \text{ءس}$

(٦٠) $\int \frac{\left(\sqrt{\text{س}}+5\right)^{7}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

(٦١) $\int_{1}^{\text{هـ}^{3}} \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{ءس}$

(٦٢) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{3}+2\text{لوس}}\ \text{ءس}$

(٦٣) $\int \frac{\text{س}^{3}}{(\text{س}+1)^{5}}\ \text{ءس}$

(٦٤) $\int \sqrt[3]{\text{س}^{\frac{-3}{4}}+1}\ \text{ءس}$

(٦٥) $\int \text{جتا}^{3}\text{س}\left(1+\text{جاس}\right)^{7}\ \text{ءس}$

(٦٦) $\int \text{هـ}^{\text{جاس}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

(٦٧) $\int_{0}^{2} \frac{\text{س}^{3}}{\sqrt{\left(\text{س}^{2}+9\right)^{3}}}\ \text{ءس}$

(٦٨) $\int \frac{1-\text{ظا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{ءس}$

(٦٩) $\text{و}(0) = -2 ،\ \text{و}(7) = 10$

$\int_{0}^{1} \left(\text{س}^{2}+2\right)\text{و}'\left(\text{س}^{3}+6\text{س}\right)\ \text{ءس}$

(٧٠) إذا كان $\int_{0}^{1} \text{س}\,\text{و}(\text{س})\ \text{ءس} = 6$

$\int_{-2}^{-1} (\text{س}+2)\,\text{و}(\text{س}+2)\ \text{ءس}$

(٧١) إذا كان $\int_{1}^{4} \left(\text{و}(\text{س})+2\right)\ \text{ءس} = 8$

$\int_{2}^{1} \text{س}\,\text{و}\left(\text{س}^{2}\right)\ \text{ءس}$

(٧٢) إذا كان $\text{و}(1) = 2 ،\ \text{و}(4) = 3$

$\int_{1}^{2} 2\text{س}\,\text{و}'\left(\text{س}^{2}\right)\text{و}^{3}\left(\text{س}^{2}\right)\ \text{ءس}$

(٧٣)

أثبت أنَّ $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+2}}\ \text{ءس} = \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن}+1} & \text{، حيث ن عدد فردي} \\ \frac{1}{\text{ن}+1} & \text{، حيث ن عدد زوجي} \end{cases}$

التكامل بالاجزاء

يمكن اللجوء الى التكامل بالأجزاء في احدى الحالات التالية :

١. $\int \text{اقتران} \times \text{(اقتران خطي)}$

٢. $\int \text{اقتران} \times \text{جا (اقتران خطي)}$

٣. $\int \text{اقتران} \times \text{هـ}^{\text{(اقتران خطي)}}$

٤. $\int \text{اقتران} \times \text{لو (اقتران)}$

في التكامل بالأجزاء يتم تقسيم المسألة الى جزئين : الجزء الأول يفرض ق ويتم اشتقاقه والجزء الثاني دهـ ويتم تكامله ، وبالعادة فان ما يفرض ق هو الاقتران التي تؤدي احدى مشتقاته الى الثابت باستثناء في حالة الاقتران اللوغاريتمي فان ما يفرض ق هو اللوغاريتم نفسه .

(١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{س جاس ءس}$

(٢) $\int (\text{٢س} - ١)\,\text{جتا٣س ءس}$

(٣) $\int \text{س}^{٢}\,\text{جتاس ءس}$

(٤) $\int (\text{س} - ٢)^{٢}\,\text{جتا}(\text{س} + ١)\,\text{ءس}$

(٥) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

(٦) $\int \text{جتا}\sqrt{\text{٢س} + ١}\ \text{ءس}$

(٧) $\int \text{س}^{٥}\,\text{جتاس}^{٣}\,\text{ءس}$

(٨) $\int \text{٥س}\,(\text{٢س} + ١)^{٧}\,\text{ءس}$

(٩) $\int \text{س}^{٣}\,\text{جاس}^{٢}\,\text{ءس}$

(١٠) $\int \text{٦س جاس جتاس ءس}$

(١١) $\int \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣}}\ \text{ءس}$

(١٢) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}}\,\text{ءس}$

(١٣) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}\,\text{ءس}$

(١٤) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

(١٥) $\int \frac{\text{٢س} - ١}{\text{قا٣س}}\,\text{ءس}$

(١٦) $\int \text{س جا}^{٢}\text{س ءس}$

(١٧) $\int \sqrt{\text{س}}\,\text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

(١٨) $\int \text{جاس}\,(\text{س} + \text{قتا}^{٣}\text{س})\,\text{ءس}$

(١٩) $\int \text{٤س ن}''(\text{٢س})\,\text{ءس}$

(٢٠) $\int \text{ن}''(\sqrt{\text{س}})\,\text{ءس}$

(٢١) $\int \text{س هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢٢) $\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢٣) $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٢٤) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\,\text{ءس}$

(٢٥) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{ءس}$

(٢٦) $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس}$

(٢٧) $\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

(٢٨) $\int \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ١}\,\text{ءس}$

(٢٩) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جاهـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٣٠) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$

(٣١) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٣٢) $\int \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$

(٣٣) $\int \text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

(٣٤) $\int \text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$

(٣٥) $\int \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\,\text{ءس}$

(٣٦) $\int \dfrac{٧\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

(٣٧) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس}$

(٣٨) $\int \text{س}^{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}\,\text{ءس}$

(٣٩) $\int \text{أ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٤٠) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{ءس}$

(٤١) $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{ءس}$

(٤٢) $\int \dfrac{\sqrt{\text{س}}}{١ + \text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٤٣) $\int \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٤٤) $\int \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}}\left(٢ + \sqrt{\text{س}}\right)}\,\text{ءس}$

(٤٥) $\int \text{ظاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\,\text{ءس}$

(٤٦) اذا كان $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\sqrt{١ - \text{س}}\,\text{ءس}$

ت ان $(٢\text{ن} + ٣)\,\text{ع}_{\text{ن}} = ٢\text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}-١}$

(٤٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{س}\,\text{جاس}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٢} \left(\text{أس}^{٢} + ٢\text{س}\right)\text{ءس}$

ق يمة أ

(٤٨) $\int \dfrac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\,\text{ءس}$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

يستخدم التكامل بالكسور الجزئية لإيجاد تكامل الاقتران النسبي الذي يكون مقامه قابلاً للتحليل

الحالة الأولى : اذا كانت درجة البسط < درجة المقام

(١) $\int \frac{س}{س^{٢} - ٢س - ٣}\, ءس$

(٢) $\int \frac{س + ٨}{س^{٢} + س - ٦}\, ءس$

(٣) $\int \frac{ءس}{١ - س^{٢}}$

(٤) $\int \frac{٢س - ١}{(س - ١)(س - ٢)}\, ءس$

(٥) $\int \frac{٢}{س^{٢} - ٢س}\, ءس$

الحالة الثانية: درجة البسط X من درجة المقام

(٦) $\int \frac{س + ١}{س - ١}\, ءس$

(٧) $\int \frac{٢س^{٢}}{١ - س^{٢}}\, ءس$

(٨) $\int \frac{س^{٣} + س}{س - ١}\, ءس$

(٩) $\int \frac{س^{٢} - س}{س + ١}\, ءس$

(١٠) $\int \frac{س^{٢} + ٣س - ١١}{س^{٢} + ٢س - ١٥}\, ءس$

(١١) $\int \frac{٢س^{٣} - س^{٢} + ٣س}{س^{٢} - ٣س - ٤}\, ءس$

(١٢) $\int \frac{\sqrt{س}}{س - ١}\, ءس$

(١٣) $\int \frac{(هـ^{س})^{٢} + ١}{هـ^{س} - ١}\, ءس$

(١٤) $\int \frac{١}{س - ٢\sqrt{س} - ٣}\, ءس$

(١٥) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - ٩}\, ءس$

(١٦) $\int \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤}\, ءس$

(١٧) $\int \frac{قا^{٢}س}{ظا^{٢}س - ٣ظاس - ٢}\, ءس$

(١٨) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤}}\,\text{ءس}$

(١٩) $\int \frac{\text{٦}}{\text{١} + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٢٠) $\int \frac{\text{٥}}{\text{١} - \sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٢١) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٤}} + \text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$ ، $\text{س} < \text{٠}$

(٢٢) $\int \frac{\text{٦جتاس}}{(\text{٢جاس} - \text{١})(\text{جاس} + \text{١})}\,\text{ءس}$

(٢٣) $\int \frac{\text{١}}{\text{٢س} - \text{١} + \sqrt{\text{٢س} + \text{١}}}\,\text{ءس}$

(٢٤) $\int \frac{\text{قا}^{\text{٤}}\text{س}}{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{ظاس} - \text{٢}}\,\text{ءس}$

(٢٥) $\int \frac{\text{١}}{\sqrt[3]{\text{س}} + \text{١}}\,\text{ءس}$

(٢٦) $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٣جاس} + \text{٢}}\,\text{ءس}$

(٢٧) $\int \frac{\sqrt{\text{س} + \text{١}} + \text{١}}{\sqrt{\text{س} + \text{١}} - \text{١}}\,\text{ءس}$

(٢٨) $\int \frac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} + \text{١}\right)}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} - \text{١}}\,\text{ءس}$

(٢٩) $\int \text{جاس ظاس}\,\text{ءس}$

(٣٠) $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{٣} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$

(٣١) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{١٠}} - \text{س}}\,\text{ءس}$

(٣٢) $\int \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٨}}}\,\text{ءس}$

(٣٣) $\int \sqrt{\text{١} + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٣٤) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{٢س} + \text{١}}\,\text{ءس}$