B12

الرياضيات العلمي

المستوى الرابع

التكامل

اعداد

محمد فؤاد الدويك
0796852620

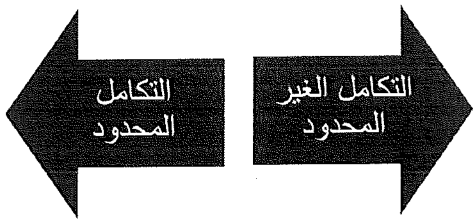
شادي احمد الطراونة
0799643193

اكاديمية الدويك و الطراونة

الجاردنز - خلف بن العميد - مقابل مدرسة رشيد طليع

التكامل

يقسم التكامل إلى نوعين رئيسين :



أولا: التكامل الغير محدود

*قواعد التكامل غير المحدود

1) $\boxed{\int أ \, .ءس = أس + ج}$

تكامل الثابت = الثابت × س + ج

أمثلة:

١. $\int \frac{1}{\sqrt{5}} .ءس = \frac{1}{\sqrt{5}} س + ج$

٢. $\int -2 .ءس = -2س + ج$

٣. $\int -\frac{1}{3} .ءع = -\frac{1}{3} ع + ج$

٤. $\int \frac{1}{2} .ءك = \frac{1}{2} ك + ج$

٥. $\int (3جا^2 هـ + 3جتا^2 هـ) ءهـ = 3هـ + ج$

٦. $\int س .ءع = س ع + ج$

٧. $\int \pi .ءهـ = \pi هـ + ج$

---

2) $\boxed{\int س^{ن} .ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ج ، ن \neq 0}$

الفوق + التحت
―――――
التحت

1) $\int س^2 .ءس = \frac{س^3}{3} + ج$

2) $\int س^5 .ءس = \frac{س^6}{6} + ج$

3) $\int س .ءس = \frac{س^2}{2} + ج$

4) $\int س^{-3} .ءس = \frac{س^{-2}}{-2} + ج$

5) $\int س^{\frac{1}{2}} .ءس = \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج \leftarrow \frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + ج$

6) $\int 3س^2 .ءس = \cancel{3} \frac{س^3}{\cancel{3}} + ج$

7) $\int \frac{3}{5} س^{\frac{2}{5}} .ءس = \frac{3}{\cancel{5}} \frac{\cancel{5}س^{\frac{7}{5}}}{7} + ج$

#محرمات التكامل:

* أشكال يمنع التكامل بوجودها و يجب تحويلها من شكل إلى آخر

- الجذور $\boxed{\sqrt[م]{س^{ن}} = س^{\frac{ن}{م}}}$

1) $\int \sqrt{س^3} .ءس = \int س^{\frac{3}{2}} .ءس \leftarrow \frac{2س^{\frac{5}{2}}}{5} + ج$

2) $\int \sqrt[5]{س^{-3}} .ءس = \int س^{\frac{-3}{5}} .ءس \leftarrow \frac{5س^{\frac{2}{5}}}{2} + ج$

- $\boxed{\frac{عدد}{س^{م}} = عدد \times س^{-م}}$

1) $\int \frac{3}{س^5} .ءس = \int 3س^{-5} .ءس = \frac{3س^{-4}}{-4} + ج$

2) $\int \frac{-3}{س^{-4}} .ءس = \int -3س^4 .ءس = \frac{-3س^5}{5} + ج$

٣) $\int \frac{3}{2\text{س}^{5}}\,\text{ءس} = \int \frac{3}{2}\text{س}^{-5}\,\text{ءس} = \frac{3}{2} \frac{\text{س}^{-4}}{-4} + \text{ج}$

$= \frac{3\text{س}^{-4}}{-8} + \text{ج}$

$\int \frac{3}{7\text{س}^{\frac{-1}{3}}}\,\text{ءس} = \int \frac{3}{7}\text{س}^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس} = \frac{3}{7}\,3\,\frac{\text{س}^{\frac{4}{3}}}{4} + \text{ج}$

$\leftarrow \frac{9\text{س}^{\frac{4}{3}}}{28} + \text{ج}$

$\boxed{\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\text{م}-\text{ن}}}$

١) $\int \frac{\text{س}^{5}}{\text{س}^{7}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{-2}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{ج}$

٢) $\int \frac{\text{س}^{8}}{\text{س}^{-7}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{15}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{16}}{16} + \text{ج}$

٣) $\int \frac{3\text{س}^{5}}{2\text{س}^{-3}}\,\text{ءس} = \int \frac{3}{2}\text{س}^{8}\,\text{ءس} = 3\,\frac{\text{س}^{9}}{18} + \text{ج}$

٤) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}^{-1}}}\,\text{ءس} = \int \text{س}.\text{س}^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{4}{3}}\,\text{ءس} = \frac{3\text{س}^{\frac{7}{3}}}{7} + \text{ج}$

الضرب ينفذ أولاً

عدم القدرة على الضرب نلجأ لطرق التكامل (لاحقا)

١) $\int 2\text{س}(\text{س}^{2} + 5\text{س})\,\text{ءس} = \int (2\text{س}^{3} + 10\text{س}^{2})\,\text{ءس}$

$= \frac{2\text{س}^{4}}{4} + \frac{10\text{س}^{3}}{3} + \text{ج}$

٢) $\int \sqrt{\text{س}}(\text{س}^{2} + 2\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}}(\text{س}^{2} + 2\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{\frac{5}{2}} + 2\text{س}^{\frac{3}{2}})\,\text{ءس} = \frac{2\text{س}^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4\text{س}^{\frac{5}{2}}}{5} + \text{ج}$

٣) $\int (\text{خطي})^{\text{ن}}\,\text{ءس}$

$\leftarrow \int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ج}$

١) $\int (3\text{س}+7)^{7}\,\text{ءس} = \frac{1}{3} \times \frac{(3\text{س}+7)^{8}}{8} + \text{ج}$

٢) $\int (3-7\text{س})^{-3}\,\text{ءس} = \frac{(3-7\text{س})^{-2}}{-2\times-7} + \text{ج}$

٣) $\int (1-\text{س})^{\frac{-3}{2}}\,\text{ءس} = \frac{2(1-\text{س})^{\frac{-1}{2}}}{-1\times-1} + \text{ج}$

١) $\int (\text{س}^{2}+4)^{2}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{4} + 8\text{س}^{2} + 16\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{5}}{5} + \frac{8\text{س}^{3}}{3} + 16\text{س} + \text{ج}$

٢) $\int (2\text{س}+3)(5\text{س}-2)\,\text{ءس}$

$= \int 10\text{س}^{2} - 4\text{س} + 15\text{س} - 6\,\text{ءس}$

$= \int 10\text{س}^{2} + 11\text{س} - 6\,\text{ءس}$

$= \frac{10\text{س}^{3}}{3} + \frac{11\text{س}^{2}}{2} - 6\text{س} + \text{ج}$

٣) $\int \frac{(\text{س}^{2}-9)}{(\text{س}-3)}\,\text{ء}$

$= \int \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}{(\text{س}-3)}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س} + 3\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{2}}{2} + 3\text{س} + \text{ج}$

٤) $\int \sqrt[٥]{٤س+٣}\,.ءس$

$= \int (٤س+٣)^{\frac{١}{٥}}\,.ءس$

$= \frac{٥(٤س+٣)^{\frac{٦}{٥}}}{٤\times ٦} + جـ$

---

٥) $\int \sqrt[٣]{س^{٢} - ٤س + ٤}\,.ءس$

$= \int ((س-٢)(س-٢))^{\frac{١}{٣}}\,.ءس$

$= \int ((س-٢)^{٢})^{\frac{١}{٣}}\,.ءس$

$= \int (س-٢)^{\frac{٢}{٣}}\,.ءس = \frac{٣(س-٢)^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

---

٦) $\int \sqrt[٥]{س^{٢} - ٦س + ٩}\,.ءس$

$= \int \sqrt[٥]{(س-٣)^{٢}}\,.ءس$

$= \int (س-٣)^{\frac{٢}{٥}}\,.ءس$

$= \frac{٥(س-٣)^{\frac{٧}{٥}}}{٧} + جـ$

---

٧) $\int س(س^{٢} + ٣س + ١)\,.ءس$

$= \int (س^{٣} + ٣س^{٢} + س)\,.ءس$

$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

٨) $\int \frac{س^{٣} + ٥س^{٢} - ٤}{س^{٢}}\,.ءس$

$= \int \left(\frac{س^{٣}}{س^{٢}} + \frac{٥س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٢}}\right).ءس$

$= \int (س + ٥ - ٤س^{-٢})\,.ءس$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + ٤س^{-١} + جـ$

---

٩) $\int \sqrt{س}\left(\sqrt{س} + \frac{٣}{\sqrt{س}}\right).ءس$

$= \int (س+٣)\,.ءس$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س + جـ$

---

١٠) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\,.ءس = \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}}\,.ءس$

$= \int س^{\frac{-١}{٣}}\,.ءس = \frac{٣}{٢}س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

---

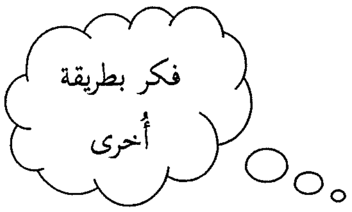
١١) $\int \frac{س-١}{\sqrt[٣]{س^{-١}}}\,.ءس$

$= \int \left(\frac{س}{س^{\frac{-١}{٣}}} - \frac{١}{س^{\frac{-١}{٣}}}\right).ءس$

$= \int (س^{١+\frac{١}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}})\,.ءس$

$= \int (س^{\frac{٤}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}})\,.ءس$

$= \frac{٣}{٧}س^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$



---

١٢) $\int س^{٢}\left(٢س + \frac{٣}{س}\right)^{٢}.ءس$

$= \int س^{٢}\left(٤س^{٢} + \frac{١٢س}{س} + \frac{٩}{س^{٢}}\right).ءس$

$= \int (٤س^{٤} + ١٢س^{٢} + ٩)\,.ءس$

$= \frac{٤س^{٥}}{٥} + \frac{١٢س^{٣}}{٣} + ٩س + جـ$

---

١٣) $\int \frac{(س+٢)^{٢}}{س^{٤}}\,.ءس$

$= \int \frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٤}}\,.ءس$

$= \int (س^{-٢} + ٤س^{-٣} + ٤س^{-٤})\,.ءس$

$= \frac{س^{-١}}{-١} + \frac{٤س^{-٢}}{-٢} + \frac{٤س^{-٣}}{-٣} + جـ$

١٤) $\int \frac{\text{س} - ٤}{\sqrt{\text{س}} + ٢}\,.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س} - ٤}{\sqrt{\text{س}} + ٢} \times \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\sqrt{\text{س}} - ٢}\,.\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س}} - ٢)}{(\text{س} - ٤)}\,.\text{ءس}$

$= \int \sqrt{\text{س}} - ٢.\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}} - ٢.\text{ءس}$

$= \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{3}{2}} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

١٥) $\int (\sqrt{\text{س}} + ٢)(\sqrt{\text{س}} - ٣).\text{ءس}$

$= \int \text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}} - ٦.\text{ءس}$

$= \int \text{س} - \text{س}^{\frac{1}{2}} - ٦.\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{3}{2}} - ٦\text{س} + \text{جـ}$

١٦) $\int (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})(\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}})(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}).\text{ءس}$

شبه مرافق

$= \int (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}).\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}).\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{٢} - \text{س}^{-٢}.\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ}$

١٧) $\int (\text{س}\sqrt{\text{س}} - ٨)(\sqrt{\text{س}} - ٢)^{-١}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - ٨}{\sqrt{\text{س}} - ٢}.\text{ءس}$

$= \int \frac{(\sqrt{\text{س}})^{٣} - ٨}{\sqrt{\text{س}} - ٢}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ٢)}(\text{س} + ٢\sqrt{\text{س}} + ٤)}{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ٢)}}.\text{ءس}$

$= \int (\text{س} + ٢\text{س}^{\frac{1}{2}} + ٤).\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٤\text{س}^{\frac{3}{2}}}{٣} + ٤\text{س} + \text{جـ}$

١٨) $\int \text{س}\sqrt[3]{\frac{١}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}\,.\text{ءس}$

$= \int \sqrt[3]{\text{س}^{٣}(\frac{١}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}})}\,.\text{ءس}$

$= \int \sqrt[3]{١ - \text{س}}\,.\text{ءس}$

$= \int (١ - \text{س})^{\frac{1}{3}}.\text{ءس}$

$= \frac{٣(١ - \text{س})^{\frac{4}{3}}}{-٤} + \text{جـ}$

١٩) $\int \text{س}^{٨}(\frac{١}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}})^{٤}.\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{٨}(\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{\text{س}^{٣}})^{٤}.\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{٨}(\frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} + ٢)}{\text{س}^{\cancel{٣}\,٢}})^{٤}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}^{٨}}}{\cancel{\text{س}^{٤\times٢}}}(\text{س} + ٢)^{٤}.\text{ءس}$

$= \frac{(\text{س} + ٢)^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

٢٠) $\int \frac{٤\text{س}^{٣} - ٩\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{٢}(٤\text{س} - ٩)}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{٢}(٤\text{س} - ٩)}{٢\sqrt{\text{س}} - ٣}.\text{ءس} \times \frac{(٢\sqrt{\text{س}} + ٣)}{(٢\sqrt{\text{س}} + ٣)}$

$= \int \frac{\text{٢س}^{\frac{٥}{٢}} + \text{٣س}^{٢}\cancel{(\text{س}^{٤} - ٩)}}{\cancel{(\text{س}^{٤} - ٩)}} .\text{ءس}$

$= \int \text{٢س}^{\frac{٥}{٢}} + \text{٣س}^{٢} .\text{ءس}$

$= \frac{٤}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٢}} + \text{س}^{٣} + \text{جـ}$

٢١) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٥}{(\text{س} + ١)^{٥}} .\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{(\text{س} + ١)}(\text{س} + ٥)}{(\text{س} + ١)^{\cancel{٥}\,٤}} .\text{ءس}$

$= \int (\text{س} + ٥)(\text{س} + ١)^{-٤} .\text{ءس}$

$= \int ((\text{س} + ١) + ٤)(\text{س} + ١)^{-٤} .\text{ءس}$

$= \int (\text{س} + ١)^{-٣} + ٤(\text{س} + ١)^{-٤} .\text{ءس}$

$= \frac{(\text{س} + ١)^{-٢}}{-٢} + \frac{٤(\text{س} + ١)^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$

سؤال حقير

جدا :)

٢٢) $\int \text{س}\sqrt{\pi \text{س}} .\text{ءس}$

$= \int \sqrt{\pi}\, \text{س}^{\frac{٣}{٢}} .\text{ءس}$

$= \frac{٢\sqrt{\pi}}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$

٤) التكاملات الدائرية:

- $\int \text{جا أس} .\text{ءس} = \frac{-\text{جتا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{جتا أس} .\text{ءس} = \frac{\text{جا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{قا}^{٢}\text{أس} .\text{ءس} = \frac{\text{ظا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{قتا}^{٢}\text{أس} .\text{ءس} = \frac{-\text{ظتا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{قا أس ظا أس} .\text{ءس} = \frac{\text{قا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{قتا أس ظتا أس} .\text{ءس} = \frac{-\text{قتا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

أ. التكاملات المباشرة

١) $\int \text{جا٣س} .\text{ءس} = \frac{-\text{جتا٣س}}{٣} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جتا٧س} .\text{ءس} =$

٣) $\int \text{قا}^{٢}\text{٤س} .\text{ءس} =$

٤) $\int \text{قتا}^{٢}\text{٧س} .\text{ءس} =$

٥) $\int \text{قا٧س} .\text{ظا٧س} .\text{ءس} =$

٦) $\int \text{قتا٣س} .\text{ظتا٣س} .\text{ءس} = \frac{-\text{قتا٣س}}{٣} + \text{جـ}$

ب. تكاملات تحتاج متطابقات :

*متطابقات مهمة:

✓ **$\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$**

✓ **$\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$**

✓ **$\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$**

$= \text{٢جتا}^{٢}\text{س} - ١$

$= ١ - \text{٢جا}^{٢}\text{س}$

✓ **$\text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س} - ١$**

✓ **$\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١$**

✓ **$\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٢س})$**

✓ **$\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا٢س})$**

***إذا كانت الزوايا مختلفة:**

✓ $\text{جتاس}\times\text{جتاص}=\frac{١}{٢}\left(\text{جتا(س−ص)}+\text{جتا(س+ص)}\right)$

✓ $\text{جاس}\times\text{جتاص}=\frac{١}{٢}\left(\text{جا(س−ص)}+\text{جا(س+ص)}\right)$

✓ $\text{جاس}\times\text{جاص}=\frac{١}{٢}\left(\text{جتا(س−ص)}-\text{جتا(س+ص)}\right)$

✓ $\text{جتا(أ}\pm\text{ب)}=\text{جتاأ}\times\text{جتاب}\mp\text{جاأ}\times\text{جاب}$

✓ $\text{جا(أ}\pm\text{ب)}=\text{جاأ}\times\text{جتاب}\pm\text{جتاأ}\times\text{جاب}$

---

١) $\int \text{جا}^{٢}\text{س.ءس} = \int \frac{١}{٢}\left(١-\text{جتا٢س}\right)\text{.ءس}$

$= \frac{١}{٢}\left(\text{س}-\frac{\text{جا٢س}}{٢}\right)+\text{جـ}$

---

٢) $\int \text{جتا}^{٢}\text{٥س.ءس} = \int \frac{١}{٢}\left(١-\text{جتا١٠س}\right)\text{.ءس}$

$= \frac{١}{٢}\left(\text{س}+\frac{\text{جا١٠س}}{١٠}\right)+\text{جـ}$

---

٣) $\int \text{ظا}^{٢}\text{س.ءس} = \int \left(\text{قا}^{٢}\text{س}-١\right)\text{.ءس}$

$=\text{ظاس}-\text{س}+\text{جـ}$

---

٤) $\int \text{ظتا}^{٢}\text{س.ءس} = \int \left(\text{قتا}^{٢}\text{س}-١\right)\text{ءس}$

$= -\text{ظتاس}-\text{س}+\text{جـ}$

---

٥) $\int \frac{\text{ءس}}{١-\text{جاس}}$

$=\int \frac{١}{١-\text{جاس}}\times\frac{١+\text{جاس}}{١+\text{جاس}}\text{.ءس}$

$=\int \frac{١+\text{جاس}}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\text{.ءس}$

$=\int \frac{١+\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\text{.ءس}$

$=\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}+\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\text{.ءس}$

$=\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س}+\text{ظاسقاس}\right)\text{.ءس} = \text{ظاس}+\text{قاس}+\text{جـ}$

---

٦) $\int \text{جا}^{٢}\left(٣\text{س}+١\right)\text{ءس}$

$=\int \frac{١}{٢}\left(١-\text{جتا}(٦\text{س}+٢)\right)\text{.ءس}$

$=\frac{١}{٢}\left(\text{س}-\frac{\text{جا}(٦\text{س}+٢)}{٦}\right)+\text{جـ}$

---

٧) $\int \frac{١+\text{جا}^{٢}\text{س}}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\text{.ءس}$

$=\int \frac{١+\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\text{.ءس}$

$=\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}+\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\text{.ءس}$

$=\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س}+\text{ظا}^{٢}\text{س}\right)\text{.ءس}$

$=\int \text{قا}^{٢}\text{س}+\left(\text{قا}^{٢}\text{س}-١\right)\text{.ءس}$

$=\int \left(٢\text{قا}^{٢}\text{س}-١\right)\text{.ءس}$

$= ٢\text{ظاس}-\text{س}+\text{جـ}$

---

٨) $\int \text{قاس}\left(\text{ظاس}+\text{جتاس}\right)\text{.ءس}$

$=\int \left(\text{قاسظاس}+\text{قاسجتاس}\right)\text{.ءس}$

$=\int \text{قاسظاس}+\frac{١}{\cancel{\text{جتاس}}}\times\cancel{\text{جتاس}}\text{.ءس}$

$=\int \left(\text{قاسظاس}+١\right)\text{.ءس}$

$=\text{قاس}+\text{س}+\text{جـ}$

---

٩) $\int \left(\text{قاس}+\text{جتاس}\right)^{٢}\text{.ءس}$

$=\int \text{قا}^{٢}\text{س}+٢\text{قاسجتاس}+\text{جتا}^{٢}\text{س.ءس}$

$$=\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢ + \frac{١}{٢}\left(١+\text{جتا}٢\text{س}\right)\right).\text{ءس}$$

$$=\text{ظاس} + ٢\text{س} + \frac{١}{٢}\left(\text{س} + \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right)+\text{جـ}$$

$$١٠)\ \int \left(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}٢\text{س}\right).\text{ءس}$$

$$=\int \frac{١}{٢}\left(١+\text{جتا}٢\text{س}\right) - \frac{١}{٢}\left(١-\text{جتا}٤\text{س}\right).\text{ءس}$$

$$=\int \cancel{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} - \cancel{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٤\text{س}.\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right) + \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا}٤\text{س}}{٤}\right)+\text{جـ}$$

$$١١)\ \int \left(\text{جا}٣\text{س}\,\text{جتاس} - \text{جتا}٣\text{س}\,\text{جاس}\right).\text{ءس}$$

$$=\int \text{جا}\left(٣\text{س} - \text{س}\right).\text{ءس} = \int \text{جا}٢\text{س}.\text{ءس}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}+\text{جـ}$$

$$١٢)\ \int \text{قا}^{٢}\text{س}+\text{ظا}^{٢}٢\text{س}.\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س}+\text{قا}^{٢}٢\text{س} - ١\right).\text{ءس}$$

$$=\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}٢\text{س}}{٢} - \text{س}+\text{جـ}$$

$$١٣)\ \int \frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}}.\text{ءس} = \int \text{قاس}\,\text{قاس}.\text{ءس}$$

$$=\int \text{قا}^{٢}\text{س}.\text{ءس} = \text{ظاس}+\text{جـ}$$

$$١٤)\ \int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{جتاس}}.\text{ءس} = \int \frac{٢\text{جاس}\,\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}.\text{ءس}$$

$$= \int ٢\text{جاس}.\text{ءس} = -٢\text{جتاس}+\text{جـ}$$

$$١٥)\ \int \frac{\text{ءس}}{١+\text{جتا}٢\text{س}} = \int \frac{\text{ءس}}{\cancel{١} + ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} \cancel{-١}}$$

$$=\int \frac{\text{ءس}}{٢\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{١}{٢}\int \text{قا}^{٢}\text{س}.\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ظاس}+\text{جـ}$$

$$١٦)\ \int \left(\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}\right)\cancel{\left(\text{جتا}^{٢}\text{س}+\text{جا}^{٢}\text{س}\right)}.\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\int \text{جتا}٢\text{س}.\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}+\text{جـ}$$

$$١٧)\ \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{جا}^{٢}\text{س}.\text{ءس}$$

$$=\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{جا}^{٢}\text{س}.\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}.\text{ءس} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}.\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right).\text{ءس} = \text{ظاس} - \text{س}+\text{جـ}$$

$$١٨)\ \int \left(\text{قاس}+\text{ظاس}\right)^{٢}.\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\text{قاس}\,\text{ظاس}+\text{ظا}^{٢}\text{س}\right).\text{ءس}$$

$$=\int \text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\text{قاس}\,\text{ظاس} + \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right).\text{ءس}$$

$$=\int \left(٢\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\text{قاس}\,\text{ظاس} - ١\right).\text{ءس}$$

$$= ٢\text{ظاس} + ٢\text{قاس} - \text{س}+\text{جـ}$$

$$١٩)\ \int \left(\text{ظاس}+\text{ظتاس}\right)^{٢}.\text{ءس}$$

$$=\int \text{ظا}^{٢}\text{س} + ٢\text{ظاس}\,\text{ظتاس}+\text{ظتا}^{٢}\text{س}.\text{ءس}$$

$$=\int \left(\left(\text{قا}^{٢}\text{س}\cancel{-١}\right) + \cancel{٢} + \left(\text{قتا}^{٢}\text{س}\cancel{-١}\right)\right).\text{ءس}$$

$$=\text{ظاس}-\text{ظتاس}+\text{جـ}$$

٢٠) $\int (\text{١}-\text{ظاس})^{\text{٢}}+\text{٢ظاس}\ .\text{ءس}$

$=\int \text{١}-\cancel{\text{٢ظاس}}+\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}+\cancel{\text{٢ظاس}}\ .\text{ءس}$

$=\int (\text{١}+\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}).\text{ءس}$

$=\int \cancel{\text{١}}+\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}-\cancel{\text{١}}\ .\text{ءس}$

$=\int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}.\text{ءس}=\text{ظاس}+\text{جـ}$

---

٢١) $\int \frac{\text{جا}^{\text{٣}}\text{س}+\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}.\text{ءس}$

$=\int \frac{\cancel{(\text{جاس}+\text{جتاس})}\,(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}-\text{جاس جتاس}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})}{\cancel{(\text{جاس}+\text{جتاس})}}.\text{ءس}$

$=\int \text{١}+\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢س}.\text{ءس}$

$=\text{س}-\frac{\text{جتا٢س}}{\text{٤}}+\text{جـ}$

---

٢٢) $\int (\text{١}+\text{جتاس})^{\text{٢}}.\text{ءس}$

$=\int \text{١}+\text{٢جتاس}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}.\text{ءس}$

$=\int (\text{١}+\text{٢جتاس}+\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١}+\text{جتا٢س})).\text{ءس}$

$=\text{س}+\text{٢جاس}+\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{س}+\frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}})+\text{جـ}$

---

٢٣) $\int \text{٤جا}^{\text{٤}}\text{س}.\text{ءس}$

$=\int \text{٤}(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س})^{\text{٢}}.\text{ءس}$

$=\int \text{٤}(\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١}-\text{جتا٢س}))^{\text{٢}}.\text{ءس}$

$=\int (\text{١}-\text{جتا٢س})^{\text{٢}}.\text{ءس}$

$=\int \left(\text{١}-\text{٢جتا٢س}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}\right).\text{ءس}$

$=\int \left(\text{١}-\text{٢جتا٢س}+\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١}+\text{جتا٢س})\right).\text{ءس}$

$=\text{س}-\text{٢}\frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}}+\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{س}+\frac{\text{جا٤س}}{\text{٤}})+\text{جـ}$

---

٢٤) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}-\text{جا}^{\text{٤}}\text{س}}$

$\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}(\text{١}-\text{جا}^{\text{٢}}\text{س})}$

$=\int \frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س جتا}^{\text{٢}}\text{س}}.\text{ءس}$

$=\int \frac{\text{ءس}}{\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}$

$=\int \frac{\text{٤}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}.\text{ءس}$

$=\int \text{٤قتا}^{\text{٢}}\text{٢س}.\text{ءس}$

$=\frac{-\text{٤ظتا٢س}}{\text{٢}}+\text{جـ}$

لاحظ:

جا٢س=٢جاس جتاس

$\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}=\text{٤جا}^{\text{٢}}\text{س جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

---

٢٥) $\int (\text{جتا(١٢س)جتا(١٠س)}+\text{جا(١٢س)جا(١٠س)}).\text{ءس}$

$=\int \text{جتا(١٢س} - \text{١٠س)ءس}$

$=\int \text{جتا٢س}.\text{ءس}=\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢س}+\text{جـ}$

---

٢٦) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جتاس}+\text{جاس}}.\text{ءس}$

$=\int \frac{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}-\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جتاس}+\text{جاس}}.\text{ءس}$

$=\int \frac{\cancel{(\text{جتاس}+\text{جاس})}\,(\text{جتاس}-\text{جاس})}{\cancel{(\text{جتاس}+\text{جاس})}}.\text{ءس}$

$=\int \text{جتاس}-\text{جاس}.\text{ءس}=\text{جاس}+\text{جتاس}+\text{جـ}$

---

٢٧) $\int \text{جا٢س جتا٣س}.\text{ءس}$

$=\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{جا(٢س} - \text{٣س)}+\text{جا(٢س} + \text{٣س)}).\text{ءس}$

$=\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{جا}(-\text{س})+\text{جا(٥س)}).\text{ءس}$

$=\frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\frac{\cancel{-}\text{جتا}-\text{س}}{\cancel{-\text{١}}}-\frac{\text{جتا٥س}}{\text{٥}}\right)+\text{جـ}$

٢٨) $\int$ جا$(\pi$س$)$جتا$(٢\pi$س$)$.ءس

$= \int \frac{١}{٢}\Big($جا$(\pi$س $-$ ٢πس$)+$جا$(\pi$س $+$ ٢πس$)\Big)$.ءس

$= \int \frac{١}{٢}\Big($جا$(-\pi$س$)+$جا$(٣\pi$س$)\Big)$.ءس

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{\cancel{-}\text{جتا}(-\pi\text{س})}{\cancel{-}\pi} - \frac{\text{جتا}(٣\pi\text{س})}{٣\pi}\right) +$ جـ

٢٩) $\int\Big($جا$^{٢}\frac{\text{س}}{٢}-$جتا$^{٢}\frac{\text{س}}{٢}+$ظا^{٢} ٢س$\Big)$.ءس

$= \int\big(-$جتاس$+$قا^{٢} ٢س $-$ ١$\big)$.ءس

$= -$جاس $+ \frac{\text{ظا٢س}}{٢} -$ س$+$جـ

---

٣٠) $\int \frac{\text{١} - \text{جا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$.ءس

$= \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{٢جاس جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$.ءس

$= \int \frac{(\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{٢جاس جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$.ءس

$= \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^{\cancel{٢}}}{\cancel{(\text{جاس} - \text{جتاس})}}$.ءس

$= \int ($جاس$-$جتاس$)$.ءس

$= -$جتاس$-$جاس$+$جـ

---

٣١) $\int ($قا^{٤}س$-$ظا^{٤}س$)$.ءس

$= \int ($قا^{٢}س$-$ظا^{٢}س$)($قا^{٢}س$+$ظا^{٢}س$)$.ءس

$= \int ١ \times ($قا^{٢}س$+$ظا^{٢}س$)$.ءس

$= \int ($قا^{٢}س$+$قا^{٢}س $-$ ١$)$.ءس

$= \int ($٢قا^{٢}س $-$ ١$)$.ءس

$=$ ٢ظاس $-$ س$+$جـ

---

٣٢) $\int \Big($جا$^{٢}\frac{\text{ي}}{٢} -$ جتا$^{٢}\frac{\text{ي}}{٢} +$ ظا^{٢}ي$\Big)$.ءي

#أسئلة للطالب :

١- $\int$ ٥ن.ءع $=$

٢- $\int -\frac{١}{٧}$.ءن $=$

٣- $\int ($٣س$^{٢}+$٥س$^{٤}+$٢س$)$.ءس $=$

٤- $\int \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}$.ءس $=$

٥- $\int$ ٣س$^{-\frac{١}{٤}}$.ءس $=$

٦- $\int$ س$^{٢}\sqrt{\text{س}}$.ءس $=$

٧- $\int \sqrt[٣]{\text{ص}^{٧}}$.ءص $=$

٨- $\int \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}^{٦}}$.ءص $=$

٩- $\int \left(\frac{\text{٧س}}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{٢س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}\right)$.ءس $=$

١٠- $\int \frac{(\text{س}^{٢} - ٣)}{(\text{س} - \sqrt{٣})}$.ءس $=$

١١- $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} + \text{٢س} + ٤}$.ءس $=$

١٢- $\int (٧ -$ س$)^{٣}$.ءس $=$

١٣- $\int \frac{١}{(\text{٤س} + ١)^{٧}}$.ءس $=$

١٤- $\int \frac{٨}{\sqrt[٦]{\text{٥س} + ٤}}$.ءس $=$

١٥- $\int ($٦$+$قتا^{٢}س$)$.ءس $=$

١٦- $\int ($٢س$-$جتاس$)$.ءس $=$

١٧- $\int ($جتاس$-$قتا$^{٢}\frac{\text{س}}{٥})$ءس $=$

١٨- $\int$ قتا$(٢ -$ س$)$ظتا$(٢ -$ س$)$.ءس $=$

١٩- $\int \frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}}$.ءس $=$

٢٠- $\int (\text{٧جا}^{٢}\text{٥س} + \text{٧جتا}^{٢}\text{٥س}).\text{ءس} =$

٢١- $\int (\text{جاس} - \text{جتاس})^{٢}.\text{ءس} =$

٢٢- $\int \frac{\text{س} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}.\text{ءس} =$

٢٣- $\int \text{جا٢س جتا٥س}.\text{ءس} =$

٢٤- $\int \text{جتا٢س جتا٥س}.\text{ءس} =$

٢٥- $\int \text{جا٢س جا٥س}.\text{ءس} =$

٢٦- $\int \frac{٣ - \text{٢ظتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}.\text{ءس} =$

٢٧- $\int \frac{١}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}}.\text{ءس} =$

٢٨- $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}.\text{ءس} =$

٢٩- $\int \frac{(\text{١٦س}^{٢} - \text{٨س} + ١)}{\sqrt[٣]{(\text{٤س} - ١)^{٢}}}.\text{ءس} =$

٣٠- $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}.\text{ءس} =$

٣١- $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جتاس}}.\text{ءس} =$

٣٢- $\int \frac{١}{١ - \text{جا٢س}}.\text{ءس} =$

٣٣- $\int \text{جا}^{٢}\text{س}.\text{ءس} =$

٣٤- $\int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}).\text{ءس} =$

٣٥- $\int \text{جا}^{٤}\text{٢س}.\text{ءس} =$

٣٦- $\int \text{جتا}^{٤}\text{٢س}.\text{ءس} =$

٣٧- $\int \frac{١}{\text{قتا}^{٢}\text{٣س}}.\text{ءس} =$

٣٨- $\int \frac{\text{٥س}}{\sqrt{\text{٧س} + ٣} + \sqrt{\text{٢س} + ٣}}.\text{ءس} =$

٣٩- $\int \frac{\text{س} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} - ١}.\text{ءس} =$

٤٠- $\int \sqrt[٣]{\text{س}}\,(\sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}}).\text{ءس} =$

٤١- $\int \frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}}.\text{ءس} =$

٤٢- $\int \frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}.\text{ءس} =$

٤٣- $\int \frac{١}{\text{قاس} - ١}.\text{ءس} =$

أفكار حلوة :)

إذا كان أ,ب عددين صحيحين موجبين

فأثبت أن

$\leftarrow \int \text{جاأس جاب س}.\text{ءس} =$

$\begin{cases} \frac{\text{جا(أ} - \text{ب)س}}{\text{٢(أ} - \text{ب)}} - \frac{\text{جا(أ} + \text{ب)س}}{\text{٢(أ} + \text{ب)}} + \text{جـ} \rightarrow \boxed{\text{أ} \neq \text{ب}} \\ \frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{جا٢أس}}{\text{٤أ}} + \text{جـ} \rightarrow \boxed{\text{أ} = \text{ب}} \end{cases}$

الحل :

الحالة الأولى

$\Leftarrow \text{أ} \neq \text{ب}$

$\int \text{جاأس جاب س}.\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{جتا(أ} - \text{ب)س} - \text{جتا(أ} + \text{ب)س}).\text{ءس}$

$= \frac{\text{جا(أ} - \text{ب)س}}{\text{٢(أ} - \text{ب)}} - \frac{\text{جا(أ} + \text{ب)س}}{\text{٢(أ} + \text{ب)}} + \text{جـ}$

الحالة الثانية

$\Leftarrow \text{أ} = \text{ب}$

$\int \text{جاأس جاب س}.\text{ءس} = \int \text{جا}^{٢}\text{أس}.\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (١ - \text{جتا٢أس}).\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{\text{جا٢أس}}{\text{٢أ}}) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{جا٢أس}}{\text{٤أ}} + \text{جـ}$

**معكوس المشتقة **

← **إذا كان ن إقترانا متصلاً على مجاله ,فإن**

م(س) إقتران معكوس المشتقة لِ ن(س) إذا كان :

م′(س) = ن(س) لكل س في مجال ن

أمثلة:

جد معكوس المشتقة لِ ن(س) حيث:

١) ن(س) = ٢س + ٧

م(س) = $\int$ ٢س + ٧.ءس

= $\frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}}$ + ٧س+جـ

٢) ن(س) = ٤س^{٣} +جاس

م(س) = $\int$ن(س).ءس = $\frac{٤\text{س}^{٤}}{٤}$ +جاس+جـ

٣) ن(س) = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

م(س) = $\int$ن(س).ءس = $\int$− س$^{-٢}$.ءس

= س$^{-١}$+جـ

*ملاحظة هامة :

$$\text{ن}'(\text{س}) \xrightarrow{\int} \text{ن}(\text{س}) \xrightarrow{\int} \int \text{ن}(\text{س})$$

المشتقة   الأصلي   معكوس المشتقة

2) إذا كان م(س) = ٢س^{٣} − ٤س^{٢} + ٩س+جـ

حيث م(س) معكوس المشتقة لـ ق(س),فجد:

ن(١)، ن′(١) :

م(س) = $\int$ن(س).ءس

م(س) = ٢س^{٣} − ٤س^{٢} + ٩س+جـ

ن(س) = ٦س^{٢} − ٨س + ٩

* ن(١) = ٦ − ٨ + ٩ = ٧

ن′(س) = ١٢س − ٨

* ن′(١) = ١٢ − ٨ = ٤

3) إذا كان م(س) معكوس المشتقة لـ ق(س) و

كان م(س) = ٦س+جا٢س+جـ , فجد :

ن($\frac{\pi}{٤}$)، ن′($\frac{\pi}{٤}$) :

*ملاحظ مهمة جدا :

إذا كان ن(س) = ٢س + ٥ فإن كل من الإقترانات :

م$_{١}$(س) = س^{٢} + ٥س + ٨

م$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٥س + ٢

م$_{٣}$(س) = س^{٢} + ٥س − ٩

كلهم يعتبرو معكوس المشتقة لـ **ن(س)** لأن مشتقتهم تعطي **ن(س)** , أي أنه يوجد لـ **ن(س)** أكثر من معكوس مشتقة و الفرق بينهم مقدار الثابت **(جـ)** .

*مثال :

إذا كان م$_{١}$(س) ,م$_{٢}$(س) اقترانان معكوسان لمشتقة ق(س) و كان ل(س)=م$_{١}$(س)− م$_{٢}$(س), فجد لَ (٥):

م$_{١}$(س) − م$_{٢}$(س) = جـ

∴ ل(س) = جـ

ل′(س) = صفر

∴ ل′(٥) = صفر

*** قاعدة هامة :**

$$\frac{د}{د\text{س}}\int \text{ن}(\text{س}).ء\text{س} = \text{ن}(\text{س})$$

مشتقة التكامل = الأصلي

* أمثلة :

١) إذا كان ق(س) متصلاً و كان :

$\int$ ق(س).ءس = س^{٣} − س^{٢} + ٨س+جـ

فجد: ق(٢)، ق$'$(٢)

← $\frac{ء}{ءس}\int$ق(س).ءس = $\frac{ء}{ءس}$(س^{٣} − س^{٢} + ٨س+جـ)

ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٨ ⇐ ق(٢) = ١٦

ق$'$(س) = ٦س − ٢ ⇐ ق$'$(٢) = ١٠

٢) إذا كان ق(س) متصلا وكان :

$\int$ق(س).ءس = ٦س^{٢}+جتاس+جـ ,فجد :

ق($\frac{\pi}{٢}$)، ق$'$($\frac{\pi}{٢}$)

٣) إذا كان ق(س) متصلا وكان :

$\int$ق(س).ءس = ٣جاس − ٥جتاس+جـ , فجد:

ق($\frac{\pi}{٢}$)، ق$'$($\frac{\pi}{٢}$)

٤) إذا كان $\int$ق(س).ءس = $\frac{س}{١+س^{٢}}$+جـ , فجد أصفار الإقتران ق(س):

٥) إذا كان ق(س) متصلا وكان :

ق(س) = $\int\sqrt{س^{٢}+٧}$.ءس , فجد: ق$'$(٣)، ق$''$(٣)

٦) إذا كان ص = $\int$جتا^{٢}س.ءس+$\int\frac{٥س}{س^{٢}+٣}$.ءس

فجد $\frac{ءص}{ءس}$:

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = جتا^{٢}س + $\frac{٥س}{س^{٢}+٣}$

$\int$ق$'$(س).ءس = ق(س)+جـ

تكامل المشتقة = الأصلي+جـ

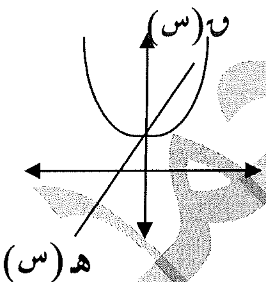
٧) إذا كان ق$'$(س) = ٦س^{٢} + ٨س , وكان ق(١) = ٣ , فجد : ق(٢)؟

٨) إذا كان $\int$ق$'$(س).ءس = ٢س^{٢} − ٣س+جـ , وكان ق(١) = ٤ , فجد ق(٣) ؟

٩)إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) ,يعطى بالعلاقة = ٤س^{٣} + ٢س , و كان ق(س) يمر بالنقطة (٠،٣) فجد ق(س)؟

---

١٠)معتمداً على الرسم



هـ(س) = ٤س + ٧

وكانت ق'(س) = ٢س + ٣

فجد: ق(٣) ؟

مهم جداً

١١)إذا كان ∫(ق'(س) + ٢س).دس = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ٦

و كان ق'(١) = ٨، ق(١) = ٤ ,فجد: أ، ق'(٣)، ق(٢)

---

١٢)إذا كان : ∫ق'(س).دس = ٣س^{٢} + ٤س ,فجد:

ق(٣) − ق(١)؟

← ∫ق'(س).دس = ٣س^{٢} + ٤س

ق(س) = ٣س^{٢} + ٤س

ق(٣) = (٢٧+١٢) = ٣٩

ق(١) = ٣ + ٤ = ٧

ق(٣) − ق(١) =

٣٩ − ٧ = ٣٢

---

* سؤال جميل

١٣)جد قاعدة الإقتران ق الذي يمر بنقطة الأصل و ميل المماس عند أي نقطة عليه هو (جاس −جتاس)^{٢}

الحل :

∫ق'(س).دس = ∫(جاس−جتاس)^{٢}.دس

ق(س)=∫جا^{٢}س − ٢جاسجتاس+جتا^{٢} .دس

ق(س) = ∫(١−جا٢س).دس

ق(س) = س + $\frac{\text{جتا٢س}}{٢}$ + جـ

⇐ (٠،٠)

ق(٠) = ٠

← ٠ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ + جـ

جـ = − $\frac{١}{٢}$

∴ ق(س) = س+ $\frac{\text{جتا٢س}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$

---

* سؤال جيد جداً

١٤) جد قاعدة الإقتران ق الذي يمر منحناه بالنقطة (١,−١) و حاصل ضرب ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س,ص) في مربع الإحداثي السيني لهذه النقطة (٢)؟

الحل :

س^{٢}.ق'(س) = ٢ ← ق'(س) = $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ *نكامل الطرفين :

∫ق'(س).دس = ∫ $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$.دس

ق(س) = $\frac{\text{٢س}^{-١}}{-١}$ + جـ

ق(س) = $\frac{٢}{-\text{س}}$ + جـ

ق(١) = −١

١٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند أي نقطة (س,ص) تقع عليه يساوي= أ(٢س−١) "حيث أ ثابت" فجد معادلة هذا المنحنى علماً أنه يمر بالنقطتين (٢,−٢),(٣،٢) ؟

---

١٦) جد قاعدة الإقتران (ق) الذي يمر منحناه بالنقطة (٥،٢) وميل العمودي عليه عند أي نقطة (س,ص) تقع عليه هو $\frac{-١}{٣}$س^٢ ؟

---

١٧) إذا كان م(س) , هـ(س) معكوسين لمشتقة الإقتران المتصل ق(س), و كان ل(س) = ٣م(س) − ٥هـ(س) , فجد ل$'$(س) بدلالة ق(س) ؟

م , هـ معكوس لمشتقة ق,

∴ م$'$ = هـ$'$ = ق

∴ ل$'$(س) = ٣م$'$(س) − ٥هـ$'$(س)

= ٣ق(س) − ٥ق(س)

= −٢ق (س)

---

١٨) إذا كان : $\int$ق$'$(س).ءس = جا^٢ س − اجتاس + ١

و ق$'$($\frac{\pi}{٤}$) = ٠ ، فجد قيمة أ ؟

$\frac{ء}{ءس}\int$ق$'$(س).ءس = $\frac{ء}{ءس}$ (جا^٢ س − اجتاس + ١)

ق$'$(س)=٢جاسجتاس+جاس

ق$'$($\frac{\pi}{٤}$) = ٠

١ + $\frac{أ}{\sqrt{٢}}$ = ٠

أ = −$\sqrt{٢}$

---

١٩) إذا كان م$_١$(س), م$_٢$(س) معكوسين لمشتقه الإقتران ق و كان :

م$_١$(س) = ٣س^٢ − ٢س + ٥

م$_٢$(٢) = ٤

جد م$_٢$(س)؟

* الطريقة الأولى :

م$_١$(س) = ٣س^٢ − ٢س + ٥

ق(س) = م$_١'$(س) = ٦س − ٢

م$_٢$(س) = $\int$ق(س).ءس

م$_٢$(س) = ٣س^٢ − ٢س+جـ

م$_٢$(٢) = ٤

١٢ − ٤ + جـ = ٤

جـ = −٤

∴ م$_٢$(س) = ٣س^٢ − ٢س − ٤

* الطريقة الثانية :

م$_٢$(٢) − م$_١$(٢) = ع

٤ − ١٣ = ع

−٩ = ع

م$_١$(س) − م$_٢$(س) = −٩

٣س^٢ − ٢س + ٥ − (٣س^٢ − ٢س+جـ) = −٩

٥−جـ = −٩

جـ = −٤

∴ م$_٢$(س) = ٣س^٢ − ٢س − ٤

* الطريقة الثالثة :

معكوس المشتقة رقم ٢ يختلف عن (١) بالثابت فقط اذن

م$_٢$(س) = ٣س^٢ − ٢س + جـ

لكن

م$_٢$(٢) = ٤

∴ جـ = −٤

∴ م$_٢$(س) = ٣س^٢ − ٢س − ٤

اسئلة للطالب :

١− إذا كان م(س) إقتران معكوس المشتقة لـ ق(س), حيث ق(س)=أس+ب , وعندما تكون م$'$(٢) = ٧،م$''$(٢) = ٢ جد أ و ب؟

٢- بيّن أن م(س) = ٣س^{٢}+جاس , إقتران معكوس المشتقة للإقتران ق(س) = ٦س+جتاس ؟

٣- إذا كان م(س) هو إقتران معكوس المشتقة لِ ق(س) =أس+ب عندما تكون م′(١) = ٣،م″(٢) = ٥ ,جد أ,ب؟

٤- إذا كان م(س) هو إقتران معكوس المشتقة لـ ق(س) و كان م(س) =طاس ,جد ق($\frac{\pi}{٢}$) ؟

٥- بيّن أن إقتران معكوس المشتقة م للإقتران هـ , حيث أن هـ(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$،م(٣) = ١ ؟

٦- إذا كان $\frac{ق'(س)}{٣}$ =جتاس , فجد ق(س) إذا علمت أن ق($\frac{\pi}{٢}$)=-٢؟

٧- جد معكوس المشتقة للإقتران ق(س) المتصل حيث: ق(س) =جاس+قا^{٢}س ؟

٨- إذا علمت أن ص= $\int \sqrt{س^{٣}+س^{٢}-١}$.ءس , جد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

٩- إذا كان ق′(س)+قتا^{٢}س = س , حيث ق($\frac{\pi}{٣}$) = ١ ,أوجد ق($\frac{\pi}{٤}$) ؟

١٠- إذا كان $\int$ق(س).ءس = س^{٥}+١ أوجد: ق(١)،ق′(١)

١١- إذا كان ق″(س) = $\frac{٦}{\sqrt{س}}$, ومنحنى الإقتران يمر بـ (٠،٤) و ميل المماس عند هذه النقطة=١, جد قاعدة الإقتران؟

** التكامل المحدود **

تعلمنا في الدرس السابق أن :

$$\int ق'(س).ءس = ق(س)+جـ$$

و لكن !

$$\int_{أ}^{ب} ق'(س)ءس = ق(ب) - ق(أ)$$

قاعدة سريعة للثابت

$$\int_{أ}^{ب} جـ.ءس = جـ(ب-أ) = جـ.ب - جـ.أ$$

1) $\int_{٣}^{٤} ٥.ءس = ٥(٤-٣) = ٥$

2) إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ أ.ءس = ٩ جد قيمة أ ؟

3) إذا كان $\int_{أ+١}^{٣+٣أ}$ ٥.ءس = ٤٠ أوجد قيمة أ؟

$(٣+٣أ-١-أ)٥ = ٤٠$

$٢أ+٢ = ٨$

$٢أ = ٦$

$\boxed{أ = ٣}$

٤)إذا كان $\int_{أ}^{ب}$ ٤.ءس = ٨، $\int_{أ}^{٣ب}$ ١.ءس = ٦

جد قيمة (أ,ب)؟

$٤(ب-أ) = ٨ \Leftarrow ب-أ = ٢ \leftarrow \boxed{١}$

$(٣ب-أ) = ٦ \Leftarrow ٣ب-أ = ٦ \leftarrow \boxed{٢}$

$\therefore \boxed{ب = ٢}$

$\boxed{أ = ٠}$

٥) إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة و كان :

$\text{ق}(١) = -٢ ، \text{ق}(٣) = -١٤$, فجد : $\int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$

$\int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$

$= -١٤ - -٢$

$= -١٤ + ٢ = -١٢$

---

٦) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قاس ظاس}\,\text{ءس}$

$= \Big[\text{قاس}\Big]_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

$\text{قا}(\frac{\pi}{٤}) - \text{قا}(\frac{-\pi}{٤})$

$= \sqrt{٢} - \sqrt{٢} = ٠$

---

٧) $\int_{٠}^{١} (٣\text{س} - ٢)^{٥}\,\text{ءس}$

$= \left[\frac{(٣\text{س} - ٢)^{٦}}{٣ \times ٦}\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١ - ٦٤}{١٨} = \frac{-٦٣}{١٨}$

---

٨) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\,\text{ءس}$

---

٩) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

١٠) $\int_{١}^{٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{ص}}}\,\text{ءص}$

$= \int_{١}^{٨} \text{ص}^{\frac{-١}{٣}}\,\text{ءص}$

$= \left[\frac{٣\text{ص}^{\frac{٢}{٣}}}{٢}\right]_{١}^{٨} = \frac{٣}{٢}\left[\sqrt[٣]{\text{ص}^{٢}}\right]_{١}^{٨}$

$= \frac{٣}{٢}\left(\sqrt[٣]{٦٤} - \sqrt[٣]{١}\right) = \frac{٩}{٢}$

ملاحظة : هناك تجهيزات للشكل :

١) قبل التكامل

٢) قبل التعويض

11) جد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الأولى حيث:

$\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤ ، \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$ ؟

الحل:

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أس} + \text{ب}$

$\int_{-١}^{١} (\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = ٤ \Leftarrow \left[\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + \text{بس}\right]_{-١}^{١} = ٤$

$(\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}) - (\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}) = ٤$

$٢\text{ب} = ٤ \leftarrow \boxed{\text{ب} = ٢}$

$\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \Leftarrow \int_{١}^{٣} (\text{أس} + \text{ب}) = ٢$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} (\text{أس} + ٢)\,\text{ءس} = ٢$

$\left[\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right]_{١}^{٣} = ٢$

$$\left(\frac{19\text{أ}}{2}+6\right)-\left(\frac{\text{أ}}{2}+2\right)=2$$

$$4\text{أ}+4=2 \Leftarrow 4\text{أ}=-2$$

$$\boxed{\text{أ}=\frac{-1}{2}}$$

١٢) إذا كان : $\int_{0}^{2}\left(4\text{س}+\int_{7}^{8}\text{أ}.\text{دص}\right).\text{دس}=\int_{0}^{2}2\text{س}.\text{دس}$

جد قيمة أ؟

" نبدأ بالتكامل الداخلي"

$$\int_{7}^{8}\text{أ}.\text{دص}=\text{أ}(8-7)=\text{أ}$$

$$\therefore \int_{0}^{2}(4\text{س}+\text{أ}).\text{دس}=\int_{0}^{2}2\text{س}.\text{دس}$$

$$\left[2\text{س}^{2}+\text{أس}\right]_{0}^{2}=\left[\text{س}^{2}\right]_{0}^{2}$$

$$8+2\text{أ}=4$$

$$\boxed{\text{أ}=-2}$$

١٣) $\int_{0}^{1}2\text{س}^{\text{ن}}.\text{دس}=\int_{-1}^{1}\text{س}^{\text{ن}}.\text{دس}$ ، $\text{ن}\in\text{ص}^{+}$

جد جميع قيم ن التي تجعل العلاقة صحيحة ؟

14) إذا كان م(س), هـ(س) معكوسان للمشتقة لِ ق(س)

حيث:

$\int_{0}^{7}(\text{م}-\text{هـ}).\text{دس}=28$, جد $\int_{1}^{5}(\text{م}(\text{س})-\text{هـ}(\text{س}))\text{س}.\text{دس}$

١٥) $\int_{1}^{\text{س}}2\text{ع}+5.\text{دع}$

16) إذا كان ن عدد صحيح موجب , أثبت أن

$$\frac{\text{ن}+1}{2}\int_{-1}^{1}\text{س}^{\text{ن}}.\text{دس}=\begin{cases}1، & \text{ن عدد زوجي}\\ 0، & \text{ن عدد فردي}\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\text{س}^{\text{ن}}.\text{دس}=\left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}-\frac{(-1)^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}=\frac{1-(-1)^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$$

$$\frac{\text{ن}+1}{2}\int_{-1}^{1}\text{س}^{\text{ن}}.\text{دس}=\frac{\text{ن}+1}{2}\left(\frac{1-(-1)^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right)$$

$$=\frac{1-(-1)^{\text{ن}+1}}{2}=\begin{cases}1، & \text{عدد زوجي}\\ 0، & \text{عدد فردي}\end{cases}$$

**** خواص التكامل المحدود :**

١. يتوزع التكامل على الجمع والطرح ولا يتوزع على الضرب و القسمة .

١) اذا علمت ان : $\int_{0}^{3}\text{س}.\text{دس}=\frac{9}{2}$ ، $\int_{0}^{3}\text{س}^{2}.\text{دس}=9$

فجد $\int_{0}^{3}(2\text{س}^{2}-\text{س}).\text{دس}$

$$2\int_{0}^{3}\text{س}^{2}-\int_{0}^{3}\text{س}.\text{دس}$$

$$=2\times 9-\frac{9}{2}$$

$$=18-\frac{9}{2}$$

٢. اذا كان ق قابلاً للتكامل على [أ،ب] وكانت النقطة جـ∈(أ،ب) يكون:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

*ملاحظات على هذه الخاصية :

١- ليس شرط أن تقع **جـ** بين **أ،ب**

٢- تستخدم هذه الخاصية في ايجاد التكامل:

أ. المتشعب

ب. القيمة المطلقة

ج. أكبر عدد صحيح .

١) $\int_{1}^{2} \left(س + \int_{0}^{1} ص\,.ءص\right)^{2} .ءس$

التكامل الداخلي ⟸ $\left[\frac{ص^{2}}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$

نضع الناتج مكان التكامل الداخلي:

$$= \int_{1}^{2} \left(س + \frac{1}{2}\right)^{2} .ءس$$

←الحل الأول :

(حل القوس التربيعي)

$$\int_{1}^{2} \left(س^{2} + س + \frac{1}{4}\right).ءس$$

$$= \left[\frac{س^{3}}{3} + \frac{س^{2}}{2} + \frac{1}{4}س\right]_{1}^{2}$$

←الحل الثاني :

$$\int (\text{الخطـــــي})^{ن}$$

$$\left[\frac{\left(س+\frac{1}{2}\right)^{3}}{3}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right)}{3}$$

$$= \frac{(125-27)}{24} = \frac{98}{24}$$

٣. التكامل عند نقطة = صفر

$$\int_{أ}^{أ} ق(س).ءس = صفر$$

١) $\int_{2}^{2} ق(س).ءس = صفر$

٢) $\int_{3}^{3} \sqrt{س}\,جاس^{2} .ءس = صفر$

٣) $\int_{أ}^{أ+2} ق(س).ءس = صفر$,فإن قيمة أ المؤكد وجودها ؟

سؤال جميل

٤) $\int_{1}^{جـ} 2س^{2} + 4س.ءس = صفر$, جد قيمة جـ؟ *وزارة

5) إذا كان $\int_{١}^{ج} (٢س^{٢} + ٦س) \, ءس = ٠$, فما قيمة الثابت ج , حيث ج $\in$ ح؟

$$\left[\frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{٦س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{ج} = ٠$$

$$\frac{٢}{٣}ج^{٣} + ٣ج^{٢} - \frac{١١}{٣} = ٠$$

$$٢ج^{٣} + ٩ج^{٢} - ١١ = ٠$$

$$\begin{array}{r|l} ٢ج^{٢} + ١١ج + ١١ & \\ \hline ٢ج^{٣} + ٩ج^{٢} - ١١ & ج - ١ \\ \pm ٢ج^{٣} \pm ٢ج^{٢} & \\ \hline ١١ج^{٢} - ١١ & \\ \pm ١١ج^{٢} \pm ١١ج & \\ \hline ١١ج - ١١ & \\ \pm ١١ج \pm ١١ & \\ \hline ٠ & \end{array}$$

$\Leftarrow (ج - ١)(٢ج^{٢} + ١١ج + ١١) = ٠$

الحل الأول :

$\xrightarrow{١} ج = ١+$

الحل القامي:

$$\xrightarrow{٢} ج = \frac{-١١ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$$

قيم ج هي : $\left\{١، \frac{-١١ + \sqrt{٣٣}}{٤}، \frac{-١١ - \sqrt{٣٣}}{٤}\right\}$

*ملاحظة : تذكر القانون العام لحل المعادلة التربيعية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أج}}{٢أ}$$

---

٦) إذا كان $\int_{-٥}^{٥} ق(س) \, ءس = ١١$، فجد :

$\int_{٥}^{-٥} (٢ + ق(س)) \, ءس$ ؟

$$\int_{٥}^{-٥} ٢ \, ءس + \int_{٥}^{-٥} ق(س) \, ءس$$

$$= ٢(-٥ - ٥) + -١١$$

$$= -٢٠ - ١١ = -٣١$$

---

٧) إذا كان $\int_{١}^{٢} (٢ - ق(س)) \, ءس = ٨$

وكان $\int_{١}^{٢} \frac{هـ(س)}{٥} \, ءس = ١$, فجد التكاملات الآتية :

أ. $\int_{١}^{٢} (٣ق(س) + ٢هـ(س)) \, ءس$

ب. $\int_{٢}^{١} هـ(س) + ٣ \, ءس$

قبل الحل يلزمنا معرفة : $\int_{١}^{٢} ق(س) \, ءس$، $\int_{١}^{٢} هـ(س) \, ءس$ الآن:

$$\int_{١}^{٢} ٢ \, ءس - \int_{١}^{٢} ق(س) \, ءس = ٨$$

$$٢ - \int_{١}^{٢} ق(س) \, ءس = ٨$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٢} ق(س) \, ءس = -٦$$

و أيضا :

$\int_{١}^{٢} \frac{هـ(س)}{٥} \, ءس = ١ \Leftarrow \int_{١}^{٢} هـ(س) \, ءس = ٥$ الحل:

أ. $\int_{١}^{٢} (٣ق(س) + ٢هـ(س)) \, ءس$

$$= -١٨ + ١٠ = -٨$$

ب: $\int_{٢}^{١} هـ(س) \, ءس + \int_{٢}^{١} ٣ \, ءس$

$$= (-٥) + (-٣) = -٨$$

٨) إذا كان $\int_{١}^{-٢} \text{ق(س).ءس} = -٢$

و $\int_{٣}^{١} \text{ق(س).ءس} = ٦$, فجد: $\int_{٣}^{-٢} \text{ق(س).ءس}$

---

٥) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{جاس ،} & \pi \leq \text{س} \leq \frac{٣\pi}{٢} \\ \text{جتاس ،} & \frac{٣\pi}{٢} \leq \text{س} \leq ٢\pi \end{cases}$

جد : $\int_{\pi}^{٢\pi} \text{ق(س).ءس}$ ؟

---

٤. خاصية عكس الحدود

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س).ءس} = -\int_{ب}^{أ} \text{ق(س).ءس}$$

١) إذا كان $\int_{٢}^{٧} \text{ق(س).ءس} = ٢$ فجد: $\int_{٧}^{٢} \text{ق(س).ءس}$ ؟

الحل : -٢

---

٢) إذا كان $\int_{١}^{٣} \frac{\text{ق(س)}}{٢}.\text{ءس} = -٥$, جد: $\int_{٣}^{١} \text{ق(س).ءس}$؟

---

٣) إذا كان $\int_{١}^{٤} ٢\text{ق(س).ءس} = ٦$, فجد: $\int_{٤}^{١} ٣\text{ق(س).ءس}$ ؟

---

٤) إذا كان $\int_{٠}^{٢} (٤ + ٣\text{ق(س)}).\text{ءس} = ٦$, فجد:

$\int_{٢}^{٠} \text{ق(س).ءس}$

---

٥) إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق(س).ءس} = ٤$، $\int_{١}^{٢} \text{ق(س).ءس} = -٢$

و $\int_{٢}^{١} \text{هـ(س).ءس} = ٥$، و

$\int_{٢}^{٣} (٢\text{هـ(س)} - ٣\text{ق(س)}).\text{ءس} = ١$, جد $\int_{١}^{٣} \text{هـ(س).ءس}$

$\leftarrow ٢\int_{٢}^{٣} \text{هـ(س).ءس} - ٣\int_{٢}^{٣} \text{ق(س).ءس} = ١$

$$\boxed{\int_{٢}^{٣} = \int_{١}^{٣} - \int_{١}^{٢}}$$

$$= ٢\left[\int_{١}^{٣} \text{هـ} - (-\int_{٢}^{١} \text{هـ})\right] - ٣\left[\int_{١}^{٣} \text{ق} - \int_{١}^{٢} \text{ق}\right] = ١$$

$= ٢\int_{١}^{٣} \text{ه} + ٢ \times ٢ \times ٥ - ١٢ - ٦ = ١$

$\Leftarrow ٢\int_{١}^{٣} \text{ه(س)} = ١ + ١٨ - ١٠ = ٩$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{ه(س).ءس} = ٤٫٥$

---

٦) إذا كان $\int_{١}^{٢} (٤\text{س}^{٣} - ٣\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{م}^{٢}.\text{ءم}).\text{ءس} = ٧$ ، جد جـ؟

"التكامل الداخلي" $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{م}^{٢}.\text{ءم} = \left[\frac{\text{م}^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}^{٣}}{٣}$

نعوض التكامل الداخلي :

$\int_{١}^{٢} (٤\text{س}^{٣} - \cancel{٣}\frac{\text{جـ}^{٣}}{\cancel{٣}}).\text{ءس} = ٧$

$\int_{١}^{٢} (٤\text{س}^{٣} - \text{جـ}^{٣}).\text{ءس} = ٧$

$\left[\cancel{٤}\frac{\text{س}^{٤}}{\cancel{٤}} - \text{جـ}^{٣}.\text{س}\right]_{١}^{٢} = ٧$

$(١٦ - ٢\text{جـ}^{٣}) - (١ - \text{جـ}^{٣}) = ٧$

$١٥ - \text{جـ}^{٣} = ٧$

$\text{جـ}^{٣} = ٨$ ، $\boxed{\text{جـ} = ٢}$

٥. خاصية المقارنة :

١) إذا كان ق قابلا للتكامل على [أ،ب] و يحقق ق(س) ≥ ٠ لكل س∈[أ،ب] ،

فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س).ءس} \geq$ صفر

٢) إذا كان الإقتران ق قابلاً للتكامل على [أ،ب] و يحقق ق(س) ≤ ٠ لكل س∈[أ،ب] فإن: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س).ءس} \leq$ صفر

---

١) دون إجراء التكامل ما إشارة التكامل $\int_{-٢}^{٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٩}{|\text{س}| + ١}.\text{ءس}$ ؟

---

٢) دون إجراء عملية التكامل أثبت ان $\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}.\text{ءس} \geq \int_{١}^{٢} \text{س.ءس}$

الحل :

$\text{س}^{٢} = \text{س} \Leftarrow \text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$

$\Leftarrow \text{س(س} - ١) = ٠$ (+ | ٠ | − | ١ | +)

$\therefore \text{س}^{٢} - \text{س} \geq ٠ ، \forall \text{س} \in [١،٢]$

$\Leftarrow \text{س}^{٢} \geq \text{س} ، \forall \text{س} \in [١،٢]$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}.\text{ءس} \geq \int_{١}^{٢} \text{س.ءس}$

---

٣) أي الآتي تكاملات موجبة ؟

١- $\int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ١}.\text{ءس}$

٢- $\int_{٠}^{٤} \frac{\text{س}^{٢}}{٣ - \text{جتاس}}.\text{ءس}$

٣- $\int_{-٣}^{١} \frac{\text{س}^{٤}}{\sqrt{٣ - \text{س}}}.\text{ءس}$

٤- $\int_{\pi}^{٢\pi} \text{جاس.ءس}$

٥- $\int_{٠}^{١} \frac{-١٧}{\text{س}^{٢} + ١}.\text{ءس}$

٦- $\int_{-٢}^{٥} |٣\text{س} - ٧|.\text{ءس}$

الحل : ٦،٣،٢

٤) دون إجراء التكامل بين أي التكاملين أكبر

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{2}س.ءس$ $\qquad$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{10}س.ءس$

---

٥)دون إجراء التكامل أثبت أن : $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جتا\sqrt{س}.ءس \geq 0$

---

٦)دون إجراء عملية التكامل أثبت أن :

$\int_{0}^{1}(2س+12).ءس \geq \int_{0}^{1} 11\sqrt{س}.ءس$

$2س+12 \geq 11\sqrt{س} \Leftarrow 2س-11\sqrt{س}+12 \geq 0$

$(\sqrt{س}-4)(2\sqrt{س}-3) \geq 0$

$(\sqrt{س}-4)(2\sqrt{س}-3)$

$\therefore (\sqrt{س}-4)(2\sqrt{س}-3) \geq 0 \quad ، س\in[0،1]$

$2س+12-11\sqrt{س} \geq 0 \quad ، س\in[0،1]$

$\Leftarrow \int_{0}^{1}2س+12.ءس \geq \int_{0}^{1} 11\sqrt{س}.ءس$

#نظرية : افرض ق إقتراناًمتصلاً على [أ،ب] فإن ق على [أ،ب] له قمة صغرى مطلقه م و قمة عظمى مطلقة ن تحقق مما يلي :

$م(ب-أ) \leq \int_{أ}^{ب} ق(س).ءس \leq ن(ب-أ)$

٨)إذا كان ق متصلا على [−٢،٤] و كانت القيمة الصغرى المطلقة للإقتران ق هي(−١) و القيمة العظمى المطلقة للإقتران ق هي (٥) فجد : م،ن ,حيث

$م \leq \int_{-2}^{4} ق(س).ءس \leq ن$

---

٩)بين أن $\frac{1}{6} \leq \int_{0}^{2} \frac{ءس}{10+س} \leq \frac{1}{5}$

الحل:

$0 \leq س \leq 2$

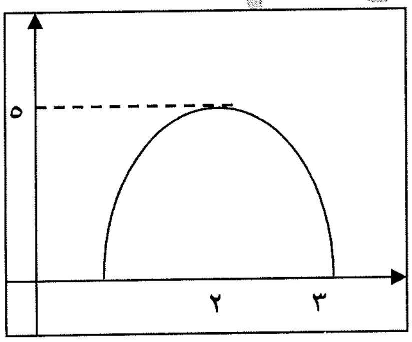
$10 \leq 10+س \leq 12$

$\frac{1}{10} \geq \frac{1}{10+س} \geq \frac{1}{12}$

$\int_{0}^{2}\frac{1}{10}.ءس \geq \int_{0}^{2}\frac{ءس}{10+س} \geq \int_{0}^{2}\frac{1}{12}.ءس$

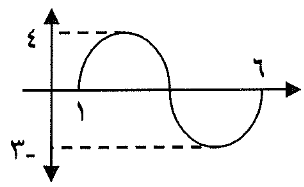
---

١٠) بين أن $0 \leq \int_{1}^{3} ق(س).ءس \leq 10$ من الشكل :



١١)معتمدا على الرسم جد أصغر قيمة و أكبر قيمة للمقدار

$\int_{1}^{6}$ ق(س).ءس



---

١٢)إذا كان ق(س) = $\sqrt{9-س^{2}}$ بيّن أن

$\int_{-3}^{3}$ ق(س).ءس ينحصر بين (٠،١٨) ؟

الحل : بإستخدام القيم القصوى

---

١٣)إذا كان ق(س) = $\sqrt{س^{2}+9}$ جد أكبر قيمة و أصغر قيمة للمقدار $\int_{\cdot}^{4}$ ق(س).ءس ؟

---

١٤)إذا كان ٢ ≤ ق(س) ≤ ٧ جد أكبر قيمة و أقل قيمة لـ

$\int_{-2}^{3}$ ق(س).ءس ؟

---

١٥) إذا كان ٢ ≤ ق(س) ≤ ٣ جد قيمة {م،ن} حيث

م ≤ $\int_{-1}^{3}$ ق(س).ءس ≤ ن ؟

---

١٦) بين أن $\int_{-2}^{2}\sqrt{25-س^{2}}$ ينحصر بين [٠،٢٠] ؟

---

١٧) إذا كان ١ ≤ ق(س) ≤ ٣ لكل س∈[-١،١]

جد قيم أ،ب , حيث أ ≤ $\int_{-1}^{1}$ (٥ − ق(س)).ءس ≤ ب ؟

١ ≤ ق(س) ≤ ٣

-١ ≥ ق(س) ≥ -٣

٤ ≥ ٥ − ق(س) ≥ ٢

$\int_{-1}^{1}$ ٤.ءس ≥ $\int_{-1}^{1}$ (٥ − ق(س)).ءس ≥ $\int_{-1}^{1}$ ٢.ءس

٨ ≥ $\int_{-1}^{1}$ (٥ − ق(س)).ءس ≥ ٤

٤ ≤ $\int_{-1}^{1}$ (٥ − ق(س)).ءس ≤ ٨

$\boxed{أ = ٤}$ ، $\boxed{ب = ٨}$

---

١٨) إذا علمت أن ق(س) = ٣ + ٢جا^{5} $\frac{\pi}{س}$ بيّن أن:

$\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})$ ينحصر بين ٢ و ١٠؟

الحل :

$-١ \le \text{جا}\frac{\pi}{\text{س}} \le ١ \Leftarrow -١ \le \text{جا}^{٥}\frac{\pi}{\text{س}} \le ١$

$\xrightarrow{\times ٢} -٢ \le \text{جا}^{٥}\frac{\pi}{\text{س}} \le ٢$

$\xrightarrow{+٣} ١ \le ٣+\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{\text{س}} \le ٥$

$\int_{١}^{٣} ١.\text{دس} \le \int_{١}^{٣} (٣+\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{\text{س}}).\text{دس} \le \int_{١}^{٣} ٥.\text{دس}$

$٢ \le \int_{١}^{٣} (٣+\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{\text{س}}).\text{دس} \le ١٠$

$٢ \le \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س}).\text{دس} \le ١٠$

١٩) جد أكبر و أصغر قيمة للمقدار $\int_{٠}^{\pi} (٢-\text{جاس}).\text{دس}$ ؟

"نحصر الإقتران *(الأطراف أصفار المشتقة)"

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{ق}' = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠، \frac{\pi}{٢}$

قيم س هي $\left\{٠، \frac{\pi}{٢}، \pi\right\}$

$\text{ق}(٠) = ٢$ أكبر قيمة

$\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) = ١$ أصغر قيمة

$\text{ق}(\pi) = ٢$

$١ \le ٢-\text{جاس} \le ٢$

$\int_{٠}^{\pi} ١.\text{دس} \le \int_{٠}^{\pi} (٢-\text{جاس}).\text{دس} \le \int_{٠}^{\pi} ٢.\text{دس}$

$\pi \le \int_{٠}^{\pi} (٢-\text{جاس}) \le ٢\pi$

فكر بطريقة أخرى

٢٠) بيّن أن $٠ \le \int_{٠}^{١} \text{س}^{٤}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}.\text{دس} \le ٢$ ، $\text{س} \in [٠،١]$

الحل :

$٠ \le \text{س} \le ١$

$٠ \le \text{س}^{٤} \le ١ \ldots \boxed{١}$

$٠ \le \text{س} \le ١$

$٠ \le \text{س}^{٢} \le ١$

$٣ \le \text{س}^{٢}+٣ \le ٤$

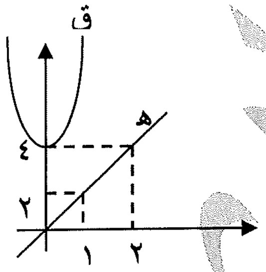
$\sqrt{٣} \le \sqrt{\text{س}^{٢}+٣} \le ٢ \ldots \boxed{٢}$

$\boxed{١} \times \boxed{٢}$

$\int_{٠}^{١} ٠.\text{دس} \le \int_{٠}^{١} \text{س}^{٤}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}.\text{دس} \le \int_{٠}^{١} ٢.\text{دس}$

$٠ \le \int_{٠}^{١} \text{س}^{٤}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}.\text{دس} \le ٢$

٢١) أدرس الشكل ,وفسر $\int_{-٢}^{٥} \text{ق}(\text{س}).\text{دس} \le \int_{-٢}^{٥} \text{هـ}(\text{س})$



٢٢) إبحث إشارة $\int_{-٥}^{-١} \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}.\text{دس}$ دون إجراء عملية التكامل

البسط س=٠ , : ---- ٠ ++++

المقام $(\text{س}^{٢}+١)$ دائما موجب : +++++++

المقدار : —— -٥ -١ ٠ ++++

ق : --------- -٥ -١

** للتدريب :

١) إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢ق(س) + \frac{١}{س^{٢}} - ٦).ى س = ١٢$ فجد: $\int_{١}^{٣} \frac{ق(س)}{٢} - س^{٢}.ى س$ ؟

٢) إذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣).ى س = ١٧$ و $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}.ى س = -٢$ فجد: $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١).ى س$ ؟

٣) دون حساب التكامل للمقدار $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س + ٢}.ى س$ بيّن أن $\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س + ٢}.ى س \le \frac{\pi}{٢}$ ؟

بيّن أن $\int_{٠}^{١} س^{ن}.ى س + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}}.ى س = ١$

$$\left[\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{ن س^{\frac{ن+١}{ن}}}{ن+١}\right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١^{ن+١}}{ن+١} - \frac{صفر^{ن+١}}{ن+١} + \frac{ن × ١^{\frac{ن+١}{ن}}}{ن+١} - ٠$$

$$= \frac{١}{ن+١} - ٠ + \frac{ن × ١}{ن+١} - ١$$

$$= \frac{١}{ن+١} + \frac{ن}{ن+١} = \frac{ن+١}{ن+١} = صفر$$

تكامل الإقتران المتشعب (متعدد القواعد)

١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س، & ٠ \le س < ٢ \\ ٤س، & ٢ \le س < ٤ \\ ٦، & ٤ \le س < ٧ \end{cases}$ فجد:

أ) $\int_{٠}^{٢} ق(س).ى س$

$$\int_{٠}^{٢} ٢س.ى س = \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} = ٤ - ٠ = ٤$$

ب) $\int_{٠}^{٧} ق(س).ى س$

$$= \int_{٠}^{٢} ٢س.ى س + \int_{٢}^{٤} ٤س.ى س + \int_{٤}^{٧} ٦.ى س$$

$$= ٤ + \left[٢س^{٢}\right]_{٢}^{٤} + ١٨$$

$$= ٤ + (٣٢ - ٨) + ١٨$$

$$= ٤ + ٢٤ + ١٨ = ٤٦$$

جـ) $\int_{١}^{٥} ق(س).ى س$

$$= \int_{١}^{٢} ٢.ى س + \int_{٢}^{٣} ٤س.ى س$$

---

٢) $\int_{٠}^{٤} |٢س - ٤|.ى س$

$٢س = ٤$

$س = ٢$

[− − − − + + + +] ٠ ، ٢ ، ٤

$$\int_{٠}^{٤} (٤ - ٢س).ى س + \int_{٢}^{٤} (٢س - ٤).ى س$$

$\left[\text{٤س} - \frac{\text{٢س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{\text{٢س}^{٢}}{٢} - \text{٤س}\right]_{٢}^{٤}$

(٨ − ٤) − (٠) + (١٦ − ١٦) − (٨ − ٤)

٤ − ٤ = ٠

---

٣) $\int_{١}^{٢} |\text{٢س} - ١|\,\text{ءس}$

$\frac{\text{٢س}}{٢} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}$

--- ++[++++]

$\frac{١}{٢}$ ١ ٢

$\int_{١}^{٢} (\text{٢س} - ١)\,\text{ءس}$

$\left[\frac{\text{٢س}^{٢}}{٢} - \text{س}\right]_{١}^{٢}$

(٤ − ٢) − (١ − ١)

٢ − ٠ = ٢

---

٤) $\int_{٠}^{٢} [\text{س} + ٢]\,\text{ءس}$

ل = ١

٠ ١ ٢ ٣

$\int_{٠}^{١} ٢\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} ٣\,\text{ءس}$

= ٢(١ − ٠) + ٣(٢ − ١)

٢ + ٣ = ٥

---

٥) $\int_{١}^{٣} \left[\frac{\text{س}}{٢} + ١\right]\text{ءس}$

$\text{ل} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

١ ٣

٠ [٢] ٤ ٦

$\int_{١}^{٢} ١\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} ٢\,\text{ءس}$

١(٢ − ١) + ٢(٣ − ٢)

١ + ٢ = ٣

---

٦) $\int_{٠}^{٣} \left[٢ - \frac{\text{س}}{٢}\right]\text{ءس}$

$\text{ل} = \frac{١}{\left|\frac{-١}{٢}\right|} = ٢$

[٠ ٢]٣ ٤

$\int_{١}^{٢} (١)\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} (٠)\,\text{ءس}$

= ١ × (٢ − ٠) + ٠ × (٣ − ٢)

= ٢ + ٠ = ٢

---

٧) $\int_{٠}^{\text{٢ن}} \left[\frac{\text{س}}{\text{ن}}\right]\text{ءس}$

$\text{ل} = \frac{١}{\left|\frac{١}{\text{ن}}\right|} = \text{ن}$

١ ن ٢ن ٣ن

$\int_{٠}^{\text{ن}} (٠)\,\text{ءس} + \int_{\text{ن}}^{\text{٢ن}} (١)\,\text{ءس}$

٠ × (ن − ٠) + (٢ن − ن) =

٠ + ن = ن

---

٨) $\int_{١}^{٣} [\text{س}]\,|\text{س} - ٢|\,\text{ءس}$

---

٩) إذا كان $\int_{-١}^{\text{جـ}} |\text{٢س}|\,\text{ءس} = ٥$ ، جـ > ١, جد قيمة جـ ؟

$\int_{-١}^{٠} -\text{٢س}\,\text{ءس} + \int_{٠}^{\text{جـ}} \text{٢س}\,\text{ءس}$

$\left[\frac{-\text{٢س}^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٠} + \left[\frac{\text{٢س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{\text{جـ}}$

٢س = ٠

س = ٠

----+++

−١ ٠ جـ

٠ − ١ + جـ^{٢} − ٠ = ٥

١ + جـ^{٢} = ٥

جـ^{٢} = ٤

جـ = ∓٢

---

١٠) $\int_{٠}^{\text{جـ}} \left[\frac{\text{س}}{٢}\right]\text{ءس} = ٥$ ، جـ > ٠ ,جد قيمة جـ؟

١١) $\int_{١}^{\text{جـ}} \left[\frac{١}{٣}\text{س} + ١\right] \text{ءس} = ١٢$ ، جـ > ١ جد قيمة جـ؟

---

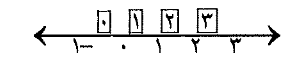
١٢) $\int_{\text{جـ}}^{٥} [\text{س} + ١] . \text{ءس} = ١١$ ، جـ < ٥ جد قيمة جـ؟

---

١٣) إذا كان $\int_{٠}^{\text{ن}} [\text{س} + ١] . \text{ءس} = ٥٠٥٠$ بحيث ن تنتمي للأعداد الصحيحة الموجبة, جد ن؟

س = −١

ل = ١



$$\int_{٠}^{\text{ن}} [\text{س}+١].\text{ءس} = \int_{٠}^{١} ١.\text{ءس} + \int_{١}^{٢} ٢.\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} ٣.\text{ءس} + \dots + \int_{\text{ن}-١}^{\text{ن}} \text{ن}.\text{ءس}$$

$٥٠٥٠ = ١ + ٢ + ٣ + \dots + \text{ن}$

٥٠٥٠ = مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

٥٠٥٠ = (عدد الحدود/٢)×(الحد الأول+الحد الأخير)

$٥٠٥٠ = \frac{\text{ن}}{٢} \times (١ + \text{ن})$

$١٠١٠٠ = \text{ن} + \text{ن}^٢$

$\Leftarrow \text{ن}^٢ + \text{ن} - ١٠١٠٠ = ٠$

$(\text{ن} - ١٠٠)(\text{ن} + ١٠١) = ٠$

$\text{ن} = ١٠٠$ ✓

$\text{ن} = -١٠١$ ✗

---

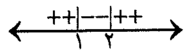
١٤) $\int_{٠}^{٢} \left(|\text{س} + ٢| - [\text{س}]\right) . \text{ءس}$

١٥) $\int_{٠}^{٢} \frac{|س^{٢} - ٣س + ٢|}{س - ٢} .دس$

$س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow س = ٢، س = ١$



$\int_{٠}^{٢} \frac{|س^{٢} - ٣س + ٢|}{س - ٢} .دس$

$\int_{٠}^{١} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س - ١)}{\cancel{(س - ٢)}} .دس + \int_{١}^{٢} \frac{-\cancel{(س - ٢)}(س - ١)}{\cancel{(س - ٢)}} .دس$

$= \int_{٠}^{١} (س - ١)دس + \int_{١}^{٢} (١ - س).دس$

$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - س\right]_{٠}^{١} + \left[س - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٢}$

$= (\frac{١}{٢} - ١) - (٠) + (٢ - \frac{٤}{٢}) - (١ - \frac{١}{٢}) = -١$

---

١٦) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س < ١ \\ ٢ع & ، س \geq ١ \end{cases}$

إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢} ق(س).دس = ٦$, جد قيمة ع؟

الحل:

$\int_{٠}^{٢} ق(س)دس = ٦$

$\int_{٠}^{١} (س + ١).دس + \int_{١}^{٢} ٢ع.دس = ٦$

$\left[\frac{س^{٢}}{٢} + س\right]_{٠}^{١} + \left[٢عس\right]_{١}^{٢} = ٦$

$(\frac{١}{٢} + ١) - (٠) + (٤ع) - (٢ع) = ٦$

$\frac{٣}{٢} + ٢ع = ٦ \leftarrow ٢ع = ٦ - \frac{٣}{٢}$

$\leftarrow ٢ع = \frac{٩}{٢} \leftarrow ع = \frac{٩}{٤}$

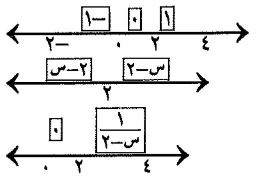
---

١٧) $\int_{٠}^{٤} \frac{\left[\frac{س}{٢}\right]}{|س - ٢|} .دس$ حيث : $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{س - ٢} .دس = ن$

الحل : نعرف كل إقتران على خط لوحده ثم نقاطع خطي التعريف

س = ٠ ← ل = ٢

س = ٢



$\int_{٠}^{٤} \frac{\left[\frac{س}{٢}\right]}{|س - ٢|} .دس = \int_{٠}^{٢} (٠).دس + \int_{٢}^{٤} \frac{١}{س - ٢} .دس$

$= ٠ + ن$

$= ن$

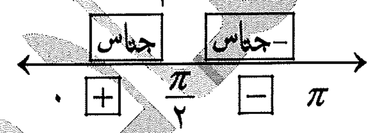
---

١٨) $\int_{٠}^{\pi} \sqrt{١ - جا^{٢}س} .دس$

$\int_{٠}^{\pi} \sqrt{جتا^{٢}س} .دس \leftarrow \int_{٠}^{\pi} |جتاس| .دس$

$جتاس = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$



$\int_{٠}^{\pi} \sqrt{١ - جا^{٢}س} .دس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس.دس + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} -جتاس.دس$

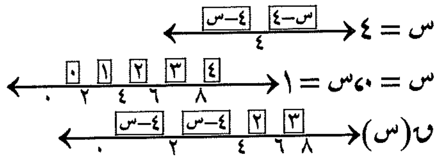
$= \left[جاس\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} - \left[جاس\right]_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$

$= (١ - ٠) - (٠ - ١) = ٢$

---

١٩) $ق(س) = \begin{cases} |س - ٤| & ، ٠ \leq س < ٥ \\ \left[\frac{س}{٢}\right] & ، ٥ \leq س < ٧ \end{cases}$

جد: $\int_{٣}^{٦} ق(س).دس$ ؟



$$\text{ن}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - \text{س} & ، ٢ \le \text{س} < ٤ \\ \text{س} - ٤ & ، ٤ \le \text{س} < ٥ \\ ٢ & ، ٥ \le \text{س} < ٦ \\ ٣ & ، ٦ \le \text{س} < ٧ \end{cases}$$

$$= \int_{٣}^{٤} ٤ - \text{س} . \text{ءس} + \int_{٤}^{٥} \text{س} - ٤ . \text{ءس} + \int_{٥}^{٦} ٢ . \text{ءس}$$

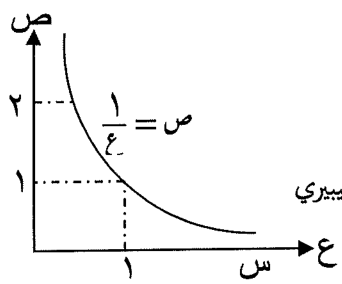
اقتران اللوغاريتم الطبيعي

إذا كان $\text{س} \in (٠ ، \infty)$ فإن :

$\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \int_{١}^{\text{س}} \frac{١}{\text{ع}} . \text{ءع}$ ، يقرأ: اللوغارتم الطبيعي لـ س

حيث هـ العدد الحقيقي الذي يجعل مساحة المنطقة المظللة تساوي وحدة واحدة يسمى هذا العدد النيبيري

$$\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \int_{١}^{\text{س}} \frac{١}{\text{ع}} . \text{ءع}$$



س: العدد

هـ: أساس اللوغارتم العدد النيبيري

حيث $\text{هـ} \cong ٢٫٧$

*قوانين اللوغاريتم :

* $\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = ١$
١ $\text{لـو}_{\text{هـ}} ١ = ٠$
٢ $\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{هـ}^{\text{ن}} = \text{ن} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = \text{ن}$
٣ $\text{لـو}_{\text{هـ}} (\text{أ} \times \text{ب}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{أ} + \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{ب}$
٤ $\text{لـو}_{\text{هـ}} (\frac{\text{أ}}{\text{ب}}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{أ} - \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{ب}$
٥ $\text{لـو}_{\text{س}} \text{هـ} = \frac{١}{\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

#المشتقة:

إذا كان ن(ع) إقتران بدائي للإقتران $\text{ن}'(\text{ع}) = \frac{١}{\text{ع}}$ فإن :

$$\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \int_{١}^{\text{س}} \frac{١}{\text{ع}} . \text{ءع}$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \int_{١}^{\text{س}} \text{ن}'(\text{ع}) . \text{ءع}$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \text{ن}(\text{ع})\Big]_{١}^{\text{س}} = \text{ن}(\text{س}) - \text{ن}(١)$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} = \text{ن}(\text{س}) - \text{ن}(١)$$

وبإشتقاق الطرفين بالنسبة لِـ س تجد أن :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}) = \text{ن}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$$

وبالتعميم: مشتقة اللوغاريتم = مشتقة ما داخله/ ما داخله.

نظرية (١):

١) إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$، فإن $\text{ن}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

٢) إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{ل}(\text{س})$ و كان ل(س) قابلا

للإشتقاق فإن : $\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$ ، $\text{ل}(\text{س}) > ٠$

تكامله:

سؤال :

ليكن $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س}|$ ، $\text{س} \ne ٠$ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل:

$$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س}| = \begin{cases} \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} & ، \text{س} > ٠ \\ \text{لـو}_{\text{هـ}} (-\text{س}) & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \frac{\cancel{-}١}{\cancel{-}\text{س}} = \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$$

أي أن: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س}|) = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \ne ٠$

ومن السؤال السابق يتبين أن الإقتران ق $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$

هو إقتران بدائي للإقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$، س $\neq$ ٠ أي أن:

$$\int \frac{1}{\text{س}} \, \text{ءس} = (\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|) + \text{جـ} \text{ ، جـ} \neq 0$$

ملاحظة : برهان هذه النظرية تجده في درس التكامل بالتعويض

نظرية (٢):

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} \, \text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$$

جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في الأسئلة من ١-١٢ :

١) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} ٧\text{س}$

$$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٧}{٧\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$$

---

٢) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{جتاس}$

$$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$$

---

٣) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{جا}^{٥}٣\text{س}$

$\leftarrow \text{ص} = ٥\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{جا}٣\text{س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١٥ \text{جتا}٣\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}} = ١٥\text{ظتا}٣\text{س}$$

---

٤) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥)$ ، س > ٢

$$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥} \text{ ، س} > ٢$$

---

٥) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} - ٤|$ ، س $\neq$ ٢، −٢

$$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤} \text{ ، س} \neq ٢\text{، }-٢$$

---

٦) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣} + ١|$ ، س > −١

$$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ١} \text{ ، س} \neq -١$$

---

٧) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س جاس}$

$\leftarrow \text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{جاس}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \frac{١}{\text{س}} + \text{ظتاس}$$

---

٨) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١}$

الطريقة الأولى :

$$\boxed{١} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\left(\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}+١}}\right)}{\sqrt{\text{س}^{٣}+١}}$$

$$= \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢(\text{س}^{٣}+١)}$$

الطريقة الثانية:

$$\boxed{٢} \leftarrow \text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٣}+١)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٣}+١)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢(\text{س}^{٣}+١)}$$

---

٩) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٥}+\text{س}^{٢})^{٣}(\text{س}^{٢}+١)^{١٢}$

$\leftarrow \text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٥}+\text{س}^{٢})^{٣} + \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)^{١٢}$

$\text{ص} = ٣\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٥}+\text{س}^{٢}) + ١٢\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\frac{(٥\text{س}^{٤}+٢\text{س})}{\text{س}^{٥}+\text{س}^{٢}} + ١٢\frac{(٢\text{س})}{\text{س}^{٢}+١}$$

$$= \frac{١٥\text{س}^{٤}+٦\text{س}}{\text{س}^{٥}+\text{س}^{٢}} + \frac{٢٤\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$$

---

١٠) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}})$

$$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{٢\text{س} - ١}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}}}\right)}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$$

---

١١) ص = جا(لـو_هـ س)

← دص/دس = جتا(لـو_هـ س). ١/س ، س ≠ ٠

= جتا(لـو_هـ س)/س ، س ≠ ٠

١٢) ص = (لـو_هـ ٢س)^٥

← دص/دس = ٥(لـو_هـ ٢س)^٤ × ٢/٢س

= ٥(لـو_هـ ٢س)^٤ / س

*جد التكاملات في الأسئلة التالية :

١) ∫ (٦س + ٥)/(٣س^٢ + ٥س) .دس = لـو_هـ |٣س^٢ + ٥س| + جـ

٢) ∫ −١/(٦ − س) .دس = لـو_هـ |٦ − س| + جـ

٣) ∫ ظاس.دس = ∫ جاس/جتاس .دس = −لـو_هـ |جتاس| + جـ

٤) ∫ −جتاس/(٦ − جاس) .دس = لـو_هـ |٦ − جاس| + جـ

٥) إذا كان م(س) إقتران معكوس المشتقة للإقتران ن(س)

,جد ن(س) ثم جد ∫ من هـ إلى هـ^٢ ن(س).دس علما بأن

م(س) = لـو_هـ (س لـو_هـ س)

← ن(س) = م′(س) = مشتقة (س لـو_هـ س) / (س×لـو_هـ س)

= (س × ١/س + لـو_هـ س)/(س لـو_هـ س) = (١+لـو_هـ س)/(س لـو_هـ س)

الآن لإيجاد ∫ من هـ إلى هـ^٢ ن(س) = م(هـ^٢) − م(هـ)

= لـو_هـ (هـ^٢ لـو_هـ هـ^٢) − لـو_هـ (هـ لـو_هـ هـ)

= لـو_هـ ٢هـ^٢ − لـو_هـ هـ = لـو_هـ (٢هـ^٢/هـ)

لـو_هـ ٢هـ = لـو_هـ ٢ + ١

٦) ∫ ١/(٢س − ١) .دس

= ١/٢ لـو_هـ |٢س − ١| + جـ

٧) ∫ أ/(ب س + جـ) .دس أ,ب,ج : ثوابت .

← أ ∫ ١/(ب س + جـ) .دس م:ثابت

أ/ب لـو_هـ |ب س + جـ| + م

٨) ∫ دس/(س لـو_هـ س)

← ∫ ١/(س لـو_هـ س) .دس

= ∫ (١/س)/(لـو_هـ س) .دس = لـو_هـ |لـو_هـ س| + جـ

٩) ∫ (١ + ظتا^٢ س)/ظتاس .دس

← ∫ قتا^٢ س/ظتاس .دس = −لـو_هـ |ظتاس| + جـ

الإقتران الأسي الطبيعي

ن(س) = هـ^س هو العكسي لِ ل(س) = لـو_هـ س

هـ العدد النيبيري , س > ٠

#المشتقة:

#نظرية :

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

و بالتعميم : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ل(س)}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ل}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ل(س)}}$

#البرهان :

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}$ " العلاقة بين الأسي و اللوغاريتمي "

و بإشتقاق الطرفين :

$\frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

بعض الخصائص :

١) تحويل الصورة الأسية إلى لوغاريتمة و بالعكس .

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{م(س)} \Leftrightarrow \text{ص} = \text{هـ}^{\text{م(س)}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{م(س)}} = \text{م(س)}$

$\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{م(س)}} = \text{م(س)}$

#قوانين الأسس:

- $\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}+\text{م}}$
- $\text{أ}^{\text{ن}} \div \text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$
- $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{1}{\text{أ}^{\text{ن}}}$
- $(\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}\times\text{م}}$

#تكامله:

#نظرية :

بما أن الإقتران الأسي $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ متصل وقابل للإشتقاق حيث

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن : $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,.\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

وبالتعميم: $\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\,.\text{دس} = \frac{\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

تذكر أن :

$\leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ن(س)}} = \text{ن(س)}$

$\leftarrow \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن(س)}} = \text{ن(س)}$

*جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في ما يلي :

١) $\text{ص} = ٣\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٦\text{س}}$

$\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٩\text{س}^{٢} + ٦\text{هـ}^{٦\text{س}}$

٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١} + \text{جاس}$

$\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١} + \text{جتاس}$

٣) $\text{ص} = \text{جاهـ}^{٢\text{س}}$

$\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاهـ}^{٢\text{س}} \times ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$= ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جتاهـ}^{٢\text{س}}$

٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{٢}{\text{س}}}$

$\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢}{\text{س}^{٢}}\text{هـ}^{\frac{٢}{\text{س}}}$

٥) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{س}^{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}$

٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{هـ}^{٦-\text{س}}$

$\leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + (-١ \times \text{هـ}^{٦-\text{س}})$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - \text{هـ}^{٦-\text{س}}$

٧) $\text{ص} = ٧\text{هـ}^{\text{جاس}}$

$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧\text{جتاس}.\text{هـ}^{\text{جاس}}$

---

٨) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{٤\text{س}^٢}}$

$\leftarrow \text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}^٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}\,\text{هـ}^{٢\text{س}^٢}$

---

٩) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{هـ}^{٢\text{س}}} + (\text{هـ}^{\text{س}-١})^٣$

$\leftarrow \text{ص} = \text{هـ}^{\frac{٢\text{س}}{٣}} + (\text{هـ}^{٣\text{س}-٣})$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\frac{٢\text{س}}{٣}} + ٣(\text{هـ}^{٣\text{س}-٣})$

---

١٠) $\text{ص} = \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}.\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}.\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}.\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}\sqrt{\text{س}}}.\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}.\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{٢\text{س}}$

---

١١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^٢}$ ، $\text{س} = ١$

$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=١} = ٢$ لأن : $(\text{ص} = \text{س}^٢)$

---

١٢) $\text{ص} = (٣\text{س}^٢ + ٣\text{هـ}^{٢\text{س}})^٦$

$\leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦(٣\text{س}^٢ + ٣\text{هـ}^{٢\text{س}})^٥(٦\text{س} + ٦\text{هـ}^{٢\text{س}})$

---

١٣) $٣\text{س}^٢\text{هـ}^{\text{ص}} + ٢\text{ص}^٢ = ٢\text{س}$

$\leftarrow ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\text{هـ}^{\text{ص}}(٣\text{س}^٢) + ٤\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\text{هـ}^{\text{ص}}(٣\text{س}^٢) + ٤\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ - ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(٣\text{س}^٢\text{هـ}^{\text{ص}} + ٤\text{ص}) = ٢ - ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢ - ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}}{٣\text{س}^٢\text{هـ}^{\text{ص}} + ٤\text{ص}}$

---

١٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}}$ ، $\text{س} = (\frac{\pi}{٤})$

$\text{ص} = \text{هـ}^٢ + \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}}$

$\text{ص} = \text{هـ}^٢\text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^٢\text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \text{هـ}^٢\text{جتا}\frac{\pi}{٤} = \frac{\text{هـ}^٢}{\sqrt{٢}}$

---

١٥) إذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ن(س)}}$:أثبت أن

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\,\text{ن}'(\text{س})\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

$\leftarrow \text{ص} = \text{أ}^{\text{ن(س)}}$ " لا طريقة إلا أخذ اللوغاريتم للطرفين "

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ن(س)}}$ " نشتق ضمنياً "

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{ن(س)}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{١}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}.\text{ن}'(\text{س})$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}\,\text{ن}'(\text{س})\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

---

١٦) $\text{ص} = ٣^{\text{س}}$

$\text{ص}' = ٣^{\text{س}} \times ١ \times \text{لو}_{\text{هـ}}٣$

$= ٣^{\text{س}}.\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

---

١٧) $\text{ص} = ٢^{\text{س}^٢}$

$\text{ص}' = ٢^{\text{س}^٢} \times ٢\text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

$= ٢\text{س} \times ٢^{\text{س}^٢}.\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

---

١٨) إذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$

أثبت أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-(\text{ص}^٢ + \text{س ص} - ١)}{\text{س}^٢ + \text{س ص} - ١}$

الحل:

← $هـ^{س ص} = س + ص$

$(س \frac{ءص}{ءس} + ص) هـ^{س ص} = ١ + \frac{ءص}{ءس}$

$س \frac{ءص}{ءس} هـ^{س ص} + ص هـ^{س ص} = ١ + \frac{ءص}{ءس}$

$س \frac{ءص}{ءس} هـ^{س ص} - \frac{ءص}{ءس} = ١ - ص هـ^{س ص}$

$\frac{ءص}{ءس} (س هـ^{س ص} - ١) = ١ - ص هـ^{س ص}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص} - ١}$

و بالتويض $هـ^{س ص} = س + ص$ من السؤال

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - ص(س + ص)}{س(س + ص) - ١}$

$= \frac{١ - س ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س ص - ١} = \frac{-(ص^{٢} + س ص - ١)}{س^{٢} + س ص - ١}$

---

١٩) $ص = ٧^{ظاس}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٧^{ظاس} \times قا^{٢}س \times لو_{هـ} ٧$

---

٢٠) إذا كان $ص = جاس هـ^{س}$ أثبت أن

$ص'' - ٢ص' + ٢ص = ٠$

$ص' = جاس هـ^{س} + هـ^{س} جتاس$

$ص'' = جاس هـ^{س} + جتاس هـ^{س} + هـ^{س} جتاس - جاس هـ^{س}$

$= ٢هـ^{س} جتاس$

الطرف الأيمن :

$ص'' - ٢ص' + ٢ص =$

$٢هـ^{س} جتاس - ٢جاس هـ^{س} - ٢هـ^{س} جتاس + ٢جاس هـ^{س} = ٠$

---

٢١) إذا كان $ص = أهـ^{ب س}$ وكان $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص$ جد أ, ب؟

$ص = أهـ^{ب س}$

$\frac{ءص}{ءس} = أب هـ^{ب س}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = أب^{٢} هـ^{ب س}$ و لكن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ب^{٢} ص$

$ب^{٢} ص = ص \quad (\div ص)$ $\Leftarrow ب^{٢} = ١$

$\Leftarrow ب = \pm ١$

من العلاقة : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص = أب^{٢} هـ^{ب س}$ بعد التعويض ب

$\Leftarrow أهـ^{س} = أهـ^{س}$

$\Leftarrow أ = أ \quad أ \in ح$

---

٢٢) إذا كان $ص^{ص} = هـ^{س}$ أثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص}{س + ص}$

الحل:

← $ص^{ص} = هـ^{س}$ "نضع لوغاريتم للطرفين"

$ص لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} هـ$

$ص لو_{هـ} ص = س$ " بإشتقاق الطرفين"

$\frac{ءص}{ءس} لو_{هـ} ص + \frac{١}{ص} \frac{ءص}{ءس} ص = ١$

$\frac{ءص}{ءس} (لو_{هـ} ص + ١) = ١$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{(لو_{هـ} ص + ١)} = \frac{١}{\frac{س}{ص} + ١} = \frac{ص}{س + ص}$

---

٢٣) $\int \left(\frac{س هـ^{٢س} + س^{٢} + ١}{س}\right) ءس$

$= \int \left(هـ^{٢س} + س + \frac{١}{س}\right) ءس$

$= \frac{هـ^{س}}{٢} + \frac{س^{٢}}{٢} + لو_{هـ}|س| + جـ$

---

٢٤) $ص = هـ^{أس}$ جد قيمة أ التي تحقق المعادلة

$ص'' - ٥ص' + ٦ص = ٠$ ؟

$ص = هـ^{أس}$

$ص' = أهـ^{أس}$

$ص'' = أ^{٢}هـ^{أس}$

$أ^{٢}هـ^{أس} - ٥أهـ^{أس} + ٦هـ^{أس} = ٠$

$هـ^{أس}(أ^{٢} - ٥أ + ٦) = ٠$

$(أ - ٣)(أ - ٢)$ $(هـ^{أس} = ٠$ مستحيل$)$

$\Leftarrow أ = ٢$

$\Leftarrow أ = أ$

٢٥) $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما (١،٠) ؟

$$\text{هـ}^{\text{س ص}} \times \text{س ص}' + \text{ص} = ١$$

$$\frac{\cancel{\text{س هـ}^{\text{س ص}}} \times \text{ص}'}{\cancel{\text{س هـ}^{\text{س ص}}}} = \frac{١ - \text{ص}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}}}$$

$$\text{ص}' = \frac{١ - ٠}{\text{هـ}^{٠}} = ١$$

---

٢٦) $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$ ؟

$$\leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{س}^{٢})$$

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{١}{\text{س}} - \frac{٢\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$$

---

٢٧) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٢\text{س}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$ ؟

$$\leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \frac{٢}{٢\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$$

---

٢٨) إذا كان $\text{ق(س)} = ٣^{\text{ل(س)}}$, حيث ل(س) قابل للإشتقاق

أثبت أن $\text{ق}'\text{(س)} = ٣^{\text{ل(س)}} \times \text{ل}'\text{(س)} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$,

---

٢٩) $\text{ص} = \text{هـ}^{٤\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظاس} + \int_{٢}^{٥} \frac{٧}{٢\text{جاس} + \text{س}}$

جد, $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

$$\leftarrow ٤\text{هـ}^{٤\text{س}} + \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}} + \text{صفر}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \text{هـ}^{\pi} \times ٤ + \frac{٢}{١} + ٠$$

$$= ٤\text{هـ}^{\pi} + ٣$$

---

٣٠) إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{٢}(٣\text{س}^{٢} + ١)$ فجد: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

$$\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(٣\text{س}^{٢} + ١)}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٢} \times \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢} + ١}$$

---

٣١) $\text{ص} = \text{أهـ}^{٢\text{س}} + \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ ، $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = \text{هـ}^{٣} + ١$

جد قيمة أ؟

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{أهـ}^{٢\text{س}} + \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ٢\text{أهـ}^{٢} + \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}١) \times ١$$

$$\text{هـ}^{٣} \cancel{+١} = ٢\text{أهـ}^{٢} \cancel{+١}$$

$$\text{أ} = \frac{\text{هـ}}{٢}$$

---

٣٢) $\int \text{هـ}^{(١-٢\text{س})} \text{ د س} = \frac{\text{هـ}^{(١-٢\text{س})}}{-٢} + \text{جـ}$

٣٣) $\int (\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{هـ}^{-\text{س}}) \text{ د س}$

$$= \int (\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}) \text{ د س}$$

$$= ٢\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$$

---

٣٤) $\int (\text{هـ}^{-٢} + \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{هـ}^{\text{س}}}}) \text{ د س}$

$$= \text{هـ}^{-٢}\text{س} + \frac{-١}{٥}\text{هـ}^{\frac{-\text{س}}{٥}} + \text{جـ}$$

---

٣٥) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{٥}{\text{س}} \text{ د س} = ٥\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| \Big]_{١}^{\text{هـ}^{٢}}$

$$= ٥\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٢} - ٥\text{لو}_{\text{هـ}}١ = ١٠$$

٣٦) $\int ٣^{\text{س}}.\text{ءس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{لوهـ}٣^{\text{س}}}.\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س لوهـ}٣}.\text{ءس}$

$= \dfrac{\text{هـ}^{\text{س لوهـ}٣}}{\text{لوهـ}٣} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{لوهـ}٣^{\text{س}}}}{\text{لوهـ}٣} = \dfrac{٣^{\text{س}}}{\text{لوهـ}٣}$

---

٣٧) جد معكوس المشتقة للإقتران $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} + ١$ ؟

$\text{م(س)} = \int \text{ق(س)}.\text{ءس}$

$\text{م(س)} = \int (\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} + ١).\text{ءس}$

$\text{م(س)} = ٢\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}$

التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض (حلال المشاكل) يستخدم بالتعميم لإيجاد حاصل ضرب إقترانين إحداهما صعب صعب التكامل و الآخر سهل التكامل , وبلغه أخرى أحدهما مشتقة للآخر .

إذا علمت أن م(س) إقتران معكوس لمشتقة ق(س) وأن ع(س) هو إقتران قابل للإشتقاق وحسب قاعدة السلسلة سابقا فإن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{م(ع(س))}] = \text{م}'\text{(ع(س))} \times \text{ع}'\text{(س)}$

والتي تكتب على صورة تكامل كالتالي :

$\int \text{م}'\text{(ع(س))}.\text{ع}'\text{(س)} = \text{م(ع(س))} + \text{جـ}$ ولإن م(س)

هو إقتران معكوس المشتقة ل ق فإن

$\int \text{ق(ع(س))}.\text{ع}'\text{(س)}.\text{ءس} = \text{م(ع(س))} + \text{جـ}$

إفرض: $\text{ص} = \text{ع(س)} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ع}'\text{(س)}$

$\Leftarrow \text{ءص} = \text{ع}'\text{(س)}.\text{ءس}$

أي: $\int \text{ق(ص)}.\text{ءص} = \text{م(ص)} + \text{جـ}$

حالات التكامل بالتعويض الفرعية :

١. $\int$ (إقتران × إقتران مرفوع لأس)

١) $\int ٥\text{س}^٤(\text{س}^٥+٢)^٦.\text{ءس}$

ص=ما داخل الأس

$\text{ص} = \text{س}^٥ + ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}^٤$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٥\text{س}^٤}$

$= \int \cancel{٥\text{س}^٤}(\text{ص})^٦.\frac{\text{ءص}}{\cancel{٥\text{س}^٤}}$

$= \int \text{ص}^٦.\text{ءص} = \frac{\text{ص}^٧}{٧} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^٥+٢)^٧}{٧} + \text{جـ}$

قد يلزمك :

الرجوع للتعويض الأصلي :

٢) $\int ٢\text{س}^٣\sqrt{\text{س}^٢+٦}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^٢ + ٦$

$\text{ص} - ٦ = \text{س}^٢ \leftarrow$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$= \int \cancel{٢}\text{س}^{\cancel{٣}٢}\sqrt{\text{ص}}.\frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$= \int \text{س}^٢\sqrt{\text{ص}}.\text{ءص}$

$= \int (\text{ص} - ٦)\sqrt{\text{ص}}.\text{ءص}$

$= \int \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\sqrt{\text{ص}}.\text{ءص}$

$= \frac{٢\text{ص}^{\frac{٥}{٢}}}{٥} - \frac{٦\times ٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$

$= \frac{٢}{٥}(\text{س}^٢+٦)^{\frac{٥}{٢}} - ٤(\text{س}^٢+٦)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

- إجراءات المربع الكامل :

٣) $\int \sqrt[7]{(9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4)^5}\,.\text{ءس}$

$= \int \sqrt[7]{(3\text{س} - 2)^{10}}\,.\text{ءس}$

$= \int (3\text{س} - 2)^{10/7}\,.\text{ءس}$

$= \frac{7(3\text{س} - 2)^{17/7}}{3 \times 17} + \text{جـ} = \frac{7(3\text{س} - 2)^{17/7}}{51} + \text{جـ}$

- أخذ العامل المشترك :

٤) $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^5 - \text{س}^2}\,.\text{ءس}$

$= \int \text{س}\sqrt{\text{س}^2(\text{س}^3 - 1)}\,.\text{ءس}$

$= \int \text{س}^2\sqrt{(\text{س}^3 - 1)}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 - 1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2}$

$= \int \cancel{\text{س}^2}\sqrt{\text{ص}}\,.\frac{\text{ءص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$= \frac{2\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{جـ} = \frac{2}{3}(\text{س}^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

٢. $\int$ (إقتران × دائري زاويته ليست خطيه)

ص=الزاوية

٥) $\int 6\text{س} \times \text{جا}(2\text{س}^2 + 6)\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = 2\text{س}^2 + 6$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{4\text{س}}$

$= \int 6\text{س}\,\text{جاص}.\frac{\text{ءص}}{4\text{س}} = \frac{3}{2}\int \text{جاص}.\text{ءص}$

$= \frac{-3}{2}\text{جتاص} + \text{جـ} = \frac{-3}{2}\text{جتا}(2\text{س}^2 + 6) + \text{جـ}$

٣. $\int$ (إقتران × هـ$^{\text{أس (إقتران غير خطي)}}$)

ص=الأس غير الخطي.

٦) $\int \text{قا}^2\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظاس}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \cancel{\text{قا}^2\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}}.\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}.\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{جـ}$

٤. $\int$ (دائري × دائري)

ص=أحدهما ضمن الشروط

٧) $\int \text{جا}\frac{\text{س}}{5}.\text{جتا}\frac{\text{س}}{5}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جا}\frac{\text{س}}{5}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا}\frac{\text{س}}{5}}{5}$

$\text{ءس} = \frac{5.\text{ءص}}{\text{جتا}\frac{\text{س}}{5}}$

$= \int \text{ص}.\cancel{\text{جتا}\frac{\text{س}}{5}}.\frac{5.\text{ءص}}{\cancel{\text{جتا}\frac{\text{س}}{5}}}$

$= \int 5\text{ص}.\text{ءص}$

$= \frac{5\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$

$= \frac{5}{2}(\text{جا}\frac{\text{س}}{5})^2 + \text{جـ}$

#الإشارات الذهبية لإتقان التعويض:

الإشارة الأولى:

أوجد جاس لتكتب باقي المقدار بدلالة جتاس و

تفرض ص =جتاس

الإشارة الثانية:

أوجد جتاس لتكتب باقي المقدار بدلالة جاس وتفرض

ص =جاس

٨) $\int$ جتا^{٣}س.ءس

$=\int$ جتاس.جتا^{٢}س.ءس

$\int$ جتاس(١ − جا^{٢}س).ءس

ص =جاس

$\frac{ءص}{ءس}$ =جتاس

ءس = $\frac{ءص}{جتاس}$

$=\int$ $\cancel{جتاس}$(١ − ص^{٢}). $\frac{ءص}{\cancel{جتاس}}$ = (١ − ص^{٢}).ءص

= ص − $\frac{ص^{٣}}{٣}$ +جـ =جاس − $\frac{جا^{٣}س}{٣}$ +جـ

الإشارة الثالثة :

أوجد ظاس لتكتب باقي المقدار بدلالة قاس وتفرض

ص =قاس

الإشارة الرابعة :

أوجد ظتاس لتكتب باقي المقدار بدلالة قتاس و

تفرض ص =قتاس

٩) $\int$ ظا^{٣}س.ءس

$=\int$ (ظا^{٢}س.ظاس).ءس

$=\int$ (قا^{٢}س − ١).ظاس.ءس

ص =قاس

$\frac{ءص}{ءس}$ =ظاس قاس

ءس = $\frac{ءص}{قاس ظاس}$

$=\int$ (ص^{٢} − ١) $\frac{ظاس.ءص}{قاس ظاس}$

$=\int$ $(\frac{ص^{٢}-١}{ص})$.ءص = $\int$ (ص − $\frac{١}{ص}$).ءص

= $\frac{ص^{٢}}{٢}$ − لو$_{هـ}$|ص|+جـ

الإشارة الخامسة:

أوجد قا^{٢}س لتكتب باقي المقدار بدلالة ظاس و

تفرض ص =ظاس

الإشارة السادسة:

أوجد قتا^{٢}س لتكتب باقي المقدار بدلالة ظتاس و

تفرض ص =ظتاس

١٠) $\int$ قا^{٢}س ظا^{٢}س.ءس

ص =ظاس

$\frac{ءص}{ءس}$ =قا^{٢}س

ءس = $\frac{ءص}{قا^{٢}س}$

$=\int$ $\cancel{قا^{٢}س}$.ص^{٢} $\frac{ءص}{\cancel{قا^{٢}س}}$

$=\int$ ص^{٢} = $\frac{ص^{٣}}{٣}$ +جـ

= $\frac{ظا^{٣}س}{٣}$ +جـ

 # نتائج الإشارات الذهبية #

مسهلات إضافية $\int$ جا^{ك}س×جتا^{ن}س.ءس

١ .القوى (فردي×فردي) ⟵ ص= ما تحت الأس الأكبر

٢ .القوى (فردي×زوجي) ⟵ ص= ما تحت الأُس الزوجي

٣ .القوى(زوجي×زوجي"أسس متساوية") ⟵ متطابقات مع دمج الأُسس

$\int \text{جا}^{3}\text{س جتا}^{3}\text{س}\ .\text{ءس}$

$= \int (\text{جاس جتاس})^{3}\ .\text{ءس}$

$= \int (\frac{1}{2}\text{جا٢س})^{3}\ .\text{ءس} = \frac{1}{8}\int \text{جا}^{3}\text{٢س}\ .\text{ءس}$

$= \frac{1}{8}\int \text{جا٢س جتا}^{2}\text{٢س}\ .\text{ءس}$

$= \frac{1}{8}\int \text{جا٢س}(1-\text{جتا}^{2}\text{٢س})\ .\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتا٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\text{جا٢س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-2\text{جا٢س}}$

$= \frac{1}{8}\int \cancel{\text{جا٢س}}(1-\text{ص}^{2})\ .\frac{\text{ءص}}{-2\cancel{\text{جا٢س}}}$

$= \frac{-1}{16}(\text{ص} - \frac{\text{ص}^{3}}{3})$

$= \frac{-\text{جتا٢س}}{16} + \frac{(\text{جتا٢س})^{3}}{48} + \text{جـ}$

١٢) $\int \frac{\sqrt{4-\text{س}^{2}}}{\text{س}^{4}}\ .\text{ءس}$ "فرط لأسس المقام"

$\int \frac{\sqrt{4-\text{س}^{2}}}{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}^{3}}\ .\text{ءس} = \int \sqrt{\frac{4-\text{س}^{2}}{\text{س}^{2}}} \times \frac{1}{\text{س}^{3}}\ .\text{ءس}$

$= \int \sqrt{\frac{4}{\text{س}^{2}} - 1} \times \frac{1}{\text{س}^{3}}\ .\text{ءس}$

$\text{ص} = \frac{4}{\text{س}^{2}} - 1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-8}{\text{س}^{3}}$

$\text{ءس} = \frac{-\text{س}^{3}}{8}\ .\text{ءص}$

$\int \text{ص}^{1/2} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}^{3}}} \times \frac{-\cancel{\text{س}^{3}}}{8}\ .\text{ءص}$

$= -\frac{1}{8}\int \text{ص}^{1/2}\ .\text{ءص}$

$= \frac{2\text{ص}^{3/2}}{3\times 8} + \text{جـ}$

$= \frac{2}{24}(\frac{4}{\text{س}^{2}} - 1)^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

١٣) $\int \text{ق}'(8 - 2\text{س})\ .\text{ءس}$

$\text{ص} = 8 - 2\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-2}$

$= \int \text{ق}'(\text{ص}) \times \frac{\text{ءص}}{-2}$

$= \frac{-1}{2}\text{ق}(\text{ص}) + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{2}\text{ق}(8 - 2\text{س}) + \text{جـ}$

١٤) أثبت أن

$\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}}\ .\text{ءس} = \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$

$\text{أ} \neq 0 ،\ \text{ن} \neq -1$

يبرهن السؤال السابق بالتعويض مع العلم أن ما داخل القوس خطي

$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\ .\text{ءس}$

$\text{ص} = (\text{أس} + \text{ب})$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{أ}}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}}\ .\frac{\text{ءص}}{\text{أ}}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$

١٥) $\int_{-2}^{2} \frac{|2\text{س}|}{\sqrt{\text{س}^{2}+1}}\ .\text{ءس}$

$= \int_{-2}^{0} \frac{-2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{2}+1}}\ .\text{ءس} + \int_{0}^{2} \frac{2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{2}+1}}\ .\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$\text{س} \to -٢ ، \text{ص} \to ٥$

$\text{س} \to ٠ ، \text{ص} \to ١$

$\text{س} \to ٢ ، \text{ص} \to ١$

$$= \int_{٥}^{١} \frac{-\cancel{٢\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}} + \int_{١}^{٥} \frac{\cancel{٢\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}}$$

$$= \int_{٥}^{١} -\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} . \text{ءص} + \int_{١}^{٥} \text{ص}^{-\frac{١}{٢}} . \text{ءص}$$

---

١٦) $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^{٤} \, \text{جتا}٢\text{س} . \text{ءس}$

$$= \int (\text{جاس} + \text{جتاس})^{٤} (\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}) . \text{ءص}$$

$$= \int (\text{جاس} + \text{جتاس})^{٤} (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس}) . \text{ءس}$$

$$= \int (\text{جاس} + \text{جتاس})^{٥} (\text{جتاس} - \text{جاس}) . \text{ءس}$$

$\text{ص} = \text{جاس} + \text{جتاس}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$$= \int \text{ص}^{٥} \cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})} \frac{\text{ءص}}{\cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})}}$$

$$= \int \text{ص}^{٥} . \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٦}}{٦} + \text{جـ}$$

---

١٧) $\int \dfrac{\text{س}^{-١}}{\text{لوهـ س} \times \text{لوهـ}(\text{لوهـ س})} . \text{ءس}$

$$= \int \frac{١}{\text{س لوهـ س} \times \text{لوهـ}(\text{لوهـ س})} . \text{ءس}$$

$\text{ص} = \text{لوهـ}(\text{لوهـ س})$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{١}{\text{س لوهـ س}}$

$\text{ءس} = \text{س لوهـ س} . \text{ءص}$

$$= \int \frac{١}{\cancel{\text{س لوهـ س}} . \text{ص}} \times \cancel{\text{س لوهـ س}} . \text{ءص}$$

$$= \int \frac{١}{\text{ص}} . \text{ءص}$$

$$= \text{لوهـ} |\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لوهـ} |\text{لوهـ}(\text{لوهـ س})| + \text{جـ}$$

---

١٨) $\int \dfrac{١}{\sqrt{٢\text{س} - ٥}} \text{قا} \sqrt{٢\text{س} - ٥} . \text{ظا} \sqrt{٢\text{س} - ٥} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} - ٥}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{٢}{٢\sqrt{٢\text{س} - ٥}}$

$\text{ءس} = \sqrt{٢\text{س} - ٥} . \text{ءص}$

$\text{ءس} = \text{ص} . \text{ءص}$

$$= \int \frac{١}{\cancel{\text{ص}}} \text{قاص ظاص} . \cancel{\text{ص}} . \text{ءص}$$

$$= \int \text{قاص ظاص} . \text{ءص}$$

$$= \text{قاص} + \text{جـ}$$

$$= \text{قا}(\sqrt{٢\text{س} - ٥}) + \text{جـ}$$

---

١٩) $\int \text{جا}^{٦}\text{س} . \text{جتا}^{-٨}\text{س} . \text{ءس}$

$$= \int \frac{\text{جا}^{٦}\text{س}}{\text{جتا}^{٨}\text{س}} . \text{ءس} = \int \frac{\text{جا}^{٦}\text{س}}{\text{جتا}^{٦}\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} . \text{ءس}$$

$$= \int \text{ظا}^{٦}\text{س قا}^{٢}\text{س} . \text{ءس}$$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$$= \int \text{ص}^{٦} . \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}} . \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$$

$$= \int \text{ص}^{٦} . \text{ءص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{٧}}{٧} + \text{جـ}$$

---

٢٠) إذا كان $\int ظا^{ن}س.دس = ع_{ن}$ أثبت أن

$ع_{ن} = \frac{١}{ن-١}(ظا^{ن-١}س) - ع_{ن-٢}$ ؟

$\int ظا^{ن}س = \int ظا^{٢}س ظا^{ن-٢}س.دس$

$= \int (قا^{٢}س - ١)ظا^{ن-٢}س.دس$

$\int (قا^{٢}س ظا^{ن-٢}س).دس - \int ظا^{ن-٢}س.دس$

$= \int (قا^{٢}س ظا^{ن-٢}س).دس - ع_{ن-٢}$

$ص = ظاس$

$دس = \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int (\cancel{قا^{٢}س}ص^{ن-٢}).\frac{دص}{\cancel{قا^{٢}س}} - ع_{ن-٢}$

$= \int ص^{ن-٢}.دص - ع_{ن-٢}$

$= \frac{١}{ن-١}ص^{ن-١}.دص - ع_{ن-٢}$

$= \frac{١}{ن-١}ظا^{ن-١}س.دص - ع_{ن-٢}$

---

٢١) $\int (جتا^{٢}س - جا^{٢}س)هـ^{جا٢س}.دس$

$ص = جا٢س$

$دس = \frac{دص}{٢جتا٢س}$

$= \int (جتا^{٢}س - جا^{٢}س)هـ^{ص}.\frac{دص}{٢جتا٢س}$

$= \int \cancel{(جتا^{٢}س - جا^{٢}س)}هـ^{ص}.\frac{دص}{٢\cancel{(جتا^{٢}س - جا^{٢}س)}}$

$= \int \frac{هـ^{ص}}{٢}.دص = \frac{هـ^{ص}}{٢} + جـ$

$= \frac{هـ^{جا٢س}}{٢} + جـ$

---

٢٢) $\int (جا^{٤}س جتا^{٤}س).دس$

$= \int (جاس جتاس)^{٤}.دس$

$= \int (\frac{١}{٢}جا٢س)^{٤}.دس$

$= \frac{١}{١٦}\int (جا٢س)^{٤}.دس$

← محلول سابقاً

---

٢٣) $\int جتا^{٧}س.جا^{٣}س.دس$

$ص = جتاس$

$دس = \frac{دص}{-جاس}$

$= \int ص^{٧}.جا^{\cancel{٣}٢}س.\frac{دص}{-\cancel{جاس}}$

$= -\int ص^{٧}.جا^{٢}س.دص$

$= -\int ص^{٧}(١ - جتا^{٢}س).دص$

$= -\int ص^{٧}(١ - ص^{٢}).دص$

$= \int ص^{٧} - ص^{٩}.دص = \frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= \frac{جتا^{٨}س}{٨} - \frac{جتا^{١٠}س}{١٠} + جـ$

---

٢٤) إذا كان $\int_{٠}^{٢} س^{أ}.دس = \int_{٠}^{٢} (٢ - س)^{أ}.دس$ جد قيم أ الممكنة ؟

$\int_{٠}^{٢} س^{أ}.دس = \int_{٠}^{٢} (٢ - س)^{أ}.دس$

$\left[\frac{س^{أ+١}}{أ+١}\right]_{٠}^{٢} = \left[\frac{(٢ - س)^{أ+١}}{-(أ+١)}\right]_{٠}^{٢}$

$\frac{٢^{أ+١}}{أ+١} = \frac{-(٢)^{أ+١}}{-(أ+١)}$

$\Leftarrow أ \in ح - \{-١\}$

---

٢٥) $\int \frac{هـ^{\sqrt{١-٢س}}}{\sqrt{١-٢س}}.دس$

$ص = \sqrt{١-٢س}$

$دس = -\sqrt{١-٢س}.دص$

$دس = -ص.دص$

$= -\int \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}} \cancel{\text{ص}} \,.\text{ءص}$

$= -\int \text{هـ}^{\text{ص}} .\text{ءص}$

$= -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = -\text{هـ}^{\sqrt{1-2\text{س}}} + \text{جـ}$

#تدريبات :

١) $\int ٣\text{س}^{٢} (٥ + \text{س}^{٣})^{\pi} .\text{ءس}$

$\text{ص} = ٥ + \text{س}^{٣}$

٢) $\int \frac{٤\text{س} + ٦}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٥}} .\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٥$

٣) $\int \text{جتا}(\text{ظاس}) \text{قا}^{٢}\text{س} .\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

٤) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}} .\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$

٥) $\int \frac{\text{جاس}}{\sqrt{١ + ٢\text{جتاس}}} .\text{ءس}$

$\text{ص} = ١ + ٢\text{جتاس}$

٧) $\int \text{جا}^{٥}\text{س} \,\text{جتاس} .\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٥}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ١٥\text{س}}} .\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} + ١٥\text{س}$

٩) $\int_{٠}^{٤} \frac{٤\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٩}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩$

---

١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس جتاس}}{\sqrt{١+\text{جا}^{٢}\text{س}}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = ١ + \text{جا}^{٢}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جاس جتاس}$

$\text{س} \leftarrow ٠ \text{، ص} = ١$

$\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢} \text{، ص} = ٢$

#أسئلة جميلة جداً:

١) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{١+\text{س}^{٢}}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = ١ + \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$= \int \frac{\text{س}^{\cancel{٣}\,٢}}{\sqrt{\text{ص}}} . \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{ءص} = \int (\text{ص}-١)\text{ص}^{\frac{-١}{٢}}.\text{ءص}$

$= \frac{١}{٢}\int \left(\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{-١}{٢}}\right).\text{ءص} = \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - ٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

نستبدل

---

٢) $\int ٤\text{س}(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)^{٥}.\text{ءس}$

$= \int ٤\text{س}(\text{س}+١)^{١٠}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س} + ١$

---

٣) $\int \text{س}(\text{س}^{٤}+٢\text{س}^{٢}+١)^{٤}.\text{ءس}$

$\int \text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{٨}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$= \int \text{س}(\text{ص})^{٨}.\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{٨}.\text{ءص}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ص}^{٩}}{٩} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٨}(\text{س}^{٢}+١)^{٩} + \text{جـ}$

---

٤) $\int (\text{س}+١)^{٣}(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٧)^{٥}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} + ٢$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢(\text{س}+١)}$

$= \int (\text{س}+١)^{\cancel{٣}\,٢}\,\text{ص}^{٥}.\frac{\text{ءص}}{٢\cancel{(\text{س}+١)}}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)\,\text{ص}^{٥}.\text{ءص}$

$[\text{ص} - ٧ = \text{س}^{٢} + ٢\text{س}]$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص} - ٧ + ١)\,\text{ص}^{٥}\,.\text{دص}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص} - ٦)\,\text{ص}^{٥}\,.\text{دص}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص}^{٦} - ٦\text{ص}^{٥})\,\text{ص}^{٥}.\text{دص}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{\cancel{٦}\text{ص}^{٦}}{\cancel{٦}}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧}{٧}\right)^{٧} - (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٧)^{٦} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \text{س}^{١٢}\left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)^{٦}.\text{دس}$

$= \int \text{س}^{١٢}\left(\frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢}}\right)^{٦}\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}^{١٢}}\,\frac{(٢\text{س} + ٣)^{٦}}{\cancel{\text{س}^{١٢}}}.\text{دس}$

$= \int (٢\text{س} + ٣)^{٦}.\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{(٢\text{س} + ٣)^{٧}}{٧}\right) + \text{جـ}$

مهم

٦) $\int \frac{(٢\text{س} + ٣)^{٩}}{\text{س}^{١١}}.\text{دس}$

$= \int \frac{(٢\text{س} + ٣)^{٩}}{\text{س}^{٢} \times \text{س}^{٩}}.\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(\frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}}\right)^{٩}.\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(٢ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٩}.\text{دس}$

$\text{ص} = ٢ + \frac{٣}{\text{س}}$

---

٧) $\int (\text{س}^{٥} + \text{س})^{٣}.\text{دس}$

$= \int (\text{س}(\text{س}^{٤} + ١))^{٣}.\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٣}(\text{س}^{٤} + ١)^{٣}.\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٤} + ١$

$\frac{\text{دص}}{٤\text{س}^{٣}} = \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}^{٣}}\,\text{ص}^{٣}.\frac{\text{دص}}{٤\cancel{\text{س}^{٣}}}$

$\int \text{ص}^{٣}.\text{دص} \leftarrow \frac{١}{٤}\,\frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٦}(\text{س}^{٤} + ١)^{٤} + \text{جـ}$

---

٨) $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٥}}.\text{دس}$

$= \int \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(١ + ٢\text{س}^{٢})}.\text{دس}$

$= \int \text{س}(١ + ٢\text{س}^{٢})^{\frac{١}{٣}}.\text{دس}$

$\text{ص} = ١ + ٢\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{٤\text{س}} = \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}}(\text{ص})^{\frac{١}{٣}}.\frac{\text{دص}}{٤\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٤}\,\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{٣}{١٦}(١ + ٢\text{س}^{٢})^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

---

٩) $\int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٧} + ٤\text{س}^{٣}}.\text{دس}$

$\rightarrow \int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(\text{س}^{٤} + ٤)}.\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٣}(\text{س}^{٤} + ٤)^{\frac{١}{٣}}.\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٤$

١٠) $\int$ س^{٢} $\sqrt[٣]{س^{٦}+٢س^{١١}}$.ءس

← $\int$ س^{٢} $\sqrt[٣]{س^{٦}(١+٢س^{٥})}$.ءس

= $\int$ س^{٤}(١+٢س^{٥})$^{\frac{١}{٣}}$.ءس

ص = (١+٢س^{٥})

---

١١) $\int$ (قاس+ظاس)^{٥}قاس.ءس

ص = قاس+ظاس

$\frac{ءص}{ءس}$ = قاسظاس+قا^{٢}س

$\frac{ءص}{قاس(ظاس+قاس)}$ = ءس

$\frac{ءص}{صقاس}$ = ءس

← $\int$ (قاس+ظاس)^{٥} قاس.ءس

= $\int$ ص$^{\cancel{٥}\,٤}$ $\cancel{قاس}$.$\frac{ءص}{\cancel{ص}\,\cancel{قاس}}$

= $\int$ ص^{٤}.ءص = $\frac{ص^{٥}}{٥}$+جـ

= $\frac{(قاس+ظاس)^{٥}}{٥}$+جـ

---

١٢) $\int$ $\frac{جا^{٥}س}{جتا^{٧}س}$.ءس

← $\int$ ظا^{٥}س قا^{٢}س.ءس

ص = ظاس

---

١٣) $\int$ $\frac{جتا(لـو_{هـ}س)}{س}$.ءس

ص = لـو$_{هـ}$س

---

١٤) $\int$ $\frac{جا^{٢}(لـو_{هـ}س)}{س}$.ءس

ص = لـو$_{هـ}$س

---

١٥) $\int$ $\frac{١}{س^{٢}}$ ظا$\frac{١}{س}$.ءس

ص = $\frac{١}{س}$

تذكر أن :

$$\leftarrow \int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ق}(\text{س})\right| + \text{جـ}$$

أمثلة:

١) $\int \frac{\text{٢س} + ٧}{\text{س}^{٢} + \text{٧س} - ٢}\,.\text{ءس}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^{٢} + \text{٧س} - ٢\right| + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{\text{٣س}^{٢} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣} + \text{جتاس}}\,.\text{ءس}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^{٣} + \text{جتاس}\right| + \text{جـ}$

٣) $\int \text{ظتاس}\,.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,.\text{ءس}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جاس}\right| + \text{جـ}$

$\leftarrow \int \text{ظاس}\,.\text{ءس}$

٤) $\int \frac{٣ + \text{٣ظا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}\,.\text{ءس}$

$\leftarrow \int \frac{٣(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})}{\text{ظاس}}\,.\text{ءس}$

$= ٣\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}\,.\text{ءس} = \text{٣لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ظاس}\right| + \text{جـ}$

٥) $\int \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٤}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٤$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} + ٦$

$\frac{\text{ءص}}{٢(\text{س} + ٣)} = \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س} + ٣}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{(\text{س} + ٣)}}$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}}\,.\text{ءص}$

$= \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ص}\right| + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٤\right| + \text{جـ}$

٦) $\int \text{ظا٣س}\,.\text{ءس}$

$\leftarrow \int \frac{\text{جا٣س}}{\text{جتا٣س}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتا٣س}$

$\frac{\text{ءص}}{-\text{٣جا٣س}} = \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جا٣س}}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{-٣\cancel{\text{جا٣س}}}$

$= -\frac{١}{٣}\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{ءص} \leftarrow -\frac{١}{٣}\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ص}\right| + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣}\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا٣س}\right| + \text{جـ}$

٧) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$٢\sqrt{\text{س}}\,.\text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \frac{ص}{ص^{٢}ص + ١} ٢ص.ءص$

$= \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٣} + ١}.ءص$

$= \frac{٢}{٣} لـو_{هـ} |ص^{٣} + ١| + جـ$

$= \frac{٢}{٣} لـو_{هـ} |\sqrt{س}^{\,٣} + ١| + جـ$

تدريب :

٨) $\int \frac{١}{\left(\sqrt{س}(٢ + \sqrt{س})\right)}.ءس$

$ص = \sqrt{س}$

تدريب:

٩) $\int س جا^{٥}(س^{٢} + ١).جتا(س^{٢} + ١).ءس$

$ص = جا(س^{٢} + ١)$

١٠) $\int \frac{\sqrt{١ + لـو_{هـ} س}}{س}.ءس$

$ص = ١ + لـو_{هـ} س$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$

$س.ءص = ءس$

$= \int \frac{\sqrt{ص}}{\cancel{س}} \cancel{س}.ءص$

$= \int ص^{\frac{١}{٢}}.ءص$

$= \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{٢}{٣} (١ + لـو_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

١١) $\int \frac{١}{س(لـو_{هـ} س)^{٢}}.ءس$

$ص = لـو_{هـ} س$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$

$س.ءص = ءس$

$= \int \frac{١}{\cancel{س} ص^{٢}} \cancel{س}.ءص$

$= \int ص^{-٢}.ءص = \frac{ص^{-١}}{-١} + جـ$

$= -(لـو_{هـ} س)^{-١} + جـ \leftarrow \frac{-١}{لـو_{هـ} س} + جـ$

١٢) $\int س^{٢} \times هـ^{س^{٣} + ٥}.ءس$

$ص = س^{٣} + ٥$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}$

$\frac{ءص}{٣س^{٢}} = ءس$

$$= \int \cancel{\text{س}^{٢}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٣} \int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣} \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٥} + \text{جـ}$$

$$١٣)\ \int \text{هـ}^{\text{جاس}+\text{لو جتاس}} \cdot \text{دس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{جاس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \cancel{\text{جتاس}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{دص}$$

$$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} \leftarrow \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$$

$$١٤)\ \int \text{س}^{٢}(\text{س}-١)^{٧}(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)^{٧} \cdot \text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{٢}((\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١))^{٧} \cdot \text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}-١)^{٧} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} - ١$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$= \int \cancel{\text{س}^{٢}}\, \text{ص}^{٧} \cdot \frac{\text{دص}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}} = \frac{١}{٣} \int \text{ص}^{٧} \cdot \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣} \frac{\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢٤} (\text{س}^{٣}-١)^{٨} + \text{جـ}$$

#تذكر أن: $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\,\text{جتا}^{\text{م}}\text{س} \cdot \text{دس}$

١) إذا كانت إحدى الأسس (١) نفرض الأخرى هي ص.

٢) إذا كانت ن,م فرديتان نفرض أن أي منهما هي ص, ويفضل الكبرى.

٣) إذا كانت إحدى الأسس فردية و الأخرى زوجية , نفرض الزوجية هي ص.

٤) إذا كانت ن,م زوجيتان نستخدم المتطابقات.

أمثلة:

$$* \int \text{جا}^{٥}\text{س}\,\text{جتا}^{٣}\text{س} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{جاس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \text{ص}^{٥}\, \text{جتا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{س} \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \text{ص}^{٥}(١-\text{جا}^{٢}\text{س}) \cdot \text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^{٥}(١-\text{ص}^{٢}) \cdot \text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^{٥} - \text{ص}^{٧} \cdot \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \frac{\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$$

* $\int \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٣}\text{س}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{ص}^{٢}\,\text{جتا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \text{ص}^{٢}(١-\text{جا}^{٢}\text{س}).\text{ءص}$

$= \int \text{ص}^{٢}(١-\text{ص}^{٢}).\text{ءص}$

$= \int \text{ص}^{٢} - \text{ص}^{٤}.\text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} - \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

عند وجود : $\int \text{قا}^{\text{ن}}\text{س ظا}^{\text{م}}\text{س}.\text{ءس}$

١) إذا كانت ن زوجية نفرض أن ظاس= ص .

٢) إذا كانت ن فردية و م فردية نفرض أن قاس = ص.

#أمثلة:

* $\int \text{قا}^{٤}\text{س ظا}^{٥}\text{س}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

---

* $\int \text{قا}^{٥}\text{س ظا}^{٣}\text{س}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{قاس}$

أكتب الفرض المناسب لإيجاد كل من التكاملات التالية بطريقة التكامل بالتعويض دون إجراء التكامل :

١) $\int \text{جتا}^{١٠}\text{س جا}^{٧}\text{س}.\text{ءس}$

٢) $\int \text{جتا}^{٥}\text{س جا}^{٧}\text{س}.\text{ءس}$

٣) $\int \text{ظا}^{٥}\text{س قا}^{٤}\text{س}.\text{ءس}$

٤) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س قا}^{٥}\text{س}.\text{ءس}$

٥) $\int \text{ظتا}^{٦}\text{س قتا}^{٤}\text{س}.\text{ءس}$

٦) $\int \text{ظتا}^{٧}\text{س قتا}^{٤}\text{س}.\text{ءس}$

---

١) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}+٢\text{س}}}{\text{س}^{٤}}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(١+\frac{٢}{\text{س}^{٢}})}}{\text{س}^{٤}}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}(١+\frac{٢}{\text{س}^{٢}})^{\frac{١}{٣}}}{\text{س}^{\cancel{٤}\,٣}}.\text{ءس}$

$= \int \frac{(١+\frac{٢}{\text{س}^{٢}})^{\frac{١}{٣}}}{\text{س}^{٣}}.\text{ءس}$

$\text{ص} = ١ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}$

---

٢) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{١+\text{س}^{٢}}}.\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})}}.\text{ءس}$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^2|\text{س}|\sqrt{\left(1+\frac{1}{\text{س}^2}\right)}}.\text{ءس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^3\sqrt{\left(1+\frac{1}{\text{س}^2}\right)}}.\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \left(1+\frac{1}{\text{س}^2}\right)$$

٣) $\int \frac{\sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{\text{س}^5}}.\text{ءس}$

$$= \int \frac{\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}}}.\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}}}.\text{ءس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^2}\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}}}.\text{ءس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^2}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{1}{2}}.\text{ءس}$$

$$\text{ص} = 1+\frac{1}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-1}{\text{س}^2}$$

$$\text{ءس} = -\text{س}^2.\text{ءص}$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}}\times \text{ص}^{\frac{1}{2}}\times -\cancel{\text{س}^2}.\text{ءص}$$

$$= \int \text{ص}^{\frac{1}{2}}.\text{ءص} = -\frac{2\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3}+\text{جـ}$$

$$= \frac{-2\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+\text{جـ}$$

٤) $\int_0^3 \frac{\text{س}-2}{\sqrt{\text{س}+1}}.\text{ءس}$

$$= \int_0^3 (\text{س}-2)(\text{س}+1)^{\frac{-1}{2}}.\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}+1$$
$$\text{ءس} = \text{ءص}$$
$$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$$
$$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 4$$
$$\text{س} = \text{ص}-1$$

$$= \int_1^4 (\text{س}-2)\text{ص}^{\frac{-1}{2}}.\text{ءص}$$

$$= \int_1^4 (\text{ص}-1-2)\text{ص}^{\frac{-1}{2}}.\text{ءص}$$

$$= \int_1^4 (\text{ص}-3)\text{ص}^{\frac{-1}{2}}.\text{ءص}$$

٥) إذا كان $\int_1^8 \text{ق(س)}.\text{ءس} = 18$ فجد قيمة $\int_1^2 \text{س}^2\text{ق}(\text{س}^3).\text{ءس}$ ؟

$$\text{ص} = \text{س}^3$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$$
$$\frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2} = \text{ءس}$$
$$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1$$
$$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 8$$

$$= \int_1^8 \cancel{\text{س}^2}\,\text{ق(ص)}.\frac{\text{ءص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \text{ق(ص)}.\text{ءص} = \frac{1}{3}\times 18 = 6$$

---

٦) إذا كان $\int_{0}^{1} \text{ق(س)}.\text{دس} = 8$ فجد قيمة

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{٣جتا(٢س) ق(جا٢س)}.\text{دس} \; ؟$$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢جتا٢س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{٢جتا٢س}} = \text{دس}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = 1$

$$= \int_{0}^{1} \text{٣}\cancel{\text{جتا٢س}}\,\text{ق(ص)}.\frac{\text{دص}}{\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} \text{ق(ص)}.\text{دص}$$

$$= \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

---

٢١) أثبت أن:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+2}}.\text{دس} = \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن}+1} \text{، ن : عدد فردي} \\ \frac{1}{\text{ن}+1} \text{، ن : عدد زوجي} \end{cases}$$

---

٢٢) إذا كان ن عدد صحيح موجب فجد

$$\int_{0}^{1} \text{س}(1-\text{س})^{\text{ن}}.\text{دس}$$

$\text{ص} = 1 - \text{س}$

$\text{س} = 1 - \text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1$

$\text{دس} = -\text{دص}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 0$

$$= \int_{1}^{0} -\text{س(ص)}^{\text{ن}}.\text{دص}$$

$$= \int_{0}^{1} (1-\text{ص})\text{ص}^{\text{ن}}.\text{دص}$$

$$= \int_{0}^{1} \text{ص}^{\text{ن}} - \text{ص}^{\text{ن}+1}.\text{دص}$$

$$= \left[\frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \frac{\text{ص}^{\text{ن}+2}}{\text{ن}+2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \frac{1^{\text{ن}+2}}{\text{ن}+2} - 0$$

$$= \left(\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}+2} \times \frac{1}{\text{ن}+1}\right) - \left(\frac{1}{\text{ن}+2} \times \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}+1}\right)$$

$$= \frac{\text{ن}+2-\text{ن}-1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)} = \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}$$

التكامل بالأجزاء

يستخدم التكامل بالأجزاء بشكل عام عندما يطلب منا إيجاد حاصل ضرب إقترانين كلاهما سهلي التكامل ولا يوجد لأحدهما مشتقة للآخر, ثم نجزأ المقدار و نختار أحدهما و نفرضه ق " الأسهل إشتقاق "و الآخر نفرضه دهـ " الأسهل تكاملا".

*في الغالب: ق " الأسهل إشتقاق " يصبح ثابتا بعد إشتقاقه أكثر من مرة .

كما تعلم:

$$(\text{ں.هـ})' = (\text{ں.ءهـ}) + (\text{هـ.ءں})$$
$$-(\text{ں.ءهـ}) = -(\text{ں.هـ})' + (\text{هـ.ءں})$$

$$(\text{ں.ءهـ}) = (\text{ں.هـ})' - (\text{هـ.ءں})$$
$$\int(\text{ں.ءهـ}) = \int(\text{ں.هـ})' - \int(\text{هـ.ءں})$$
$$\int(\text{ں.ءهـ}) = (\text{ں.هـ}) - \int(\text{هـ.ءں})$$

و إذا كان التكامل محدودا :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}(\text{ں.ءهـ}) = [(\text{ں.هـ})]_{\text{أ}}^{\text{ب}} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}}(\text{هـ.ءں})$$

أمثلة :

١) $\int \text{٢س}(\text{س}+١)^{٥}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٢س} \longrightarrow ٢ \\ (\text{س}+١)^{٥} \longrightarrow \dfrac{(\text{س}+١)^{٦}}{٦} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\text{٢س}(\text{س}+١)^{٦}}{٦} - \int \frac{(\text{س}+١)^{٦}}{٣}.\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}}{٣}(\text{س}+١)^{٦} - \frac{١}{٣}\,\frac{(\text{س}+١)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$$

---

٢) $\int \text{٢س جتاس.ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٢س} \rightarrow ٢ \\ \text{جتاس} \rightarrow \text{جاس} \end{array}\right]$$

$$= \text{٢س جاس} - \int \text{٢جاس.ءس}$$

$$= \text{٢س جاس} + \text{٢جتاس} + \text{جـ}$$

---

٣) $\int \dfrac{\text{س}+٣}{\text{قا٢س}}.\text{ءس}$

$$= \int(\text{س}+٣)\text{جتا٢س.ءس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س}+٣ \rightarrow ١ \\ \text{جتا٢س} \rightarrow \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\text{س}+٣}{٢}\text{جا٢س} - \int \frac{١}{٢}\text{جا٢س.ءس}$$

$$= \frac{\text{س}+٣}{٢}\text{جا٢س} + \frac{\text{جتا٢س}}{٤} + \text{جـ}$$

---

٤) $\int \dfrac{\text{٣س}+١}{\text{هـ}^{\text{٤س}}}.\text{ءس}$

$$= \int(\text{٣س}+١)\text{هـ}^{-\text{٤س}}.\text{ءس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٣س}+١ \rightarrow ٣ \\ \text{هـ}^{-\text{٤س}} \rightarrow \dfrac{\text{هـ}^{-\text{٤س}}}{-٤} \end{array}\right]$$

$$= (\text{٣س}+١)\frac{\text{هـ}^{-\text{٤س}}}{-٤} + \int \frac{\text{٣هـ}^{-\text{٤س}}}{-٤}.\text{ءس}$$

$$= \frac{(\text{٣س}+١)\text{هـ}^{-\text{٤س}}}{-٤} - \frac{\text{٣هـ}^{-\text{٤س}}}{١٦} + \text{جـ}$$

---

٥) $\int \dfrac{\text{س} + \text{هـ}^{\text{٢س}} + ٣}{\text{هـ}^{\text{س}}}.\text{ءس}$

$$= \int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{٣}{\text{هـ}^{\text{س}}}.\text{ءس}$$

$$\text{س هـ}^{-\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{٣هـ}^{-\text{س}}$$

أجزاء مباشر مباشر

٦) $\int$ س^{2} جاس .دس

[س^{2} ← ٢س
جاس ← −جتاس]

= −س^{2} جتاس + $\int$ ٢س جتاس .دس

[٢س ← ٢
جتاس ← جاس]

= −س^{2} جتاس + ٢س جاس − $\int$ ٢ جاس .دس

= −س^{2} جتاس + ٢س جاس + ٢جتاس + جـ

---

٧) $\int$ $\frac{\text{س}^{2}+1}{\text{هـ}^{-\text{س}}}$.دس

= $\int$ (س^{2}+١) هـ$^{\text{س}}$.دس

[س^{2}+١ ← ٢س
هـ$^{\text{س}}$ ← هـ$^{\text{س}}$]

= (س^{2}+١)هـ$^{\text{س}}$ − $\int$ ٢س هـ$^{\text{س}}$.دس

[٢س ← ٢
هـ$^{\text{س}}$ ← هـ$^{\text{س}}$]

= (س^{2}+١)هـ$^{\text{س}}$ − ٢س هـ$^{\text{س}}$ + $\int$ ٢هـ$^{\text{س}}$.دس

= (س^{2}+١)هـ$^{\text{س}}$ − ٢س هـ$^{\text{س}}$ + ٢هـ$^{\text{س}}$ + جـ

---

٨) $\int$ ٣س^{5} هـ$^{\text{س}^{3}}$.دس

ص = س^{3}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{2}

دس = $\frac{\text{دص}}{3\text{س}^{2}}$

= $\int$ $\cancel{3}$س$^{\cancel{5}\,3}$ هـ$^{\text{ص}}$ $\frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^{2}}}$

= $\int$ ص هـ$^{\text{ص}}$.دص

[ص ← ١
هـ$^{\text{ص}}$ ← هـ$^{\text{ص}}$]

= ص هـ$^{\text{ص}}$ − $\int$ هـ$^{\text{ص}}$.دص

ص هـ$^{\text{ص}}$ − هـ$^{\text{ص}}$ + جـ

= س^{3} هـ$^{\text{س}^{3}}$ − هـ$^{\text{س}^{3}}$ + جـ

---

٩) $\int$ ٥س^{9} جاس^{5} .دس

ص = س^{5}

---

١٠) $\int$ جا$\sqrt{\text{س}}$.دس

ص = $\sqrt{\text{س}}$

ص^{2} = س

٢ص.دص = دس

= $\int$ ٢ص جاص .دص

[٢ص ← ٢
جاص ← −جتاص]

= −٢ص جتاص + $\int$ ٢جتاص .دص

= −٢ص جتاص + ٢جاص + جـ

= −٢$\sqrt{\text{س}}$ جتا$\sqrt{\text{س}}$ + ٢جا$\sqrt{\text{س}}$ + جـ

١١) $\int \text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س}+١}} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{٢\text{س}+١}$

$\text{ص}^٢ = ٢\text{س}+١$

$٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$

$\text{صءص} = \text{ءس}$

$= \int \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} . \text{ءص}$

$\left[\begin{array}{l} \text{ص} \leftarrow ١ \\ \text{هـ}^{\text{ص}} \leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} \end{array}\right]$

$= \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int \text{هـ}^{\text{ص}} . \text{ءص}$

$= \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \left(\sqrt{٢\text{س}+١}\right) \text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س}+١}} - \text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س}+١}} + \text{جـ}$

---

١٢) $\int \frac{٢\text{س}\,\text{جاس}}{\text{جتا}^٣\text{س}} . \text{ءس}$

$\int ٢\text{س}\,\text{ظاس}\,\text{قا}^٢\text{س} . \text{ءس}$

$\left[\begin{array}{l} ٢\text{س} \longrightarrow ٢ \\ \text{ظاس}\,\text{قا}^٢\text{س} \leftarrow \int \text{ظاس}\,\text{قا}^٢\text{س} \end{array}\right]$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^٢\text{س}} = \text{ءس}$

$= \int \text{ص}\,\cancel{\text{قا}^٢\text{س}} \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^٢\text{س}}}$

$\int \frac{\text{ص}^٢}{٢} = \frac{\text{ظا}^٢\text{س}}{٢}$

$= \text{س}\,\text{ظا}^٢\text{س} - \int \text{ظا}^٢\text{س} . \text{ءس}$

$= \text{س}\,\text{ظا}^٢\text{س} - \int \text{قا}^٢\text{س} - ١ . \text{ءس}$

$= \text{س}\,\text{ظا}^٢\text{س} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ}$

---

١٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٤\text{س}\,\text{جا}٢\text{س} . \text{ءس}$

$\left[\begin{array}{l} ٤\text{س} \longrightarrow ٤ \\ \text{جا}٢\text{س} \leftarrow \frac{-\text{جتا}٢\text{س}}{٢} \end{array}\right]$

$= -٤\text{س}\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٢}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{٤}{٢}\text{جتا}٢\text{س} . \text{ءس}$

$= -٢\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٢\,\text{جتا}٢\text{س} . \text{ءس}$

$= -٢\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \text{جا}٢\text{س}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \left(\frac{-\pi}{٢} \times ٠ - ٠\right) + (١ - ٠) = ١$

---

١٤) $\int_{٠}^{٤} \frac{٦\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+١}} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{٢\text{س}+١}$

$\text{ص}^٢ = ٢\text{س}+١$

$\cancel{٢}\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \cancel{٢}$

$\text{صءص} = \text{ءس}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = ٤ \leftarrow \text{ص} = ٣$

$= \int_{١}^{٣} \frac{٦\text{س}}{\text{ص}}\text{ص} . \text{ءص}$

$= \int_{١}^{٣} \frac{٦(\text{ص}^٢ - ١)}{\cancel{\text{ص}}}\cancel{\text{ص}} . \text{ءص}$

$= \int_{١}^{٣} ٣\text{ص}^٢ - ٣ . \text{ءص}$

$$= \left[\frac{\text{٣ص}^{٣}}{٣} - \text{٣ص}\right]_{١}^{٣}$$

$$= (٢٧ - ٩) - (١ - ٣) = ٢٠$$

---

١٥) $\int (\text{س} + ١)^{٢}\,\text{جا٢س}.\text{دس}$

$$\left[\begin{array}{ll} (\text{س}+١)^{٢} & \rightarrow ٢(\text{س}+١) \\ \text{جا٢س} & \rightarrow \frac{-\text{جتا٢س}}{٢} \end{array}\right]$$

$$= (\text{س}+١)^{٢}\,\frac{-\text{جتا٢س}}{٢} + \int \cancel{٢}(\text{س}+١)\,\frac{\text{جتا٢س}}{\cancel{٢}}.\text{دس}$$

$$= \frac{-(\text{س}+١)^{٢}}{٢}\,\text{جتا٢س} + \int (\text{س}+١)\,\text{جتا٢س}.\text{دس}$$

*أكمل الحل :

---

١٦) $\int \text{جتاس}(\text{س}+\text{قا}^{٣}\text{س}).\text{دس}$

$$= \int \text{س جتاس}.\text{دس} + \int \text{جتاس قا}^{٣}\text{س}.\text{دس}$$

$$= \int \text{س جتاس} + \text{جتاس}\,\frac{١}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}.\text{دس}$$

$$= \int \text{س جتاس} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}.\text{دس}$$

$$= \int \text{س جتاس} + \text{قا}^{٢}\text{س}.\text{دس}$$

*أكمل الحل :

---

١٧) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}}.\text{دس}$

$$= \int \text{س جاس جتاس}.\text{دس}$$

$$*\text{جاس جتاس} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س}$$

$$= \int \frac{\text{س}}{٢}\,\text{جا٢س}.\text{دس}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{١}{٢}\text{س} & \rightarrow \frac{١}{٢} \\ \text{جا٢س} & \rightarrow \frac{-\text{جتا٢س}}{٢} \end{array}\right]$$

*أكمل الحل:

---

١٨) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}}.\text{دس}$

$$= \int \frac{١}{٢}\text{جا٢}\sqrt{\text{س}}.\text{دس}$$

$$\begin{array}{l} \text{ص} = \sqrt{\text{س}} \\ \text{ص}^{٢} = \text{س} \\ \text{٢ص دص} = \text{دس} \end{array}$$

$$= \int \frac{١}{\cancel{٢}}\,\text{جا٢ص} \times \cancel{٢}\text{ص}.\text{دص}$$

$$= \int \text{ص جا٢ص}.\text{دص}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{ص} & \longrightarrow ١ \\ \text{جا٢ص} & \rightarrow \frac{-\text{جتا٢ص}}{٢} \end{array}\right]$$

$$= -\text{ص}\,\frac{\text{جتا٢ص}}{٢} + \int \frac{\text{جتا٢ص}}{٢}.\text{دص}$$

$$= -\frac{١}{٢}\text{ص جتا٢ص} + \frac{١}{٤}\text{جا٢ص} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا٢}\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٤}\text{جا٢}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

١٩) $\int \text{جا}\sqrt{\text{٢س}+\text{٣}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{٢س}+\text{٣}}$

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{٢س}+\text{٣}$

$\cancel{\text{٢}}\text{ص}\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \cancel{\text{٢}}$

$\text{ص ءص} = \text{ءس}$

$= \int \text{ص جاص}.\text{ءص}$

$\begin{bmatrix} \text{ص} \to \text{١} \\ \text{جاص} \to -\text{جتاص} \end{bmatrix}$

*أكمل الحل:

---

٢٠) $\int \text{س جتا}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}\,.\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}$

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}}+\text{١}$

$\cancel{\text{٢}}\text{ص}\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \cancel{\text{٢}}\text{س}$

$\dfrac{\text{ص}}{\text{س}}\text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \cancel{\text{س}}\,\text{جتاص}\dfrac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}.\text{ءص}$

$= \int \text{ص جتاص}.\text{ءص}$

$\begin{bmatrix} \text{ص} \to \text{١} \\ \text{جتاص} \to \text{جاص} \end{bmatrix}$

*أكمل الحل:

---

٢١) $\int \text{س}\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\dfrac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} = \text{ءس}$

$= \int \dfrac{\cancel{\text{جاس}}}{\text{ص}^{\text{٣}}}\,\dfrac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= \int -\text{ص}^{-\text{٣}}.\text{ءص} = \dfrac{-\text{ص}^{-\text{٢}}}{-\text{٢}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢ص}^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \to \text{١} \\ \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}} \to \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} \end{bmatrix}$

$= \dfrac{\text{س}}{\text{٢}}\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} - \int \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}.\text{ءس}$

---

٢٢) $\int \text{س}(\text{جاس}+\text{جتاس})^{\text{٢}}.\text{ءس}$

$= \int \text{س}(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}+\text{٢جاس جتاس}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}).\text{ءس}$

$= \int \text{س}(\text{١}+\text{جا٢س}).\text{ءس}$

$= \int \text{س} + \text{س جا٢س}.\text{ءس}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \to \text{١} \\ \text{جا٢س} \to \dfrac{-\text{جتا٢س}}{\text{٢}} \end{bmatrix}$

$= \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \dfrac{-\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٢س} + \int \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س}.\text{ءس}$

$= \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٢س} + \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\dfrac{\text{جا٢س}}{\text{٢}} + \text{جـ}$

---

٢٣) $\int \text{س}^{\text{٥}}\,\text{جتاس}^{\text{٣}}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{\text{٢}}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{\text{٢}}} = \text{ءس}$

$$= \int \text{س}^{\cancel{\text{٢}}}\, \text{جتاص}\, \frac{\text{دص}}{\text{٣}\,\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \text{ص جتاص . دص}$$

*أكمل الحل:

٢٤) [redacted] *تدريب

٢٥) إذا كان ق(٢) = ٧، ق(٥) = ٨ *تدريب

$$\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \text{ق(س)دس} = \text{٢٠}$$

فجد: $\int_{\text{٦}}^{\text{١٥}} \text{٢س}\,\text{ق}'\left(\frac{\text{س}}{\text{٣}}\right)\text{.دس}$ ؟

٢٦) $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+\text{١})^{\text{٢}}}\text{.دس}$

$$= \int \text{س هـ}^{\text{س}} (\text{س}+\text{١})^{-\text{٢}}\text{.دس}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س هـ}^{\text{س}} & \rightarrow & \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}\text{.دس} \\ (\text{س}+\text{١})^{-\text{٢}} & \rightarrow & -(\text{س}+\text{١})^{-\text{١}} \end{bmatrix}$$

$$= -\text{س هـ}^{\text{س}}(\text{س}+\text{١})^{-\text{١}} + \int (\text{س}+\text{١})^{-\text{١}}\, \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}\text{.دس}$$

$$= -\text{س هـ}^{\text{س}}(\text{س}+\text{١})^{-\text{١}} + \int (\text{س}+\text{١})^{-\text{١}}(\text{س}+\text{١})\text{هـ}^{\text{س}}\text{.دس}$$

$$= -\text{س هـ}^{\text{س}}(\text{س}+\text{١})^{-\text{١}} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{.دس}$$

$$= -\text{س هـ}^{\text{س}}(\text{س}+\text{١})^{-\text{١}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

٢٧) $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}}+\text{١})^{\text{٢}}}\text{.دس}$

$$= \int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{\text{س}}+\text{١})^{-\text{٢}}\text{.دس}$$

$$\begin{array}{|l} \text{ص} = \sqrt{\text{س}} \\ \text{ص}^{\text{٢}} = \text{س} \\ \text{٢ص دص} = \text{دس} \end{array}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}(\text{ص}+\text{١})^{-\text{٢}}\,\text{٢ص.دص}$$

$$= \int \text{٢ص هـ}^{\text{ص}}(\text{ص}+\text{١})^{-\text{٢}}\text{.دص}$$

$$\begin{bmatrix} \text{٢ص هـ}^{\text{ص}} & \rightarrow & \text{٢ص هـ}^{\text{ص}} + \text{٢هـ}^{\text{ص}} \\ (\text{ص}+\text{١})^{-\text{٢}} & \rightarrow & -(\text{ص}+\text{١})^{-\text{١}} \end{bmatrix}$$

٢٨) $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = ٤$ ، $ق(١) = ٥$ ، $ق(٢) = ١$

جد: $\int_{١}^{٢} س\,ق'(س).دس$

---

٢٩) $\int س^{ن}\, لو_{هـ} س.دس$

$$\left[\begin{array}{ccc} لو_{هـ} س & \rightarrow & \frac{١}{س} \\ س^{ن} & \rightarrow & \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \end{array}\right]$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س - \int \frac{س^{ن+١}}{س(ن+١)}.دس$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س - \int \frac{س^{ن}}{(ن+١)}.دس$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} + جـ$$

---

٣٠) إذا علمت أن $ع_{ن} = \int_{٠}^{١} س^{ن} \sqrt{١-س}.دس$ أثبت أن $(٢ن+٣)ع_{ن} = ٢ن ع_{ن+١}$ ؟

$$ع_{ن} = \int_{٠}^{١} س^{ن} \sqrt{١-س}.دس$$

$$\left[\begin{array}{ccc} س^{ن} & \longrightarrow & ن س^{ن-١} \\ \sqrt{١-س} & \longrightarrow & \frac{-٢}{٣}(١-س)^{\frac{٣}{٢}} \end{array}\right]$$

$$ع_{ن} = \left[\frac{-٢}{٣} س^{ن}(١-س)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$$

$$+ \frac{٢}{٣}ن \int_{٠}^{١} س^{ن-١}(١-س)^{\frac{٣}{٢}}.دس$$

$$ع_{ن} = ٠ + \frac{٢}{٣}ن \int_{٠}^{١} س^{ن-١}(١-س)^{\frac{١}{٢}}(١-س).دس$$

$$= \frac{٢}{٣}ن \int_{٠}^{١} س^{ن-١}(١-س)^{\frac{١}{٢}}.دس - \frac{٢ن}{٣}\int_{٠}^{١} س^{ن}(١-س)^{\frac{١}{٢}}.دس$$

$$ع_{ن} = \frac{٢}{٣}ن ع_{ن-١} - \frac{٢}{٣}ن ع_{ن}$$

$$ع_{ن} + \frac{٢}{٣}ن ع_{ن} = \frac{٢}{٣}ن ع_{ن-١}$$

$$ع_{ن}(٣+٢ن) = ٢ن ع_{ن-١}$$

---

٣١) $\int هـ^{س}(لو_{هـ} س + \frac{١}{س}).دس$

$$= \int هـ^{س} لو_{هـ} س.دس + \int \frac{هـ^{س}}{س}.دس$$

$$\left[\begin{array}{ccc} لو_{هـ} س & \leftarrow & \frac{١}{س} \\ هـ^{س} & \leftarrow & هـ^{س} \end{array}\right]$$

$$= هـ^{س} لو_{هـ} س - \cancel{\int \frac{١}{س} هـ^{س}.دس} + \cancel{\int \frac{١}{س} هـ^{س}.دس}$$

---

٣٢) إذا كان $(ق.هـ)(٢) = ٣$ ، $(ق.هـ)(١) = ٦$ و

كان: $\int_{١}^{٢} هـ.دق = ٦$ جد: $\int_{١}^{٢} ق.دهـ$ ؟

$$\int_{١}^{٢} ق.دهـ$$

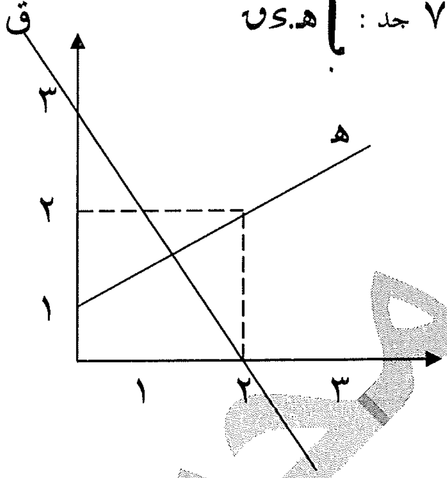
$$= [ق.هـ]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} هـ.دق$$

$$= (ق.هـ)(٢) - (ق.هـ)(١) - ٦$$

$$= ٣ - ٦ - ٦ = -٩$$

٣٣) الشكل المجاور يمثل منحنى كل من الإقترانين ق,هـ إذا كان

$\int_{٠}^{٢} \text{ق}.\text{ءهـ} = ٧$ جد : $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}.\text{ءق}$



$\int_{٠}^{٢} \text{ق}.\text{ءهـ} = \left[\text{ق}.\text{هـ}\right]_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} \text{هـ}.\text{ءق}$

$٧ = (٠ \times ٢) - (٣ \times ١) - \int_{٠}^{٢} \text{هـ}.\text{ءق}$

$٧ = -٣ - \int_{٠}^{٢} \text{هـ}.\text{ءق}$

$\int_{٠}^{٢} \text{هـ}.\text{ءق} = ١٠$

٣٤) $\int \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^٢}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س جتاس}}{\text{س}^٢} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^٢}.\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^٢}.\text{ءس}$

$\boxed{\begin{bmatrix} \frac{١}{\text{س}} \rightarrow \frac{-١}{\text{س}^٢} \\ \text{جتاس} \rightarrow \text{جاس} \end{bmatrix}}$

$= \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^٢}.\text{ءس}$

$= \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^٢}.\text{ءس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^٢}.\text{ءس}$

$= \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جـ}$

٣٥) $\int \text{جا٢س لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس}).\text{ءس}$

ص = جاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} = \text{ءس}$

$= \int ٢\text{جاس}\ \cancel{\text{جتاس}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}).\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int ٢\text{ص لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}).\text{ءص}$

$\begin{bmatrix} \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) \rightarrow \frac{١}{\text{ص}} \\ ٢\text{ص} \rightarrow \text{ص}^٢ \end{bmatrix}$

$= \text{ص}^٢\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) - \int \frac{\text{ص}^٢}{\text{ص}}.\text{ءص}$

$= \text{ص}^٢\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) - \int \text{ص}.\text{ءص}$

$= \text{ص}^٢\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) - \frac{\text{ص}^٢}{٢} + \text{جـ}$

$= \text{جا}^٢\text{س لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) - \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

٣٦) إذا علمت أن منحنى ق يمر بالنقطتين (٥،٣) (−١،٤)

فجد: $\int_{٢}^{-١} \text{س ق}'(٣ - ٢\text{س}).\text{ءس}$ لو كان :

$\int_{-١}^{٥} \text{ق}(\text{ص}).\text{ءص} = ٤$ ؟

$\int_{٢}^{-١} \text{س ق}'(٣-٢\text{س}).\text{ءس}$

ص = ٣ − ٢س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-٢}$

س = ٢ ← ص = −١

س = −١ ← ص = ٥

$= \int_{-١}^{٥} \text{س ق}'(\text{ص}).\frac{\text{ءص}}{-٢}$

$= \int_{-١}^{٥} \frac{(٣-\text{ص})}{٢}\text{ق}'(\text{ص}).\frac{\text{ءص}}{-٢}$

$= -\frac{١}{٤}\int_{-١}^{٥} (٣-\text{ص})\text{ق}'(\text{ص}).\text{ءص}$

$\begin{bmatrix} ٣-\text{ص} \leftarrow -١ \\ \text{ق}'(\text{ص}) \leftarrow \text{ق}(\text{ص}) \end{bmatrix}$

$= -\frac{١}{٤}\Big[(٣-\text{ص})\text{ق}(\text{ص})\Big]_{-١}^{٥} + \int_{-١}^{٥} \text{ق}(\text{ص}).\text{ءص}$

$= -\frac{١}{٤}\big(-٢\text{ق}(٥) - ٤\text{ق}(-١)\big) + ٤$

$= -\frac{١}{٤}(-٦ - ١٦ + ٤) = \frac{١٨}{٤} = ٤٫٥$

---

٣٧) $\int \text{قا}^٤\text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}.\text{ءس}$

ص = ظاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^٢\text{س}} = \text{ءس}$

$= \int \text{قا}^{\cancel{٤}٢}\text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^٢\text{س}}}$

$= \int \text{قا}^٢\text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}.\text{ءص}$

$\boxed{*\text{قا}^٢\text{س} = \text{ظا}^٢\text{س} + ١ = \text{ص}^٢ + ١}$

$= \int (\text{ص}^٢ + ١)\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}.\text{ءص}$

$= \int \text{ص}^٢\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}.\text{ءص} + \int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}.\text{ءص}$

$\begin{bmatrix} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} \rightarrow \frac{١}{\text{ص}} \\ \text{ءص} \rightarrow \text{ص} \\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} \rightarrow \frac{١}{\text{ص}} \\ \text{ص}^٢ \rightarrow \frac{\text{ص}^٣}{٣} \end{bmatrix}$

$= \text{ص لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{ص}\frac{١}{\text{ص}}.\text{ءص}$

$+ \frac{\text{ص}^٣}{٣}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \frac{\text{ص}^٢}{٢}.\text{ءص}$

$= \text{ص لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \frac{\text{ص}^٣}{٣} - \frac{\text{ص}^٣}{٩} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس لـو}_{\text{هـ}}(\text{ظاس}) - \text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^٣\text{س}}{٣} - \frac{\text{ظا}^٣\text{س}}{٩} + \text{جـ}$

**** تكاملات لوغرتمية ****

ما يميزها ليس لها تكامل مباشر.

١) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}.\text{ءس}$

ص = لـوهـ س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}$

س.ءص = ءس

$= \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}\cancel{\text{س}}.\text{ءص}$

$= \int \text{ص}.\text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^٢}{٢} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢}{٢} + \text{جـ}$

٢) $\int ٢\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{١}{\text{س}} \\ ٢\text{س} \leftarrow \text{س}^{٢} \end{array}\right]$$

$= \text{س}^{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}^{\cancel{٢}}.\frac{١}{\cancel{\text{س}}}.\text{ءس}$

$= \text{س}^{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}.\text{ءس}$

$= \text{س}^{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

---

٣) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{١}{\text{س}} \\ ١ \leftarrow \text{س} \end{array}\right]$$

$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \cancel{\text{س}}.\frac{١}{\cancel{\text{س}}}.\text{ءس}$

$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

---

٤) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٥}.\text{ءس}$

$= \int ٥\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{١}{\text{س}} \\ ٥ \leftarrow ٥\text{س} \end{array}\right]$$

$= ٥\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int ٥\cancel{\text{س}}.\frac{١}{\cancel{\text{س}}}.\text{ءس}$

$= ٥\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٥\text{س} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \frac{١}{\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}.\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}$

$\text{س}.\text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\cancel{\text{س}}\,\text{ص}}\,\cancel{\text{س}}.\text{ءص}$

$= \int \frac{١}{\text{ص}}.\text{ءص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

---

٦) $\int_{١}^{\text{هـ}} (\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} (\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \leftarrow \frac{٢}{\text{س}}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \\ ١ \leftarrow \text{س} \end{array}\right]$$

$= \text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \int ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{١}{\text{س}} \\ ٢ \leftarrow ٢\text{س} \end{array}\right]$$

$= \text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - ٢\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int ٢.\text{ءس}$

$= \left[\text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - ٢\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س}\right]_{١}^{\text{هـ}}$

$= \text{هـ} - ٢$

---

٧) $\int \text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} (\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \leftarrow ٢\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\frac{١}{\text{س}} \\ \text{س} \leftarrow \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \end{array}\right]$$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \int \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{1}{\text{س}} \\ \text{س} \leftarrow \frac{\text{س}^2}{2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{\text{س}^2}{2}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{1}{2}\int \text{س.ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{1}{4}\text{س}^2 + \text{جـ}$$

---

٨) $\int \text{قا}^2\text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{ظاس ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \leftarrow \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} \\ \text{قا}^2\text{س} \leftarrow \text{ظاس} \end{array}\right]$$

$$= \text{ظاس لـو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \int \text{قا}^2\text{س.ءس}$$

$$= \text{ظاس لـو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$$

---

٩) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}+2}\text{.ءس}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}{\text{س}+2}\text{.ءس}$$

$$\leftarrow \text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}+2}$$

$$(\text{س}+2)\text{.ءص} = \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\text{ص}}{\cancel{(\text{س}+2)}}\,\cancel{(\text{س}+2)}\text{.ءص}$$

$$= \int \frac{1}{2}\text{ص.ءص} = \frac{\text{ص}^2}{4} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{4}(\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2))^2 + \text{جـ}$$

---

١٠) $\int \text{هـ}^{\text{س}+\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}\text{.ءس}$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}} \times \cancel{\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\text{.ءس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{س.ءس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 1 \\ \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{هـ}^{\text{س}} \end{array}\right]$$

$$= \text{سهـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{.ءس}$$

$$= \text{سهـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

---

١١) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جاس.ءس}$

---

١٢) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{قاس}}\text{.ءس}$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس.ءس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{هـ}^{\text{س}} \\ \text{جتاس} \leftarrow \text{جاس} \end{array}\right]$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}}\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جاس.ءس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{هـ}^{\text{س}} \\ \text{جاس} \leftarrow -\text{جتاس} \end{array}\right]$$

$\int$ هـ^{س} جتاس.ءس = هـ^{س} جاس

$-\left(-\right.$ هـ^{س} جتاس + $\int$ هـ^{س} جتاس.ءس$\left.\right)$

٢$\int$ هـ^{س} جتاس.ءس = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس

$\int$ هـ^{س} جتاس.ءس = $\frac{١}{٢}$(هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس)+جـ

---

١٣) $\int$ جا(لـو$_{هـ}$ س).ءس

$\left[\begin{array}{l} \text{جا(لـو}_{هـ}\text{ س)} \to \text{جتا(لـو}_{هـ}\text{ س)}\frac{١}{س} \\ ١ \to س \end{array}\right]$

= س جا(لـو$_{هـ}$ س) $-\int$ س جتا(لـو$_{هـ}$ س) $\frac{١}{س}$.ءس

$\left[\begin{array}{l} \text{جتا(لـو}_{هـ}\text{ س)} \to -\text{جا(لـو}_{هـ}\text{ س)}\frac{١}{س} \\ ١ \to س \end{array}\right]$

$\int$ جا(لـو$_{هـ}$ س).ءس =

س جا(لـو$_{هـ}$ س) $-$ س جتا(لـو$_{هـ}$ س) $-\int$ جا(لـو$_{هـ}$ س).ءس

٢$\int$ جا(لـو$_{هـ}$ س).ءس =

س جا(لـو$_{هـ}$ س) $-$ س جتا(لـو$_{هـ}$ س)

$\int$ جا(لـو$_{هـ}$ س).ءس =

$\frac{١}{٢}$(س جا(لـو$_{هـ}$ س) $-$ س جتا(لـو$_{هـ}$ س))+جـ

---

١٤) $\int$ هـ^{س}(لـو$_{هـ}$ س + $\frac{١}{س}$).ءس

= $\int$ هـ^{س} لـو$_{هـ}$ س + هـ^{س} × $\frac{١}{س}$.ءس

= $\int$ هـ^{س} لـو$_{هـ}$ س.ءس + $\int$ هـ^{س} × $\frac{١}{س}$.ءس

$\left[\begin{array}{l} \text{لـو}_{هـ}\text{ س} \to \frac{١}{س} \\ هـ^{س} \to هـ^{س} \end{array}\right]$

= هـ^{س} لـو$_{هـ}$ س $-\cancel{\int \frac{١}{س}\text{هـ}^{س}\text{.ءس}} + \cancel{\int \frac{١}{س}\text{هـ}^{س}\text{.ءس}}$

= هـ^{س} لـو$_{هـ}$ س+جـ

** التكاملات الكسرية**

هي تكاملات لا يمكن التخلص من مقامها ويسمح أن يكون المقام خطي من الدرجة الأولى نكامل باللوغاريتمات.

$\int \frac{١}{س}$.ءس ← لـو$_{هـ}$|س|+جـ

$\int \frac{أ}{ب س + ء}$.ءس ← $\frac{أ}{ب}$لـو$_{هـ}$|ب س + ء|+جـ

إذا كان المقام تربيعي يحلل إلى عوامله المختلفة نستخدم الكسور الجزئية .

إذا كانت درجة البسط أكبر من المقام أو تساويه يجد إجراء القسمة الطويلة أولا ثم الحل , إذا كان غير ذلك نفرضه ص بالتعويض .

#تذكر للمرة الثالثة :

(ن.هـ)$'$ = (ن.ءهـ) + (هـ.ءن)

$-$(ن.ءهـ) = $-$(ن.هـ)$'$ + (هـ.ءن)

---

١) $\int \frac{١}{س^{٥}} + \frac{٣}{س}$.ءس

---

٢) $\int \frac{٥}{(٣س+٧)^{٤}}$.ءس

٣) $\int \left(\frac{١}{٥\text{س} - ٣} + \frac{٤}{\sqrt{٥\text{س} - ٣}}\right)\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٥\text{س} - ٣} + ٤(٥\text{س} - ٣)^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٥}\text{لـو}_{\text{هـ}}|٥\text{س} - ٣| + \frac{٤(٥\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$

---

٤) $\int \frac{٣\text{س}^٢ + ٧}{\text{س} + ٢}\,\text{ءس}$

$$\begin{array}{r|l} ٣\text{س} - ٦ & \\ \hline ٣\text{س}^٢ + ٧ & \text{س} + ٢ \\ -\cancel{٣\text{س}^٢} \mp ٦\text{س} & \\ \hline -\cancel{٦\text{س}} + ٧ & \\ \cancel{٦\text{س}} + ٢١ & \\ \hline ١٩ & \end{array}$$

$= \int ٣\text{س} - ٦ + \frac{١٩}{\text{س} + ٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{٣\text{س}^٢}{٢} - ٦\text{س} + ١٩\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ٢| + \text{جـ}$

---

٥) $\int \frac{٥\text{س} - ٤}{\text{س} - ٢}\,\text{ءس}$

$$\begin{array}{r|l} ٥ & \\ \hline \cancel{٥\text{س}} - ٤ & \text{س} - ٢ \\ -\cancel{٥\text{س}} + ١٠ & \\ \hline ٦ & \end{array}$$

$= \int ٥ + \frac{٦}{\text{س} - ٢}\,\text{ءس}$

$= ٥\text{س} + ٦\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٢| + \text{جـ}$

---

٦) $\int \frac{٣\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١}{\text{س}^٣ + \text{س}^٢ + ١ - \text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣ + \text{س}^٢ + ١ - \text{س}| + \text{جـ}$

---

٧) $\int \frac{٦\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} + ٩}\,\text{ءس}$

$= ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢ + \text{س} + ٩| + \text{جـ}$

---

٨) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٧}\,\text{ءس}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{جـ}$

---

٩) $\int \frac{٥}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}\,\text{ءس}$

*الحل كسور جزئية مباشر

---

١٠) $\int \frac{٧\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ - ٤}\,\text{ءس}$

*الحل كسور جزئية مباشر

---

١١) $\int \frac{\text{س}^٣ + ٣}{\text{س}^٢ - ١}\,\text{ءس}$

*الحل قسمة ثم كسور جزئية

١٢) $\int \frac{\text{٢س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-\text{٧س}+\text{١٢}}\,.\text{دس}$

*الحل قسمة ثم كسور جزئية

---

١٣) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}^{٢}-\text{٤س}+\text{٤}}\,.\text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{(\text{س}-\text{٢})(\text{س}-\text{٢})}\,.\text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{(\text{س}-\text{٢})^{٢}}\,.\text{دس}$

$= \int (\text{س}-\text{٢})^{-٢}\,.\text{دس}$

$= \frac{(\text{س}-\text{٢})^{-١}}{-\text{١}} + \text{جـ}$

---

١٤) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤}+\text{٦س}^{٢}+\text{٩}}}{\text{س}^{٢}-\text{س}}\,.\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt{(\text{س}^{٢}+\text{٣})(\text{س}^{٢}+\text{٣})}}{(\text{س}^{٢}-\text{س})}\,.\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt{(\text{س}^{٢}+\text{٣})^{٢}}}{(\text{س}^{٢}-\text{س})}\,.\text{دس}$

$= \int \frac{|\text{س}^{٢}+\text{٣}|}{(\text{س}^{٢}-\text{س})}\,.\text{دس}$

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \text{١} & \\ \hline \cancel{\text{س}^{٢}}+\text{٣} & \text{س}^{٢}-\text{س} \\ -\cancel{\text{س}^{٢}}+\text{س} & \\ \hline \text{س}+\text{٣} & \end{array}}$$

$= \int \text{١} + \frac{\text{س}+\text{٣}}{\text{س}^{٢}-\text{س}}\,.\text{دس}$

$\frac{\text{س}+\text{٣}}{\text{س}(\text{س}-\text{١})} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{١}}$

$\text{س}+\text{٣} = \text{أ}(\text{س}-\text{١}) + \text{ب س}$

$\text{س} = \text{١} \leftarrow \text{ب} = \text{٤}$

$\text{س} = \text{٠} \leftarrow \text{أ} = -\text{٣}$

$= \int \text{١} + \frac{-\text{٣}}{\text{س}} + \frac{\text{٤}}{\text{س}-\text{١}}\,.\text{دس}$

$= \text{س} - \text{٣لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{٤لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}-\text{١}| + \text{جـ}$

---

١٥) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-\text{١}}\,.\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^{٢} = \text{س}$

$\text{٢ص دص} = \text{دس}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{س}-\text{١}}\,\text{٢ص}.\text{دص}$

$= \int \frac{\text{٢ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}-\text{١}}\,.\text{دص}$

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \text{٢} & \\ \hline \cancel{\text{٢ص}^{٢}} & \text{ص}^{٢}-\text{١} \\ -\cancel{\text{٢ص}^{٢}}+\text{٢} & \\ \hline \text{٢} & \end{array}}$$

$= \int \text{٢} + \frac{\text{٢}}{\text{ص}^{٢}-\text{١}}\,.\text{دص}$

$\text{٢} = \text{أ}(\text{ص}+\text{١}) + \text{ب}(\text{ص}-\text{١})$

$\text{ص} = \text{١} \leftarrow \text{أ} = \text{١}$

$\text{ص} = -\text{١} \leftarrow \text{ب} = -\text{١}$

$= \int \text{٢} + \frac{\text{١}}{\text{ص}-\text{١}} - \frac{\text{١}}{\text{ص}+\text{١}}\,.\text{دص}$

$= \text{٢ص} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+\text{١}| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+\text{١}| + \text{جـ}$

$= \text{٢}\sqrt{\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{\text{س}}+\text{١}\right| - \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{\text{س}}+\text{١}\right| + \text{جـ}$

١٦) $\int \frac{١}{س\sqrt{س+١}}.ءس$

$ص = \sqrt{س+١}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

$٢\sqrt{س+١}.ءص = ءس$

$ص^{٢} = س+١$

$ص^{٢}-١ = س$

$= \int \frac{١}{س ص} ٢\sqrt{س+١}.ءص$

$= \int \frac{١}{\cancel{ص}(ص^{٢}-١)} ٢\cancel{ص}.ءص$

$= \int \frac{٢}{ص^{٢}-١}.ءص = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

$٢ = أ(ص+١) + ب(ص-١)$

$ص = -١ \leftarrow ب = -١$

$ص = ١ \leftarrow أ = ١$

$\int \frac{١}{ص-١} - \frac{١}{ص+١}.ءص$

$= لو_{هـ}|ص-١| - لو_{هـ}|ص+١| + جـ$

$= لو_{هـ}|\sqrt{س+١}-١| - لو_{هـ}|\sqrt{س+١}+١| + جـ$

---

١٧) $\int \frac{١}{٢س-١+\sqrt{٢س+١}}.ءس$

$ص = \sqrt{٢س+١}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\sqrt{٢س+١}}$

$\sqrt{٢س+١}ءص = ءس$

$ص = \sqrt{٢س+١}$

$ص^{٢} = ٢س+١$

$ص^{٢}-١ = ٢س$

$= \int \frac{١}{٢س-١+ص} \sqrt{٢س+١}.ءص$

$= \int \frac{١}{ص^{٢}-١-١+ص} ص.ءص$

$= \int \frac{ص}{ص^{٢}-ص-٢}.ءص$

$ص = أ(ص-١) + ب(ص+٢)$

$ص = -٢ \leftarrow أ = \frac{٢}{٣}$

$ص = ١ \leftarrow ب = \frac{١}{٣}$

$= \int \frac{٢/٣}{ص+٢} + \frac{١/٣}{ص-١}.ءص$

$\frac{٢}{٣}لو_{هـ}|ص+٢| + \frac{١}{٣}لو_{هـ}|ص-١| + جـ$

$\frac{٢}{٣}لو_{هـ}|\sqrt{٢س+١}+٢| + \frac{١}{٣}لو_{هـ}|\sqrt{٢س+١}-١| + جـ$

---

١٨) $\int \frac{\sqrt{س+١}-١}{\sqrt{س+١}+١}.ءس$

$ص = \sqrt{س+١}$

$ص^{٢} = س+١$

$٢ص ءص = ءس$

$= \int \frac{ص-١}{ص+١} ٢ص.ءص$

$= \int \frac{ص^{٢}-٢ص}{ص+١}.ءص$

---

١٩) $\int \frac{١}{\sqrt{١-\sqrt{س}}}.ءس$

$ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} = س$

$٢ص ءص = ءس$

$= \int \frac{١}{\sqrt{١-ص}} ٢ص.ءص$

$$= \int \frac{\text{٢ص}}{(\text{١}-\text{ص})^{\frac{1}{2}}} . \text{ءص} = \int \text{٢ص}(\text{١}-\text{ص})^{\frac{-1}{2}} . \text{ءص}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٢ص} \rightarrow \text{٢} \\ (\text{١}-\text{ص})^{\frac{-1}{2}} \rightarrow -\text{٢}(\text{١}-\text{ص})^{\frac{1}{2}} \end{array}\right]$$

$$= -\text{٤ص}(\text{١}-\text{ص})^{\frac{1}{2}} + \int \text{٤}(\text{١}-\text{ص})^{\frac{1}{2}} . \text{ءص}$$

$$= -\text{٤ص}(\text{١}-\text{ص})^{\frac{1}{2}} - \frac{\text{٨}}{\text{٣}}(\text{١}-\text{ص})^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$$

$$= -\text{٤}\sqrt{\text{س}}(\text{١}-\sqrt{\text{س}})^{\frac{1}{2}} - \frac{\text{٨}}{\text{٣}}(\text{١}-\sqrt{\text{س}})^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$$

---

٢٠) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{٣}} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{ءس}$

$$= \int \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}-\text{٣}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \text{١} & \\ \cancel{\text{ص}} & \text{ص}-\text{٣} \\ -\cancel{\text{ص}}+\text{٣} & \\ \hline \text{٣} & \end{array}}$$

$$= \int \text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{ص}-\text{٣}} . \text{ءص}$$

$$= \text{ص} + \text{٣}\,\text{لـهـ}|\text{ص}-\text{٣}| + \text{جـ}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} + \text{٣}\,\text{لـهـ}|\text{هـ}^{\text{س}}-\text{٣}| + \text{جـ}$$

---

٢١) $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{١}+\text{٣جاس}-\text{جتا٢س}} . \text{ءس}$

$$= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{٣جاس}-\text{٢جا}^2\text{س}} . \text{ءس}$$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} = \text{ءس}$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\text{٣ص}+\text{٢ص}^2} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \frac{\text{١}}{\text{ص}(\text{٣}+\text{٢ص})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٣}+\text{٢ص}}$$

$$\text{١} = \text{أ}(\text{٣}+\text{٢ص}) + \text{ب ص}$$

$$\text{ص} = \text{٠} \rightarrow \text{أ} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

$$\text{ص} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}} \rightarrow \text{ب} = \frac{-\text{٢}}{\text{٣}}$$

و نكمل:

---

٢٢) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{٥ظا}^2\text{س}+\text{٣ظاس}-\text{٢}} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}} = \text{ءس}$

$$= \int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}{\text{٥ص}^2+\text{٣ص}-\text{٢}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$$

$$= \int \frac{\text{١}}{\text{٥ص}^2+\text{٣ص}-\text{٢}} . \text{ءص}$$

$$\frac{\text{١}}{(\text{٥ص}-\text{٢})(\text{ص}+\text{١})} = \frac{\text{أ}}{(\text{٥ص}-\text{٢})} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}+\text{١})}$$

---

٢٣) $\int \frac{\text{قا}^4\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س}-\text{ظاس}-\text{٢}} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

٢٤) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$

$\text{ص}^٣ = \text{س}$

$٣\text{ص}^٢ \text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\text{ص} - ١} ٣\text{ص}^٢ \text{ءص} = \int \frac{٣\text{ص}^٢}{\text{ص} - ١} \text{ءص}$

$$\begin{array}{l} ٣\text{ص} + ٣ \\ \text{ص} - ١ \,\big)\, \cancel{٣\text{ص}^٢} \\ \cancel{-٣\text{ص}^٢} + ٣\text{ص} \\ \hline \cancel{٣\text{ص}} \\ \cancel{-٣\text{ص}} + ٣ \\ \hline ٣ \end{array}$$

$= \int ٣\text{ص} + ٣ + \frac{٣}{\text{ص} - ١} \text{ءص}$

$= \frac{٣\text{ص}^٢}{٢} + ٣\text{ص} + ٣\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١| + \text{جـ}$

$\frac{٣(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢}{٢} + ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + ٣\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[٣]{\text{س}} - ١| + \text{جـ}$

---

٢٥) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢} - ٤} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$

$\text{ص}^٣ = \text{س}$

$٣\text{ص}^٢ \text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{ص} - ١}{\text{ص}^٢ - ٤} ٣\text{ص}^٢ \text{ءص}$

$= \int \frac{٣\text{ص}^٣ - ٣\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ٤} \text{ءص}$

$$\begin{array}{l} ٣\text{ص} - ٣ \\ \text{ص}^٢ - ٤ \,\big)\, \cancel{٣\text{ص}^٣} - ٣\text{ص}^٢ \\ \cancel{-٣\text{ص}^٣} \pm ١٢\text{ص} \\ \hline \cancel{-٣\text{ص}^٢} + ١٢\text{ص} \\ \cancel{٣\text{ص}^٢} \pm ١٢ \\ \hline ١٢\text{ص} - ١٢ \end{array}$$

$= \int ٣\text{ص} - ٣ + \frac{١٢\text{ص} - ١٢}{\text{ص}^٢ - ٤} \text{ءص}$

$= \frac{١٢\text{ص} - ١٢}{\text{ص}^٢ - ٤} = \frac{١٢\text{ص} - ١٢}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)}$

$١٢\text{ص} - ١٢ = \text{أ}(\text{ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ٢)$

$= \frac{٣\text{ص}^٢}{٢} - ٣\text{ص} + ٣\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ٢|$

$+ ٩\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ٢| + \text{جـ}$ نستبدل

---

٢٦) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س} - ١)^٢} \, \text{ءس}$

$= \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} (\text{س} - ١)^{-٢} \text{ءس}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \rightarrow \frac{١}{\text{س}} \\ (\text{س} - ١)^{-٢} \rightarrow \frac{(\text{س} - ١)^{-١}}{-١} \end{array}\right]$$

$= -١(\text{س} - ١)^{-١} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{١}{\text{س}(\text{س} - ١)} \text{ءس}$

$\frac{١}{\text{س}(\text{س} - ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١}$

$١ = \text{أ}(\text{س} - ١) + \text{ب س}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ب} = ١$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{أ} = -١$

$\frac{-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س} - ١)} + \int \frac{-١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س} + ١} \text{ءس}$

$= \frac{-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س} - ١)} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$

** المعادلات التفاضلية **

المعادلات التفاضلية فيها صيغ مشتقة مثل :

$(\text{ق}',\ \text{ق}'',\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}},\ ...)$ أو تفاضلات : $(\text{دس},\ \text{دص})$ و

صورتها العامة : $\text{ق(ص).دص} = \text{هـ(س).دس}$

لحل المعادلات التفاضلية نكامل الطرفين لإيجاد علاقة بين المتغيرين (س,ص) بحيث تخلو من التفاضلات و المشتقات .

يجب العلم أنه :

١) $\int \text{ق}''(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) + \text{جـ}$

٢) $\int \text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$

٣) عندما يكون , ت تسارع , ع:السرعة, ف:المسافة, ن:الزمن, فإن:

$$\int \text{ت.دن} = \text{ع} + \text{جـ}$$

$$\int \text{ع.دن} = \text{ف} + \text{جـ}$$

طريقة الحل : نفصل المتغيرات كل على حده , ثم نكامل الطرفين لإيجاد علاقة بين (س,ص) تخلو من التفاضلات و المشتقات .

الأمثلة و التمرينات :

١) $\frac{\text{دص}}{\text{جاس}} = \frac{\text{دس}}{\text{جتاص}}$

$\text{جاس.دس} = \text{جتاص.دص}$

$\int \text{جاس.دس} = \int \text{جتاص.دص}$

$\text{جاص} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$

٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{ص}^{٤}}$

٣) $\sqrt{\text{س}}.\text{دص} = \sqrt[٣]{\text{ص}}.\text{دس}$ عند (١،١)

$\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}.\text{دس} = \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{ص}}}.\text{دص}$

$= \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}.\text{دس} = \int \text{ص}^{-\frac{١}{٣}}.\text{دص}$

$\frac{٣}{٢}\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

بتعويض (١،١)

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{٣}{٢} = ٢ + \text{جـ} \\ \text{جـ} = \frac{-١}{٢} \end{array}}$$

$\frac{٣}{٢}\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}$

٤) $\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٦\text{س} - ٢ = ٠$

$\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ - ٦\text{س}$

$\int \text{ص.دص} = \int ٢ - ٦\text{س.دس}$

$\frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = ٢\text{س} - \frac{٦\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

٥) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢\text{ص} = ٠$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{ص}$

$\text{دص} = ٢\text{ص.دس}$

$$\int \frac{١}{\text{ص}} .\text{ءص} = \int ٢ .\text{ءس}$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| = ٢\text{س} + \text{جـ}$$

---

٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}^{٤} + ٦\text{س}^{٢}$

---

٧) $\sqrt{١+٢\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس قتا}^{٢}\text{س}$

الحل:

$$\int \sqrt{١+٢\text{ص}} .\text{ءص} = \int \text{جتاس قتا}^{٢}\text{س} .\text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢} \times \frac{٢(١+٢\text{ص})^{\frac{٣}{٢}}}{٣} = \int \text{ظتاس قتاس} .\text{ءس}$$

$$\frac{(١+٢\text{ص})^{\frac{٣}{٢}}}{٣} = -\text{قتاس} + \text{جـ}$$

---

٨) $٣\text{ص}^{٢}\text{ظاس} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

---

٩) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س جتا}^{٢}\text{ص}$

---

١٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{٢}\sqrt{\text{ص}}$

---

١١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جا}^{٢}٣\text{ص جتا}٣\text{س}$

$$\frac{١}{\text{جا}^{٢}٣\text{ص}} .\text{ءص} = \text{جتا}٣\text{س} .\text{ءس}$$

$$\int \text{قتا}^{٢}٣\text{ص} .\text{ءص} = \int \text{جتا}٣\text{س} .\text{ءس}$$

$$-\frac{\text{ظتا}٣\text{ص}}{٣} = \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٣} + \text{جـ}$$

---

* لاحظ أنه قد يأتيك السؤال بصيغة أخرى , وهو:

س: أكتب ص بدلالة س ولكن نحتاج لوضع ص في طرف لوحدها ...

---

١٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}\sqrt{\text{ص}}$

---

١٣) $(\text{هـ}^{\text{س}}+١)\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\int \text{ص} .\text{ءص} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+١)} .\text{ءس}$$

$$\frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = \text{لـو}_{\text{هـ}} |(\text{هـ}^{\text{س}}+١)| + \text{جـ}$$

١٤) $\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص لوهـ ص} = ٠$

$\text{ص لوهـ ص} = -\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\int \frac{١}{\text{ص لوهـ ص}}.\text{ءص} = \int \frac{-١}{\text{س}}.\text{ءس}$

$\text{ع} = \text{لوهـ ص}$

$\text{ءص} = \text{ص.ءع}$

$\int \frac{١}{\text{ع}}.\text{ءع} = -\text{لوهـ}|\text{س}| + \text{جـ}$

$\text{لوهـ}|\text{ع}| = -\text{لوهـ}|\text{س}| + \text{جـ}$

$\text{لوهـ}|\text{لوهـ ص}| = -\text{لوهـ}|\text{س}| + \text{جـ}$

---

١٥) $٢\text{س ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}^٢ + ١ = ٠$

---

١٦) $٢\text{ص ءص} - ٣\text{س}^٢\text{ءس} = ٤\text{س ءس} + ٥\text{ءس} + ٤\text{ءص}$

$٢\text{ص ءص} - ٤\text{ءص} = ٣\text{س}^٢\text{ءس} + ٤\text{س ءس} + ٥\text{ءس}$

$\int (٢\text{ص} - ٤).\text{ءص} = \int (٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٥).\text{ءس}$

$\frac{٢\text{ص}^٢}{٢} - ٤\text{ص} = \frac{٣\text{س}^٣}{٣} + \frac{٤\text{س}^٢}{٢} + ٥\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص}^٢ - ٤\text{ص} = \text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} + \text{جـ}$

---

١٧) $٣\text{جتا}^٢\text{س ءص} + \text{ص}^٣\text{ءس} = ٣\text{ءص}$

$٣\text{جتا}^٢\text{س ءص} - ٣\text{ءص} = -\text{ص}^٣\text{ءس}$

$(٣\text{جتا}^٢\text{س} - ٣)\text{ءص} = -\text{ص}^٣\text{ءس}$

$(٣ - ٣\text{جتا}^٢\text{س})\text{ءص} = \text{ص}^٣\text{ءس}$

$٣(١ - \text{جتا}^٢\text{س})\text{ءص} = \text{ص}^٣\text{ءس}$

$\frac{\cancel{٣}(\cancel{\text{جا}^٢\text{س}})\text{ءص}}{٣\cancel{\text{جا}^٢\text{س}}\text{ص}^٣} = \frac{\cancel{\text{ص}^٣}\text{ءس}}{٣\text{جا}^٢\text{س}\cancel{\text{ص}^٣}}$

$\int \text{ص}^{-٣}.\text{ءص} = \int \frac{١}{٣}\text{قتا}^٢\text{س.ءس}$

$\frac{\text{ص}^{-٢}}{-٢} = \frac{-١}{٣}\text{ظتاس} + \text{جـ}$

ونستبدل

---

١٨) إذا كانت النقطة (١،٧) نقطة حرجة لكثير الحدود ق(س) وكانت $\text{ق}''\text{(س)} = ١٢\text{س} - ٨$ فجد: ق(س) ؟

---

١٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند (س،ص) يساوي $\frac{\text{جاس} - \text{قا}^٢\text{س}}{٣\text{ص}^٢}$ فجد قاعدة العلاقة علماً أن $(\frac{\pi}{٤}،٤)$ تقع على منحناه ؟

٢٠) إذا كانت سرعة جسم تعطى بالعلاقة $ن^{٣} + ٥ن$ فجد المسافة المقطوعة في [٠، ٢] ؟

$$\int_{٠}^{٢} ع . دع = \int_{٠}^{٢} ن^{٣} + ٥ن . دن$$

$$ف]_{٠}^{٢} = \left[\frac{ن^{٤}}{٤} + \frac{٥ن^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢}$$

$$ف(٢) - ف(٠) = (٤ + ١٠) - ٠$$

$$ف(٢) - ف(٠) = ١٤$$

٢١) إذا كان تسارع جسم هو $ت = ٦ن + ٨$ فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين علما أن السرعة الإبتدائية ٣م/ث و الجسم قطع مسافة ١٨م بعد ١ث ؟

٢٢) تتكاثر البكتيريا حسب المعادلة

$\frac{دع}{دن} = ٦ن^{٢} + ١٢ن$ فإذا كان عددها بعد ١ ث هو

(٢٠) فجد عددها بعد ٤ث ؟

٢٣) يسير جسم على خط مستقيم بحيث أن $ت = \frac{١}{ع}$

حيث ع > ٠ إذا تحرك الجسم من السكون و قطع مسافة

$١٠\sqrt{٢}$ بعد ٤ث فجد المسافة بعد مرور ثانية واحدة فقط ؟

٢٤) إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ وكان $\text{ق}(١) = ٥$ جد $\text{ق}(٢)$ ؟

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) = \int ٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س}$$

$$= \text{س}^{٤} + \text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{ق}(١) = ٥ \\ ١ + ١ + \text{جـ} = ٥ \\ \text{جـ} = ٣ \end{array}}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} + \text{س}^{٢} + ٣$$

$$\text{ق}(٢) = ٢^{٤} + ٢^{٢} + ٣ = ٢٣$$

---

٢٥) إذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{٣\text{س}}\text{ص}$ جد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة (٠،١)؟

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{٣\text{س}}\text{ص}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}} . \text{دص} = \int \text{هـ}^{٣\text{س}} . \text{دس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{٣} + \text{جـ}$$

يمر بالنقطة (٠،١) ← يحقق المعادلة :

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{لو}_{\text{هـ}}|١| = \frac{\text{هـ}^{٠}}{٣} + \text{جـ} \\ ٠ = \frac{١}{٣} + \text{جـ} \\ \text{جـ} = \frac{-١}{٣} \end{array}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٣\text{س}} - \frac{١}{٣}$$

---

٢٦) إذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص جتا٢س}$ جد ص بدلالة س؟

$$\int \frac{١}{\text{ص}} . \text{دص} = \int \text{جتا٢س} . \text{دس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{١}{٢}\text{جا٢س} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{جا٢س} + \text{جـ}}$$

---

٢٧) إذا كان ميل الإقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{ص}$ عند أي نقطة (س،ص) يساوي ٢س , أوجد قاعدة الإقتران $\text{ق}(\text{س})$ علما بأن منحنى ق يمر (٣،١١)؟

$$\text{الميل} = \text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) = \int ٢\text{س} = \text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{ق}(٣) = ١١ \\ \text{ق}(٣) = ٩ + \text{جـ} = ١١ \\ \text{جـ} = ٢ \end{array}}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢$$

---

٢٨) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع مقداره $-(\text{ن}+١)^{-٢}$ م/ث , وكانت سرعته الإبتدائية ١م/ث , جد المسافة بعد ٤ثواني من بدء الحركة ؟

$\text{ت} = -(\text{ن}+١)^{-٢}$ سرعته الإبتدائية ع(٠)=١ ,جد ف(٤)=؟

$$\text{ع}(\text{ن}) = \int \text{ت}(\text{ن}) = -\int (\text{ن}+١)^{-٢} = (\text{ن}+١)^{-١} + \text{جـ}$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = \frac{١}{\text{ن}+١} + \text{جـ} \leftarrow \text{ع}(٠) = \frac{١}{٠+١} + \text{جـ} = ١$$

$$\boxed{\begin{array}{r} ١ + \text{جـ} = ١ \\ \text{جـ} = ٠ \end{array}}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ن}+١| + \text{جـ}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن لو}_{\text{هـ}}١ + \text{جـ} \leftarrow \text{جـ} = ٠$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ن}+١|$$

$$\text{ف}(٤) = \text{لو}_{\text{هـ}}٥$$

٢٩)يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت بعد ن من الثواني يرتبط بسرعته على حسب المعادلة ت ع = ٠،٥ √ع ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٢٧ث من بدء تحركه إذا علمت أن سرعته عند بدء الحركة ٣سم/ث و أن ف=١٨ عند ن=٠ ؟

٣٠) قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة إبتدائية مقدارها ٤٠م/ث و بتسارع مقداره -١٠م/ث , إذاكان ارتفاعة عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠م فجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم ؟

٣١) تنمو البكتيريا بمعدل $\frac{دع}{دن} = \frac{٣٠٠٠}{١+٠،٢٥ن}$ في الساعة , حيث ن الزمن و ع عدد البكتيريا , فجد عدد البكتيريا بعد ٤ ساعات علما بأن العدد الأصلي هو ١٠٠٠؟

$$\frac{دع}{دن} = \frac{٣٠٠٠}{١+٠،٢٥ن}$$

$$دع = \frac{٣٠٠٠}{١+٠،٢٥ن} . دن$$

$$ع = \frac{٣٠٠٠}{٠،٢٥} لـو_{هـ}|١+٠،٢٥ن| + جـ$$

ع=١٠٠٠ عندما ن=٠

$$١٠٠٠ = ١٢٠٠٠ لـو_{هـ}|١+٠| + جـ$$

$$جـ = ١٠٠٠$$

$$ع = ١٢٠٠٠ لـو_{هـ}|١+٠،٢٥ن| + ١٠٠٠$$

عندما ن=٤

$$ع = ١٢٠٠٠ لـو_{هـ}٢ + ١٠٠٠$$

---

٣٢) يتحرك جسم حسب العلاقة $ع = \frac{١}{ن} لـو_{هـ} ن$ إذا قطع الجسم مسافة ٢م بعد ١ث من الحركة احسب المسافة بعد $هـ^{٣}$ ثانية ؟

$$\frac{دف}{دن} = \frac{١}{ن} لـو_{هـ} ن$$

$$دف = \frac{١}{ن} لـو_{هـ} ن . دن$$

$$\int دف = \int \frac{١}{ن} لـو_{هـ} ن . دن$$

$$ف = \int \frac{١}{ن} لـو_{هـ} ن . دن$$

$$ص = لـو_{هـ} ن$$

$$\frac{دص}{دن} = \frac{١}{ن}$$

$$ن دص = دن$$

$$ف = \int \frac{١}{\cancel{ن}} ص \cancel{ن} . دص$$

$$ف = \int ص . دص$$

$$ف = \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ$$

$$ف = \frac{(لـو_{هـ} ن)^{٢}}{٢} + جـ$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ن = ١ \leftarrow ف = ٢ \\ ٢ = ٠ + جـ \\ جـ = ٢ \end{array}}$$

$$ف = \frac{(لـو_{هـ} ن)^{٢}}{٢} + ٢$$

$$ف\Big|_{ن=هـ^{٣}} = \frac{(لـو_{هـ} هـ^{٣})^{٢}}{٢} + ٢$$

$$= \frac{٩}{٢} + ٢ = ٦،٥$$

---

٣٣) حل المعادلة التفاضلية : س.دص = ص.دس ؟

$$\frac{دص}{ص} = \frac{دس}{س}$$

$$\int \frac{دص}{ص} = \int \frac{دس}{س}$$

$$لـو_{هـ} ص = لـو_{هـ} س + جـ$$

$$هـ^{لـو_{هـ} ص} = هـ^{لـو_{هـ} س + جـ}$$

$$ص = هـ^{لـو_{هـ} س} \times هـ^{جـ}$$

$$ص = س هـ^{جـ}$$

للتخلص من اللوغاريتم نرفع للأس هـ

---

٣٤) إذا كانت النقطة (٠،٥) نقطة حرجة لكثير الحدود ق(س) وكانت ق''(س) = ٦س + ٢ أوجد قاعدة ق(س) ؟

بما أن (٠،٥) نقطة حرجة إذا ق'(٠) = ٠

$$ق'(س) = \int ق''(س) = ٣س^{٢} + ٢س + جـ$$

ق′(٠) = ٠
٠+٠+جـ = ٠
جـ = ٠

∴ ق′(س) = ٣س^{٢} + ٢س

(٥،٠) تحقق المعادلة ← نحتاج $\int$ق(س)

ق(س) = $\int$ق′(س) = س^{٣} + س^{٢} + جـ

ق(٠) = ٥
٠+٠+جـ = ٥
جـ = ٥

∴ ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٥

---

٣٥) نقطة مادية تتحرك بتسارع ت=٦ن+٤سم/ث^{٢} و إذا بدأت هذه النقطة حركتها بسرعة ٢سم/ث من نقطة تبعد ١٠سم عن نقطة الأصل جد سرعة هذه النقطة و بعدها عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟

ف(٠) = ١٠ ، ع(٠) = ٢ جد ع(٢)، ف(٢)

ع(ن) = $\int$ت(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ

ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ

ع(٠) = ٠+٠+جـ = ٢
جـ = ٢

ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢

ف(ن) = $\int$ع(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ

ع(٠) = ١٠

٠+٠+٠+جـ = ١٠
جـ = ١٠

ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ١٠

ع(٢) = ١٢ + ٨ + ٢ = ٢٢

ف(٢) = ٨ + ٨ + ٤ + ١٠ = ٣٠

---

٣٦) إذا كانت ق″(س) = ٣س + ١ و كانت (١،٠) نقطة حرجة جد ق(س) ؟

ق(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} + ١

---

٣٧) إذا كان ميل المماس للمنحنى ق(س) عند النقطة (١،٥) يساوي ٤ و كانت ق″(س) = ١٢س − ٨ ، أوجد قاعدة ق(س) ؟

ق(س) = ٢س^{٣} − ٤س^{٢} + ٦س + ١

---

٣٨) قذفت كرة للأعلى بسرعة ٦٤م/ث على ارتفاع ٨٠م ,جد معادلة الحركة لهذه الكرة إذا علمت أن تسارع الكرة= −٣٢م/ث^{٢}.

ع(٠) = ٦٤

ف(٠) = ٨٠

ت(ن) = −٣٢

ع(ن) = −٣٢ن + جـ

ع(٠) = ٦٤
٠+جـ = ٦٤
جـ = ٦٤

ع(ن) = −٣٢ن = ٦٤

ف(ن) = $\int$ع(ن) = −١٦ن^{٢} + ٦٤ن + جـ

ف(٠) = ٨٠
٠+٠+جـ = ٨٠
جـ = ٨٠

ف(ن) = −١٦ن^{٢} + ٦٤ن = ٨٠

---

٣٩) إذا كانت سرعة جسم تعطى بالعلاقة

ع + ٥ن^{٤} + ٦ن^{٢} أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٢ث علما بأن الجسم قطع مسافة ١٠م عندما ن=١؟

ف(٢)=٥٥م

٤٠)انطلق جسم في خط مستقيم من النقطة أ,فإذا كانت سرعتة ع م/ث , بعد زمن قدرة ن ثانية تعطى بالعلاقة

$$ع = \begin{cases} ٣ن^{٢} & ٠ \leq ن < ٢ \\ ١٦ - ٢ن & ٢ \leq ن \leq ٨ \end{cases}$$

جد بعد الجسم عن أ بعد ن=٥ث؟

$$ف(٥) = \int_{٠}^{٥} ع.ءن$$

$$= \int_{٠}^{٢} ٣ن^{٢} + \int_{٢}^{٥} (١٦-٢ن).ءن$$

$$= ن^{٣}\Big]_{٠}^{٢} + ١٦ن - ن^{٢}\Big]_{٢}^{٥}$$

$$= ٨ + ٥٥ - ٢٨ = ٣٥$$

٤١)إذا كانت المشتقة الأولى للإقتران ق هي ٢س − ٢ و كانت القيمة الصغرى المحلية له (−٧) جد قاعدة الإقتران؟

$$ق'(س) = ٢س - ٢$$

$$٢س - ٢ = ٠$$

$$س = ١$$

القيمة الصغرى المحلية =−٧ أي أن ق(١) = −٧

$$ق(س) = \int ٢س - ٢ = س^{٢} - ٢س + جـ$$

$$\boxed{\begin{aligned} ق(١) &= -٧ \\ ١ - ٢ + جـ &= -٧ \\ جـ &= -٦ \end{aligned}}$$

$$\therefore ق(س) = س^{٢} + ٢س - ٦$$

٤٢) يتحرك جسم في المستوى بحيث يكون تسارعه ت يعطى بدلالة سرعته ع حسب العلاقة ت+١٢ع=صفر, وبلغت سرعته هـ م/ث بعد ٢ث, حيث هـ:العدد النيبيري ,جد سرعته بعد ٤ث؟

$$ت + ١٢ع = ٠$$

$$ع(٢) = هـ \quad \text{جد } ع(٤)$$

$$ت = -١٢ع$$

$$\frac{ءع}{ءن} = -١٢ع$$

$$\int \frac{١}{ع}.ءع = \int -١٢.ءن$$

$$لو_{هـ}|ع| = -١٢ن + جـ$$

$$\boxed{\begin{aligned} ع(٢) &= هـ \\ لو_{هـ}|هـ| &= -١٢ \times ٢ + جـ \\ جـ &= ٢٥ \end{aligned}}$$

$$لو_{هـ}|ع| = -١٢ن + ٢٥$$

$$ع_{(ن)} = هـ^{-١٢ن+٢٥}$$

$$ع(٤) = هـ^{-١٢\times٤+٢٥} = هـ^{-٢٣}$$

٤٣)قذف جسم رأسيا للأعلى بسرعة ٥٠م/ث فإذا كان تسارعه يساوي −١٠م/ث^{٢} إحسب سرعة الجسم بعد مضي ٢ث؟

٣٠م/ث

٤٤)إذا كان $ق''(س) = ٤هـ^{٢س} + ٤س$ و كان $ق(٠) = ٩، ق'(٠) = ٧$ جد ق(س) ؟

$$ق(س) = هـ^{٢س} + \frac{٢س^{٣}}{٣} + ٥س + جـ$$

٤٥) حل المعادلة التفاضلية

$$ص^{٢}\frac{ءص}{ءس} = \sqrt[٣]{س^{٣} + س^{٤}}$$

٤٦) إذا كان الإقتران $\text{ص} = \text{ق(س)}$ يحقق المعادلة

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2\text{س} + 1$ جد قاعدة هذا الإقتران علما بأن

(٠،٥) نقطة حرجة له؟

$$*\ \text{ق}(0) = 5 ،\ \text{ق}'(0) = 0$$

---

٤٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ق(س) عند

النقطة (س،ص) يساوي $\frac{1}{\text{س}+3}$,فجد معادلة المنحنى

علما بأنه يمر بالنقطة (−٢ ,٥) ؟

$$\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + 5$$

---

٤٨) إذا كان $\text{ص} = \text{ق(س)}$,

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^2 - 2\text{س} - 3$ وكان لمنحنى ق(س)

قيمة صغرى محلية تساوي −٥ جد قاعدة الإقتران؟

$$\text{ق(س)} = \int \text{ق}'\text{(س)} = \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س}^2 - 3\text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}'\text{(س)} = 0 \Leftarrow \text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$$

$$(\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$$

$$+ \quad -1 \quad - \quad 3 \quad +$$

$$\therefore \text{ق}(3) = -5$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{27}{3} - 9 - 9 + \text{جـ} = -5 \\ &9 - 9 - 9 + \text{جـ} = -5 \\ &\text{جـ} = 4 \end{aligned}}$$

$$\therefore \text{ق(س)} = \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س}^2 - 3\text{س} + 4$$

---

٤٩) إذا كانت المشتقة النونية للإقتران ق(س) هي

$\text{ق}^{\text{ن}}\text{(س)} = \frac{(-1)^{\text{ن}}(\text{ن}-1)!}{(1+\text{س})^{\text{ن}+1}}$ جد قاعدة ق(س)؟

$$\text{ن} = 1 \leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = \frac{-1}{(1+\text{س})^2}$$

$$\therefore \text{ق(س)} = \int \text{ق}'\text{(س)} = \int -(1+\text{س})^{-2}.\text{ءس}$$

$$= (1+\text{س})^{-1} + \text{جـ}$$

$$\therefore \text{ق(س)} = \frac{1}{1+\text{س}} + \text{جـ}$$

---

٥٠) يتحرك جسم بحيث أن حركته $\text{ع} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}}{\text{ن}}$ فإذا

قطع الجسم مسافة ٤م بعد ١ث , جد المسافة المقطوعة بعد

مرور هـ^2ث؟

$$\text{ع} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}}{\text{ن}}$$

$$\text{ف}(1) = 4$$

$$\text{ف}(\text{هـ}^2) =$$

$$\text{ع} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}}{\text{ن}} \leftarrow \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}}{\text{ن}}$$

$$\leftarrow \text{ءف} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}}{\text{ن}}.\text{ءن}$$

$$\int \text{ءف} = \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}}{\text{ن}}.\text{ءن}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}$$

$$\text{ءن} = \text{ن}.\text{ءص}$$

$$\text{ف} = \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{ن}}}.\cancel{\text{ن}}.\text{ءص}$$

$$\text{ف} = \frac{\text{ص}^2}{2} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن})^2}{2} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{ف}(1) = 4 \\ &\frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}1)^2}{2} + \text{جـ} = 4 \\ &\text{جـ} = 4 \end{aligned}}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ن})^{٢}}{٢}+٤$$

$$\text{ف}(\text{هـ}^{٢}) = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢})^{٢}}{٢}+٤ = ٢+٤ = ٦$$

---

٥١) إذا كان المستقيم $\text{ص} = ٤-٢\text{س}$ مماسا لمنحنى $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ عند النقطة (١،٢) و ميل المماس عند أي نقطة عليه هو $\text{ك}+٢\text{س}$ جد $\text{ك}،\text{ق}(\text{س})$ ؟

$$= \text{ق}'(\text{س}) = -٢ = \text{ك}+٢\text{س}$$

ميل المماس $\Big|_{(١،٢)} \Leftarrow -٢ = \text{ك}+٢ \leftarrow \text{ك} = -٤$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = -٤+٢\text{س}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) = -٤\text{س}+\text{س}^{٢}+\text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ق}(١) = ٢ \\ -٤+١+\text{جـ} = ٢ \\ \text{جـ} = ٥ \end{array}}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}-٤\text{س}+٥$$

---

٥٢) إذا كانت $\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) = \sqrt{٢}$,

$\text{ق}'(\text{س})\text{جاس} - \text{ق}(\text{س})\text{جتاس} = ٠$ ؟

$$\text{ق}'(\text{س})\text{جاس} = \text{ق}(\text{س})\text{جتاس}$$

$$\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$$

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}.\text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}.\text{ءس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}|+\text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ق}(\frac{\pi}{٢}) = \sqrt{٢} \\ \leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{٢}| = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}\frac{\pi}{٢}|+\text{جـ} \\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{٢}| = \text{لو}_{\text{هـ}}|١|+\text{جـ} \\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{٢}| = \text{جـ} \end{array}}$$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}|+\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{٢}|$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\frac{\pi}{٤})| = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}\frac{\pi}{٤}|+\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{٢}|$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{\sqrt{٢}}+\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{٢}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}١-\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{٢}+\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{٢}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}١ = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\frac{\pi}{٤}) = \text{هـ}^{٠} = ١$$

---

٥٣) شب حريق في غابة , إذا دل م على المساحة للمنطقة التي يصيبها الحريق مقدراً بالدونومات ولكن معدل زيادة م هو (٢%م) مقدرا بالدونومات لكل ساعة , فإذا علمت أن المساحة التي أصابها الحريق عند اكتشافه تعادل ٣دونمات , جد المساحة المحروقة بعد ساعتين من اكتشاف الحريق ؟

م: المساحة المحروقة .

معدل زيادة م: $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٢\%\text{م}$

م(٠) =٣ دونم ,جد م(٢)

*يلزمنا م(ن)

$$\int \frac{١}{\text{م}}.\text{ءم} = \int ٠{،}٠٢\,\text{ءن} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}| = ٠{،}٠٢\,\text{م}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}| = ٠{،}٠٢\text{ن}+\text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{م}(٠) = ٣ \\ \text{لو}_{\text{هـ}}|٣| = ٠+\text{جـ} \\ \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|٣| \end{array}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}| = ٠{،}٠٢\text{ن}+\text{لو}_{\text{هـ}}٣$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}| = ٠{،}٠٢\times٢+\text{لو}_{\text{هـ}}٣$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}| = ٠{،}٠٤+\text{لو}_{\text{هـ}}٣$$

$$\text{م}(٢) = \text{هـ}^{٠{،}٠٤+\text{لو}_{\text{هـ}}٣}$$

---

٥٤)آلة صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار, وكانت قيمتها عند الشراء تتناقص بمرور الزمن و فق العلاقة

$\frac{\text{ءق}}{\text{ءن}} = -٥٠٠(\text{ن}+١)^{-٢}$, حيث ق قيمة الآلة

بعد ن سنة من شرائها , إحسب قيمة هذه الآلة بعد ٣ سنوات ؟

$$\text{ق}(0) = 2500$$

$$\frac{\text{دق}}{\text{دن}} = -500(\text{ن}+1)^{-2}$$

$$\int \text{دق} = \int -500(\text{ن}+1)^{-2}.\text{دن}$$

$$\text{ق} = 500(\text{ن}+1)^{-1} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ق}(0) = 2500 \\ 500 + \text{جـ} = 2500 \\ \text{جـ} = 2000 \end{array}}$$

$$\text{ق}(\text{ن}) = 500(\text{ن}+1)^{-1} + 2000$$

$$\text{ق}(3) = \frac{500}{4} + 2000 = 2125$$

٥٥) في بلاد الواق واق يزداد طول شجرة معينه بمعدل $\frac{1}{10}\text{س}$ سم/د حيث س هو طول الشجرة,فإذا علمت أن طول الشجرة يساوي هـ سم عند بدء التمدد,جد طولها بعد ١٠د؟

س= طول الشجرة , $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{1}{10}\text{س}$,س(٠)= هـ

*أكمل الحل و الجواب هو س=هـ^{2}سم.

٥٦) بركة مسبح على شكل متوازي مستطيلات أبعادها (١،٢،٥)متر ,يصب فيها الماء بمعدل (٤ن−١)م^3/دقيقة , متى يمتلئ الخزان ؟

*الحجم (ح)=١×٢×٥=١٠م^3.

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 4\text{ن} - 1$$

$$\int \text{دع} = \int 4\text{ن} - 1 .\text{دن}$$

$$\text{ع} = 2\text{ن}^2 - \text{ن} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ن} = 0 \leftarrow \text{ع}(0) = 0 \\ \text{ع} = 2\times 0^2 - 0 + \text{جـ} = 0 \\ \text{جـ} = 0 \end{array}}$$

$$\text{ع} = 2\text{ن}^2 - \text{ن}$$

يمتلئ الخزان عند ح(ن)=١٠

$$2\text{ن}^2 - \text{ن} = 10$$

$$2\text{ن}^2 - \text{ن} - 10 = 0$$

$$(2\text{ن} - 5)(\text{ن} + 2) =$$

$$\text{ن} = \frac{5}{2} \checkmark$$

$$\text{ن} = -2 \times$$

٥٧) يشفى جرح بحيث تتناقص مساحته بمعدل $-3(\text{ن}+2)^{-2}$ سم^2/يوم منذ ن يوماً إبتداءا من يوم الثلاثاء فإذا كانت مساحته باليوم التالي (الأربعاء) ٢سم^2, جد مساحته يوم الثلاثاء ؟

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = -3(\text{ن}+2)^{-2} \text{ سم}^2/\text{يوم}$$

يوم الثلاثاء ←ن=٠ , يوم الأربعاء ←ن=١.

م(١)=٢ , حيث م :المساحة , جد م(٠)؟

$$\int \text{دم} = \int -3(\text{ن}+2)^{-2}.\text{دن}$$

$$\text{م} = 3(\text{ن}+2)^{-1} + \text{جـ}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{م}(1) = \frac{3}{3} + \text{جـ} = 2 \\ 1 + \text{جـ} = 2 \\ \text{جـ} = 1 \end{array}}$$

$م(ن) = ٣(ن+٢)^{-١} + ١$

$م(٠) = \frac{٣}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢}$

---

٥٨) يزداد عدد سكان مدينة الكرك بمعدل ٠،٠٢ من عددهم سنويا فإذا كان عدد سكان الكرك الآن ١٠٠،٠٠٠ , فجد عدد السكان بعد ٢٠ سنة ؟

الحل: $ع = ١٠^{٥} \times هـ^{٠،٤}$

---

٥٩)تنمو بكتيريا بمعدل $\frac{دع}{دن} = \frac{٣٠٠٠}{١+٠،٢٥ن}$ في الساعة , حيث ن الزمن, أوجد عدد البكتيريا بعد مرور ٤ ساعات علما بأن العدد الأصلي هو $١٠^{٣}$ ؟

---

٦٠) إذا كان فرس يتسارع بسباق بالعلاقة ٦ن+٤ م/ث , وقطع الفرس مسافة ٢١م بعد ٢ث من بدء السباق و كانت سرعته الإبتدائية ٢م/ث, أوجد المسافة التي يقطعها بعد ٣ث من بدء السباق ؟

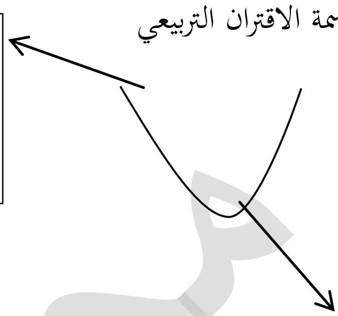
الحل: ٥٢ م.

*المقدمة

عليك معرفة بعض الرسومات الهامة *

أولا : رسمة الاقتران التربيعي

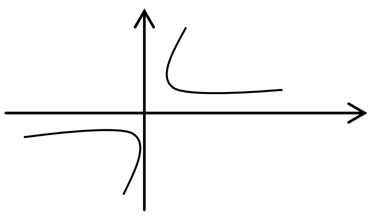
ايجاد فتحة القطع
+ للاعلى .
− للاسفل .



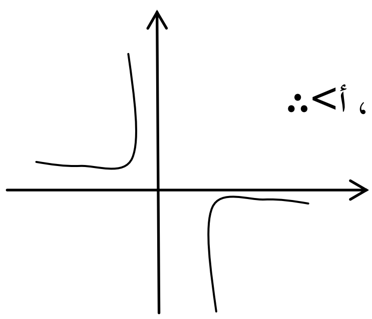
احداثيات الراس **س** = صفر المشتقة
ص =تعويض صفر المشتقة في الاقتران

ثانيا : عائلة $\frac{أ}{س}$ ، أ > ٠

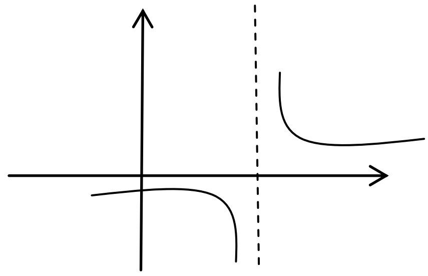
أ) ص = $\frac{أ}{س}$ ، أ > ٠



ب) ص = − $\frac{أ}{س}$ ، أ > ٠

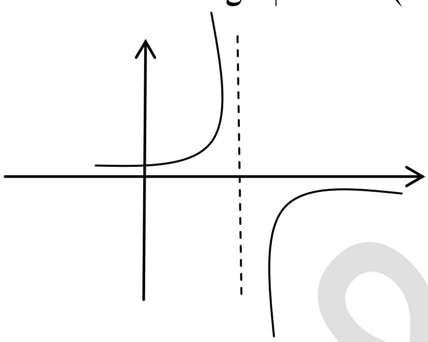


جـ) ص = $\frac{1}{س-م}$ ، أ > ٠

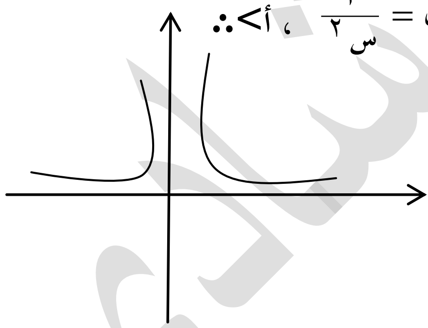


س = م (محاذي راسي)

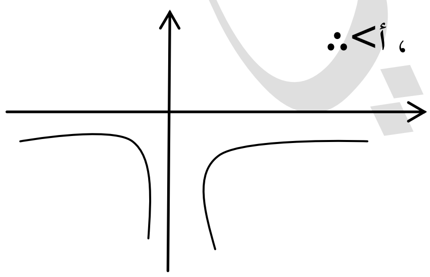
د) ص = $\frac{1}{م-س}$ ، أ > ٠



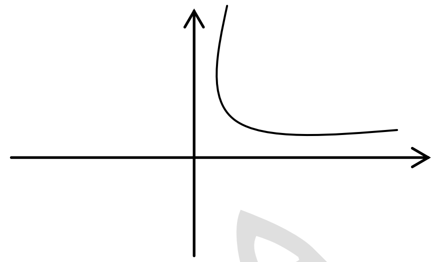
هـ) ص = $\frac{أ}{س^2}$ ، أ > ٠



و) ص = − $\frac{أ}{س^2}$ ، أ > ٠

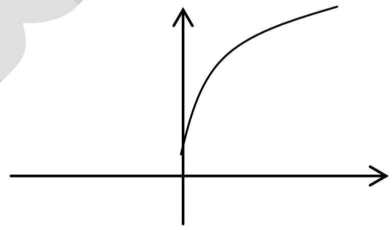


ز) ص = أ/√س ، أ > ∴

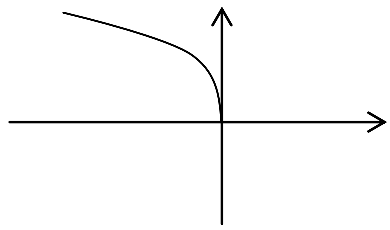


ثالثا : عائلة الجذر التربيعي :

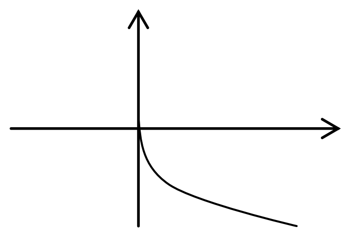
١) ص = أ√س ، أ > ∴



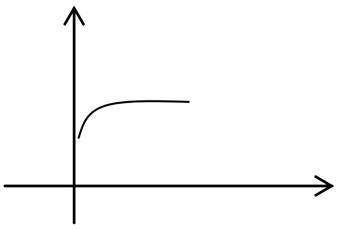
٢) ص = أ √(−س) ، أ > ∴



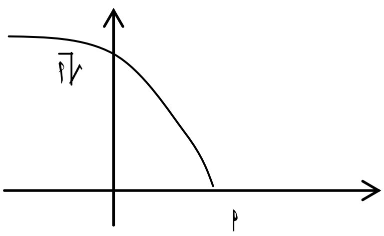
٣) ص = −أ√س ، أ > ∴



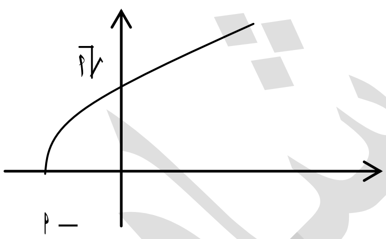
٤) ص = أ √س + ب ، أ،ب > ∴



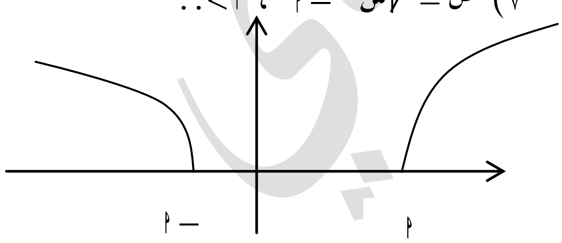
٥) ص = √(أ − س) ، أ > ∴



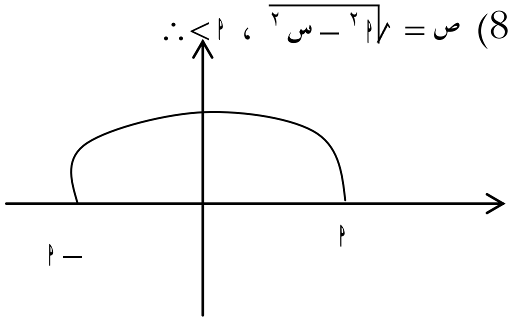
6) ص = √(أ + س) ، أ > ∴



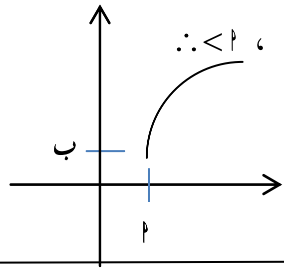
٧) ص = √(س² − أ²) ، أ > ∴



8) ص = √(أ² − س²) ، أ > ∴

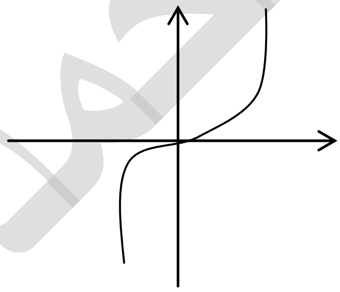


٩) ص = $\sqrt{\text{س} - \text{أ}}$ ، أ > ∴

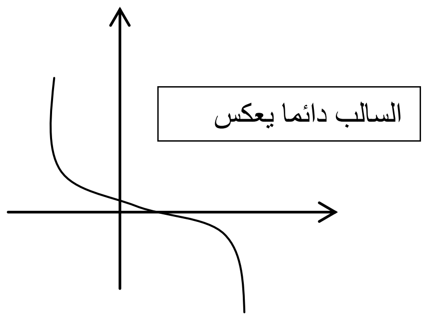


رابعا : عائلة الاقتران التكعيبي

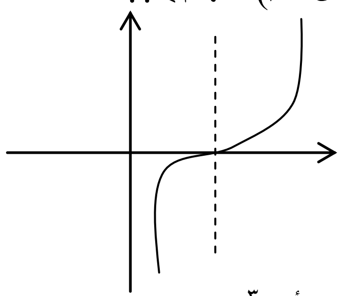
١) ص = أس^{٣} ، أ > ∴



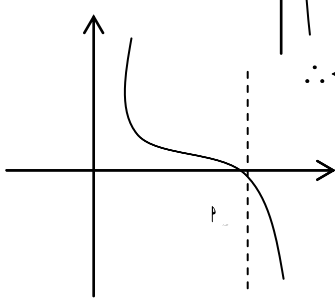
٢) ص = −أس^{٣} ، أ > ∴



٣) ص = (س − أ)^{٣} ، أ > ∴

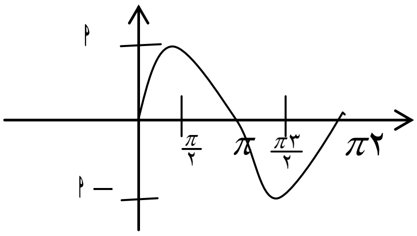


٤) ص = (أ − أ)^{٣} ، أ > ∴

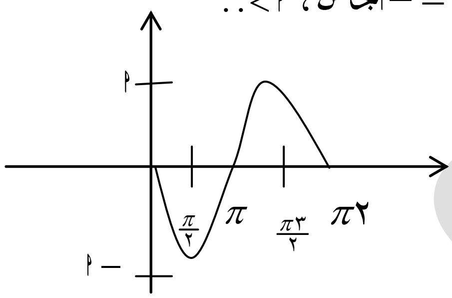


خامسا : عائلة الاقترانات الدائرية

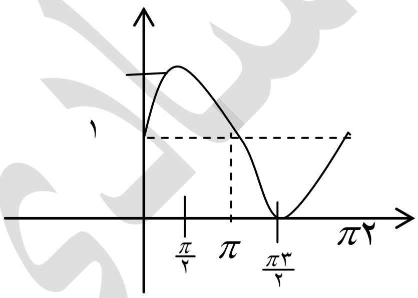
١) ص = أجاس ، أ > ∴



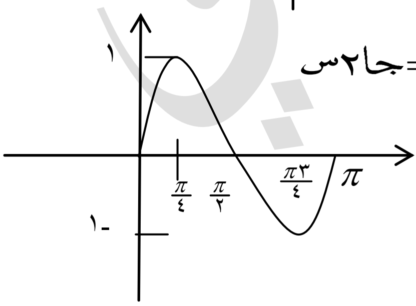
٢) ص = −أجاس ، أ > ∴



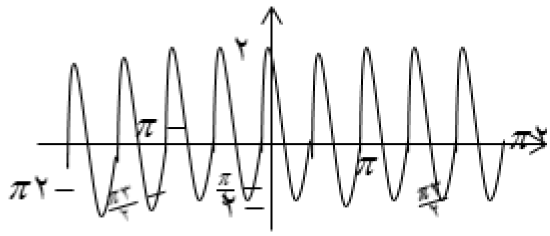
٣) ص = ١ +جاس



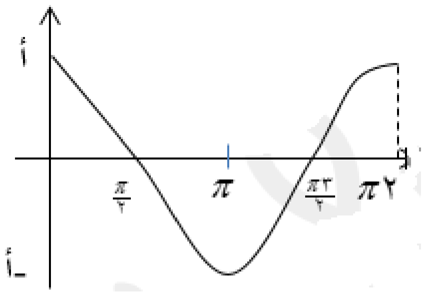
٤) ص = جا٢س



٥) ص=٢جا٤س

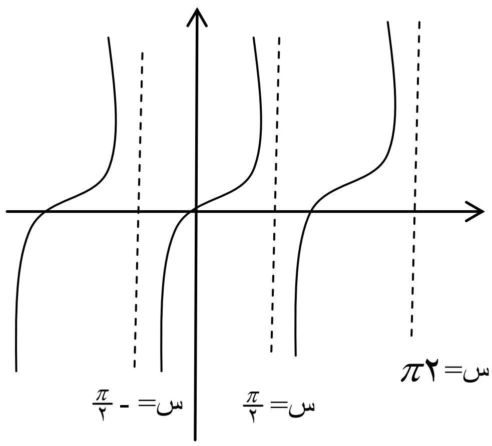


٦) ص = أجتاس ،



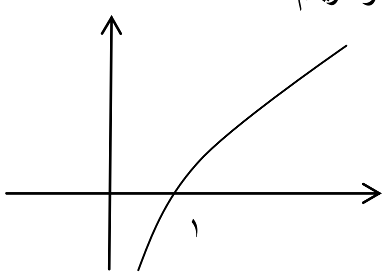
م < ∴

٧) ص =ظاس

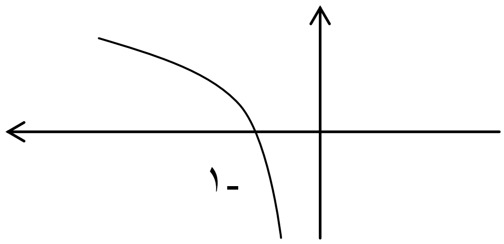


سادسا : عائلة اللوغاريتم

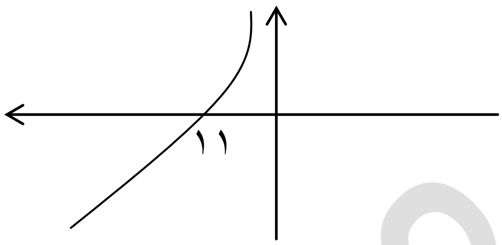
١) ص=لـــو(س)



٢) ص =لـــو(ــس)

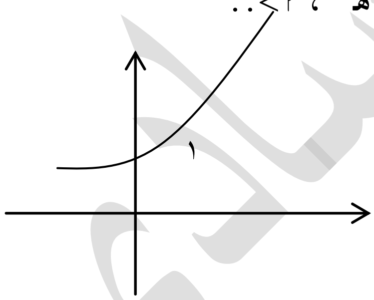


٣) ص =-لـــو(ــس)

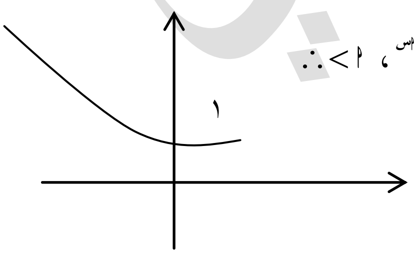


سابعا : عائلة العدد النيبيري

١) ص = $ه^{س}$ ، م < ∴

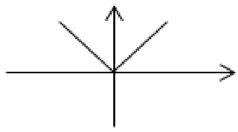


٢) ص = $ه^{-س}$ ، م < ∴

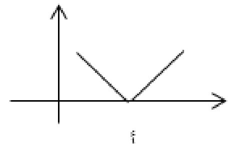


ثامنا : عائلة القيمة المطلقة

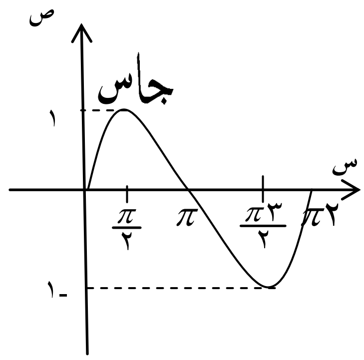
١) ص = |س|

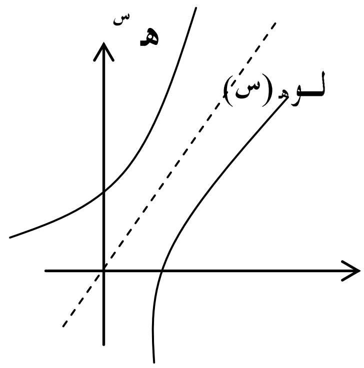


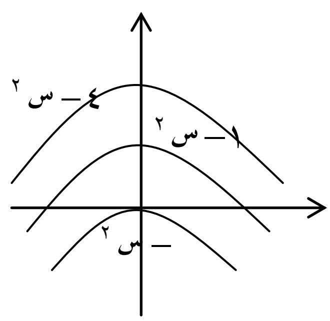
٢) ص = |س − أ|

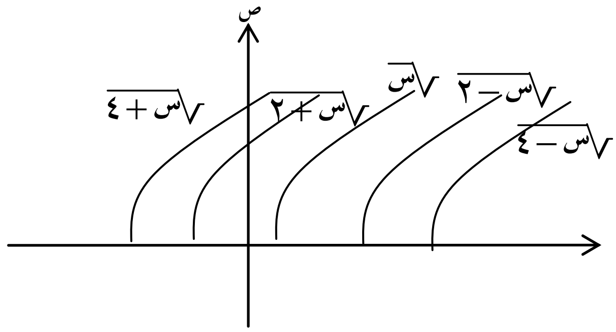


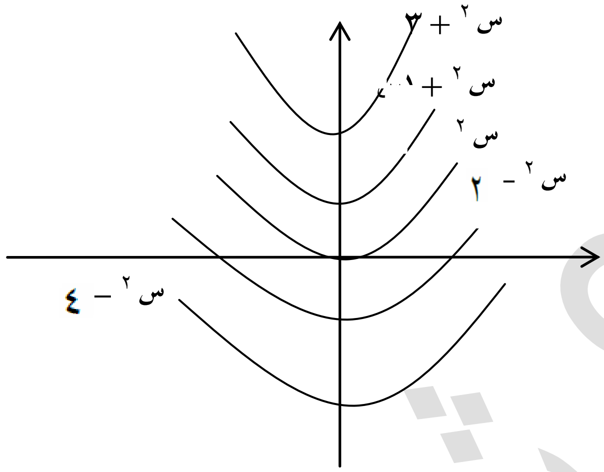
**بعض الرسومات

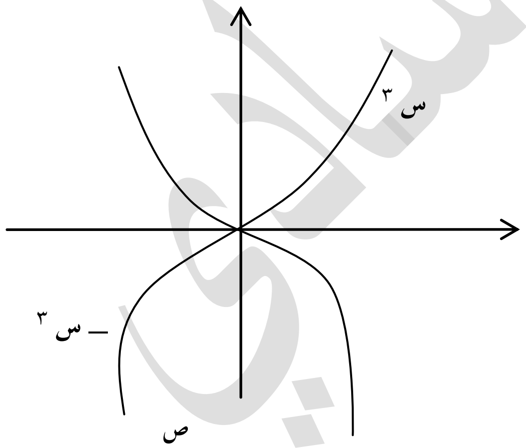


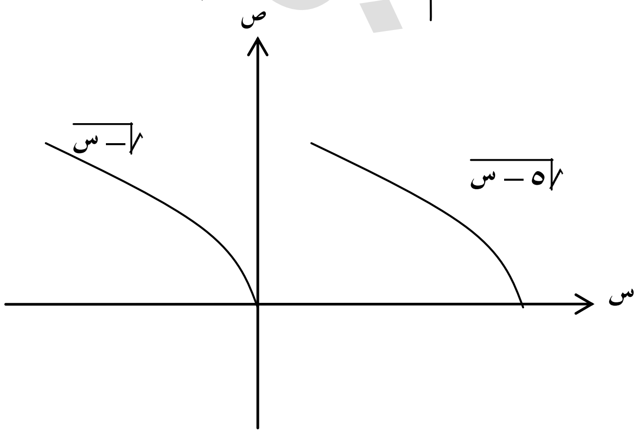










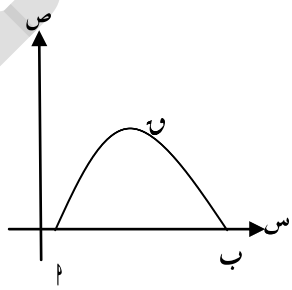


المساحة

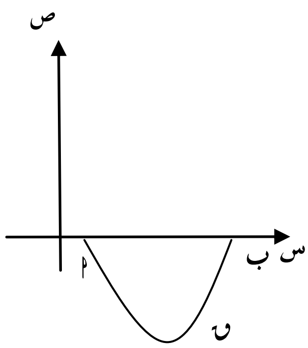
أولا: المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات .

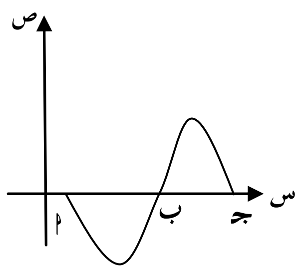
في هذه الحالة نجد نقاط التقاطع مع محور السينات بوضع ص = ٠ فتكون أمام إحدى الحالات :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$



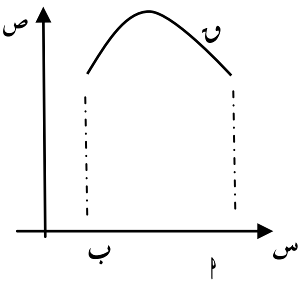
$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$



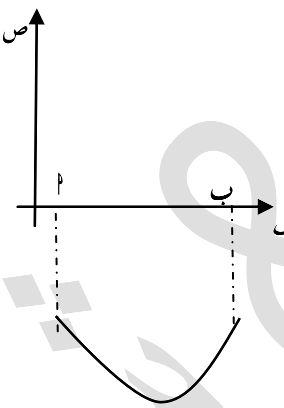


$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس + \int_{ب}^{جـ} |ق(س)|\, دس$$

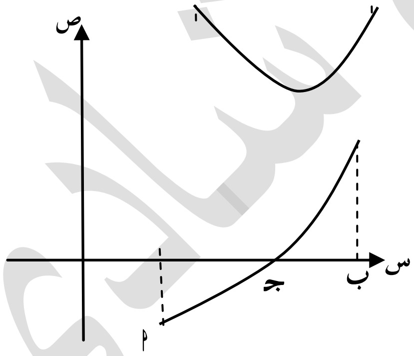
وإذا طلبت المساحة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ، س = ب و س ∈ [أ،ب] نجد نقاط التقاطع مع محور السينات فإذا وقعت في الفترة (أ،ب) نقوم بتجزئة التكامل .



$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$



$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$



$$م = \int_{أ}^{جـ} |ق(س)|\, دس + \int_{جـ}^{ب} |ق(س)|\, دس$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ق(س)} = ٣\text{س} - \text{س}^٢$ ومحور السينات .

الحل

$٣\text{س} - \text{س}^٢ = ٠$

$\text{س}(٣ - \text{س})$

$\text{س} = ٣$

$\text{س} = ٠$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٣} |٣\text{س} - \text{س}^٢| \, \text{ءس} = \int_{٠}^{٣} ٣\text{س} - \text{س}^٢ \, \text{ءس}$$

$$\left[\frac{٣\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٣}{٣} \right]_{٠}^{٣} = \left(\frac{٢٧}{٢} - ٩\right) - (٠) = ٤,٥$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ق(س)} = \text{س}^٢ - ٩$ ومحور السينات

الحل

$\text{س}^٢ - ٩ = ٠ \longleftarrow \text{س} = \pm ٣$

$$\text{م} = \int_{-٣}^{٣} |\text{س}^٢ - ٩| \, \text{ءس} = \int_{-٣}^{٣} (٩ - \text{س}^٢) \, \text{ءس}$$

$$= \left[٩\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣} \right]_{-٣}^{٣} = (٢٧ - ٩) - (-٢٧ + ٩)$$

$= ١٨ + ١٨ = ٣٦$

ملاحظة

بهدف التخلص من رمز المطلقة لايجاد $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}| \, \text{ءس}$

وكان ق(س) لا يقطع محور السينات في (أ،ب) نأخذ عددا جـ بين (أ) و (ب) و إذا كان ق(جـ) $>$ ٠ .

نأخذ ق(س) وتكامله.

وإذا كان ق(جـ) $<$ ٠ . نأخذ − ق(س) ونكامله.

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ص} = \text{س}^٣ - \text{س}$ ومحور السينات

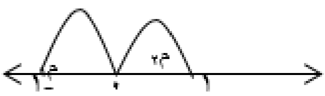
الحل

$\text{س}^٣ - \text{س} = ٠$

$\text{س}^٢(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = ٠$

$\text{س} = \pm ١$



$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$$= \int_{-١}^{٠} |\text{س}^٣ - \text{س}| \, \text{ءس} + \int_{٠}^{١} |\text{س}^٣ - \text{س}| \, \text{ءس}$$

$$= \int_{-١}^{٠} (\text{س}^٣ - \text{س}) \, \text{ءس} + \int_{٠}^{١} (\text{س} - \text{س}^٣) \, \text{ءس}$$

$$\left[\frac{\text{س}^٤}{٤} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{-١}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٤}{٤} \right]_{٠}^{١}$$

$$= (٠) - \left(\tfrac{١}{٤} - \tfrac{١}{٢}\right) + \left(\tfrac{١}{٢} - \tfrac{١}{٤}\right) - (٠)$$

$$= \left(\tfrac{١}{٤}\right) + \left(\tfrac{١}{٤}\right) = \tfrac{٢}{٤} = \tfrac{١}{٢}$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ص} = ٢\text{س} - \text{س}^٢$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = ١$، $\text{س} = ٤$

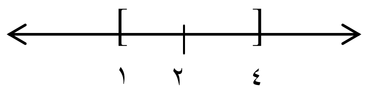
الحل

$2\text{س} - \text{س}^2 = 0$

$\text{س}(2 - \text{س}) = 0$

$\text{س} = 0$

$\text{س} = 2$



$$\text{م} = \int_{1}^{2} |2\text{س} - \text{س}^2|\, د\text{س} + \int_{2}^{4} |2\text{س} - \text{س}^2|\, د\text{س}$$

$$= \int_{1}^{2} 2\text{س} - \text{س}^2\, د\text{س} + \int_{2}^{4} 2\text{س} - \text{س}^2\, د\text{س}$$

$$= \left[\text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{1}^{2} \quad \left[\text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{2}^{4}$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{22}{3}$$

ثانيا : عندما يطلب المساحة بين ق(س)، هـ(س) (بين المنحنيين)

نجد نقاط التقاطع بوضع ق = هـ

ولمعرفة أي الاقترانيين أكبر نأخذ عددا بين نقاط التقاطع ونعوضه والذي يكون ناتجه أكبر نضعه أولا

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س² + ٣س ، هـ(س) = ٢س + ٢

الحل

لإيجاد نقاط التقاطع نضع ق = هـ

$\text{س}^2 + 3\text{س} = 2\text{س} + 1$

$\text{س}^2 + \text{س} - 2 = 0$

$(\text{س} + 2)(\text{س} - 1) \leftarrow \text{س} = 1،\ \text{س} = -2$

نأخذ عدد بين −٢ ، ١ ، صفر مثلا

$\text{ق}(0) = 0$

$\leftarrow \text{هـ} > \text{ق}$

$\text{هـ}(0) = 2$

$$\text{م} = \int_{-2}^{1} (\text{هـ} - \text{ق})\, د\text{س}$$

$$= \int_{-2}^{1} (2\text{س} + 2) - (\text{س}^2 + 3\text{س})\, د\text{س}$$

$$= \int_{-2}^{1} 2 - \text{س} - \text{س}^2\, د\text{س} = \left[2\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

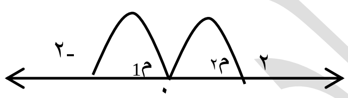
$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 4{,}5$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) = س³ ، هـ(س) = ٤س

الحل



$\text{ق} = \text{هـ}$

$\text{س}^3 = 4\text{س}$

$\text{س}^3 - 4\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س}^2 - 4) = 0$

$\text{س}(\text{س} - 2)(\text{س} + 2) = 0$

$\text{س} = 0،\ \text{س} = 2،\ \text{س} = -2$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} - 2\text{س}^2\right]_{-2}^{0} + \left[2\text{س}^2 - \frac{\text{س}^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$= (0) - (4 - 8) + (8 - 4) - (0)$$

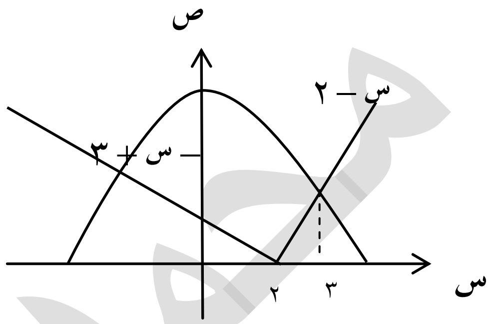
$$= 4 + 4 = 8$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ق(س) = ١٠ - س^{٢}$ ،

$هـ(س) = |س - ٢|$ والواقعة في الربع الاول

الحل



$س - ٢ = ٠$

$س = ٢$

$ق = هـ$

$١٠ - س^{٢} = |س - ٢|$

$١٠ - س^{٢} = س - ٢$

$٠ = س^{٢} + س - ٢ - ١٠$

$س^{٢} + س - ١٢ = ٠$

$(س + ٤)(س - ٣) = ٠$

$س = -٤ ، س = ٣$

$ق = هـ$

$١٠ - س^{٢} = |س - ٢|$

$١٠ - س^{٢} = ٢ - س$

$٠ = س^{٢} - س + ٢ - ١٠$

$س^{٢} - س - ٨ = ٠$

$م = م_{١} + م_{٢}$

$$م = \int_{٠}^{٢} \left((١٠ - س^{٢}) - (٢ - س)\right) ءس$$

$$+ \int_{٢}^{٣} \left((١٠ - س^{٢}) - (س - ٢)\right) ءس$$

$$= \left[٨س - \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} \left[١٢س - \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= (١٦ - \frac{٨}{٣} + ٢) - (٠) + (٣٦ - ٩ - \frac{٩}{٢}) - (٢٤ - \frac{٨}{٣} - ٢)$$

$= ١٨,٥$

ثالثا: إذا طلب المساحة بين أكثر من منحنيين

وفي هذه الحالة يجب اتباع ما يلي :

١) رسم المنحنيات .

٢) تحديد المنطقة المطلوبة .

٣) إيجاد نقاط التقاطع الازمة .

٤) إيجاد مساحة كل منطقة ثم جمع المساحات

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ق(س) = س^{٢} + ١$

$هـ(س) = ٧ - س$ ومحوري السينات والصادات

الحل

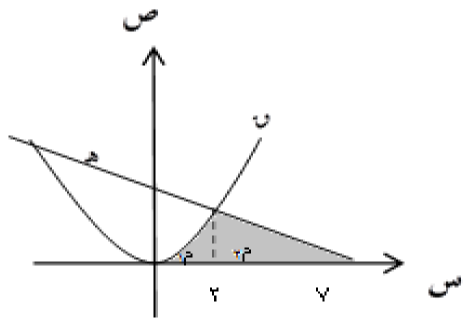
$ق = هـ$

$س^{٢} + ١ = ٧ - س$

$س^{٢} + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -٣ ، س = ٢$



$هـ = ٠$

$٧ - س = ٠$

$س = ٧$

$م = م_{١} + م_{٢}$

$$= \int_{٠}^{٢} ق.ءس + \int_{٢}^{٧} هـ.ءس$$

$$= \int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ١).ءس + \int_{٢}^{٧} (٧ - س).ءس$$

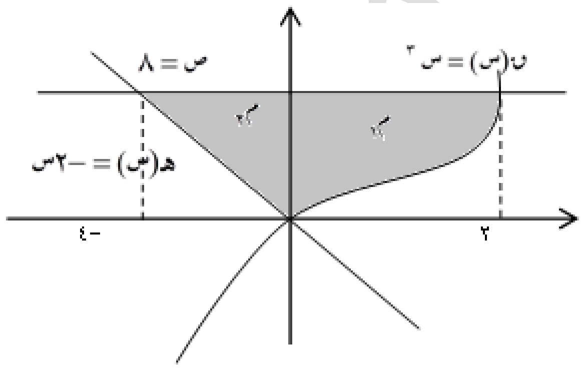
$$= \left[\frac{س^3}{٣} + س\right]_{٠}^{٢} + \left[٧س - \frac{س^2}{٢}\right]_{٢}^{٧}$$

$$= (\frac{٨}{٣} + ٢) - (٠) + (٤٩ - \frac{٤٩}{٢}) - (١٤ - ٢) = \frac{٩٣}{٦}$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ى(س) = س^3$ ،

$هـ(س) = -٢س$ والمستقيم $ص = ٨$



$هـ(س) = ص$

$-٢س = ٨$

$س = -٤$

$ى = س$

$س^3 = ٨$

$س = ٢$

$م = م_1 + م_2$

$$= \int_{-٤}^{٠} (ص - هـ)\,دس + \int_{٠}^{٢} (ص - ى)\,دس$$

$$= \int_{-٤}^{٠} ٨ - (-٢س)\,دس + \int_{٠}^{٢} ٨ - س^3\,دس$$

$$= \left[٨س + س^2\right]_{-٤}^{٠} + \left[٨س - \frac{س^4}{٤}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= (٠) - (-٣٢ + ١٦) + (١٦ - ٤) - (٠)$$

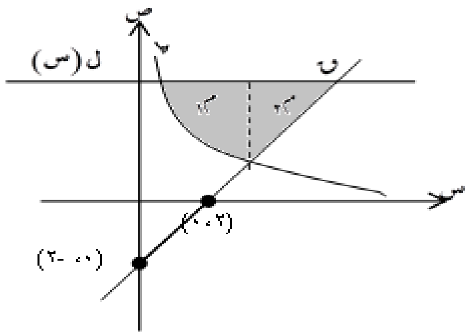
$$= ١٦ + ١٢ = ٢٨$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ى(س) = س - ٢$،

$هـ(س) = \frac{٣}{س}$ ، $ل(س) = ٣$

الحل



$هـ = ل$

$\frac{٣}{س} = ٣$

$٣ = ٣س$

$س = ١$

$ى = هـ$

$س - ٢ = \frac{٣}{س}$

$س^2 - ٢س = ٣$

$س^2 - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣$، $س = -١$

$ى = ل$

$س - ٢ = ٣$

$س = ٥$

$$م = \int_{١}^{٣} (ل - هـ)\,دس + \int_{٣}^{٥} (ل - ى)\,دس$$

$$= \int_{١}^{٣} (٣ - \frac{٣}{س})\,دس + \int_{٣}^{٥} (٣ - (س - ٢))\,دس$$

$$= \left[٣س - ٣لـو|س|\right]_{١}^{٣} + \left[٥س - \frac{س^2}{٢}\right]_{٣}^{٥}$$

$$=(٩ - ٣لو_{هـ}٣) - (٣ - ٣لو_{هـ}١) + (٢٥ - \frac{٢٥}{٢}) - (٩ - \frac{٩}{٢})$$

$$= ١٤ - ٣لو_{هـ}٣$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2$ ،

$\text{هـ}(\text{س}) = 3\text{س}$ والمستقيمين $\text{س} = 1$، $\text{س} = 5$

الحل

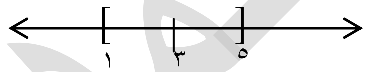
$\text{ق} = \text{هـ}$

$\text{س}^2 = 3\text{س}$

$\text{س}^2 - 3\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 3) = 0$

$\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 3$



$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$$\text{م} = \int_{1}^{3} (3\text{س} - \text{س}^2)\,\text{ءس} + \int_{3}^{5} (\text{س}^2 - 3\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{3\text{س}^2}{2} - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{1}^{3} + \left[\frac{\text{س}^3}{3} - \frac{3\text{س}^2}{2}\right]_{3}^{5}$$

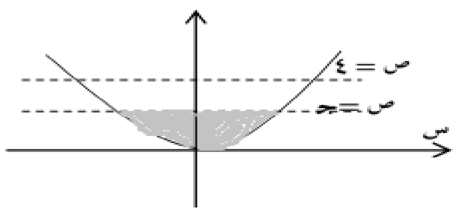
$$= \left(\frac{27}{2} - 9\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2}\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right)$$

$= 12$

مثال

إذا كان المستقيم $\text{ص} = \text{جـ}$ يقسم المساحة المحصورة بين $\text{ص} = \text{س}^2$ ، $\text{ص} = 4$ إلى قسمين متساويين فجد جـ.

الحل



نجد المساحة الاصلية

$\text{س}^2 = 4 \leftarrow \text{س} = \pm 2$

$$\text{م} = \int_{-2}^{2} (4 - \text{س}^2)\,\text{ءس} = \left[(4\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3})\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3}$$

$\text{س}^2 = \text{جـ}$

$\text{س} = \pm\sqrt{\text{جـ}}$

$$\text{م} = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{جـ} - \text{س}^2)\,\text{ءس} =$$

$$\left[\text{جـس} - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} = \frac{2}{3}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} + \frac{2}{3}\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}$$

المساحة $= \frac{1}{2} \times \frac{32}{\cancel{3}}$

$\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}} = 4$

$\text{جـ}^2 \times \text{جـ} = 16$

$\text{جـ}^3 = 16$

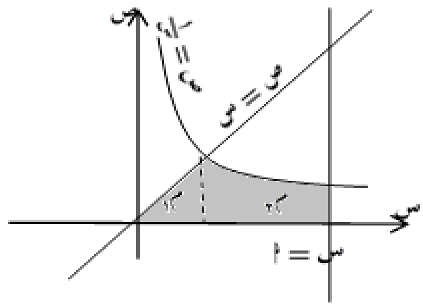
$\text{جـ} = \sqrt[3]{16}$

مثال

إذا كانت المساحة المحصورة بين محور السينات والمستقيم

$\text{ص} = \text{س}$، $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$ والمستقيم $\text{س} = \text{أ}$ حيث

$\text{أ} > 1$ تساوي ١,٥ فجد قيمة أ



الحل

$$م = \int_{0}^{1} س\, ءس + \int_{1}^{أ} \frac{1}{س}\, ءس = ١,٥$$

$$\left[\frac{س^{2}}{2}\right]_{0}^{1} + \left[لـو|س|\right]_{1}^{أ} = ١,٥$$

$$= \frac{1}{2} - ٠ + لـو_{هـ}أ - لـو_{هـ}١ = ١,٥$$

$$لـو_{هـ}أ = ١,٥ - \frac{1}{2} = ١$$

$$أ = هـ$$

ملاحظة

إذا وجد مثل الحد $ص^{2}$ يفضل التكامل بدلالة ص

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $س = ص^{2}$، $س = ٤$

الحل

$س = ص$

$ص^{2} = ٤$

$ص = \pm ٢$

$$م = \int_{-2}^{2} (٤ - ص^{2})\, ءص = \left[٤ص - \frac{ص^{3}}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= (٨ - \tfrac{8}{3}) - (-٨ + \tfrac{8}{3})$$

$$= ٨ - \tfrac{8}{3} + ٨ - \tfrac{8}{3} = ١٦ - \tfrac{16}{3}$$

$$\frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ص^{2} = ٤س$، $ص = س - ٣$

الحل

$ص = س - ٣$

$ص^{2} = ٤س \leftarrow س = \frac{ص^{2}}{4}$

$\frac{ص^{2}}{4} = ص + ٣ \leftarrow ص^{2} = ٤ص + ١٢$

$ص^{2} - ٤ص - ١٢ = ٠$

$(ص-٦)(ص+٢)=٠$

$$م = \int_{-3}^{6} (ص + ٣) - (\frac{ص^{2}}{4})\, ءص$$

$$= \left[\frac{ص^{2}}{2} + ٣ص - \frac{ص^{3}}{12}\right]_{-3}^{6}$$

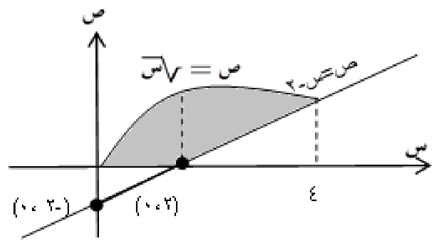
$$= (١٨ + ١٨ - ١٨) - (٢ - ٦ + \tfrac{8}{12})$$

$$= ٢١\tfrac{1}{3}$$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ص = \sqrt{س}$ ،

$ص = س - ٢$ ومحور السينات



الحل

$\sqrt{س} = ٠$ $س = ٠$

$س - ٢ = ٠$ $س = ٢$

$\sqrt{س} = س - ٢ \longleftarrow س = ٤$

$م = م_١ + م_٢$

$$= \int_{٠}^{٢} س^{\frac{١}{٢}} \, دس + \int_{٢}^{٤} \sqrt{س} - (س - ٢) \, دس$$

$$= \left[\frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} + ٢س \right]_{٢}^{٤}$$

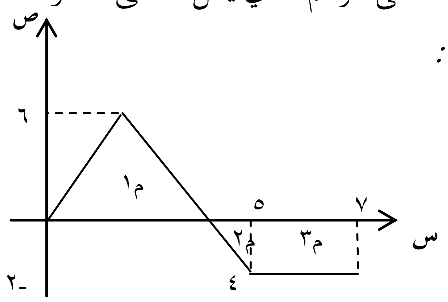
$$= \left[\frac{٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} - ٠ \right] + \left[\frac{٢}{٣}(٤)٦ - ٨ + ٨ \right]$$

$$- \left[\frac{٢}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} - ٢ + ٤ \right]$$

$$= \frac{١٦}{٣} - ٢ = \frac{١٠}{٣}$$

مثال

معتمدا على الرسم الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ فجد :



١) $\int_{٠}^{٧} ق(س) \, دس$

٢) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)| \, دس$

٣) $\left| \int_{٠}^{٧} ق(س) \, دس \right|$

٤) المساحة المحصورة بين $ق(س)$ ومحور السينات في $[٠،٧]$

الحل

$م_١ = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٦ = ١٢$

فيكون $\int_{٠}^{٤} ق(س) \, دس = ١٢$

$م_٢ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$

فيكون $\int_{٤}^{٥} ق(س) \, دس = -١$

$م_٣ = ٢ \times ٢ = ٤$ فيكون $\int_{٥}^{٧} ق(س) \, دس = -٤$

١) $\int_{٠}^{٧} ق(س) \, دس = ١٢ + (-١) + (-٤) = ٧$

٢) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)| \, دس = ١٢ + ١ + ٤ = ١٧$

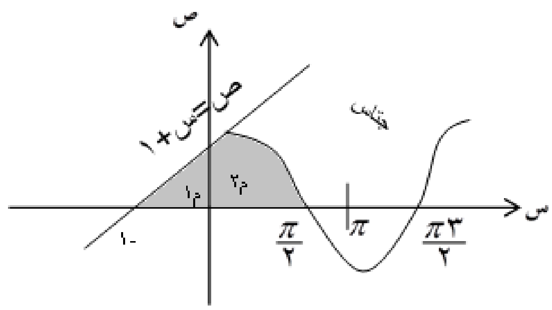
٣) $\left| \int_{٠}^{٧} ق(س) \, دس \right| = |١٢ + (-١) + (-٤)| = ٧$

٤) $م = م_١ + م_٢ + م_٣ = ١٧$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $ق(س)$=جتاس ،

ص=س+١ والواقعة في محور السينات



الحل

جتاس = س + ١
س = ٠

س + ١ = ٠
س = −١

جتاس = ٠
س = $\frac{\pi}{٢}$

م = م١ + م٢

$= \int_{-١}^{٠} (\text{س} + ١)\, \text{ءس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس}\, \text{ءس}$

$= \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{س}\right]_{-١}^{٠} + \left[\text{جاس}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (٠) - (\frac{١}{٢} - ١) + (١ - ٠) = ١\frac{١}{٢}$

مثال

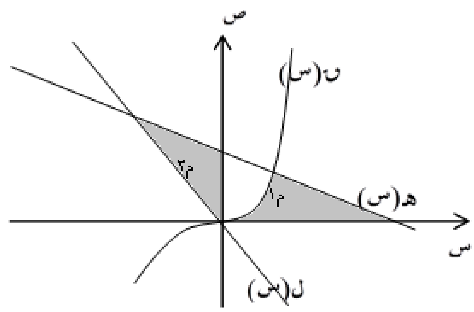
معتمدا على الرسم جد المساحة المظللة

حيث :

ق(س) = س ^٣^

ه(س) = ٣ − س

ل(س) = −٢س



الحل

ه = ل
٣ − س = −٢س
س = −٣

ق = ل
٢س^٣^ = −٢س
س = ٠

ق = ه
٢س^٣^ = ٣ − س
س = ١

$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ - \text{س}) - (-٢\text{س}) + \int_{٠}^{١} ٢\text{س}^٣\, \text{ءس} + \int_{١}^{٣} (٣ - \text{س})\, \text{ءس}$

$= \left[٣\text{س} + \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{-٣}^{٠} + \left[\frac{٢\text{س}^٤}{٤}\right]_{٠}^{١} + \left[٣\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{١}^{٣}$

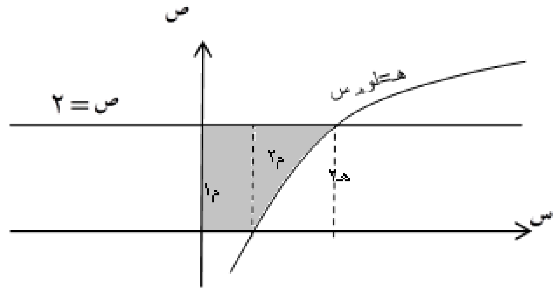
$= (٠ + ٠) - (-٩ + \frac{٩}{٢}) + (\frac{٢}{٤} - ٠)$

$+ (٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٧$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين ق(س) =لـوس ومحور الصادات ومحور السينات ص = ٢

الحل



لـو س = ٠   لـو س = ٢

س = ١   س = هـ^{٢}

م = م١ + م٢

$= \int_{٠}^{١} ٢\,ds + \int_{١}^{هـ^{٢}} (٢ - \text{لـو}_{هـ} س)\,ds$

$= ٢س\Big]_{هـ^{٢}}^{١} + ٢س\Big]_{١}^{هـ^{٢}} - \Big(\text{لـو}\,س \times س - \int_{١}^{هـ^{٢}} س \times \frac{١}{س}\,ds\Big]$

$= ٢ + ٢هـ^{٢} - ٢ - \Big(س\,\text{لـو}\,س - س\Big]_{١}^{هـ^{٢}}$

$= ٢هـ^{٢} - \big((هـ^{٢}\,\text{لو}_{هـ}\,هـ^{٢} - هـ^{٢}) - (١\,\text{لو}_{هـ}\,١ - ١)\big)$

$= ٢هـ^{٢} - (٢هـ^{٢} - هـ^{٢} - ٠ + ١)$

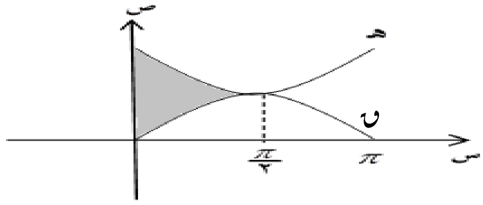
$= هـ^{٢} - ١$

مثال

أوجد المساحة المحصورة بين ن(س) = جاس ،

هـ(س) = ٢ − جاس ومحور الصادات والواقعة في الربع الاول

الحل



ن = هـ

جاس = ٢ − جاس

٢جاس = ٢

جاس = ١

س = $\frac{\pi}{٢}$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (٢ - \text{جاس}) - (\text{جاس})\,ds$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (٢ - ٢\text{جاس})\,ds$

$= ٢س + ٢\text{جتاس}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (٢ \times \frac{\pi}{٢} + ٢ \times \text{جتا}\frac{\pi}{٢}) - (٠ + ٢)$

$= \pi - ٢$

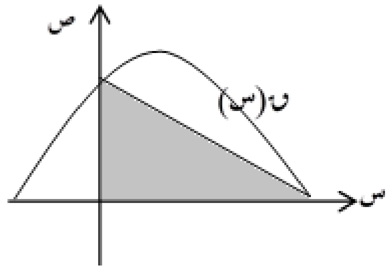
مثال

معتمدا على الرسم :

ن(س) = (١ + س)(جـ − س)

وكانت مساحة المثلث = ٨ ، فجد المساحة المحصورة

بين ن(س) ومحور السينات



الحل

يقطع محور السينات عندما $(1+\text{س})(\text{جـ}-\text{س})=0$

$\longleftarrow$ $\text{س}=-1$ ، جـ

يقطع المنحنى محور الصادات عندما س = ٠

$\text{ق}(0)=(1+0)(\text{جـ}-0)=\text{جـ}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\times\text{جـ}\times\text{جـ}=8$

$\frac{1}{2}\text{جـ}^2=8 \longrightarrow \text{جـ}^2=16$

$\text{جـ}=\pm 4$ نأخذ $\text{جـ}=4$

$\text{ق}(\text{س})=(1+\text{س})(4-\text{س})$

∴ $=4-\text{س}+4\text{س}-\text{س}^2$

$=4+3\text{س}-\text{س}^2$

$$\text{م}=\int_{-1}^{4} 4+3\text{س}-\text{س}^2\, d\text{س}$$

$$=4\text{س}+\frac{3\text{س}^2}{2}-\frac{\text{س}^3}{3}$$

$$=(16+24-\frac{64}{4})-(-4+\frac{3}{2}+\frac{1}{3})=\frac{125}{3}$$

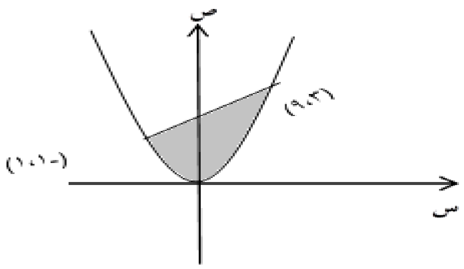
مثال

أوجد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^2$ والمستقيم الواصل بين النقطتين على منحنى ق(س)، والتي احداثياتها السيني $\text{س}=-1,\ \text{س}=3$

الحل

النقاط هي (−١،١) ، (٩،٣)

نجد معادلة المستقيم الميل = $\frac{9-1}{3-(-1)}$



$=2$

المعادلة :

$\text{ص}-1=2(\text{س}+1)$

$\text{ص}=2\text{س}+3$

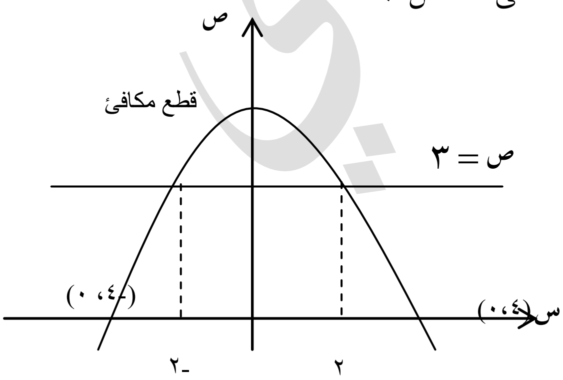
$$\text{م}=\int_{-1}^{3}(2\text{س}+3)-(\text{س}^2)\, d\text{س}$$

$$=\left[\text{س}^2+3\text{س}-\frac{\text{س}^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

$$=(9+9+9)-(1-3+\frac{1}{3})=10\frac{2}{3}$$

مثال

معتمدا على الشكل جد المساحة المظللة



الحل :

نجد معادلة القطع المكافئ

الرأس (٠،٤)

المعادلة : $(\text{س} - \text{د})^{٢} = -٤\text{جـ}(\text{ص} - \text{هـ})$

$\text{س}^{٢} = -٤\text{جـ}(\text{ص} - ٤)$

$(٤،٠) \longleftarrow ١٦ = -٤\text{جـ}\ (٠ - ٤)$

جـ = ١

المعادلة : $\text{س}^{٢} = -٤(\text{ص} - ٤)$

لايجاد نقاط التقاط مع المستقيم ص = ٣ نعوض ص في المعادلة

$\text{س}^{٢} = -٤(٣ - ٤) \leftarrow \text{س}^{٢} = ٤$

$\text{س} = \pm ٢$

نحول المعادلة :

$\text{س}^{٢} = -٤(\text{ص} - ٤)$ بدلالة ص

$\text{س}^{٢} = -٤\text{ص} + ١٦$

$٤\text{ص} = ١٦ - \text{س}^{٢}$

$\text{ص} = ٤ - \frac{\text{س}^{٢}}{٤}$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} \left(\left(٤ - \frac{\text{س}^{٢}}{٤}\right) - ٣\right) \text{دس}$$

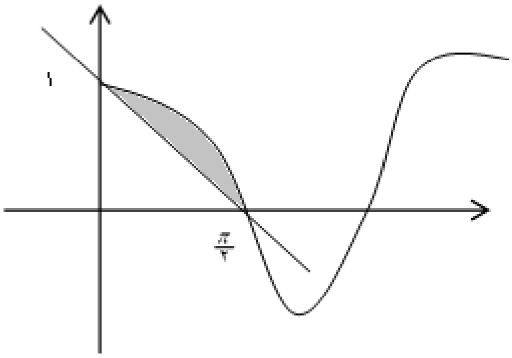
$$= \int_{-٢}^{٢} \left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{٤}\right) \text{دس}$$

$$= \left[\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{١٢}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \left(٢ - \frac{٨}{١٢}\right) - \left(-٢ + \frac{٨}{١٢}\right) = \frac{٨}{٣}$$

مثال

جد المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) =جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠،١) ($\frac{\pi}{٢}$،٠)

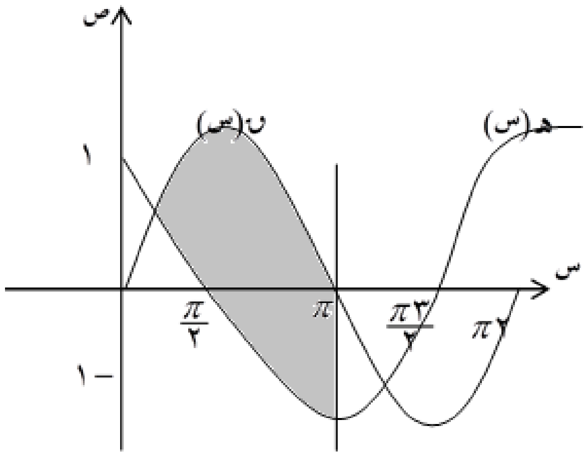


الجواب (١ − $\frac{\pi}{٤}$) وحدة مساحة

مثال

جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران

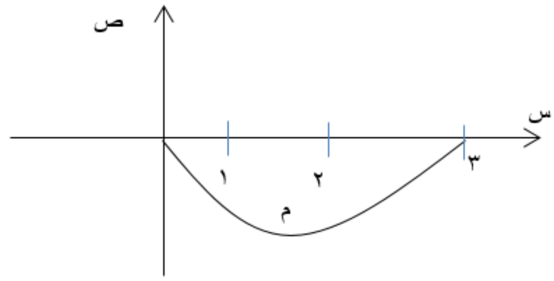
ق(س) =جاس ، هـ(س) =جتاس في الفترة [٠ , π]



مثال

معتمدا على الشكل ، الاقتران ق(س) في [٠،٣] اذا كانت مساحة المنطقة م تساوي ٦ وحدات مربعة فجد

$\int_{0}^{3}(2-\text{ن}(\text{س}))\,\text{دس}$

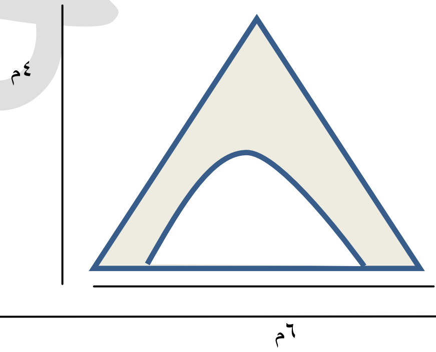


مثال

يمثل الشكل مثل الواجهة الامامية لأحد المباني .. مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران

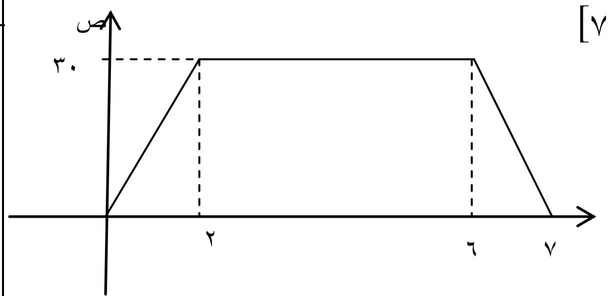
$\text{ن}(\text{س}) = 2 - \frac{1}{2}\text{س}^2$

ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار



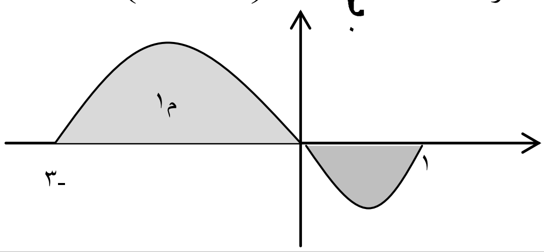
مثال

يمثل الشكل العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم ف جد المسافة المقطوعة في الفترة [٠، ٧]



مثال

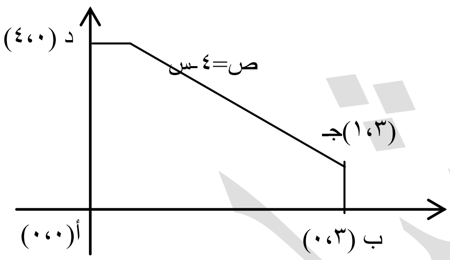
اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران في [-٣، ١] حيث م١ = ١٠ وحدات مربعة ، م٢ = ٤ وحدات مربعة ، فجد $\int_{0}^{2}\text{س}\,\text{ن}(1-\text{س}^2)\,\text{دس}$



مثال

إذا كان (أب جـ د) شبه منحرف بحيث أ (٠،٠) ب (٣،٠) جـ (٣،١) ، د (٠،٤)

باستخدام التكامل جد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د



الحل : نجد معادلة جـ د

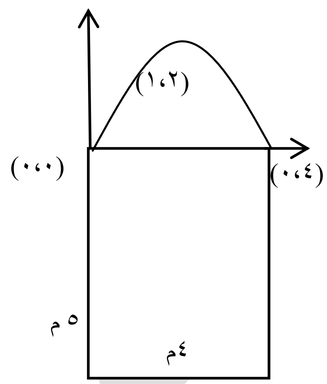
الميل = − ١

∴ معادلة ص = −س + ٤

$\text{م} = \int_{0}^{3}(-\text{س}+4)\,\text{دس}$

مثال

الشكل المجاور يمثل المدخل الجنوبي لكلية العلوم – جامعة مؤتة – وهو على شكل مستطيل يعلوه قوس على كل قطع مكافيء ، جد مساحة واجهة هذا المدخل



الحل :

صادي للاسفل $(س - د)^٢ = -٤جـ(ص - هـ)$

راسه $(٢,١)$

$\longleftarrow (س - ٢)^٢ = -٤جـ(ص - ١)$

$(٠،٠) \in$ المنحنى $\longleftarrow$ جـ=١

∴ المعادلة $(س - ٢)^٢ = -٤جـ(ص - ١)$

$س^٢ - ٤س + ٤ = -٤ص + ٤$

$ص = \frac{-س^٢ + ٤س}{٤}$

∴مساحة واجهة المدخل = مساحة القطع + مساحة المستطيل

$= \int_{٠}^{٤} -\frac{١}{٤}(س^٢ + ٤س) + (٥ \times ٤)$

Recall

معادلة الدائرة التي مركزها (د،هـ) وطول نصف قطرها نق

هي $(س-د)^٢ + (ص-هـ)^٢ = نق^٢$

مثال

دون اجراء التكامل وباستخدام فكرة المساحة ، جد قيمة التكامل $\int_{-٤}^{٤} \sqrt{١٦ - س^٢}\, دس$

الحل :

$ص = \sqrt{١٦ - س^٢}$ $\qquad ص^٢ = ١٦ - س^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ١٦$ هي معادلة دائرة مركزها $(٠,٠)$

ونق = ٤

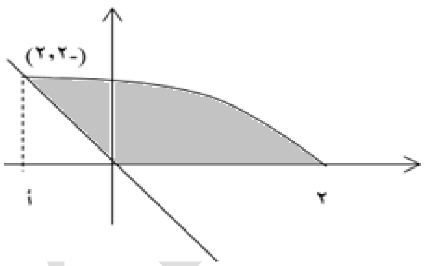
$م = \int_{-٤}^{٤} \sqrt{١٦ - س^٢} = \frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة

$= \frac{١}{٢}\pi نق^٢ = ٨\pi$

مثال

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل التالي

$ص = \sqrt{٢ - س}$



الحل :

نجد معادلة المستقيم

الميل = ١ ∴المعادلة $ص = -س$

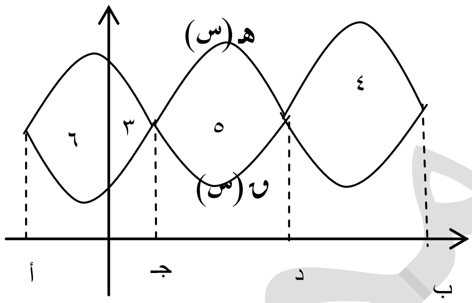
$م = \int_{-٢}^{٠} (\sqrt{٢ - س} + س)\, دس + \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - س}\, دس$

اكمل الحل ....

مثال

اذا كان ق،هـ اقترانيين قابلين للتكامل في الفترة [أ،ب]

وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين كما في الشكل ، جد ما يلي :



١) $\int_{\text{أ}}^{\text{د}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س}$

٢) $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{د}\text{س}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{د}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س}$

٤) $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{د}\text{س}$

٥) $\int_{\text{جـ}}^{\text{أ}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س}$

٦) $\int_{\text{ب}}^{\text{د}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{د}\text{س}$

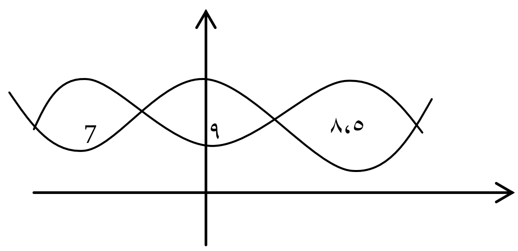
الحل :

١) ٦ ٢) −٤ ٣) ٤

٤) ١ ٥) −٩ ٦) ٤

مثال

من الشكل أوجد $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س}$ علما أن الارقام تمثل المساحة الموجودة بين ق & هـ.



الحل :

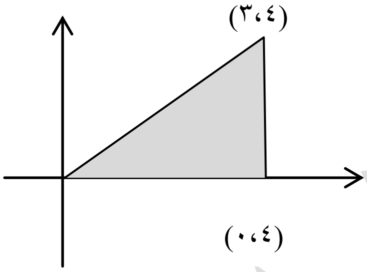
$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س}$

$= \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س} + \int_{\text{د}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{د}\text{س}$

= ٩ + − ٨,٥ = ,٥

مثال

اذا كانت أ (٠،٠) ، ب(٤،٠) ، جـ(٤،٣) جد مساحة المثلث باستخدام التكامل



الحل :

معادلة المستقيم

الميل = $\frac{٣-٠}{٤-٠} = \frac{٣}{٤}$

∴المعادلة :

$\text{ص} - ٠ = \frac{٣}{٤}(\text{س} - ٠)$

$\text{ص} = \frac{٣}{٤}\text{س}$

$\text{م} = \int_{٠}^{٤} \frac{٣}{٤}\text{س}\,\text{د}\text{س} = \left[\frac{٣}{٤}\,\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٠}^{٤} = ٦$

مثال

استخدم فكرة التكامل في حساب مساحة المثلث الذي رؤوسه (٤،١) ، (٤،٦) ، (٤،٣)

مثال

جد $\int$ جتا^{2}س جا^{4}س ءس

الحل

$\int$ جتا^{2}س جا^{4}س ءس $= \int$ جتا^{2}س جا^{2}س جا^{2}س ءس

$= \int$ (جتاس×جاس)^{2} جا^{2}س ءس =

$\int (\frac{1}{2}$جا٢س$)^{2} \times \frac{1}{2}$(١−جتا٢س)ءس لماذا ؟

$= \frac{1}{8}\int$ (جا^{2}٢س−جا^{2}٢س جتا٢س)ءس =

$\int \frac{1}{8}$جا^{2}٢س ءس − $\int \frac{1}{8}$جا^{2}٢س جتا٢س ءس

اولا جد $\int \frac{1}{8}$جا^{2}٢س ءس

$= \int \frac{1}{16}$(١−جتا٤س)ءس $= \frac{1}{16}$(س − $\frac{1}{4}$جا٤س)+جـ

متطابقة جا^{2}س $= \frac{1}{2}$(١−جتا٢س)

∴ $\int \frac{1}{8}$جا^{2}٢س ءس $= \frac{1}{16}$(س − $\frac{1}{4}$جا٤س)+جـ ....(١)

ثم جد $\int \frac{1}{8}$جا^{2}٢س جتا٢س ءس

افرض ص = جا٢س ، ومنه ءص = (٢جتا٢س)ءس

$\int \frac{1}{8}$جا^{2}٢س جتا٢س ءس $= \int \frac{1}{16}$جا^{2}٢س × (٢جتا٢س ءس)

لماذا ؟

$= \int \frac{1}{16}$ص^{2}ءص = $\frac{\text{ص}^{3}}{48}$+جـ = $\frac{\text{جا}^{3}\text{٢س}}{48}$+جـ

مثال

ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الاصل على محور السينات وفقا للعلاقة ت = −٤ع$^{\frac{3}{2}}$ ، حيث ع > ٠، ت: تسارع الجسيم ، ع: سرعة الجسيم فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث أثبت أن ف = ٢ن$\sqrt{\text{ع}}$

مثال

يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = أ $\sqrt[3]{\text{ع}}$ ، ع > ٠ ، حيث ت: تسارع الجسيم ، ع: سرعة الجسيم. إذا تحرك الجسيم من السكون ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨سم/ث بعد (٣) ثوان من بدء حركته.

مثال

يسير جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{\text{ع}}$ ، حيث ع > ٠، ت: تسارع الجسيم ، ع: سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته ٩م/ث ، وقطع مسافة (٨٠) مترا في (٤) ثوان . فجد المسافة التي قطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء حركته.

مثال

إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة ، بحيث إن ق′(س) = ٣س^{2} − ٢ ، وكانت النقطة (١،٠) تقع على منحناه . فجد قاعدة الاقتران ق .

مثال

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ − س^{2} ، ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ والمستقيم ص = س − ١

مثال

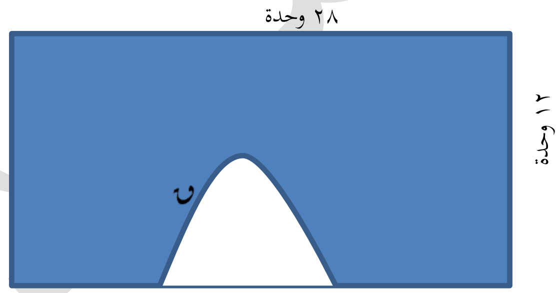
إذا كان م ≤ ق(س) ≤ ن ، وكان ١٦ ≤ $\int_{-1}^{3}$ (ق(س) + ٥)ءس ≤ ٢٠ فإن قيم الثابتين على الترتيب :

أ) ٧، ١١   ب) −٤، ٠

ج) ٤، ٥   د) −١، ٠

مثال

الشكل (٤-١٠) يمثل الواجهة الامامية لأحد المباني وشكل المدخل لهذا المبنى يمثله منحنى $\text{ن}(\text{س}) = ٨ - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة الملونة باللون الازرق ، إذا علمت أن سعر الدهان للوحدة المربعة (٤٠) قرشا ؟



الشكل (٤-١٠)

مثال

جد كل من التكاملات الآتية :

١) $\int \text{س}^{٣}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس}$

٢) $\int \text{س}^{٢}\, \text{جتا}٤\text{س}\, \text{ءس}$

٣) $\int (\text{س}^{٢} - \text{س})\, \text{جا}٢\text{س}\, \text{ءس}$

٤) $\int \text{س}^{٢}\, (٢\text{س} + ١)^{٥}\, \text{ءس}$

$$\int \sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{-٣}{٤}} + ١}\ \text{ءس}$$

$$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{٢}}\ \text{ءس}$$