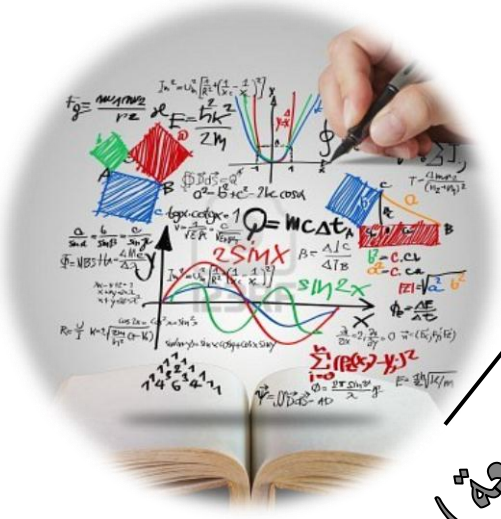
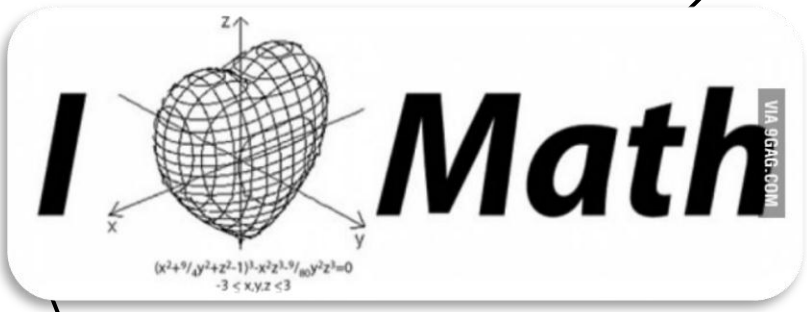


التكاملات

المستوى الرابع (الوحدة الرابعة)

للفرعين (علمي ، وصناعي)

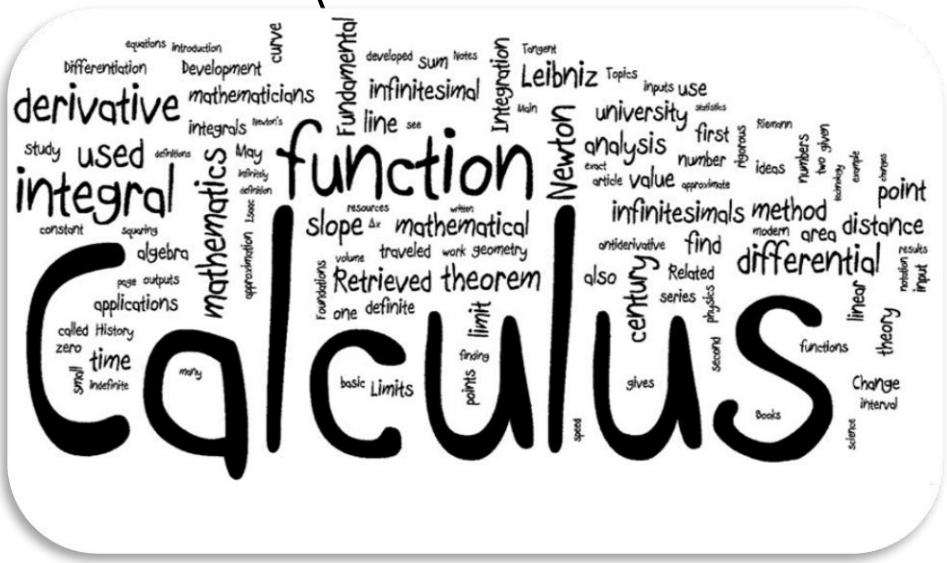


الرونق في الرياضيات

إعداد : أ . سائد الوردات

0772044048 — 0787556274

2017 / 2018



أكاديمية الرونق

Al-Rawnaq Academy

للمراسلة عبر الفيس بوك : https://www.facebook.com/Sa2ed.wardat

تطلب من مكتبة واكسسوارات قرطبة تلفون (٠٧٧٩٢١٨٢٣٨) الرمثا - عسراوة

تطلب من أكاديمية الرونق تلفون (٠٧٩٦١٧٦٢٦٣ - ٠٧٧٢٣٠٨٤٤٦) الطفيلة _ العيص

مقدمة

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على معلم البشرية محمد بن عبدالله وعلى اله وصحبه اجمعين وبعد :

فإنه من دواعي سروري أن أضع بين يدي الطلبة هذا الجهد راجين من الله تبارك وتعالى ان يكون خالصاً لوجهه والوالدي وأن يحقق النفع والفائدة لأبنائنا الطلبة .

وقد حرصت في هذه الدوسيه على أمور عدة تحقق النفع للطالب :-

أولا : مراعاة التأسيس وذكر المتطلب السابق لأي موضوع وارد في الدوسية.

ثانيا : تتضمن الدوسيه شرحاً مفصلاً وملحوظات وأمثلة متنوعة وشاملة مدرجة من السهل الى الوسط وصولاً الى أمثلة إبداعية محفزة للتفكير .

ثالثا : تحتوي الدوسية على جميع أمثلة الكتاب وتمارينه وأسئلة سنوات سابقة

رابعاً : قمت بوضع تدريبات ووضعت الاجابة النهائية حتى يقوم الطالب باختبار نفسه.

وانا إذ اضع هذا الجهد بين يدي الطالب ، فإنني لا اركز على ذكر الإيجابيات ، بل اخترت أن اترك لأبنائنا الطلبة الحكم عليها وتقويمها واذاني مصغية وقلبي مفتوح لسماع أي رأي أو نقد لهذا العمل .

وأعتذر عن أي خطأ أو سهو غير مقصود فنحن بشر إن أصبت فمن الله وإن أخطأت فمن نفسي و الشيطان

((مع أمنياتي لكم جميعا بالنجاح والتوفيق))

أ . سائد ياسين الوردات

تعلّمنا بيتَ الشعر القائل :

ما كل ما يتمنى المرء يدركه
تجري الرياح بما لا تشتهي السفن

ولم نتعلّم بيوت الشعر القائلة :

تجري الرياح كما تجري سفينتنا
نحن الرياح و نحن البحر و السفنُ

إن الذي يرتجي شيئاً بهمّته
يلقاهَ لو حاربتَه الانس والجن

فاقصد الى قمم الاشياء تدركها
تجري الرياح كما رادت لها السفن

الأول يدعو للرضا بالواقع
والأخريات تدعو لصناعة الواقع

عدد الحصص التي يحتاجها كل درس

	عنوان الدرس	عدد الحصص
i.	اساسيات	الحصة الاولى
ii.	اساسيات	الحصة الثانية
iii.	بدائيات التكامل	الحصة الأولى
iv.	بدائيات التكامل	الحصة الثانية
v.	التكامل المحدود	الحصة الاولى
vi.	التكامل المحدود	الحصة الثانية
i.	بدايات التكامل	الحصة الاولى
ii.	مقدمة لطرق التكامل (الضرب)	الحصة الاولى
iii.	مقدمة لطرق التكامل (الضرب)	الحصة الثانية
iv.	مقدمة لطرق التكامل (الأجزاء)	الحصة الاولى
v.	مقدمة لطرق التكامل (الأجزاء)	الحصة الثانية
vi.	الاقتران الاسي	الحصة الاولى
vii.	الاقتران الاسي	الحصة الثانية
viii.	الاقتران اللوغارتيم	الحصة الاولى
ix.	الاقتران اللوغارتيم	الحصة الثانية
x.	التكامل في حالة القسمة (الحالة الأولى)	الحصة الاولى
xi.	التكامل في حالة القسمة (الحالة الثانية)	الحصة الثانية
xii.	معادلات تفاضلية	الحصة الاولى
xiii.	المساحات (مقدمة)	الحصة الاولى
xiv.	المساحات (الحالة الأولى + الثانية)	الحصة الثانية
xv.	المساحات (الحالة الثالث + الاشكال)	الحصة الثالثة

اذا شعرت بأن التوجيهي يعيق تقدّمك ، فتذكر ملايين الطلبة الذين شقوا طريقهم قبلك

وان شعرت بالملل ، فتذكر تعديك مرحلة دراسية دامت ١١ عاماً

وإن كنت كثيراً ما تنسى ، فتأكد بانه أمر طبيعي لكثرة ما تحاول حفظه

وان شعرت بأنك وحدك ، تذكر بأنّ العلم عباده و اللّه لا يترك عباده

الاسس " القوة " $س^{ن}$

لكل عدد طبيعي (ن) وعدد حقيقي (س) فان :-

$$س^{ن} = \overbrace{س \times س \times س \times س \times س \times .....}^{ن}$$

حيث ن = عدد مرات

العدد الحقيقي (س) يسمى الأساس ، والعدد الطبيعي (ن) يسمى الأس .

أهم قواعد الاسس :-

❶ $(س ص)^{د} = س^{د} \times ص^{د}$

مثال :-

✓ $(٢ \times ٣)^{٢} = ٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٤ \times ٩ = ٣٦$

❷ $(س^{د})^{ن} = س^{د \times ن}$

مثال :-

✓ $(٣^{٤})^{٢} = ٣^{٤ \times ٢} = ٣^{٨}$

أحذر.....!!!

من الأخطاء المشهورة ضرب الأساس بالأس

$٢^{٣} \neq ٢ (٣) = ٦$

$-٢^{٢} \neq (-٢)^{٢} = ٤$

❸ $س^{د} \times س^{و} = س^{د+و}$

مثال :-

✓ $٢^{٤} \times ٢^{٣} = ٢^{٤+٣} = ٢^{٧}$

❹ $\frac{س^{ن}}{س^{م}} = س^{ن-م}$

مثال :-

✓ $\frac{٢^{٤}}{٢^{٣}} = ٢^{٤-٣} = ٢$

❺ $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$

مثال :-

✓ $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}}$

تذكر :-

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$

❻ $س^{٠} = ١$

مثال :-

✓ $٥^{٠} = ١$

✓ $-٩^{٠} = ١$

أحذر.....!!!!!

الأس لا يتوزع على عملية الجمع أو الطرح

$(أ \pm ب)^{ن} \neq أ^{ن} \pm ب^{ن}$

التحليل الى العوامل

الفرق بين مربعين $س^{٢} - أ^{٢}$

$س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ)(س + أ)$

أي بمعنى $س^{٢} - أ^{٢} =$ (الجذر – الجذر) (الجذر + الجذر)

أمثلة :-

✓ $س^{٢} - ١٦ = (س - ٤)(س + ٤)$

✓ $١٦ - س^{٢} = (٤ - س)(٤ + س)$

✓ $٤٩ م^{٢} - ل^{٢} = (٧م - ل)(٧م + ل)$

✓ $(س + ١)^{٢} - ١ = ((س + ١) - ١)((س + ١) + ١)$

✓ $س - ٤ = (\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)$

لتذكير :-

$س = \sqrt{س} \times \sqrt{س}$

تدريب :-

❖ $٢٥ - س^{٢} =$

❖ $١ - س^{٢} =$

❖ $ن^{٢} - ٦٤ س^{٢} =$

مجموع مربعين $س^{٢} + أ^{٢}$ لا تحلل

مثال :-

✓ $س^{٢} + ٤ =$ لا يوجد لها تحليل " لان مميزها سالب "

الفرق بين مكعبين $س^{٣} - أ^{٣}$

$س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$

أي بمعنى (قوس له نفس الإشارة) (قوس كبير الأولى العكس و الثانية دائما موجبة)

العبارة التربيعية التي تنتج من تحليل **دائما** تكون أولية أي لا تحلل (مميزها سالب)

أمثلة :-

✓ $س^{٣} - ٨ = (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)$

✓ $٦٤ - ٢١٦ ص^{٣} = (٤ - ٦ص)(١٦ + ٢٤ص + ٣٦ص^{٢})$

✓ $- س^{٣} - ٢٧ =$

✓ $س - ١ = (\sqrt{س} - ١)((\sqrt{س})^{٢} + \sqrt{س} + ١)$

✓ $(\sqrt{س})^{٢} = س$

تدريب :-

❖ $٦٤ س^{٣} - ١٢٥ =$

❖ $٢٧ - س^{٣} =$

مجموع مكعبين س^{٣} + أ^{٣}

س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ) (س^{٢} – أس + أ^{٢})

(الحد الاول + الحد الثاني) (مربع الحد الاول – الحد الاول×الحد الثاني + الحد الثاني)

أي بمعنى (قوس صغير له نفس الإشارة) (قوس كبير الاولى العكس والثانية دائما موجبة)

أمثلة :-

٢٧س^{٣} + ٨ص^{٣} =(٣س + ٢ص)(٩س^{٢} – ٦س ص + ٤ ص^{٢})

٦٤+ ص^{٣} = (٤ + ص)(١٦ – ٤ص + ص^{٢})

تدريب :-

ص^{٣} + ل^{٣} =

١٢٥ + ن^{٣} =

اخراج عامل مشترك

العامل المشترك قد يكون **رقم او متغير (س ، ص) او كلاهما**

أمثلة :-

- ٣س^{٢} + ٩ = ٣ (س^{٢} + ٣)
- س^{٢} – ٤س = س(س – ٤)
- ٣س^{٣} – ٣س=٣س (س- ١)
- س^{٣} + س^{٢} – ٢س = س(س^{٢} + س – ٢) = س(س + ٢)(س – ١)
- ٨س^{٥} + ٢٧س^{٢} = س^{٢} (٨س^{٣} + ٢٧) = س^{٢} (٢س + ٣)(٤س^{٢} – ٦س + ٩)
- $\frac{١}{٣}$س^{٢} – ٣ = ٣(س^{٢} – ٩) = ٣((س – ٣)(س + ٣))
- $\frac{١}{٦}$س – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$(س – ٣)
- (س – ٢)^{٣} – ٤(س – ٢) = (س – ٢)((س – ٢)^{٢} – ٤) = (س – ٢)((س – ٢) – ٢)(س – ٢) + ٢))
- $\frac{س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س – ٢٧}{}$ =

تدريب :-

- ١٢٥ع + ٣ع^{٤} + ٢ع^{٤} =
- ٢٧س^{٣} + ٩س^{٢} =

تحليل ثلاثي الحدود

الشكل العام ← أس^{٢} ± ب س ± جـ = صفر

هناك ثلاثة حالات

الحالة الاولى :- أس^{٢} + ب س + جـ = صفر

مثال :-

✓ س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر

طريقة الحل :-

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي الموجب (س +) (س +)

ثم نأخذ الثابت س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ٦

١ × ٦ =٦ أو ٢ × ٣ = ٦

واذا جمعتهم يعطوني الحد الاوسط ٥ ٢ + ٣ = ٥

(س + ٣)(س + ٢) = ٠

الحالة الثانية :- أس^{٢} – ب س + جـ = صفر

مثال :-

✓ س^{٢}- ٧ س + ١٠= صفر

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي السالب (س -) (س -)

ثم نأخذ الثابت س^{٢}- ٧ س + ١٠= صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ١٠

١ × ١٠ =١٠ أو ٢ × ٥ = ١٠

واذا جمعتهم يعطوني الحد الاوسط ٧ ٢ + ٥ = ٧

(س - ٥)(س – ٢) = صفر

الحالة الثالثة :- أس^{٢} ± ب س - جـ = صفر

مثال :-

✓ س^{٢}- ٣س - ١٠= صفر

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي موجب وسالب (س +) (س -)

ثم نأخذ الثابت س^{٢}- ٣ س - ١٠= صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ١٠

١ × ١٠ =١٠ أو ٢ × ٥ = ١٠

واذا طرحتهم يعطوني الحد الاوسط ٣ ٥ – ٢ = ٣

وحسب اشارة الحد الاوسط توضع للرقم الاكبر وهنا بما ان اشارة الاحد الاوسط سالبة توضع لرقم ٥

(س + ٢)(س – ٥) = صفر

تدريب :-

- س^{٢} + ٩س +١٤ = (س + ٢) (س + ٧)
- س^{٢} -٢س +١ = (س – ١) (س – ١)
- س^{٢} + ٣س – ١٠ = (س + ٥)(س – ٣)

لتسهيل الحل : اذا كان معامل $س^{٢}$ سالبا فانه يؤخذ عاملا مشتركا من بداية الحل

أمثلة : حلل المعادلات التالية :

١) $٦ + ٧س - س^{٢} = ٠$

٢) $٤ + ٥س - س^{٢} = ٠$

اذا كانت $س^{٢}$ معاملها ليس (١) كيف يتم الحل ؟

أمثلة :

١) $٦ + ٧س - ٣س^{٢} = ٠$

٢) $٤ + ٥س - ٢س^{٢} = ٠$

مقادير تحلل بنفس طريقة التربيعي (شبيه التربيعي)

أ) **المقدار ثلاثي الحدود** اذا ربعت حده الأوسط بدون المعامل ونتج الحد الأول هذا يحلل بنفس طريقة تحليل التربيعي .

أمثلة : حلل المقادير الاتية

١) $س^{٤} - ١٣ س^{٢} + ٣٦ = (س^{٢} - ٩)(س^{٢} - ٤)$

$= (س - ٣)(س + ٣)(س - ٢)(س + ٢)$

٢) $س - ٥\sqrt{س} + ٦ = (\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} - ٣)$

٣) $٣س + ١٠\sqrt{س} - ٨ = (٣\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٤)$

٤) $١٨ + ٥\sqrt{س} - ٢س = -(٢س - ٥\sqrt{س} - ١٨)$

$= (٢\sqrt{س} - ٩)(\sqrt{س} + ٢)$

ب) الاقتران الاسي

١) $٩^{س} = (٣^{٢})^{س} = ٣^{٢س} = ٣^{س} \times ٣^{س}$

٢) في **حالة الضرب** اذا كان الأساس موحدا فان الأساس يثبت والاسس تجمع .

٣) في **حالة القسمة** اذا كان الأساس موحدا فان الأساس يثبت والاسس تطرح .

٤) $(\sqrt{س})^{ن} = \sqrt{س^{ن}}$

لتسهيل الحل :

*) المقادير التي تحتوي $(٢٥)^{س}$ أو $\sqrt{س^{٤}} = (\sqrt{س})^{٤}$ يمكن ان نستخدم الفرض $٢٥^{س} = (٥^{س})^{٢} \Leftarrow ص = ٥^{س}$

$\sqrt{س^{٢}} = (\sqrt{س})^{٢} \Leftarrow ص = \sqrt{س}$

**) اذا استطعت ان تحلل بدون فرض فلا مانع من ذلك .

أمثلة :

١) $٢٥^{س} - ٣٦ = (٥^{س})^{٢} - ٣٦$ ✓ $\boxed{ص = ٥^{س}}$

$= ص^{٢} - ٣٦$

$= (ص - ٦)(ص + ٦)$

$= (٥^{س} - ٦)(٥^{س} + ٦)$

٢) $٨ - ٢٧^{س} = ٨ - (٣^{س})^{٣}$ ✓ $\boxed{ص = ٣^{س}}$

$= ٨ - ص^{٣}$

$= (٢ - ص)(٤ + ٢ص + ص^{٢})$

$= (٢ - ٣^{س})(٤ + ٢ \times ٣^{س} + ٣^{٢س})$

٣) $(١٢٥)^{س} - ٢٥^{س} = (٥^{س})^{٣} - (٥^{س})^{٢}$ ✓ $\boxed{ص = ٥^{س}}$

$= ص^{٣} - ص^{٢}$

$= ص^{٢}(ص - ١)$

$= ٥^{٢س}(٥^{س} - ١)$

٤) $\sqrt{س^{٢}} - ٤\sqrt{س} - ٢١ = (\sqrt{س})^{٢} - ٤(\sqrt{س}) - ٢١$ ✓ $\boxed{ص = \sqrt{س}}$

$= ص^{٢} - ٤ص - ٢١$

$= (ص - ٧)(ص + ٣)$

$= (\sqrt{س} - ٧)(\sqrt{س} + ٣)$

٦) $٤^{س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦ =$

تدريب

مفكوك القوس

الحالة الاولى :- القوس التربيعي (المربع الكامل)

- $(س \pm أ)^{٢} = س^{٢} \pm ٢ أس + أ^{٢}$

أمثلة :-

- $(س + ٥)^{٢} = س^{٢} + ١٠س + ٢٥$
- $(س - ٥)^{٢} = س^{٢} - ١٠س + ٢٥$
- $(٤ + ٥ص)^{٢} =$
- $(-٣ + ٤أ)^{٢} =$
- $٥ (٢س - ١)^{٢} =$

الحالة الثانية :- القوس التكعيبي

- $(أ \pm ب)^{٣} = س^{٣} \pm ٣أ^{٢}س + ٣أس^{٢} \pm ب^{٣}$

- $(٣س + ١)^{٣} = (٣س)^{٣} + ٣ (٣س)^{٢} (١) + ٣(٣س)(١)^{٢} + (١)$
  $= ٢٧س^{٣} + ٢٧ س^{٢} + ٩س + ١$
- $(٢ - ٣س)^{٣} = (٢)^{٣} - ٣(٢)^{٢}(٣س) + ٣(٢)(٣س)^{٢} - (٣س)^{٣}$
  $= ٨ - ٣٦س + ٥٤س^{٢} - ٢٧س^{٣}$
- $(٤ + ٢س)^{٣} =$
- $(٢س - ٤)^{٣} =$

الحالة الثالثة :-

- $س(س \pm أ) = س^{٢} \pm أس$

أمثلة :-

- $٢(س + ٣) = ٢س + ٦$
- $٧(س - ٤) = ٧س - ٢٨$
- $س(س + ٥) = س^{٢} + ٥س$
- $س(س - ٨) = س^{٢} - ٨س$
- $٧ (س - ٧) =$
- $س (٩ - س) =$

الحالة الرابعة :-

- $(س + أ) (س + ب) = س(س+ ب) + أ (س + ب)$
  $= س^{٢} + ب س + أس + أب$
- $(س - أ) (س + ب) = س(س + ب) - أ (س + ب)$
  $= س^{٢} + ب س - أس - أب$

أمثلة :-

- $(س + ٢)(س + ٤) = س(س + ٤) + ٢ (س + ٤)$
  $= س^{٢} + ٤س + ٢س + ٨ = س^{٢} + ٦س + ٨$
- $(س - ٥)(س + ٣) = س(س + ٣) - ٥ (س + ٣)$
  $= س^{٢} + ٣ س - ٥س - ١٥ = س^{٢} - ٢س - ١٥$

الحالة الرابعة :-

- $(أ-ب) (أ+ب) = (أ)^{٢} - (ب)^{٢}$
- $(أ-ب) (أ-ب) = (أ-ب)^{٢}$

أمثلة :-

- $(س - ٣) (س + ٣) = (س)^{٢} - (٣)^{٢} = س^{٢} - ٩$
- $(س - ٣) (س - ٣) = (س - ٣)^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩$
- $(٣ - ٥س) (٣ + ٥س) = ٣^{٢} - (٥س)^{٢} = ٩ - ٢٥س^{٢}$
- $(٣ - ٥س) (٣ - ٥س) = (٣ - ٥س)^{٢} = ٩ - ٣٠س + ٢٥س^{٢}$
- $(جاس - جتاس) (جاس + جتاس) = جا^{٢}س - جتا^{٢}س$
- $(جاس - جتاس) (جاس - جتاس) = (جاس - جتاس)^{٢} = جا^{٢}س + ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س$

اضف الى معلوماتك :

- $(أ-ب)^{ن}\ (أ+ب)^{ن} = (أ^{٢}-ب^{٢})^{ن}$
- $(أ\pm ب)^{ن}\ (أ\pm ب)^{ن} = (أ\pm ب)^{ن+ن}$

أمثلة :

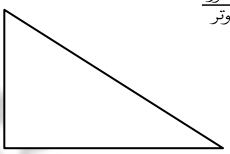
- ✓ $(س-٣)^{٤}\ (س+٣)^{٤} = ((س)^{٢}-(٣)^{٢})^{٤} = (س^{٢}-٩)^{٤}$
- ✓ $(١-جتاس)^{٢}\ (١+جتاس)^{٢} = ((١)^{٢}-(جتاس)^{٢})^{٢} = (١-جتا^{٢}س)^{٢}$
- ✓ $\sqrt{١٤+١}\ \sqrt{١٤-١} = (١+١٤)^{\frac{١}{٢}}\ (١-١٤)^{\frac{١}{٢}}$
  $= ((١)^{٢}-(١٤)^{٢})^{\frac{١}{٢}} = (١-١١٦)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١-١١٦}^{٢}$
- ✓ $\sqrt[٣]{س+٢}\ \sqrt[٣]{س-٢} = (س+٢)^{\frac{١}{٣}}\ (س-٢)^{\frac{١}{٣}}$
  $= ((س)^{٢}-(٢)^{٢})^{\frac{١}{٣}} = (س^{٢}-٤)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{س^{٢}-٤}$

- ✓ $(س+١)\ (س+١) = (س+١)^{١+١} = (س+١)^{٢}$
- ✓ $(٢-س)^{-٢}\ (٢-س)^{٤} = (٢-س)^{-٢+٤} = (٢-س)^{٢}$
- ✓ $(\frac{١}{٤}+٩س)^{٨}\ (\frac{١}{٤}+٩س)^{-٦} = (\frac{١}{٤}+٩س)^{٨-٦} = (\frac{١}{٤}+٩س)^{٢}$
- ✓ $(س-١٩)^{٥}\ (س-١٩)^{٤} = (س-١٩)^{٥+٤} = (س-١٩)^{٩}$

Al-Rwnq Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Wardat
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤ - ٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨

الاقترانات الدائرية

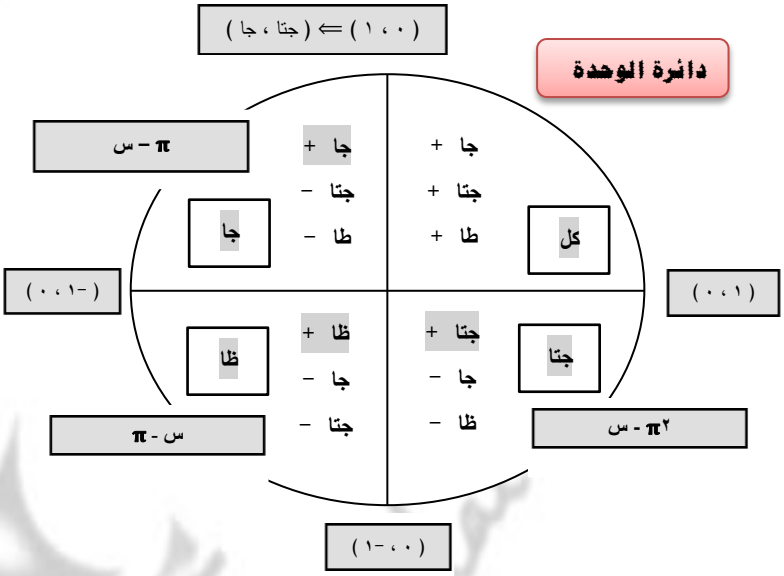
❶ جاس = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ❷ جتاس = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$



❸ ظاس = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ⇐ ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

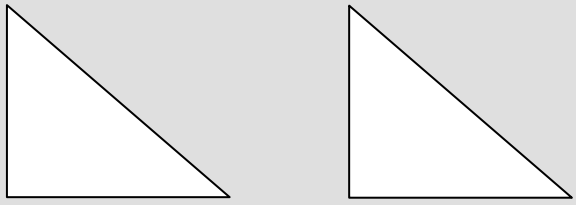
قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{١}{\text{جاس}}$ ، ظتا س = $\frac{١}{\text{ظا س}}$

دائرة الوحدة



	٠ = $\frac{\pi}{٦}$ ٣٠	$\frac{\pi}{٣}$ = ٦٠	$\frac{\pi}{٤}$ = ٤٥
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

هناك طريقة اخرى لحفظ الجدول :-



جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا ٦٠ = جا ٣٠ =

جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا ٦٠ = جتا ٣٠ =

ظا ٤٥ = ١ ظا ٦٠ = ظا ٣٠ =

أهم المتطابقات للحفظ :-

- جا٢س + جتا٢س = ١ منه
  - جا٢س = ١ – جتا٢س
  - جتا٢س = ١ – جا٢س

بقسمة المعادلة على جتا٢س

- ظا٢س + ١ = قا٢س

وبقسمة المعادلة على جا٢س

- ١ + ظتا٢س = قتا٢س

- جا٢س = ٢جاس جتاس (**المتطابقة الأب**)

مثال :-

✓ جا٨س = ٢ جا٤س جتا٤س

✓ جاس = ٢جا $\frac{١}{٢}$ س جتا $\frac{١}{٢}$ س

العملية العكسية :-

- جا ٣س جتا ٣س = $\frac{١}{٢}$ جا ٦س

- جتا ٢س = جتا٢س – جا٢س (**المتطابقة الام**)
- جتا٢س = ١ – ٢جا٢س
- جتا ٢س = ٢جتا٢س – ١

- جتا س – جتا ص = – ٢ جا $\frac{س+ص}{٢}$ جا $\frac{س-ص}{٢}$
- جا س – جا ص = ٢ جتا $\frac{س+ص}{٢}$ جا $\frac{س-ص}{٢}$

- جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب
- جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

١) جا٢س = ١ – جتا٢س

جا٢س = $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢س)

---

٢) جتا٢س = ١ – جا٢س

جتا٢س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

---

٣) ظا٢س = قا٢س – ١

ظتا٢س = قتا٢س – ١

---

٤) ١ – جتاس = ٢جا٢ $\frac{١}{٢}$ س

١ + جتاس = ٢جتا٢ $\frac{١}{٢}$ س

---

٥) جاس جتاس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

الاقترانات المتشعبة

الصريح — مطلق — اكبر عدد صحيح

❶ الصريح :-

✓ **مثال :**

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} \ ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ ٤ - س \ ، \ ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$$

لنتذكر معا ما يلي :-

$س^{٢}$	تسمى القاعدة الاولى
٤ – س	تسمى القاعدة الثانية
٠ ≤ س < ٢	تسمى فترة القاعدة الاولى
٢ ≤ س < ٤	تسمى فترة القاعدة الثانية

انتبه الى ان مجال الاقتران في الفترة [٠ ، ٤)

جد

ق(٠) = $٠^{٢}$ = صفر طرف فترة (في القاعد الاولى)

ق(٢) = ٤ – ٢ = ٢ تحويله (في القاعدة الثانية)

ق(١) = $١^{٢}$ = ١ (في القاعدة الاولى)

ق(٣) = ٤ – ٣ = ١ (في القاعدة الثانية)

ق(٤) غير معرفة لعدم وجود مساواة

نتنبه جيدا :-

ق(١) لماذا تم تعويض في القاعد الاولى وليس بالقاعدة الثانية ؟
لان هناك فترة ٠ ≤ س < ٢ اجبرت الرقم على التعويض في القاعدة الاولى

ق(٢) لماذا تم تعويضها في القاعدة الثانية وليس في الاولى ؟؟!
فقط لوجود اشارة المساواة في القاعدة الثانية

❷ اقتران القيمة المطلقة

تذكر ان رمز القيمة المطلقة هو | | وأن |٢| = ٢ و |– ٢| = ٢

وكذلك القيمة المطلقة للمتغير |س| أو |– س| = س

وعليه اذا كان ق(س) = |س| فإنه يمكن اعادة كتابة ق(س) بدون رمز القيمة المطلقة :-

ق(س)= س القاعدة الاولى

ق(س)= - س القاعدة الثانية

كيف نحدد القاعدة التي نعوض فيها ؟!!

انت تعلم ان هدفنا في القيمة المطلقة ان نحصل على عدد موجب وعليه :-

- اذا كانت قيمة س موجبة نعوض في القاعدة الاولى فنحصل على عدد موجب
- اذا كانت قيمة س سالبة نعوض في القاعدة الثانية فنحصل على عدد سالب

يمكننا ان نلخص ما شرحنا اعلاه :-

ق(س) = |س| بعد ازالة القيمة المطلقة فان الاقتران يصبح

$$ق(س) = \begin{cases} س \ ، \ س \geq ٠ \\ - س \ ، \ س < ٠ \end{cases}$$

- اذا طلب منك ان تجد ق(٢) مثلا فانك تعوض في القاعدة الاولى لان ٢ > ٠ وهذا مجال القاعدة الاولى يشمل الاعداد من الصفر فأكبر وعليه ق(٢) = ٢
- واذا طلب ان تجد ق(-٢) مثلا فانك تعوض في القعدة الثانية لان -٢ < ٠ هذا مجال القاعدة الثانية فهذا المجال يشمل الاعداد الأقل من صفر وعليه ق(-٢)= -٢
- واذا طلب منك ان تجد ق(٠) نعوضه في القاعدة الاولى لوجود اشارة المساواة .

خطوات اعادة تعريف ق(س) = |أس ± ب| حيث أ ≠ ٠

① نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر(اي بمعنى نجد جذور الاقتران)

✓ **مثال ذلك** :- جد جذور الاقتران ق(س) = |٣س – ٩|

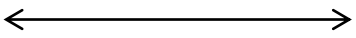
٣س – ٩ = ٠ ⟸ ٣س = ٩ ⟸ س = ٣

تستخدم هذه الطريقة للاقترانات الخطية فقط

② نرسم خط الاعداد

✓ **مثال ذلك** :- المثال السابق

بعد يجاد اصفار الاقتران نرسم خط الاعداد



③ نعين على الخط الاعداد . الاطراف والجذور والاشارات

كيفية ذلك :-

اولا : نرسم خط اعداد

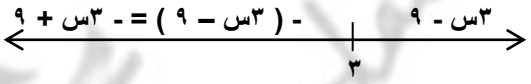
ثانيا : نكتب قاعدتي الاقتران

في المثال السابق فان قاعدتي الاقتران

القاعدة الاولى :- ما داخل القيمة المطلقة كما هي ٣س – ٩

القاعدة الثانية :- فقط نضرب ما ادخل القيمة المطلقة ب سالب فيصبح

– (٣س – ٩) = - ٣س + ٩



كيفية وضع الاشارة فوق خط الاعداد ؟!! بتعويض داخل المطلق

ثالثا :- نقوم باختيار رقم اكبر من الرقم ٣ وتعويض بالاقتران الاصلي ستظهر اشارة الاقتران موجبة توضع فوق القاعدة الاولى علامة (+)

مثال ذلك :- لنختار رقم (٤)

ق(٤) = ٣س – ٩ = ٣(٤) – ٩ = ٣ +

نقوم باختيار رقم اصغر من الرقم ٣ وتعويض بالاقتران الاصلي ستظهر اشارة الاقتران سالبة توضع فوق القاعدة الثانية علامة (-)

مثال ذلك نختار رقم (٢)

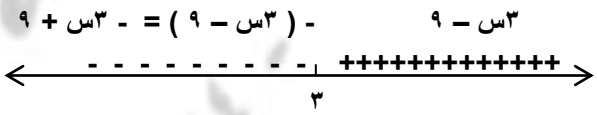
ق(٢) = ٣(٢) – ٩ = - ٣

تذكر دائما :-

اشارة السالب على خط الاعداد تعني ضرب القاعدة التي تحتها اشارة السالب .... بالسالب

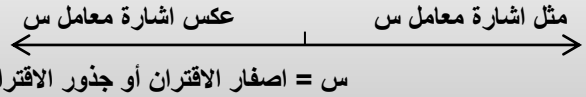
واشارة الموجب تبقى القاعدة كما هي

كما يلي :-



ق(س) = { - ٣س + ٩ ، س ≤ ٣ ; ٣س – ٩ ، س ≥ ٣ }

طريقة اخرى لفحص الاشارة على خط الاعداد



س = اصفار الاقتران أو جذور الاقتران

✓ **أمثلة** :- اعد تعريف الاقتران ق(س) = |س|

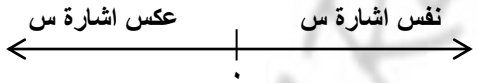
الحل :-

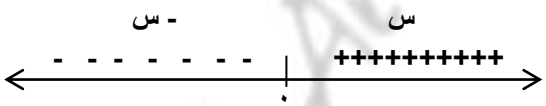
❶ نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر س = ٠

❷ نرسم خط الاعداد

❸ نعين على خط الاعداد الاطراف و الجذور والاشارات ونكتب قاعدتي الاقتران .

فحص الاشارة على خط الاعداد .





ق(س) = { س ، س ≥ ٠ ; - س ، س < ٠ }

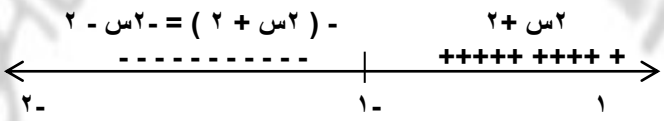
✓ اعد تعريف ق(س) = |٢س + ٢| س ∈ [-٢ ، ١]

الفكرة هنا وجود فترة والاعداد داخل الفترة تسمى اطراف

الحل :-

✵ الجذور ٢س + ٢ = ٠ ⟸ س = -١

✵ الخط



ق(س) = { - ٢س – ٢ ، -٢ ≤ س < -١ ; ٢س + ٢ ، -١ ≤ س ≤ ١ }

٢) اعد تعريف ق(س) = |٣ – ٦س| س ∈ [١ ، ٥]

هنا الفكرة إن اصفار الاقتران ليس داخل الفترة

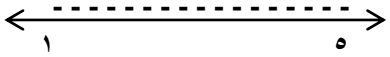
اي بمعني :- لن ينتج قاعدتين بسبب الفترة

الحل :-

✸ الجذور ٣ – ٦س = ٠ س = $\frac{١}{٢}$

✸ الخط

- (٣ – ٦س) = -٣ + ٦س



سيخطر في بالك سؤال ؟

لماذا لم يتم وضع اصفار الاقتران على خط الاعداد ؟

الجواب :- لو نظرت الى اصفار الاقتران س = $\frac{١}{٢}$ لوجدتها انها ليست داخل الفترة س ∈ [١ ، ٥] لذلك لم توضع على خط الاعداد .

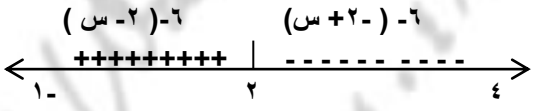
٣) اعد تعريف ق(س) = ٦- |٢ – س| س ∈ [-١ ، ٤]

الحل :-

✸ الجذور لا اهتم بالاقتران كامل فقط ما داخل القيمة المطلقة لإيجاد اصفار الاقتران (جذور الاقتران)

٢ – س = ٠ ⟸ س = ٢

✸ خط الاعداد



ق(س) = { ٦ – (٢- س) ، -١ ≤ س ≤ ٢ ; ٦ – (-٢+ س) ، ٢ < س ≤ ٤ }

خطوات اعادة تعريف ق(س)= |أس ٢ + ب س + جـ|

① نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر (نجد جذور الاقتران) .

مثال ذلك :- س ٢ – ٢س

س ٢ – ٢س = ٠ نستخدم طرق التحليل التي تم شرحهم سابقا

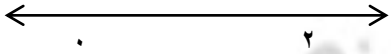
س(س – ٢) = ٠

س = ٠ و س =٢

تستخدم هذه الطريقة للاقترانات تربيعية فقط

② نرسم خط الاعداد وتعيين اصفار الجذور والاطراف:-

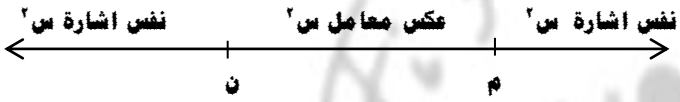
مثال ذلك :- المثال السابق



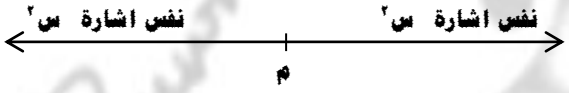
③ نعين على خط الاعداد الاشارات .

هناك عدة حالات :-

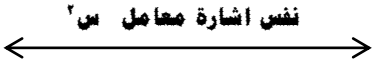
الحالة الاولى :- اذا كان المميز ب ٢ – ٤أجـ < صفر ، فان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفين .



الحالة الثانية :- اذا كان المميز ب ٢ – ٤أجـ = صفر ، فان للمعادلة جذران حقيقيان متساويين .



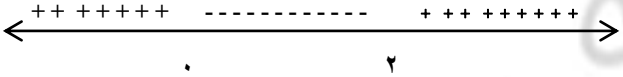
الحالة الثالثة :- اذا كان المميز ب ٢ – ٤ أجـ < صفر ، فلا يوجد للمعادلة جذور حقيقية .



نكمل حل المثال السابق :-

نحسب المميز من اجل تحديد الاشارات على خط الاعداد

ب ٢ – ٤أجـ = (-٢)٢- ٤(١)(٠) = ٤ > ٠ يطبق عليها الحالة الاولى



ق(س)=

✓ مثال على الحالة الاولى :-

اعد تعريف ق(س)= $|س^2 + 5س + 6|$

الحل :-

① **نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر**

س^2 + 5س + 6 = 0 نقوم بتحليلها من اجل يجاد الاصفار

س^2 + 5س + 6 = 0 (س + 2) (س + 3) = 0

س = -2 س = -3

② **نرسم خط الاعداد ونعين عليه اصفار الاقتران (جذور) والاطراف :-**

-3 -2

③ **تحديد اشارة خط الاعداد :-**

نحسب المميز

ب^2 – 4أجـ = 5^2 – 4(1)(6) = 25 – 24 = 1 > صفر

ومعامل س^2 = 1 موجب

+ + + + + - - - - - - - - + + + + +

-3 -2

✓ مثال على الحالة الثانية :-

اعد تعريف ق(س) = $|س^2 + 4س + 4|$

الحل :-

① **نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر**

س^2 + 4س + 4 =0 نقوم بتحليلها كما تعلمنا سابقا

س^2 + 4س +4 (س +2) (س + 2) = 0

س = -2 و س = -2

بما ان هناك جذران متساويين نختار جذر واحد

② **نرسم خط الاعداد ونعين عليه اصفار الاقتران (جذور) والاطراف**

-2

③ **تحديد اشارة خط الاعداد :-**

نحسب المميز

ب^2 – 4أجـ = 4^2 – 4 (1)(4) = صفر = صفر

ومعامل س^2 = 1 موجب

+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +

-2

✓ مثال على الحالة الثالثة :-

اعد تعريف ق(س) = $|س^2 + 4|$

المعادلة لا تحلل (بسبب ان مميزها سالب

Δ = ب^2 – 4اجـ ⇐ Δ = (0)^2 – 4(1)(4) ⇐ Δ = –16)

اذا كان المميز سالب فالمعادلة ليس لها اصفار ، لكن الاقتران له إشارة وتدرس اشارته بتجريب أي رقم

+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +

ق(س) = س^2 + 4

✓ مثال :-

اعد تعريف ق(س) = $|س^2 + 6س + 9|$

الحل :-

① **نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر**

س^2 + 6س + 9 = 0

(س + 3) (س + 3) = 0

س = -3 أو س = -3

نختار صفر اقتران واحد بسبب التشابه

② **نرسم خط الاعداد ونعين عليه اصفار الاقتران (جذور) والاطراف**

-3

③ **تحديد اشارة خط الاعداد :-**

نحسب المميز

ب^2 – 4أجـ = (6)^2 – 4(9)(1) = صفر

بما ان مميزها صفر نستخدم الحالة الثانية

معامل س^2 = 1 موجب

++++++++++++++++++++++++++++++++

-3

بعض خصائص القيمة المطلقة :-

① $|س^{ن}| = |س|^{ن}$

مثال :-

$|(س-٣)^{٢}| = |س-٣|$

$|س^{٢}+٢س+١| = |(س+١)(س+١)| = |(س+١)^{٢}| = |س+١|$

② $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$

مثال :-

$\left|\frac{س-٣}{ص+٧}\right| = \frac{|س-٣|}{|ص+٧|}$

تدريب :-

١) $ق(س) = |س-٤|$

٢) $ق(س) = |٣-س|$

٣) $ق(س) = |س^{٢}-١|$

٤) $ق(س) = |٤س-٢س^{٢}|$

٥) $ق(س) = |س^{٣}-٨|$

٦) $ق(س) = |س^{٢}-٦س+٩|$

٧) $ق(س) = |-٣+س-س^{٢}|$

فائدة : اذا كان المطلق اقترانات أخرى يعاد المطلق وحده ثم تضاف على كل قاعدة من قواعده هذه الاقترانات .

أمثلة :

١) $ق(س) = ٢س-|٦-س|$

الحل :

$|٦-س|$

$٦-س=٠ \Leftarrow س=٦$

$---- \quad ++++$

٦

$$|٦-س| = \begin{cases} ٦-س ، & س \geq ٦ \\ س-٦ ، & س < ٦ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س-(٦-س) ، & س \geq ٦ \\ ٢س-(س-٦) ، & س < ٦ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س-٦ ، & س \geq ٦ \\ س+٦ ، & س < ٦ \end{cases}$$

٢) $ق(س) = س^{٢}|س^{٧}|$

الحل :

٣) $ق(س) = \frac{|س^{٢}-٥س+٦|}{س-٢}+٤ ، س \neq ٢$

الحل :

انتبه : " لا نضع مساواة عند لعدد (٢) لان س≠ ٢ "

٤) $ق(س) = س|س - ١| - |٥ - س|$

الحل :

الفكرة " إعادة كل اقتران على حده "

فائدة : في حالة إعادة تعريف المطلق على الفترة يجب التقيد بنفس الفترة

أمثلة :

١) $ق(س) = س|س - ٤| - ٣س$ ، $٠ \leq س < ٣$

الحل :

$|س - ٤|$

$س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

$+++++ \quad ----- \quad +++++$

$٠ \quad ٣ \quad ٤$

$ق(س) = س(٤ - س) - ٣س$

$ق(س) = ٤س - س^{٢} - ٣س$

$ق(س) = س - س^{٢}$

٢) $ق(س) = |٤س - ٢٤| + س^{٢}$ ، $[٥ ، ٧]$

الحل :

$|٤س - ٢٤|$

$٤س - ٢٤ = ٠ \Leftarrow س = ٦$

$+++++ \quad ----$

$٥ \quad ٦ \quad ٧$

$$|٤س - ٢٤| = \begin{cases} ٢٤ - ٤س & ، \ ٥ \leq س \leq ٦ \\ ٤س - ٢٤ & ، \ ٦ < س \leq ٧ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٢٤ - ٤س + س^{٢} & ، \ ٥ \leq س \leq ٦ \\ ٤س - ٢٤ + س^{٢} & ، \ ٦ < س \leq ٧ \end{cases}$$

٣) $ق(س) = \frac{|٣س - س^{٢}|}{٣ - س} + ٤$ ، $س \in [٠ ، ٤) - \{٣\}$

الحل :

$|٣س - س^{٢}|$

$٣س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٣ - س) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٣$

$------ \quad ++++++ \quad ------$

$٠ \quad ٣ \quad ٤$

$$|٣س - س^{٢}| = \begin{cases} ٣س - س^{٢} & ، \ ٠ \leq س < ٣ \\ س^{٢} - ٣س & ، \ ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣س - س^{٢}}{٣ - س} + ٤ & ، \ ٠ \leq س < ٣ \\ \frac{س^{٢} - ٣س}{٣ - س} + ٤ & ، \ ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س(٣ - س)}{٣ - س} + ٤ & ، \ ٠ \leq س < ٣ \\ \frac{س(س - ٣)}{٣ - س} + ٤ & ، \ ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٤ & ، \ ٠ \leq س < ٣ \\ -س + ٤ & ، \ ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

٤) $\text{ه}(س) = \frac{|٥ - س|}{٥ - س} + س$ ، $س < ٥$

الحل :

$|٥ - س|$

$٥ - س = ٠ \Leftarrow س = ٥$

$س < ٥$	$+++++$	$-----$

٥

$\text{ه}(س) = \frac{س - ٥}{س - ٥} + س = ١ + س$

٥) $ق(س) = ٣|س - ٢| - |س + ١| + س$

انتبه

كل عدد يتم حساب اصفار الاقتران له وعند وصولك لخط الاعداد نقوم بحساب كل صفر اقتران الى اقترانه

خواص المطلق

١) $|\text{ه}(س)| = ا \Leftarrow \text{ه}(س) = ا$ او $\text{ه}(س) = -ا$

٢) $|\text{ه}(س)| \geq ا \Leftarrow \text{ه}(س) \geq ا$ او $\text{ه}(س) \leq -ا$

٣) $|\text{ه}(س)| \leq ا \Leftarrow -ا \leq \text{ه}(س) \leq ا$

أمثلة :

١) $|\text{ه}(١ + ٣)| = ٦ \Leftarrow \text{ه}(١ + ٣) = ٦$ او $\text{ه}(١ + ٣) = -٦$

$١ + ٣ = ٦$ $\quad$ $١ + ٣ = -٦$

$١ = ٣$ $\quad$ $١ = -٩$

٢) $|س| \geq ٤ \Leftarrow \text{ه}(س) \geq ٤$ او $\text{ه}(س) \leq -٤$

٣) $|٢س - ١| < ١٠ \Leftarrow -١٠ < ٢س - ١ < ١٠$

$س < \frac{١١}{٢}$ $\quad$ $س > \frac{-٩}{٢}$

فائدة : في **الاقترانات الدائرية** اذا كانت الزاوية س فيمكن إعادة تعريفها على خط الاعداد .

$\pi ٢$	$\frac{\pi ٣}{٢}$	π	$\frac{\pi}{٢}$	٠	$\frac{-\pi}{٢}$	$-\pi$	$\frac{-\pi ٣}{٢}$	$-\pi ٢$
٤ جتا	٣ ظا	٢ جا	١ □	٤ جتا	٣ ظا	٢ جا	١ □	

أمثلة :

١) $\text{ه}(س) = |جتاس|$ ، $\pi \geq س \geq ٠$

الحل :

$|جتاس|$

$جتاس = ٠ \Leftarrow س = ٠$ ، $س = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow س = \frac{\pi ٣}{٢}$

π	$\frac{\pi}{٢}$	٠
$+++++$	$-----$	

$$|جتاس| = \begin{cases} جتاس & ، \ ٠ \leq س < \frac{\pi}{٢} \\ -جتاس & ، \ \frac{\pi}{٢} < س < \pi \end{cases}$$

٢) $\text{ه}(س) = \frac{|جاس|}{س}$ ، $\left[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right] - \{٠\}$

الحل :

$|جاس|$

$جاس = ٠ \Leftarrow س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\frac{\pi}{٢}$	٠	$\frac{-\pi}{٢}$
$+++++$	$-----$	

$$|جاس| = \begin{cases} -جاس & ، \ \frac{-\pi}{٢} \leq س < ٠ \\ جاس & ، \ ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{-جاس}{س} & ، \ \frac{-\pi}{٢} \leq س < ٠ \\ \frac{جاس}{س} & ، \ ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

❸ اقتران أكبر عدد صحيح

رمز الاقتران [ ]

تعريف :-

هو اقتران يربط قيم س باكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي س

✓ **امثلة :-**

[٣ر٣] = ٣ [-٣ر٣] = -٤ [-٣] = -٣ [٣] = ٣

أهم الملاحظات :-

✸اذا اعطيت عددا صحيحا موجبا أو سالب تكون نتيجة نفس العدد .

✓ **مثال ذلك :-**

[-٣] = -٣ [٣] = ٣

✸اذا اعطيت عدد عشري موجب تكون نتيجة العدد الصحيح واهمال الكسر .

مثال ذلك :-

[٣ر٣] = ٣

✸اذا اعطيت عدد عشري سالب تكون نتيجة العدد الصحيح الذي هو اصغر من العدد العشري .

مثال ذلك :-

[-٣ر٣] = -٤

✓ **مثال :-** اعد تعريف ق(س)= [س] س ∈ [-٢،٢]

❶ اعادة التعريف حول فترة :-

اولا :- نحسب طول الاقتران أو درجة الاقتران $= \frac{1}{|\text{معامل س}|}$ = ١

ثانيا :- نقسم الفترة المعطاة الى فترات فرعية طولها ١ **ونلتزم بطول الفترة المعطاة بالسؤال** [-٢،٢]

من -٢ الى -١ ، من -١ الى ٠ ، من ٠ الى ١ ، من ١ الى ٢

ق(س) =
- -٢ ≤ س < -١ ،
- -١ ≤ س < ٠ ،
- ٠ ≤ س < ١ ،
- ١ ≤ س < ٢ ،

ثالثا :- اشارة المساواة

✸ اذا كان معامل س موجبا فان اشارة المساواة (≤) تكون على اليمين

مثال لتوضيح :-

-٢ ≤ س < -١

✸ اذا كان معامل س سالبا فان اشارة المساواة (≤) تكون على اليسار

مثال لتوضيح :-

٢ < س ≤ ٣

في المثال :-

معامل س موجب فان اشارة المساواة (≤) تكون على اليمين

ق(س) =
- -٢ ≤ س < -١ ،
- -١ ≤ س < ٠ ،
- ٠ ≤ س < ١ ،
- ١ ≤ س < ٢ ،

لإيجاد ص حسب معامل س
موجب زيادة
سالب انقاص

بعد ذلك نقوم بأخذ الارقام التي توجد عندها اشارة المساواة فقط

وتعويضها في الاقتران ق(س)= [س]

ق(-٢) = [-٢] = -٢

ق(-١) = [-١] = -١

ق(٠) = [٠] = ٠

ق(١) = [١] = ١

معامل س موجب
زيادة واحد يعني
-٢
-١
٠
١

ق(س) =
- -٢ ، -٢ ≤ س < -١
- -١ ، -١ ≤ س < ٠
- ٠ ، ٠ ≤ س < ١
- ١ ، ١ ≤ س < ٢

✓ ق(س)= $[٢\ س]$ ، س ∈ $[-١، ١)$

الحل :-

① طول الفترة $= \frac{1}{|\text{معامل . س}|} = \frac{١}{|٢|} = \frac{١}{٢}$

② نقسم طول الفترة المعطاة الى فترات طولها $\frac{١}{٢}$ ونلتزم بطول الفترة المعطاة بالسؤال $[-١، ١)$

من -١ الى $\frac{-١}{٢}$ ، من $\frac{-١}{٢}$ الى ٠ ، من ٠ الى $\frac{١}{٢}$ ، من $\frac{١}{٢}$ الى ١

③ اشارة المساواة على اليمين لان معامل س موجبه

ق(س) = $\begin{cases} -١ \le س < \frac{-١}{٢} & ، \\ \frac{-١}{٢} \le س < ٠ & ، \\ ٠ \le س < \frac{١}{٢} & ، \\ \frac{١}{٢} \le س < ١ & ، \end{cases}$

نقوم الان بأخذ الارقام التي توجد عنها اشارة المساواة فقط وتعويضها في الاقتران ق(س)= $[٢\ س]$

ق(-١) = $[٢س] = [٢ \times -١] = -٢$

ق($\frac{-١}{٢}$) = $[٢س] = \left[٢ \times \frac{-١}{٢}\right] = -١$

ق(٠) = $[٢س] = [٢ \times ٠] = ٠$

ق($\frac{١}{٢}$) = $[٢س] = \left[٢ \times \frac{١}{٢}\right] = ١$

ق(س) = $\begin{cases} -٢ & ، -١ \le س < \frac{-١}{٢} \\ -١ & ، \frac{-١}{٢} \le س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \le س < \frac{١}{٢} \\ ١ & ، \frac{١}{٢} \le س < ١ \end{cases}$

معامل س موجب زيادة واحد يعني

-٢

-١

٠

١

✓ ق(س)= $\left[-١ \frac{١}{٢} س\right]$ ، س ∈ $[-٢، ٦)$

الحل :-

① طول الفترة $= \frac{١}{\left|-\frac{١}{٢}\right|} = ٢$

② نقسم طول الفترة المعطاة الى فترات طولها ٢ ونلتزم بطول الفترة المعطاة بالسؤال $[-٢، ٦)$

-٢ الى ٠ ، من ٠ الى ٢ ، من ٢ الى ٤ ، من ٤ الى ٦

③ اشارة المساواة على اليسار لان معامل س سالب

ق(س) = $\begin{cases} -٢ < س \le ٠ & ، \\ ٠ < س \le ٢ & ، \\ ٢ < س \le ٤ & ، \\ ٤ < س \le ٦ & ، \end{cases}$

نقوم الان بأخذ الارقام التي توجد عنها اشارة المساواة فقط وتعويضها في الاقتران ق(س)= $\left[-١ \frac{١}{٢} س\right]$

ق(٠) = $\left[-١ \frac{١}{٢} س\right] = \left[-١ (٠) \frac{١}{٢}\right] = ١$

ق(٢) = $\left[-١ \frac{١}{٢} س\right] = \left[-١ (٢) \frac{١}{٢}\right] = ٠$

ق(٤) = $\left[-١ \frac{١}{٢} س\right] = \left[-١ (٤) \frac{١}{٢}\right] = -١$

ق(٦) = $\left[-١ \frac{١}{٢} س\right] = \left[-١ (٦) \frac{١}{٢}\right] = -٢$

ق(س) = $\begin{cases} ١ & ، -٢ < س \le ٠ \\ ٠ & ، ٠ < س \le ٢ \\ -١ & ، ٢ < س \le ٤ \\ -٢ & ، ٤ < س \le ٦ \end{cases}$

معامل س سالبه نقص واحد يعني

١

٠

-١

-٢

✓ ق(س)= [س − ٢] ٣ ≥ س ≥ ٥

الحل :

[س − ٢]

س − ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

ل = $\frac{١}{|١|}$ = ١

٢ ١ ٠

٥ ٤ ٣ ٢

[س − ٢] = { ١ ، ٣ ≥ س > ٤ ؛ ٢ ، ٤ ≥ س > ٥ ؛ ٣ ، س = ٥ }

✓ ق(س)= [س − ٣] ٥ ≥ س > ٧

الحل :

[س − ٣]

س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣

ل = $\frac{١}{|١|}$ = ١

٣ ٢ ١ ٠

X٧ ٦ ٥ ٤ ٣

[س − ٣] = { ٢ ، ٥ ≥ س > ٦ ؛ ٣ ، ٦ ≥ س > ٧ }

✓ ق(س)= [س + ١] −٣ < س < −١

الحل :

[س + ١]

س + ١ = ٠ ⇐ س = −١

ل = $\frac{١}{|١|}$ = ١

−١ −٢

X−١ −٢ −٣

[س + ١] = { −٢ ، −٣ ≤ س < −٢ ؛ −١ ، −٢ ≤ س < −١ ؛ ٠ ، س = −١ }

✓ ق(س)= [٣س] −١ < س < ٠

الحل :

[٣س]

٣س = ٠ ⇐ س = ٠

ل = $\frac{١}{|٣|}$ = $\frac{١}{٣}$

−١ −٢ −٣

X٠ $\frac{-١}{٣}$ $\frac{-٢}{٣}$ X−١

[٣س] = { −٣ ، −١ > س > $\frac{-٢}{٣}$ ؛ −٢ ، $\frac{-٢}{٣}$ ≥ س > $\frac{-١}{٣}$ ؛ −١ ، $\frac{-١}{٣}$ ≥ س > ٠ }

❷ اعادة التعريف حول نقطة :-

في هذه الحالة تحتاج اما قاعدتين لتغطية النقطة أو قاعدة واحدة تغطي النقطة (اذا كانت نقطة عادية)

أمثلة :-

✓ ق(س) = $\left[\frac{س}{٣} - ٢\right]$ أعد التعريف حول العدد ٦

الحل :-

✸ **طول الفترة** = $\frac{١}{\left|\frac{١}{٣}\right|}$ = ٣

✸ **خط الاعداد**

اعادة تعريف حول عدد (٦) اقوم برسم خط الاعداد واقوم بالعد من الصفر حسب طول الفترة (٣) الى ان اصل الى الرقم المراد عادة التعريف حوله

صفر ٣ ٦ ٩

اقوم بحصر العدد (٦) المراد اعادة التعريف حوله برقمين

صفر ٣ ٦ ٩

ق(س) = { ٠ ، ٣ < س ≥ ٦ ؛ ١ ، ٦ < س ≥ ٩ }

نأخذ كل رقم وتعويضه في الاقتران بسبب اعادة تعريف حول نقطه

✓ ق(س) = $\left[\frac{س}{٢}\right]$ اعد تعريف حول العدد ٣

الحل :-

✸ **طول الفترة** = $\frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|}$ = ٢

✸ **خط الاعداد**

اعادة تعريف حول عدد (٣) اقوم برسم خط الاعداد واقوم بالعد من الصفر حسب طول الفترة (٢) الى ان اصل الى الرقم المراد عادة التعريف حوله

صفر ٢ ٤

٣ نقطة عادية

السؤال هنا ؟؟؟

لم يظهر الرقم (٣) ماذا افعل ؟

الجواب :- ابحث عن رقمين يقع الرقم (٣) بينهما فيكون بين (٢، ٤)

ق(س) = { ١ ، ٢ ≥ س < ٤ }

✓ ق(س)= $\left[\frac{١}{٥}س + ٤\right]$ س ∈ [-٤ ، ٧]

شرح متقدم

① طول الفترة = $\frac{1}{|\text{معامل س}|}$ = $\frac{١}{\left|\frac{١}{٥}\right|}$ = ٥

② بما ان ما داخل اكبر عدد صحيح هو ٤ تبدأ الفترة من الصفر

③ ارسم خط الاعداد

اضع الصفر

انظر الى الفترة س ∈ [-٤ ، ٧] بما ان البداية الفترة (-٤) اقوم بنقص خمسه وهي طول الفترة حتى اصل الى -٤ تسمى بداية الفترة

نقول ٠ ــ ٥ = -٥

سيخطر في بالك سؤال ؟

-٥ قد تجاوزت الفترة ∈ [-٤ ، ٧]

اذن نقوم بوضع بدلا من -٥ -٤ قد وصلنا الى بداية الفترة نقف

نرجع مرة ثانية الى الصفر من اجل زيادة خمسه للوصول الى نهاية الفترة

نقوم ؟؟؟

٠ + ٥ = ٥ نسأل نفسنا هل وصلنا الى نهاية الفترة نقول لا

ثم نقوم بزيادة خمسه تصبح

٥ + ٥ = ١٠ نسأل نفسنا هل وصلنا الى نهاية الفترة

سيخطر في بالك سؤال ؟

١٠ قد تجاوزت الفترة ∈ [-٤ ، ٧]

اذن نقوم بوضع بدلا من ١٠ ٧ قد وصلنا الى نهاية الفترة نقف

من خط الاعداد اقوم بوضع الفترات

من -٤ الى ٠ ، من ٠ الى ٥ ، من ٥ الى ٧

اشارة المساواة على اليمين لان معامل س موجب

معامل س موجب زيادة واحد

ق(س) = { ٣ ، -٤ ≤ س < ٠ ؛ ٤ ، ٠ ≤ س < ٥ ؛ ٥ ، ٥ ≤ س ≤ ٧ }

نقوم الان بأخذ الارقام التي توجد عنها اشارة المساواة فقط وتعويضها في الاقتران ق(س)= $\left[\frac{١}{٥}س + ٤\right]$

ق(-٤) = $\left[\frac{١}{٥}س + ٤\right] = \left[\frac{١}{٥}(-٤) + ٤\right] = ٣$

ق(٠) = $\left[\frac{١}{٥}س + ٤\right] = \left[\frac{١}{٥}(٠) + ٤\right] = ٤$

ق(٥) = $\left[\frac{١}{٥}س + ٤\right] = \left[\frac{١}{٥}(٥) + ٤\right] = ٥$

✓ ق(س) = $\left[\frac{١}{٣}س - \boxed{٨.٢}\right]$ س ∈ [-٥ ، ٨]

① طول الفترة = $\frac{1}{|\text{معامل س}|}$ = $\frac{١}{\left|\frac{١}{٣}\right|}$ = ٣

② بما ان ما داخل اكبر عدد صحيح ليس عدد صحيح هو ٨.٢

ماذا افعل ؟؟

اجعل ما داخل الاكبر عدد صحيح عـددا صحيحا [٨٫٢] = ٨

ومن ثم نجد قيمة س

لإيجاد قيمة س اقوم بأخذ ما داخل الاكبر عدد صحيح كما هو ومساواته بال ٨

٨.٢ - $\frac{١}{٣}$ س = ٨ اذن س = ٠.٦

③ ارسم خط الاعداد

اضع ٠.٦

انظر الى الفترة س ∈ [-٥ ، ٨] بما ان البداية الفترة (-٥) اقوم بنقص ٣ وهي طول الفترة حتى اصل الى ــ ٥ تسمى بداية الفترة نقول ....

٠.٦ ــ ٣ = -٢.٤ نسأل نفسنا هل وصلنا الى بداية الفترة نقول لا

ثم نقوم بنقص ٣ تصبح

-٢.٤ ــ ٣ = -٥.٤ نسأل نفسنا هل وصلنا الى نهاية الفترة نعم

سيخطر في بالك سؤال ؟

-٥.٤ قد تجاوزت الفترة س ∈ [-٥ ، ٨]

اذن نقوم بوضع بدلا من -٥.٤ -٥ قد وصلنا الى بداية الفترة نقف

نرجع مرة ثانية الى ٠.٦ من اجل زيادة ٣ طول الفترة للوصول الى نهاية الفترة

نقول ؟؟؟

٠.٦ + ٣ = ٣.٦ نسأل نفسنا هل وصلنا الى نهاية الفترة نقول لا

ثم نقوم بزيادة ٣ تصبح

٣.٦ + ٣ = ٦.٦ نسأل نفسنا هل وصلنا الى نهاية الفترة لا

ثم نقوم بزيادة ٣ تصبح

٦.٦ + ٣ = ٩.٦

سيخطر في بالك سؤال ؟

٩.٦ قد تجاوزت الفترة س ∈ [-٥ ، ٨]

اذن نقوم بوضع بدلا من ٩.٦ ٨ قد وصلنا الى نهاية الفترة نقف

من خط الاعداد اقوم بوضع الفترات

من -٥ الى -٢.٤ ، من -٢.٤ الى ٠.٦ ، من ٠.٦ الى ٣.٦ ، من ٣.٦ الى ٦.٦ ، من ٦.٦ الى ٨

ق(س) = { ٩ ، -٥ ≤ س ≤ -٢.٤ ؛ ٨ ، -٢.٤ < س ≤ ٠.٦ ؛ ٧ ، ٠.٦ < س ≤ ٣.٦ ؛ ٦ ، ٣.٦ < س ≤ ٦.٦ ؛ ٥ ، ٦.٦ < س ≤ ٨ }

القسمة التركيبية

تعريف :-

تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فأكثر الى عواملها الاولية .

متى تستخدم ؟

تستخدم فقط عندما يكون المقسوم عليه على شكل س – أ

مثال :-

✓ ق(س) = $س^{٣}$ - ٢$س^{٢}$- ٥س + ٦ مقسوم

ع(س) = س – ١ مقسوم عليه

طريقة الحل :-

① نساوي المقسوم عليه بالصفر

س – ١ = صفر س = ١ جذر المقسوم عليه

لتأكد ان س = ١ وهو جذر المقسوم عليه يجب ان يظهر ناتج

ق(س) = صفر

ق(س) = $س^{٣}$ - ٢$س^{٢}$- ٥س + ٦

ق(١)= $(١)^{٣}$ – ٢ $(١)^{٢}$ – ٥(١) + ٦ = صفر

② نأخذ معاملات المقسوم

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	- ٢	- ٥	٦
١		١	- ١	-٦
	١	-١	- ٦	صفر

اجباري

ق(س)= $س^{٢}$ – س – ٦

ملاحظه مهمه :-

نضع صفرا بدلا من معامل الحد الغير موجود

Al-Rwnq Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Ward
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤

بدائيات التكامل

☺ التكامل : هي عملية عكسية للتفاضل حيث يكون لدينا المشتقة ويطلب منا الاقتران الاصلي (الاقتران البدائي) م (س)

⟸ يسمى الاقتران م (س) بدائي للاقتران ق(س) اذا تحقق الشرطيين الآتيين :

١ – ق (س) متصل على الفترة [أ ، ب]

٢ – م′(س) = ق(س)

ما هو الاقتران الذي مشتقته ٢س ؟

الحل :

م (س) = س^{٢} + ٥ أو م (س) = س^{٢} – ٨ أو م (س) = س^{٢} + جـ

يمكن كتابة المطلوب في السؤال بصورة اخرى ؟

اذا كان ق(س) = ٢س جد الاقتران م(س)

الحل :

م (س) = س^{٢} + جـ

ويوجد طريقة اخرى لطرح السؤال

جد $\int ٢س \, د\overline{س} = س^{٢} + جـ$

يكامل الاقتران بالنسبة لـ س

قواعد التكامل الغير محدود

قاعدة الاولى $\int ١ \, د س = أس + جـ$ جـ : تم وضعها بسبب ان التكامل غير محدود

أمثلة :

١) $\int ٢ د\overline{س} = ٢س + جـ$

٢) $\int \pi \, د\overline{ص} = \pi ص + جـ$

٣) $\int \frac{د\overline{ص}}{٤} = \frac{١}{٤} ص + جـ$

٤) $\int د\overline{ص} = ص + جـ$

٥) * $\int جتا \pi \, د\overline{س} = \frac{١}{\pi} جا \pi س + جـ$

٦) $\int ٠ \, د\overline{ن} = ٠ن + جـ = جـ$

قاعدة الثانية $\int س^{ن} د س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ \Leftrightarrow \int أس^{ن} د س = \frac{أس^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$

أمثلة :

١) $\int س^{٥} د س = \frac{س^{٦}}{٦} + جـ$

٢) $\int س^{-٥} د س = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

٣) $\int نوهـ^{٢} د نوهـ = \frac{نوهـ^{٣}}{٣} + جـ$

٤) $\int س \sqrt{أس} \, د س = \int س (أس)^{\frac{١}{٢}} د س = \int س^{\frac{٣}{٢}} د س = \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + جـ$

٥) $\int \frac{س^{٢} \sqrt{أس}}{س} د س = \int س (أس)^{\frac{١}{٢}} د س = \int س \sqrt{أس} \, د س = \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + جـ$

٦) $\int ١^{٣} د س = ١^{٣} س + جـ$

٧) $\int \frac{١}{٥\sqrt{أس}} د س = \int \frac{١}{٥} س^{-\frac{١}{٢}} د س = \frac{١}{٥} \int س^{-\frac{١}{٢}} د س = \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{٥} \times ٢ + جـ$

٨) $\int \frac{د س}{\sqrt{أس}} = \int س^{-\frac{١}{٢}} د س = \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ$

٩) $\int \frac{د ص}{\sqrt[٣]{أص}} = \int ص^{-\frac{١}{٣}} د ص = ص^{\frac{٢}{٣}} \times \frac{٣}{٢} + جـ$

١٠) $\int ٣س^{٢} د س = \frac{٣س^{٣}}{٣} + جـ$

١١) $\int ٥س^{-٢} د س = \frac{٥س^{-١}}{-١} + جـ$

قاعدة الثالثة أ) $\int ١ق(س) د س = ١ \int ق(س) د س$

ب) $\int (ق(س) \pm هـ(س)) د س = \int ق(س) د س \pm \int هـ(س) د س$

ملاحظة : التوزيع في التكامل يكون في حالة الجمع والطرح .

أمثلة :

١) $\int (٤س^{٣} + ٣س^{٢} - ٦س + ٥) د س$

$= \int ٤س^{٣} د س + \int ٣س^{٢} د س - \int ٦س د س + \int ٥ د س$

$= س^{٤} + س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + جـ$

٢) $\int \frac{س^{٣} + ٤}{س^{٢}} د س$

$= \int ((س^{٣} + ٤) س^{-٢}) د س$

$= \int (س^{١} + ٤س^{-٢}) د س$

$= \int س د س + \int ٤س^{-٢} د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - ٤س^{-١} + جـ$

٣) $\int (\sqrt{س} + \sqrt[3]{س})\,د س$

$= \int (س^{\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{3}})\,د س$

$= \int س^{\frac{1}{2}}\,د س + \int س^{\frac{1}{3}}\,د س$

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + ج$

٤) $\int \sqrt{ع}(ع + ع^{2})\,د ع$

$= \int ع^{\frac{1}{2}}(ع^{1} + ع^{2})\,د ع$ ✓ $ع^{\frac{1}{2}} \times ع^{1} = ع^{\frac{1}{2}+1} = ع^{\frac{3}{2}}$

$= \int (ع^{\frac{3}{2}} + ع^{\frac{5}{2}})\,د ع$

$= \int ع^{\frac{3}{2}}\,د ع + \int ع^{\frac{5}{2}}\,د ع$

$= \frac{2}{5} ع^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} ع^{\frac{7}{2}} + ج$

٦) $\int (س + \sqrt{س})^{2}\,د س$

$= \int (س^{2} + 2س\sqrt{س} + س)\,د س$ ✓ $(ا + ب)^{2} = ا^{2} + 2اب + ب^{2}$

$= \int س^{2}\,د س + \int 2س\sqrt{س}\,د س + \int س\,د س$

$= \int س^{2}\,د س + \int 2س^{\frac{3}{2}}\,د س + \int س\,د س$

$= \frac{س^{3}}{3} + \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + \frac{س^{2}}{2} + ج$

٧) $\int \frac{س^{2} - 4}{\sqrt{س}(س - 2)}\,د س$ **حيث** $س \neq 2$

الحل :

$= \int \frac{(س+2)(س-2)}{\sqrt{س}(س-2)}\,د س$

$= \int \frac{(س+2)}{\sqrt{س}}\,د س$

$= \int (س+2) س^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$= \int (س^{\frac{1}{2}} + 2س^{-\frac{1}{2}})\,د س$

$= \int س^{\frac{1}{2}}\,د س + \int 2س^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$= س^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} + 2س^{\frac{1}{2}} \times 2 + ج$

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + 4س^{\frac{1}{2}} + ج$

٨) $\int \frac{(ص-3)^{2}}{ص^{5}}\,د ص$

الحل :

$= \int \frac{(ص-3)^{2}}{ص^{5}}\,د ص$

$= \int \frac{ص^{2} - 6ص + 9}{ص^{5}}\,د ص$

$= \int (ص^{2} - 6ص + 9) \times ص^{-5}\,د ص$

$= \int (ص^{-3} - 6ص^{-4} + 9ص^{-5})\,د ص$

$= \int ص^{-3}\,د ص - \int 6ص^{-4}\,د ص + \int 9ص^{-5}\,د ص$

٩) $\int \sqrt{س}\sqrt{س}\,د س =$

الحل :

$= \int (\sqrt{س})^{\frac{1}{2}}\,د س$

$= \int (س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,د س$ ✓ $(س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = س^{\frac{1}{4}}$

$= \int س^{\frac{1}{4}}\,د س$

$= س^{\frac{5}{4}} \div \frac{5}{4} + ج$

١٠) $\int \frac{س^{2} + 5س + 4}{س + 1}\,د س$

$= \int \frac{(س+4)\cancel{(س+1)}}{\cancel{س+1}}\,د س$

$= \int (س+4)\,د س$

$= \int س\,د س + \int 4\,د س$

$= \frac{س^{2}}{2} + 4س + ج$

١١) $\int \frac{س + س^{2} + 1}{س^{4}}\,د س$

$\int (س + س^{2} + 1) س^{-4}\,د س$

$= \int (س^{-3} + س^{-2} + س^{-4})\,د س$

$= \int س^{-3}\,د س + \int س^{-2}\,د س + \int س^{-4}\,د س$

$= \frac{س^{-2}}{-2} - س^{-1} - \frac{س^{-3}}{3} + ج$

القاعدة الرابعة $\int (أس+ب)^{ن} \, د س = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + جـ$ حيث $ن \neq -1$

يجب ان يكون ما تحت الاس كثير حدود خطي (اقتران خطي) حتى تستطيع استخدامها

أمثلة :

١) $\int (٧س-١)^{٥} \, د س = \frac{(٧س-١)^{٦}}{٦} \times \frac{١}{٧} + جـ$

٢) $\int (س^{٢} - ٤س + ٤)^{٣} \, د س$

$\int ((س-٢)^{٢})^{٣} \, د س = \int (س-٢)^{٦} \, د س$ ✓ $\boxed{(س^{ن})^{م} = (س)^{ن+م}}$

$= \frac{(س-٢)^{٧}}{٧} \times \frac{١}{١} + جـ$

٣) $\int \frac{-٦}{(٥ص-٣)^{٥}} \, د س =$

الحل :

$= \frac{-٦}{(٥ص-٣)^{٥}} س + جـ$

٤) $\int \sqrt{٦س+١} \, د س =$

الحل :

$= \int (٦س+١)^{\frac{١}{٢}} \, د س$

$= (٦س+١)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٦} + جـ$

$(٦س+١)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{\not{٨}}{٣} \times \frac{١}{\not{٨}} + جـ = \frac{١}{٩} \times (٦س+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٥) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{٥س+٣}} \, د س =$

الحل :

$= \int (س+٣)^{\frac{-١}{٣}} \, د س$

$(٥س+٣)^{\frac{٢}{٣}} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٥} + جـ = \frac{٣}{١٠} (٥س+٣)^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

٦) $\int \frac{د س}{س^{٢} - ١٠س + ٢٥} =$

الحل :

$= \int \frac{د س}{(س-٥)(س-٥)}$

$= \int (س-٥)^{-٢} \, د س$

$= (س-٥)^{-١} \times \frac{١}{-١} \times \frac{١}{١} + جـ = \frac{-١}{س-٥} + جـ$

٧) $\int \frac{د س}{٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦} =$

الحل :

$\int \frac{د س}{(٣س+٤)(٣س+٤)} =$

٨) $\int \frac{٤س^{٣} - ٣س + ١}{س+١} \, د س =$

الحل :

$\int \frac{(س+١)(٤س^{٢} - ٤س + ١)}{س+١} \, د س =$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ث
	٤	٠	-٣	١
$\boxed{-١}$		-٤	٤	-١
	٤	-٤	١	$\boxed{٠}$

٩) $\int \frac{س \sqrt{١-س}}{١ + \sqrt{١-س}} \, د س =$ حيث $س > ١$

الحل : الضرب بالمرافق التربيعي

$= \int \frac{س \sqrt{١-س}}{١ + \sqrt{١-س}} \times \frac{١ - \sqrt{١-س}}{١ - \sqrt{١-س}} \, د س$

$= \int \frac{(س \sqrt{١-س})(١ - \sqrt{١-س})}{١ - (١-س)} \, د س$

$= \int \frac{س \sqrt{١-س} - س(١-س)}{س} \, د س$

$= \int (\frac{س \sqrt{١-س}}{س} - \frac{س(١-س)}{س}) \, د س$

$= \int \sqrt{١-س} \, د س - \int (١-س) \, د س$

$= \int \sqrt{١-س} \, د س - \int (١-س) \, د س$

١٠) $\int (٢ \sqrt{٣-١})^{٥} \, د س =$

الحل :

قاعدة الخامسة : تكامل الاسي الطبيعي (مقيد بقوة خطية)

$$\int هـ^{اس+ب}\ ؤس = \frac{هـ^{اس+ب}}{ا} + جـ$$

امثلة :

١) $\int هـ^{٥س+٢}\ ؤس =$

الحل :

$$= \frac{هـ^{٥س+٢}}{٥} + جـ$$

٢) $\int هـ^{٤-٣س}\ ؤس =$

الحل :

$$= \frac{هـ^{٤-٣س}}{-٣} + جـ$$

٣) $\int \frac{٧}{هـ^{٥س}}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int ٧هـ^{-٥س}\ ؤس$$
$$= ٧\int هـ^{-٥س}\ ؤس$$
$$= ٧\frac{هـ^{-٥س}}{-٥} + جـ$$

٤) $\int \sqrt{هـ^{١٠س}}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int (هـ^{١٠س})^{\frac{١}{٢}}\ ؤس$$ ✓ $(هـ^{١٠س})^{\frac{١}{٢}} = هـ^{١٠س \times \frac{١}{٢}} = هـ^{\frac{١٠س}{٢}}$

$$= \int هـ^{\frac{١٠س}{٢}}\ ؤس$$
$$= \int هـ^{٥س}\ ؤس$$
$$= \frac{هـ^{٥س}}{٥} + جـ$$

٥) $\int \sqrt[٣]{هـ^{٣س+٢}}\ ؤس =$

الحل :

٦) $\int هـ^{س}\ ؤس =$

الحل :

$$= \frac{هـ^{س}}{١} + جـ$$

٧) $\int \sqrt[٣]{هـ^{س}}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int (هـ^{س})^{\frac{١}{٣}}\ ؤس$$ ✓ $(س^{ن})^{م} = س^{ن \times م}$

$$= \int هـ^{\frac{س}{٣}}\ ؤس$$
$$= \frac{هـ^{\frac{س}{٣}}}{\frac{١}{٣}} + جـ = ٣هـ^{\frac{س}{٣}} + جـ$$

٨) $\int (هـ^{س} + هـ^{-س})^{٢}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int (هـ^{٢س} + ٢هـ^{-س}هـ^{س} + هـ^{-٢س})\ ؤس$$ ✓ $هـ^{-س}هـ^{س} = هـ^{-س+س} = هـ^{٠} = ١$

$$= \int (هـ^{٢س} + ٢ + هـ^{-٢س})\ ؤس$$
$$= \int هـ^{٢س}\ ؤس + \int ٢\ ؤس + \int هـ^{-٢س}\ ؤس = \frac{هـ^{٢س}}{٢} + ٢س + \frac{هـ^{-٢س}}{-٢} + جـ$$

٩) $\int \frac{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}{١ - هـ^{س}}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int \frac{(هـ^{س}-١)(هـ^{س}+٢)}{١-هـ^{س}}\ ؤس$$
$$= \int \frac{-١(هـ^{س}+٢)}{١}\ ؤس$$
$$= \int (-هـ^{س}-٢)\ ؤس$$

١٠) $\int \frac{هـ^{٤س} + هـ^{س}}{هـ^{٣س} + هـ^{-س}}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int \frac{هـ^{س}(هـ^{٣س}+١)}{هـ^{٢س}(١+هـ^{٣س})}\ ؤس$$
$$= \int \frac{هـ^{س}(هـ^{٣س}+١)}{هـ^{٢س}(١+هـ^{٣س})}\ ؤس$$
$$= \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س}}\ ؤس$$
$$= \int هـ^{س}هـ^{-٢س}\ ؤس$$ ✓ $هـ^{س}هـ^{-٢س} = هـ^{-س}$
$$= \int هـ^{-س}\ ؤس$$

١١) $\int هـ^{٢لو_{هـ}س}\ ؤس =$

الحل :

$$= \int هـ^{لو_{هـ}س^{٢}}\ ؤس$$ ✓ $س لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ص^{س}$
$$= \int هـ^{لو_{هـ}س^{٢}}\ ؤس$$ ✓ $هـ^{لو_{هـ}} = ١$
$$= \int س^{٢}\ ؤس$$

١٢) $\int هـ^{٣+لـو_{هـ}٢س}\,دس =$

الحل :

$= \int هـ^{٣}\, هـ^{لـو_{هـ}٢س}\,دس$ ✓ $\boxed{هـ^{س+ص} = هـ^{س}\, هـ^{ص}}$

$= هـ^{٣} \int هـ^{لـو_{هـ}٢س}\,دس$

$= هـ^{٣} \int ٢س\,دس$

$= هـ^{٣} \frac{٢س^{٢}}{٢} + جـ = هـ^{٣}س^{٢} + جـ$

١٣) $\int ٢^{٥س}\,دس =$

الحل :

$= \int هـ^{لـو_{هـ}٢^{٥س}}\,دس$ ✓ $\boxed{١ = هـ^{لـو_{هـ}}}$

$= \int هـ^{٥س\ \boxed{لـو_{هـ}٢}}\,دس$

$= هـ^{٥س لـو_{هـ}٢} \times \frac{١}{٥لـو_{هـ}٢} + جـ$

١٤) $\int \frac{هـ^{س+١}}{هـ^{س}}\,دس =$

الحل :

$= \int (\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{١}{هـ^{س}})\,دس$

$= \int (١ + هـ^{-س})\,دس$

١٥) $\int ٣^{٤س}\,دس =$

الحل :

١٦) $\int \frac{لـو_{هـ}٢^{س}}{\sqrt{س}}\,دس =$

الحل :

$= \int لـو_{هـ}٢^{س}\ س^{-\frac{١}{٢}}\,دس$

$= \int ٢س\ \cancel{لـو_{هـ}}\ هـ\ س^{-\frac{١}{٢}}\,دس$ ✓ $\boxed{لـو_{هـ}هـ = ١}$

$= \int ٢س\ س^{-\frac{١}{٢}}\,دس$

القاعدة السادسة تكامل اقتران اللوغاريتمات

نظرية $\int \frac{١}{س}\,دس = \int س^{-١}\,دس = لـو_{هـ}|س| + جـ$

قاعدة : بشكل عام

$\int \frac{قـ'(س)}{قـ(س)}\,دس = لـو_{هـ}|قـ(س)| + جـ$

البرهان :

$ص = قـ(س) \Leftarrow \frac{دص}{دس} = قـ'(س) \Leftarrow دس = \frac{دص}{قـ'(س)}$

$= \int \frac{قـ'(س)}{ص} \times \frac{دص}{قـ'(س)} = \int \frac{١}{ص}\,دص = لـو_{هـ}|ص| + جـ$

$= لـو_{هـ}|قـ(س)| + جـ$

اذا كان البسط مشتقة المقام **نستخدم اللوغاريتم**

فائدة :

$|س^{٢}+١| = س^{٢}+١$ ، $|هـ^{س}| = هـ^{س}$ ، $|هـ^{-٢}| = هـ^{-٢}$

$|\sqrt{س}| = \sqrt{س}$

أمثلة :

١) $\int \frac{٧}{٧س+١}\,دس = لـو_{هـ}|٧س+١| + جـ$

٢) $\int \frac{٥}{س}\,دس = ٥\int \frac{١}{س}\,دس = ٥لـو_{هـ}|س| + جـ$

٣) *** $\int \frac{دس}{٤س+١} = \frac{١}{٤}لـو_{هـ}|٤س+١| + جـ$

٤) $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣}-٢}\,دس = \frac{١}{٣}لـو_{هـ}|س^{٣}-٢| + جـ$

٥) $\int \frac{دس}{١-س} = -لـو_{هـ}|١-س| + جـ$

٦) $\int \frac{٥س^{٢}}{٥-س^{٣}}\,دس = \frac{-٥}{٣}لـو_{هـ}|٥-س^{٣}| + جـ$

٧) $\int ظاس\,دس = \int \frac{جاس}{جتاس}\,دس = -لـو_{هـ}|جتاس| + جـ$

٨) $\int ظتا٥س\,دس = \frac{١}{٥}لـو_{هـ}|جا٢س| + جـ$

٩) $\int ٧ + ظا٧س\,دس =$

١٠) *#* $= \int قاس\,دس = \int \frac{قاس\ (قاس+ظاس)}{(قاس+ظاس)}\,دس =$

١١) $\int \frac{ظتاس}{جتا^{٢}س}\,دس = \int \frac{قا^{٢}س}{ظاس}\,دس = لـو|ظاس| + جـ$

١٢) *** $\int \frac{١}{١+هـ^{-س}}\,دس = \int \frac{١}{١+\frac{١}{هـ^{س}}}\,دس = \int \frac{١}{\frac{١+هـ^{س}}{هـ^{س}}}\,دس$

$= \int \frac{هـ^{س}}{١+هـ^{س}}\,دس = لـو_{هـ}|هـ^{س}+١| + جـ$

١٣) $\int ٧س^{-١}\,دس =$

١٤) $\int \frac{جا٢س}{١+جتا^{٢}س}\,دس = \int \frac{٢جاس\ جتاس}{١+جتا^{٢}س}\,دس$

١٥) $\int \frac{١+ظا^{٢}س}{١+ظاس}\,دس = \int \frac{قا^{٢}س}{١+ظاس}\,دس = لـو_{هـ}|١+ظاس| + جـ$

١٦) $\int \frac{س-١}{٤س-٢س^{٢}}\,دس = \frac{-١}{٤}لـو_{هـ}|٤س-٢س^{٢}| + جـ$

١٧) $\int \frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{هـ^{س}+هـ^{-س}}\,دس = لـو_{هـ}|هـ^{س}+هـ^{-س}| + جـ$

القاعدة السابعة تكامل الاقترانات الدائرية ذات الزاوية الخطية

أي ناتج فيه (ت) نضع سالب

١) $\int$ جاس ds = −جتاس + جـ

٢) $\int$ جتاس ds = جاس + جـ

٣) $\int$ قا^{٢} س ds = ظاس + جـ

٤) $\int$ قتا^{٢} س ds = −ظتاس + جـ

٥) $\int$ قاس ظاس ds = قاس + جـ

٦) $\int$ ظاس ds = −لو$_{هـ}$ |جتاس| + جـ **

٧) $\int$ ظتاس ds = لو$_{هـ}$ |جاس| + جـ **

٨) $\int$ قتاس ظتاس ds = −قتاس + جـ

القانون العام لحل التكاملات للاقترانات الدائرية

$\int$ جاس ds = $\frac{-\text{جتا}^{ن}س}{ن}$ + جـ

القانون الاعم

هام : يجب ان تكون الزاوية خطية

$\int$ جا(أس + ب) ds = $\frac{-\text{جتا}(أس+ب)}{أ}$ + جـ

ملاحظة : هاتان القاعدتان ينطبق على جميع الاقترانات الدائرية .

لا يوجد تكامل مباشرة لـ ظاس ، ظتاس

أمثلة :

١) $\int$ جتا٤ س ds = $\frac{\text{جا}٤س}{٤}$ + جـ

٢) $\int$ (٣جا٤س + جتا٥ س) ds

= $\int$ ٣جا٤س ds + $\int$ جتا٥ س ds

= ٣ $\int$ جا٤س ds + $\int$ جتا٥ س ds

= $\frac{-٣\text{جتا}٤س}{٤}$ + $\frac{\text{جا}٥س}{٥}$ + جـ

٣) $\int$ قا^{٢} ٥ س ds = $\frac{\text{ظا}٥س}{٥}$ + جـ

٤) $\int$ قتا^{٢} ٥ س ds = $\frac{-\text{ظتا}٥س}{٥}$ + جـ

٥) $\int$ (جا$\frac{١}{٢}$ س + جتا$\frac{١}{٢}$ س) ds

= $\int$ جا$\frac{١}{٢}$ س ds + $\int$ جتا$\frac{١}{٢}$ س ds

= $\frac{-\text{جتا}\frac{١}{٢}س}{\frac{١}{٢}}$ + $\frac{\text{جا}\frac{١}{٢}س}{\frac{١}{٢}}$ + جـ = −٢جتا$\frac{١}{٢}$ س + ٢جا$\frac{١}{٢}$ س + جـ

٦) $\int$ قا^{٢}(٥س + ١) ds = $\frac{١}{٥}$ × ظا(٥س + ١) + جـ

٧) $\int$ قا(٧ − ٢س) ظا(٧ − ٢س) ds = $\frac{١}{-٢}$ × قا(٧ − ٢س) + جـ

٨) $\int$ ٦جا($\frac{س}{٢}$) ds = −٦جتا($\frac{س}{٢}$) × $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ + جـ = −١٢جتا$\frac{س}{٢}$ + جـ

٩) $\int$ $\frac{٣}{\text{جتا}^{٢}٢س}$ ds = ٣ $\int$ قا^{٢}٢س ds = ٣ظا(٢س) × $\frac{١}{٢}$ + جـ

١٠) $\int$ $\frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}س}$ ds = $\int$ ظتاس قتاس ds = −قتاس + جـ

١١) $\int$ (جتا٢س − ٣جاس) ds

= $\int$ جتا٢س ds − $\int$ ٣جاس ds

= $\int$ جتا٢س ds − ٣ $\int$ جاس ds

= $\frac{\text{جا}٢س}{٢}$ + ٣جتاس + جـ

١٢) $\int$ (٣ − ٢قا^{٢}س) ds

= $\int$ ٣ ds − $\int$ ٢قا^{٢}س ds

= ٣ $\int$ ds − ٢ $\int$ قا^{٢}س ds

= ٣س − ٢ظاس + جـ

١٣) * $\int$ $\frac{(١ + ٣\text{ظتا}^{٢}س)}{}$ ds =

الحل :

= $\int$ (١ + ٣(قتا^{٢}س − ١) ds = ✓ ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

= $\int$ (٣قتا^{٢}س − ٢) ds =

١٤) $\int$ $\frac{٢}{\text{جتا}^{٢}٣س}$ ds

= ٢ $\int$ $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}٣س}$ ds

= ٢ $\int$ قا^{٢}٣س ds

= $\frac{٢}{٣}$ ظا٣س + جـ

١٥) $\int$ قاس جتاس ds

= $\int$ $\frac{١}{\text{جتاس}}$ × جتاس ds ✓ قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$

= $\int$ ١ ds

= س + جـ

١٦) $\int$ جتا $\sqrt{س}$ ؁ س = ***

الحل : بما ان الزاوية ليست خطية نستخدم الفرض نفرض الزاوية $ص = \sqrt{س}$

١٧) $\int$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ س ؁ س =

الحل :

$\int$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ س ؁ س = $\int$ ٠ ؁ س = ٠ س + جـ = جـ

اهم المتطابقات

١) جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)

---

٢) جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

---

٣) ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

---

٤) ١ − جتاس = ٢ جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س

١ + جتاس = ٢ جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س

---

٥) جاس جتاس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

---

٦) متطابقات تحويل الضرب الى جمع (مختلفتان جا و متشابهتان جتا)

*) جاس جاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س − ص) − جتا(س + ص))

**) جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س − ص) + جتا(س + ص))

***) جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جا(س − ص) + جا(س + ص))

جتاس جاص = جاص جتا س

أمثلة :

١) $\int$ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) ؁ س = $\int$ ١ ؁ س = س + جـ

٢) $\int$ (جاس + جتاس)^{٢} ؁ س =

الحل :

= $\int$ (جاس + جتاس)^{٢} ؁ س

= $\int$ (جا^{٢}س + جاس جتاس + جتا^{٢}س) ؁ س

= $\int$ جا^{٢}س ؁ س + $\int$ ٢ جاس جتاس ؁ س + $\int$ جتا^{٢}س ؁ س

٣) $\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{جا}^{٣}\text{س جتاس}}$ ؁ س =

الحل : سيخطر في بالك لماذا لم نتخلص من جا التي في البسط مع التي في المقام

(الـ جا الموجودة في البسط قيمة الزاوية تختلف عن الموجودة في المقام لهذا لم يتم حذفها)

= $\int \frac{٢ \text{ جاس } \cancel{\text{جتاس}}}{\text{جا}^{٢}\text{س } \cancel{\text{جاس}} \cancel{\text{جتاس}}}$ ؁ س ✓ جا٢س = ٢ جاس جتاس

= $\int \frac{٢}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ ؁ س

= $\int$ ٢ قتا^{٢}س ؁ س

= ٢ × − ظتاس + جـ = − ٢ ظتاس + جـ

٤) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}$ ؁ س =

الحل :

= $\int \frac{\text{جتا٢س}}{(\frac{١}{٢}\text{جا٢س})^{٢}}$ ؁ س ✓ $(\frac{١}{٢}\text{جا٢س})^{٢} = (\frac{١}{٢})^{٢}(\text{جا٢س})^{٢} = \frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س}$

= $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س}}$ ؁ س

= $\int \frac{٤ \text{ جتا٢س}}{\text{جا٢س جا٢س}}$ ؁ س

= $\int$ ٤ ظتا٢س قتا٢س ؁ س

= $\frac{-٤ \text{ قتا٢س}}{٢}$ + جـ

٥) $\int \frac{١ - \text{جا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ ؁ س =

الحل :

= $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ ؁ س ✓ جتا٢س = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

= $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ ؁ س

= $\int \frac{\cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})}\ (\text{جتاس} + \text{جاس})}{\cancel{\text{جاس} - \text{جتاس}}}$ ؁ س

= $\int$ (جتاس + جاس) ؁ س

= $\int$ جتاس ؁ س + $\int$ جاس ؁ س = − جاس + جتاس + جـ

٦) $\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - ٧}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ؁ س =

الحل :

= $\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - ٧}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ ؁ س

= $\int (\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{٧}{\text{جا}^{٢}\text{س}})$ ؁ س

= $\int$ (جاس − ٧ قتا^{٢}س) ؁ س

= − جتاس − ٧ × − ظتاس + جـ

٧) $\int \frac{٢}{١ - \text{جتا٢س}}$ ؁ س =

الحل :

٨) $\int$ جا$^{٢}\frac{س}{٢}$ ءس

ملاحظة : عند استخدام المتطابقات يجب الانتباه الى المتطابقة بشرط توزيع التكامل نستطيع التكامل .

$= \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتاس})$ ءس

$= \int (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتاس})$ ءس

$= \frac{١}{٢}س - \int \frac{١}{٢}\text{جتاس}$ ءس

$= \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}\int \text{جتاس}$ ءس

$= \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}\text{جاس} + \text{جـ}$

عند ادخال $\frac{١}{٢}$ كانت لـ جاس كاملة حيث يمكن كتابتها على صورة $\frac{\text{جاس}}{٢}$ لكن لا يجوز كتابتها على صورة $\frac{س}{\text{جاس}٢}$

عند وجود ظا^{٢}س أو ظتا^{٢}س لوحدها في التكامل يفضل **استخدام المتطابقة**

*) ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

**) ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

أمثلة :

١) $\int$ ٢ظا^{٢}س ءس =

الحل :

$= \int ٢(\text{قا}^{٢}س - ١)$ ءس ✓ ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

$= \int ٢\text{قا}^{٢}س$ ءس − $\int ٢$ ءس

$= ٢\int \text{قا}^{٢}س$ ءس − ٢$\int$ ءس

= ٢ظاس − ٢س + جـ

٢) $\int$ (٥س^{٢} − ٣ظتا^{٢}س) ءس =

الحل :

٣) $\int$ (قاس + ظاس)^{٢} ءس =

الحل :

*) $\int$ (قا^{٢}س − ظا^{٢}س) ءس = $\int$ ١ ءس = س + جـ

**) $\int$ (ظتا^{٢}س − قتا^{٢}س) ءس = $\int$ − ١ ءس = − س + جـ

حفظ

ظا^{٢}س + ١ = قا^{٢}س

قا^{٢}س − ظا^{٢}س = ١

ظا^{٢}س − قا^{٢}س = − ١

---

١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س

قتا^{٢}س − ظتا^{٢}س = ١

ظتا^{٢}س − قتا^{٢}س = − ١

نستخدم الضرب بالمرافق (في المقام)

اما في حالة

١ ± جاس = ١ ∓ جاس

١ ± جتاس = ١ ∓ جتاس

١) $\int \frac{\text{ءس}}{١ - \text{جاس}} =$

الحل :

$= \int \frac{\text{ءس}}{١ - \text{جاس}} \times \frac{١ + \text{جاس}}{١ + \text{جاس}}$

$= \int \frac{١ + \text{جاس}}{١ - \text{جا}^{٢}س}$ ءس

$= \int \frac{١ + \text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}س}$ ءس

$= \int (\frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}س})$ ءس

$= \int (\text{قا}^{٢}س + \text{ظاس قاس})$ ءس

$= \int \text{قا}^{٢}س$ ءس + $\int$ ظاس قاس ءس

= ظاس + قاس + جـ

٢) $\int \frac{\text{ءس}}{١ + \text{جاس}} =$

الحل :

$= \int \frac{\text{ءس}}{١ + \text{جاس}} \times \frac{١ - \text{جاس}}{١ - \text{جاس}}$

$= \int \frac{١ - \text{جاس}}{١ - \text{جا}^{٢}س}$ ءس

$= \int \frac{١ - \text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}س}$ ءس

$= \int (\frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}س})$ ءس

$= \int (\text{قا}^{٢}س - \text{ظاس قاس})$ ءس

$= \int \text{قا}^{٢}س$ ءس − $\int$ ظاس قاس ءس

= ظاس − قاس + جـ

٣) $\int \frac{ds}{1-جتاس} =$

الحل :

$= \int \frac{ds}{1-جتاس} \times \frac{1+جتاس}{1+جتاس}$

$= \int \frac{1+جتاس}{1-جتا^٢س} ds$

$= \int \frac{1+جتاس}{جا^٢س} ds$

$= \int (\frac{1}{جا^٢س} + \frac{جتاس}{جا^٢س}) ds$

$= \int (قتا^٢س + ظتاس قتاس) ds$

$= \int قتا^٢س ds + \int ظتاس قتاس ds$

$= -ظتاس - قتاس + ج$

حل اخر

$= \int \frac{ds}{1-جتاس}$

$= \int \frac{ds}{2جا^٢\frac{س}{٢}}$ ✓ $\boxed{1-جتاس = 2جا^٢\frac{س}{٢}}$

$= \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{جا^٢\frac{س}{٢}} ds$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{جا^٢\frac{س}{٢}} ds$

$= \frac{1}{2} \int قتا^٢\frac{س}{٢} ds$

$= \frac{1}{2} \times \frac{-ظتا\frac{س}{٢}}{\frac{1}{2}} + ج = -ظتا\frac{س}{٢} + ج$

٤) $\int \frac{ds}{1+جتاس} =$

الحل :

$= \int \frac{ds}{1+جتاس} \times \frac{1-جتاس}{1-جتاس}$

$= \int \frac{1-جتاس}{1-جتا^٢س} ds$

$= \int \frac{1-جتاس}{جا^٢س} ds$

$= \int (\frac{1}{جا^٢س} - \frac{جتاس}{جا^٢س}) ds$

$= \int (قتا^٢س - ظتاس قتاس) ds$

$= \int قتا^٢س ds - \int ظتاس قتاس ds$

$= -ظتاس + قتاس + ج$

حل اخر

$= \int \frac{ds}{2جتا^٢\frac{س}{٢}}$

$= \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{جتا^٢\frac{س}{٢}} ds$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{جتا^٢\frac{س}{٢}} ds$

$= \frac{1}{2} \int قا^٢\frac{س}{٢} ds$

$= \frac{1}{2} \times \frac{ظا\frac{س}{٢}}{\frac{1}{2}} + ج = ظا\frac{س}{٢} + ج$

القوى الفردية والزوجية للجيب والجتا

*) **اذا كانت القوة فردية نستخدم المتطابقة القديمة**

جا^٢س = ١- جتا^٢س والعكس ثم التعويض (الفرض)

**) **في القوى الزوجية نستخدم المتطابقة**

$جا^٢س = \frac{1}{2}(1 - جتا٢س)$

$جتا^٢س = \frac{1}{2}(1 + جتا٢س)$

ثم متطابقات مرة اخرى (لا يمكن تعويض أو الاجزاء للقوة الفردية)

سوف نحل تكاملات زوجية فقط وعند شرح طريقة التعويض سوف نستخدم تكاملات فردية

أمثلة :

١) $\int جا^٢س \, ds \, س =$

الحل :

$= \int \frac{1}{2}(1 - جتا٢س) ds$

$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا٢س) ds$

$= \int \frac{1}{2} ds - \int \frac{1}{2} جتا٢س \, ds \, س$

$= \frac{1}{2} س - \frac{1}{2} \frac{جا٢س}{2} + ج$

٢) $\int جتا^٣٢س \, ds \, س =$

الحل :

$= \int \frac{1}{2}(1 + جتا٦س) ds$

$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا٦س) ds$

$= \int \frac{1}{2} ds + \int \frac{1}{2} جتا٦س \, ds \, س$

$= \frac{1}{2} س + \frac{1}{2} \times \frac{جا٦س}{٦} + ج$

٣) $\int \frac{٥}{قتا^٢٢س} ds \, س =$

الحل :

$\int \frac{٥}{قتا^٢٢س} ds \, س =$ ✓ $\boxed{\frac{1}{قتا^٢٢س} = جا^٢٢س}$

$= \int ٥ جا^٢٢س \, ds \, س$

$= \int ٥(\frac{1}{2}(1 - جتا٤س) ds$

$= \int ٥(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا٤س) ds$

$= \int (\frac{٥}{2} - \frac{٥}{2} جتا٤س) ds$

$= \int \frac{٥}{2} ds - \int \frac{٥}{2} جتا٤س \, ds \, س$

$= \frac{٥}{2} س - \frac{٥}{2} جا٤س + ج$

٤) $\int$ جتا^{٤}س ءس =

الحل :

$= \int (\text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٢}(١+\text{جتا}٢\text{س})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}+\frac{١}{٤}\text{جتا}^{٢}٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\int \text{ءس}+\int \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}\,\text{ءس}+\int \frac{١}{٤}\text{جتا}^{٢}٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\int \text{ءس}+\int \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}\,\text{ءس}+\int \frac{١}{٤}(\frac{١}{٢}(١+\text{جتا}٤\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\int \text{ءس}+\int \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}\,\text{ءس}+\int (\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}\text{جتا}٤\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\int \text{ءس}+\int \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}\,\text{ءس}+\frac{١}{٨}\int \text{ءس}+\int \frac{١}{٨}\text{جتا}٤\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\text{س}+\frac{١}{٢}\frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}+\frac{١}{٨}\text{س}+\frac{١}{٨}\times\frac{\text{جا}٤\text{س}}{٤}+\text{جـ}$

في هذه الحالة نستخدم المتطابقات :

*) جاس جاص $= \frac{١}{٢}$ (جتا(س − ص) − جتا(س + ص))

**) جتاس جتاص $= \frac{١}{٢}$ (جتا(س − ص) + جتا(س + ص))

***) جاس جتاص $= \frac{١}{٢}$ (جا(س − ص) + جا(س + ص))

أمثلة :

١) $\int$ (جا٥س جتا٢س) ءس =

الحل :

$\boxed{\text{جا}٥\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س}} = \frac{١}{٢}(\text{جا}(٥\text{س}-٢\text{س})+\text{جا}(٥\text{س}+٢\text{س}))$

$= \frac{١}{٢}(\text{جا}(٣\text{س})+\text{جا}(٧\text{س}))$

$= \frac{١}{٢}\text{جا}(٣\text{س})+\frac{١}{٢}\text{جا}(٧\text{س}) = \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٢}+\frac{\text{جا}٧\text{س}}{٢}$

$= \int (\text{جا}٥\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{\text{جا}٣\text{س}}{٢}+\frac{\text{جا}٧\text{س}}{٢})\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٢}\,\text{ءس}+\int \frac{\text{جا}٧\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{-\text{جتا}٣\text{س}}{٣\times٢}+\frac{-\text{جتا}٧\text{س}}{٧\times٢}+\text{جـ} = \frac{-\text{جتا}٣\text{س}}{٦}-\frac{\text{جتا}٧\text{س}}{١٤}+\text{جـ}$

٢) $\int$ (جا٧س جا٣س) ءس =

الحل :

$\boxed{\text{جا}٧\text{س}\,\text{جا}٣\text{س} =} \frac{١}{٢}(\text{جتا}(٧\text{س}-٣\text{س})-\text{جتا}(٧\text{س}+٣\text{س}))$

$= \frac{١}{٢}(\text{جتا}(٤\text{س})-\text{جتا}(١٠\text{س}))$

$= \frac{١}{٢}\text{جتا}(٤\text{س})-\frac{١}{٢}\text{جتا}(١٠\text{س}) = \frac{\text{جتا}٤\text{س}}{٢}-\frac{\text{جتا}١٠\text{س}}{٢}$

$\int (\text{جا}٧\text{س}\,\text{جا}٣\text{س})\,\text{ءس} =$

$= \int (\frac{\text{جتا}٤\text{س}}{٢}-\frac{\text{جتا}١٠\text{س}}{٢})\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا}٤\text{س}}{٢}\,\text{ءس}-\int \frac{\text{جتا}١٠\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{جا}٤\text{س}}{٤\times٢}-\frac{\text{جا}١٠\text{س}}{١٠\times٢}+\text{جـ} = \frac{\text{جا}٤\text{س}}{٨}-\frac{\text{جا}١٠\text{س}}{٢٠}+\text{جـ}$

٣) $\int$ (جتا٦س جتا٢س) ءس =

الحل :

$\boxed{\text{جتا}٦\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س}} = \frac{١}{٢}(\text{جتا}(٦\text{س}-٢\text{س})+\text{جتا}(٦\text{س}+٢\text{س}))$

$= \frac{١}{٢}(\text{جتا}(٤\text{س})+\text{جتا}(٨\text{س}))$

$= \frac{١}{٢}\text{جتا}(٤\text{س})+\frac{١}{٢}\text{جتا}(٨\text{س}) = \frac{\text{جتا}٤\text{س}}{٢}+\frac{\text{جتا}٨\text{س}}{٢}$

$\int (\text{جتا}٦\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس} =$

$= \int (\frac{\text{جتا}٤\text{س}}{٢}+\frac{\text{جتا}٨\text{س}}{٢})\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا}٤\text{س}}{٢}\,\text{ءس}+\int \frac{\text{جتا}٨\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{جا}٤\text{س}}{٤\times٢}+\frac{\text{جا}٨\text{س}}{٨\times٢}+\text{جـ} = \frac{\text{جا}٤\text{س}}{٨}+\frac{\text{جا}٨\text{س}}{١٦}+\text{جـ}$

تدريبات محلوله

١) $\int \frac{جتا^{٢}٥س}{١+جا٥س}\,ءس$

ما دام السؤال بسط ومقام ننتبه الى زوايا الاقترانات الدائرية

$=\int \frac{١-جا^{٢}٥س}{١+جا٥س}\,ءس$

$=\int \frac{(١-جا٥س)(١+جا٥س)}{١+جا٥س}\,ءس$

$=\int \frac{(١-جا٥س)}{١}\,ءس$

$=\int ١\,ءس-\int جا٥س\,ءس$

$=س+\frac{جتا٥س}{٥}+جـ$

٢) **مهم جداً**

$\int \frac{\sqrt{١+جتا٢س}}{جاس}\,ءس \quad ,\ ٠<س<\frac{\pi}{٢}$

$=\int \frac{\sqrt{١+٢جتا^{٢}س-١}}{جاس}\,ءس$

$=\int \frac{\sqrt{٢جتا^{٢}س}}{جاس}\,ءس$

$=\int \frac{\sqrt{٢}|جتاس|}{جاس}\,ءس$

$=\sqrt{٢}\int \frac{جتاس}{جاس}\,ءس$

$=\sqrt{٢}\int ظتاس\,ءس$

$=\sqrt{٢}لـو_{هـ}|جاس|+جـ$

٣) $\int س(قا^{٢}س-ظا^{٢}س)\,ءس=$

الحل :

$=\int س(١)\,ءس$

$=\frac{س^{٢}}{٢}+جـ$

٤) $\int (ظاس+ظتاس)^{٢}\,ءس=$

الحل :

$=\int (ظا^{٢}س+٢ظاسظتاس+ظتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int (ظا^{٢}س+٢+ظتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int ظا^{٢}س\,ءس+\int ٢\,ءس+\int ظتا^{٢}س\,ءس$

$=\int (قا^{٢}س-١)\,ءس+\int ٢\,ءس+\int (قتا^{٢}س-١)\,ءس$

$=\int قا^{٢}س\,ءس-\int ءس+\int ٢\,ءس+\int قتا^{٢}س\,ءس-\int ءس$

$=ظاس-س+٢س-ظتاس-س+جـ=ظاس-ظتاس+جـ$

٥) $\int (جاس-جتاس)^{٢}\,ءس=$ **#*

الحل :

$=\int (جا^{٢}س-٢جاسجتاس+جتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int (\underline{\underline{جا^{٢}س}}-جا٢س+\underline{\underline{جتا^{٢}س}})\,ءس$

$=\int (١-جا٢س)\,ءس$

$=\int ءس-\int جا٢س\,ءس$

$=س+\frac{جتا٢س}{٢}+جـ$

٦) $\int ٥جا\frac{س}{٣}جتا\frac{س}{٣}\,ءس=$

الحل :

$=٥\int \frac{١}{٢}جا\frac{٢}{٣}س\,ءس$

$=\frac{٥}{٢}\int جا\frac{٢}{٣}س\,ءس$

$=\frac{-١٥}{٤}جتا\frac{٢}{٣}س+جـ$

٧) $\int قا^{٢}س\,قتا^{٢}س\,ءس=$ **

الحل :

الطريقة الاولى :

$**=\int \frac{١}{جتا^{٢}س}\frac{١}{جا^{٢}س}\,ءس$

$=\int \frac{١}{(\frac{١}{٢}جا٢س)^{٢}}\,ءس$

$=٤\int \frac{١}{جا^{٢}٢س}\,ءس$

$=٤\int قتا^{٢}٢س\,ءس$

$=-٤\frac{ظتا٢س}{٢}+جـ$

الطريقة الثانية :

$**=\int (ظا^{٢}س+١)(١+ظتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int (ظا^{٢}س+\underline{ظا^{٢}سظتا^{٢}س}+١+ظتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int (ظا^{٢}س+١+١+ظتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int (ظا^{٢}س+٢+ظتا^{٢}س)\,ءس$

$=\int ظا^{٢}س\,ءس+٢\int ءس+\int ظتا^{٢}س\,ءس$

$=\int (قا^{٢}س-١)\,ءس+٢\int ءس+\int (قتا^{٢}س-١)\,ءس$

$=ظاس-س+٢س-ظتاس-س+جـ=ظاس-ظتاس+جـ$

٨) $\int^{\#*} \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{س}{٢}}\,ds =$

الحل :

$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{(\frac{١}{٢}\text{جاس})^{٢}}\,ds$

$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{\frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}س}\,ds$

$= ٤\int \text{جتا}٢س\ \text{قتا}^{٢}س ds$

$= ٤\int (١-٢\,\text{جا}^{٢}س)\ \text{قتا}^{٢}س ds$

$= ٤\int (\text{قتا}^{٢}س - ٢\underline{\text{جا}^{٢}س \text{قتا}^{٢}س})\ ds$

$= ٤\int (\text{قتا}^{٢}س - ٢)\ ds$

$= ٤\int \text{قتا}^{٢}س ds - ٤\int ٢\ ds$

$= ٤\int \text{قتا}^{٢}س ds - ٨\int ds$

$= -٤\text{ظتاس} - ٨س + \text{جـ}$

٩) $\int \text{جا}^{٢}٥س ds =$

الحل :

$= \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}\,٠١س) ds$

$= \int (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}\,٠١س) ds$

$= \frac{١}{٢}\int ds - \int \frac{١}{٢}\text{جتا}\,٠١س$

$= \frac{١}{٢}\int ds - \frac{١}{٢}\int \text{جتا}\,٠١س$

$= \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}\text{جا}\,٠١س + \text{جـ}$

١٠) $\int \text{جتا}(٣-س) ds =$

الحل :

$= \frac{\text{جا}(٣-س)}{-١} + \text{جـ}$

١١) $\int \text{جتا}^{٢}(٣-س) ds =$

الحل :

$= \int \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}(٣-س)\times ٢) ds$

$= \int \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}(٦-٢س) ds$

$= \int \frac{١}{٢} ds + \int \frac{١}{٢}\text{جتا}(٦-٢س) ds$

$= \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢}\times \frac{\text{جا}(٦-٢س)}{-٢} + \text{جـ}$

١٢) $\int^{\#*} \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جا}^{٢}س\,\text{جتا}^{٢}س}\,ds =$

الحل :

$\text{جا}^{٢}س\,\text{جتا}^{٢}س = (\text{جاس جتاس})^{٢} = (\frac{١}{٢}\text{جا}٢س)^{٢}$

$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{(\frac{١}{٢}\text{جا}٢س)^{٢}}\,ds$

$= ٤\int \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جا}^{٢}٢س}\,ds$

$= ٤\int \text{ظتا}٢س\ \text{قتا}٢س ds$

$= -٤\frac{\text{قتا}٢س}{٢} + \text{جـ} = -٢\text{قتا}٢س + \text{جـ}$

طريقة اخرى للحل

$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}س - \text{جا}^{٢}س}{\text{جا}^{٢}س\,\text{جتا}^{٢}س} ds$

$= \int (\frac{\text{جتا}^{٢}س}{\text{جا}^{٢}س\,\text{جتا}^{٢}س} - \frac{\text{جا}^{٢}س}{\text{جا}^{٢}س\,\text{جتا}^{٢}س}) ds$

$= \int (\frac{١}{\text{جا}^{٢}س} - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س}) ds$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}س} ds - \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} ds$

$= \int \text{قتا}^{٢}س ds - \int \text{قا}^{٢}س ds$

$= -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

١٣) $\int^{\#*} \text{ظتاس قا}^{٢}س ds =$

الحل :

$= \int \text{ظتاس}(\text{ظا}^{٢}س + ١) ds$

$= \int (\text{ظتاس ظا}^{٢}س + \text{ظتاس}) ds$

$= \int (\text{ظاس} + \text{ظتاس}) ds$

$= \int \text{ظاس} ds + \int \text{ظتاس} ds$

$= -\text{لـو}|\text{جتاس}| + \text{لـو}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

١٤) $\int \frac{١}{١ + \text{جا}٢س} ds =$

الحل :

الطريقة الاولى :

$= \int \frac{١}{٢\,\text{جتا}^{٢}س} ds$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} ds$

$= \frac{١}{٢}\int \text{قا}^{٢}س ds$

$= \frac{١}{٢}\text{ظاس} + \text{جـ}$

الطريقة الثانية :

$$= \int \frac{1}{1+\text{جا}2س} \times \frac{1-\text{جا}2س}{1-\text{جا}2س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{1}{1-\text{جا}^2 2س} \times \frac{1-\text{جا}2س}{1} \, ؤس$$

$$= \int \frac{1-\text{جا}2س}{1-\text{جا}^2 2س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{1-\text{جا}2س}{\text{جتا}^2 2س} \, ؤس$$

$$= \int (\frac{1}{\text{جتا}^2 2س} - \frac{\text{جا}2س}{\text{جتا}^2 2س}) \, ؤس$$

$$= \int (\text{قا}^2 2س - \text{ظا}2س \text{قا}2س) \, ؤس$$

$$= \int \text{قا}^2 2س \, ؤس - \int \text{ظا}2س \text{قا}2س \, ؤس$$

$$= \frac{\text{ظا}2س}{2} - \frac{\text{قا}2س}{2} + \text{جـ}$$

١٥) $\int \frac{3}{1-\text{جتا}2س} \, ؤس =$

الطريقة الاولى :

$$= \int (\frac{3}{1-\text{جتا}2س} \times \frac{1+\text{جتا}2س}{1+\text{جتا}2س}) \, ؤس$$

$$= \int (\frac{3}{1-\text{جتا}^2 2س} \times \frac{1+\text{جتا}2س}{1}) \, ؤس$$

$$= \int \frac{3(1+\text{جتا}2س)}{1-\text{جتا}^2 2س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{3+3\text{جتا}2س}{\text{جا}^2 2س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{3}{\text{جا}^2 2س} + \frac{3\text{جتا}2س}{\text{جا}^2 2س} \, ؤس$$

$$= \int (3\text{قتا}^2 2س + 3\text{ظتا}2س \text{قتا}2س) \, ؤس$$

$$= 3 \int \text{قتا}^2 2س \, ؤس + 3 \int \text{ظتا}2س \text{قتا}2س \, ؤس$$

$$= 3\frac{\text{ظتا}2س}{2} - 3\frac{\text{قتا}2س}{2} + \text{جـ}$$

الطريقة الثانية :

$$= \int \frac{3}{2\text{جا}^2 س} \, ؤس$$

$$= \frac{3}{2} \int \text{قتا}^2 س \, ؤس$$

$$= -\frac{3}{2} \text{ظتا}س + \text{جـ}$$

الطريقة الثالثة :

$$= \int \frac{3}{1-2\text{جتا}^2 س + 1} \, ؤس$$

$$= \int \frac{3}{2-2\text{جتا}^2 س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{3}{2(1-\text{جتا}^2 س)} \, ؤس$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{\text{جا}^2 س} \, ؤس$$

$$= \frac{3}{2} \int \text{قتا}^2 س \, ؤس$$

$$= -\frac{3}{2} \text{ظتا}س + \text{جـ}$$

الطريقة الرابعة :

$$= \int \frac{3}{1-(1+2\text{جا}^2 س)} \, ؤس$$

$$= \int \frac{3}{2\text{جا}^2 س} \, ؤس$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{\text{جا}^2 س} \, ؤس$$

$$= \frac{3}{2} \int \text{قتا}^2 س \, ؤس$$

$$= -\frac{3}{2} \text{ظتا}س + \text{جـ}$$

١٦) $\int \frac{1-\text{جا}^2 س}{\text{جا}^2 \frac{س}{2} \text{جتا}^2 \frac{س}{2}} \, ؤس =$

الحل :

$$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{(\frac{1}{2}\text{جا}س)^2} \, ؤس$$

$$= 4 \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \, ؤس$$

$$= 4 \int \text{ظتا}^2 س \, ؤس$$

$$= 4 \int (\text{قتا}^2 س - 1) \, ؤس$$

$$= 4 \int \text{قتا}^2 س \, ؤس - 4 \int ؤس$$

$$= -4\text{ظتا}س - 4س + \text{جـ}$$

١٧) $\int \frac{1-\text{جا}2س}{\text{جتا}س - \text{جا}س} \, ؤس =$

الحل :

$$1 = \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س$$

$$\text{جا}2س = 2\text{جا}س\text{جتا}س$$

$$= \int \frac{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س - 2\text{جا}س\text{جتا}س}{\text{جتا}س - \text{جا}س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{\text{جتا}^2 س - 2\text{جا}س\text{جتا}س + \text{جا}^2 س}{\text{جتا}س - \text{جا}س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{(\text{جتا}س - \text{جا}س)^2}{\text{جتا}س - \text{جا}س} \, ؤس$$

$$= \int \frac{(\text{جتا}س - \text{جا}س)(\text{جتا}س - \text{جا}س)}{\text{جتا}س - \text{جا}س} \, ؤس$$

$$= \int (\text{جتا}س - \text{جا}س) \, ؤس$$

$$= \int \text{جتا}س \, ؤس - \int \text{جا}س \, ؤس$$

$$= \text{جا}س + \text{جتا}س + \text{جـ}$$

١٨) $\int \frac{\text{د}س}{\text{جاس جتاس}} =$

الحل :

$= \int \frac{١}{\text{جاس جتاس}} \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جا}^٢س + \text{جتا}^٢س}{\text{جاس جتاس}} \text{د}س$

$= \int (\frac{\text{جا}^٢س}{\text{جاس جتاس}} + \frac{\text{جتا}^٢س}{\text{جاس جتاس}}) \text{د}س$

$= \int (\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}) \text{د}س$

$= \int (\text{ظاس} + \text{ظتاس}) \text{د}س$

$= \int \text{ظاس} \text{د}س + \int \text{ظتاس} \text{د}س$

$= \text{لو}|\text{جتاس}| + \text{لو}|\text{جاس}| + \text{ج}$

١٩) $\int \frac{٣ + \text{ظا}^٢س}{٢س + \text{ظاس}} \text{د}س =$

الحل :

$= \int \frac{٣ + (\text{قا}^٢س - ١)}{٢س + \text{ظاس}} \text{د}س$

$= \int \frac{٣ + \text{قا}^٢س - ١}{٢س + \text{ظاس}} \text{د}س$

$= \int \frac{٢ + \text{قا}^٢س}{٢س + \text{ظاس}} \text{د}س$

$= \text{لو}|٢س + \text{ظاس}| + \text{ج}$

٢٠) $\int \frac{٢}{١ + \text{جتا}٢س} \text{د}س =$

الحل :

الطريقة الاولى

$= \int \frac{٢}{٢\,\text{جتا}^٢س} \text{د}س$

$= \int \frac{١}{\text{جتا}^٢س} \text{د}س$

$= \int \text{قا}^٢س \text{د}س$

$= \text{ظاس} + \text{ج}$

الطريقة الثانية :

$= \int \frac{٢}{١ + \text{جتا}٢س} \times \frac{١ - \text{جتا}٢س}{١ - \text{جتا}٢س} \text{د}س$

$= \int (\frac{٢}{١ - \text{جتا}^٢٢س} \times \frac{١ - \text{جتا}٢س}{١}) \text{د}س$

$= \int \frac{٢(١ - \text{جتا}٢س)}{١ - \text{جتا}^٢٢س} \text{د}س$

$= \int \frac{٢ - ٢\,\text{جتا}٢س}{١ - \text{جتا}^٢٢س} \text{د}س$

$= \int \frac{٢ - ٢\,\text{جتا}٢س}{\text{جا}^٢٢س} \text{د}س$

$= \int (\frac{٢}{\text{جا}^٢٢س} - \frac{٢\,\text{جتا}٢س}{\text{جا}^٢٢س}) \text{د}س$

$= ٢ \int \text{قتا}^٢٢س \text{د}س - ٢ \int \text{ظتا}٢س \text{قتا}٢س \text{د}س$

$= -٢ \frac{\text{ظتا}٢س}{٢} + ٢ \frac{\text{قتا}٢س}{٢} + \text{ج}$

٢١) $\int \frac{\text{د}س}{\text{جتا}^٢س - ١} =$

الحل :

$= \int \frac{\text{د}س}{-\text{جا}^٢س}$

$= - \int \text{قتا}^٢س \text{د}س$

$= \text{ظتاس} + \text{ج}$

٢٢) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}} \text{د}س =$

الحل :

$= \int \text{ظاس} \frac{١}{\text{جتاس}} \text{د}س$

$= \int \text{ظاس} \text{قاس} \text{د}س$

$= \text{قاس} + \text{ج}$

٢٣) $\int_{٢٠١٥} \frac{٥\,\text{جا}^٢س + ٥\,\text{جتا}^٢س}{٣ + ٣\,\text{جتا}٢س} \text{د}س =$

الحل :

$= \int \frac{٥(\text{جا}^٢س + \text{جتا}^٢س)}{٣(١ + \text{جتا}٢س)} \text{د}س$

$= \frac{٥}{٣} \int \frac{(\text{جا}^٢س + \text{جتا}^٢س)}{(١ + \text{جتا}٢س)} \text{د}س$

$= \frac{٥}{٣} \int \frac{١}{(١ + \text{جتا}٢س)} \text{د}س$

$= \frac{٥}{٣} \int \frac{١}{٢\,\text{جتا}^٢س} \text{د}س$

$= \frac{٥}{٦} \int \frac{١}{\text{جتا}^٢س} \text{د}س$

$= \frac{٥}{٦} \int \text{قا}^٢س \text{د}س$

$= \frac{٥}{٦} \text{ظاس} + \text{ج}$

٢٤) $\int_{٢٠١٥س} \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتاس}} \text{د}س =$

الحل :

$= \int \frac{\text{جتا}(٢س + س)}{\text{جتاس}} \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جتا}٢س\,\text{جتاس} - \text{جا}٢س\,\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{د}س$

$= \int (\frac{\text{جتا}٢س\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جا}٢س\,\text{جاس}}{\text{جتاس}}) \text{د}س$

$= \int (\frac{\text{جتا}٢س\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}} - \frac{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}}) \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جتا}٢س\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}} \text{د}س - \int \frac{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}} \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جتا}٢س\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}} \text{د}س - \int \frac{٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{\text{جتاس}} \text{د}س$

Al-Rumuz Fi Al-Riyadiat Al-Wardat ٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨ - ٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤

التكامل المحدود

يرمز للتكامل المحدود للاقتران ق (س) بالنسبة الى (س) بالرمز الاتي :

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق}(س)\,ds س$$

ويقرأ : التكامل من (أ) الى (ب) للاقتران ق(س) ويسمى أ الحد السفلي للتكامل المحدود ويسمى ب بالحد العلوي للتكامل المحدود .

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق}'(س)\,ds س = \text{ق}(س)]_{أ}^{ب} = \text{ق}(ب) - \text{ق}(أ)$$

(تعويض الحد العلوي مكان المتغير) − (تعويض الحد السفلي مكان المتغير)

أمثلة : جد قيمة التكاملات التالية

١) $\int_{١}^{٥} (٢س + ٣)\,ds س$

$= \int_{١}^{٥} ٢س\,ds س + \int_{١}^{٥} ٣\,ds س$

$= \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٥} + ٣س]_{١}^{٥}$

$= (٥)^{٢} - (١)^{٢} + ٣(٥) - ٣(١) = ٣٦$

٢) $\int_{-١}^{٣} (٢س - ٥)\,ds س =$

الحل :

$= \int_{-١}^{٣} ٢س\,ds س - \int_{-١}^{٣} ٥\,ds س$

$= \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٣} - ٥س]_{-١}^{٣}$

$= (٩ - ١) - (٥ + ١) = -١٢$

٣) $\int_{١}^{٨} (٥\sqrt{س^{٢}} - \frac{٨}{س^{٢}})\,ds س =$

الحل :

$= \int_{١}^{٨} ٥س^{\frac{٢}{٣}}\,ds س - \int_{١}^{٨} ٨س^{-٢}\,ds س$

$= ٥س^{\frac{٥}{٣}} \times \frac{٣}{٥}\Big]_{١}^{٨} - \frac{٨س^{-١}}{-١}\Big]_{١}^{٨}$

$٣\sqrt{س^{٥}}]_{١}^{٨} + \frac{٨}{س}]_{١}^{٨}$

$= (٣ \times ٣٢ + ١) - (٨ + ٣) = ٨٦$

٤) $\int_{١}^{٣} ٢س\,ds س =$

الحل :

$= \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٢} = س^{٢}]_{١}^{٢}$

$= (٩) - (١) = ٨$

٥) $\int_{٠}^{٢} \frac{ds س}{\sqrt{٤س + ١}} =$

الحل :

٦) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جا٢س - جتاس)\,ds س =$

الحل :

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا٢س\,ds س - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس\,ds س$

$= \left[\frac{-جتا٢س}{٢}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} - جاس]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (\frac{-جتا\pi}{٢} - جا\frac{\pi}{٢}) - (\frac{-جتا٠}{٢} - ٠)$

$= \frac{١}{٢} - ١ + \frac{١}{٢} = ٠$

٧) $\int_{٠}^{\pi} \sqrt{١ - جتا٢س}\,ds س =$

الحل :

مادام داخل الجذر اقتران دائري يجب ان نجعله اقتران واحد .

$= \int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢جا^{٢}س}\,ds س$ ✓ $\sqrt{س ص} = \sqrt{س}\sqrt{ص}$

$= \int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢}\sqrt{جا^{٢}س}\,ds س$ ✓ $\sqrt{جا^{٢}س} = |جاس|$

$= \int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢}|جاس|\,ds س$

$= \sqrt{٢}\int_{٠}^{\pi} |جاس|\,ds س$

إعادة تعريف القيمة المطلقة

جاس = صفر ← س = ٠ ، π ، $\pi٢$

+ + + + + +	− − − − − −
$\pi٢$	π

انتبه الى الفترة المعطاة في السؤال [٠ ، π]

$= \sqrt{٢}\int_{٠}^{\pi} |جاس|\,ds س$

$= \sqrt{٢}\int_{٠}^{\pi} جاس\,ds س$

$= \sqrt{٢} \times -جتاس]_{٠}^{\pi}$

$= \sqrt{٢} \times -جتا\pi - \sqrt{٢} \times -جتا٠$

$= \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

٨) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{قاس} - \text{ظاس})^{٢}\ \text{د}س =$

الحل :

٩) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{د}س$

الحل :

١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{د}س}{\sqrt{٣\text{ظا}س - ١}}$

الحل :

١١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢}س\ \text{د}س$

الحل :

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س)\ \text{د}س$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جا}٢س)\ \text{د}س$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\frac{١}{٢}\text{د}س - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١}{٢}\text{جا}٢س\ \text{د}س$

$= \frac{١}{٢}س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} - \frac{١}{٢}\frac{-\text{جتا}٢س}{٢}]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (\frac{\pi}{٢} - ٠) + \frac{١}{٢}(\frac{\text{جتا}٢\pi}{٢} - \frac{\text{جتا}٠}{٢}) = \frac{\pi}{٢}$

١٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{١ + \text{جتا}٢س}\ \text{د}س$

الحل :

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{٢\text{جتا}^{٢}س}\ \text{د}س$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{٢}\sqrt{\text{جتا}^{٢}س}\ \text{د}س$

$= \sqrt{٢}\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} |\text{جتا}س|\ \text{د}س$

$= \sqrt{٢}\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}س\ \text{د}س$

$= \sqrt{٢}\text{جا}س]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \sqrt{٢}(\text{جا}\frac{\pi}{٤} - \text{جا}٠) = ١$

١٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (٥\text{جا}س + ٤\text{جتا}س)\ \text{د}س$

الحل :

١٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (١ + \text{قا}^{٢}س)\ \text{د}س$

الحل :

١٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{١+جتا٢س}\ د س$

الحل : **الفكرة "إعادة التعريف"**

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{٢جتا^{٢}س}\ د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{٢}\sqrt{جتا^{٢}س}\ د س$

$= \sqrt{٢}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |جتاس|\ د س$

$= \sqrt{٢}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ د س$

$= \sqrt{٢}[جاس]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{٢}(جا\frac{\pi}{2} - جا٠) = \sqrt{٢}$

١٦) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{١+جتا٢س}{٢}}\ د س$

الحل :

$= \int_{0}^{\pi} \frac{\sqrt{١+جتا٢س}}{\sqrt{٢}}\ د س$ ✓ $\boxed{\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}}$

$= \int_{0}^{\pi} \frac{\sqrt{٢}\sqrt{جتا^{٢}س}}{\sqrt{٢}}\ د س$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{جتا^{٢}س}\ د س$

$= \int_{0}^{\pi} |جتاس|\ د س$

إعادة تعريف القيمة المطلقة

جتاس = صفر

$س = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi٣}{٢}$ ✗

$\frac{\pi٣}{٢}$ $\frac{\pi}{٢}$ ٠

$= \int_{0}^{\pi} |جتاس|\ د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ د س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -جتاس\ د س$

$= جاس]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - جاس]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= (جا\frac{\pi}{2} - جا٠) - (جا\pi - جا\frac{\pi}{2}) = ٢$

١٧) $\int_{0}^{\pi^{٢}} \sqrt{\frac{١-جتا٢س}{٢}}\ د س$ الفكرة خاصية الاضافة

الحل :

$= \int_{0}^{\pi^{٢}} \frac{\sqrt{١-جتا٢س}}{\sqrt{٢}}\ د س$

$= \int_{0}^{\pi^{٢}} \frac{\sqrt{٢}\sqrt{جا^{٢}س}}{\sqrt{٢}}\ د س$

$= \int_{0}^{\pi^{٢}} \sqrt{جا^{٢}س}\ د س$

$= \int_{0}^{\pi^{٢}} |جاس|\ د س$

إعادة تعريف القيمة المطلقة

جاس = صفر

$س = \pi٢ ، \pi$

$\pi٢$ π ٠

$= \int_{0}^{\pi^{٢}} |جاس|\ د س = \int_{0}^{\pi} جاس\ د س + \int_{\pi}^{\pi^{٢}} -جاس\ د س$

$= -جتاس]_{0}^{\pi} + -جتاس]_{\pi}^{\pi^{٢}}$

$= (جا\pi - جا٠) - (جا٢\pi - جا\pi) = ٤$

١٨) $\int_{١}^{٠} \frac{٨}{(س+١)^{٣}}\ د س$

الحل :

١٩) $\int_{\frac{١}{٢}}^{٢} س^{٢}(س-١)\ د س$

الحل :

Al-Rumuz Fil Riyadiat T. Saad Al-Warda ٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤

٢٠) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\text{جاس}+\text{جتاس})^{2}\ \text{د س}$

الحل :

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\underline{\text{جا}^{2}\text{س}} + 2\text{جاس جتاس} + \underline{\text{جتا}^{2}\text{س}})\ \text{د س}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\text{جا}^{2}\text{س}+\text{جتا}^{2}\text{س})\text{د س} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\text{جاس جتاس د س}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 1\ \text{د س} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \text{جا}2\text{س}\ \text{د س}$

$= \text{س}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left[\frac{-\text{جتا}2\text{س}}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \pi + \frac{1}{2}$

٢١) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{د س}$

الحل :

٢٢) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (5 + 5\text{ظتا}^{2}\text{س})\ \text{د س}$

الحل :

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (5 + 5(\text{قتا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{د س}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (5 + 5\text{قتا}^{2}\text{س} - 5)\ \text{د س}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 5\text{د س} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 5\text{قتا}^{2}\text{س د س} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 5\ \text{د س}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 5\text{قتا}^{2}\text{س د س}$

$= 5\text{ظتاس}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 5 = \left[\frac{1}{\text{ظاس}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -5 + 5\sqrt{3}$

٢٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جا}2\text{س} - \text{جتاس})\ \text{د س}$

الحل :

٢٤) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{د س}}{1 - \text{جاس}}$

الحل :

٢٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \text{جتا}2\text{س}}\ \text{د س}$

الحل :

٢٦) $\int_{0}^{1} (2 + \text{هـ}^{\text{س}})^{2}\ \text{د س}$

الحل :

$= \int_{0}^{1} (4 + 4\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{2\text{س}})\ \text{د س}$ ✓ $\boxed{(\text{ا} + \text{ب})^{2} = \text{ا}^{2} + 2\text{اب} + \text{ب}^{2}}$

$= \int_{0}^{1} 4\text{د س} + \int_{0}^{1} 4\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{د س} + \int_{0}^{1} \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{د س}$

$= 4\text{س}]_{0}^{1} + 4\text{هـ}]_{0}^{1} + \left[\frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{\text{هـ}^{2}}{4} + 4\text{هـ} - \frac{1}{4}$

٢٧) $\int_{1}^{3} \text{هـ}^{2}\ \text{د س}$

الحل :

$= \frac{\text{هـ}^{2}}{2} \int_{1}^{3} 1\ \text{د س}$

$= \text{هـ}^{2}\text{س}]_{1}^{3} = 2\text{هـ}^{2}$

٢٨) $\int_{ب}^{لـ٣} هـ^{س^٢}\, ءس$

الحل :

٢٩) $\int_{ب}^{١} \frac{هـ^{س^٢}+٣}{هـ^{س}}\, ءس$

الحل :

٣٠) $\int_{ب}^{هـ} \frac{١+لـوس}{}\, ءس$

الحل :

٣١) $\int_{١}^{هـ} ٢س^٢ هـ\, لـوس\, ءس$

الحل :

٣٢) $\int_{ب}^{لـ٢} (١+هـ^{٢س})\, ءس$

الحل :

٣٣) $\int_{ب}^{لـ٢} هـ^{س}(٩-٤هـ^{س})\, ءس$

الحل :

٣٤) $\int_{-١}^{٣}(٦س^٢ - \int_{١}^{٢} ٢ص\, ءص)ءس = ٠$

الحل :

ملاحظة : اذا كان لدينا تكامل داخلي وخارجي نبدأ من الداخلي

$= \int_{-١}^{٣}(٦س^٢ - (ص^٢]_{١}^{٢}))ءس$

$= \int_{-١}^{٣}(٦س^٢ - ((٢)^٢ - (١)^٢))ءس$

$= \int_{-١}^{٣}(٦س^٢ - (٤-١))ءس$

$= \int_{-١}^{٣}(٦س^٢ - ٣)ءس$

$= ٦\int_{-١}^{٣} س^٢\, ءس - ٣\int_{-١}^{٣} ءس$

$= (\frac{٦س^٣}{٣} - ٣س]_{-١}^{٣})$

$= (٢س^٣ - ٣س]_{-١}^{٣}) = ٢(٣)^٣ - ٣(٣) - (٢(-١)^٣ - ٣(-١) = ٤٤$

٣٥) $\int_{١}^{٢}(٣س^٢ - (\int_{١}^{٢} ٢هـ\, ءهـ))\, ءس$

الحل :

٣٦) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+جا2س}\ ءس$

الحل :

٣٧)

١) اذا كان ق (١) = ٣ و ق (٣) =٩ فجد $\int_{1}^{3} هـ`(س)\ ءس$

الحل :

$\int_{1}^{3} هـ`(س)\ ءس = هـ(٣) - هـ(١) = ٩ - ٣ = ٦$

٢) اذا كان ق (١) = ٥ و ق (٣) = ١٢ فجد $\int_{1}^{3} هـ`(س) ءس$

الحل :

$\int_{1}^{3} هـ`(س) ءس = هـ(٣) - هـ(١) = ١٢ - ٥ = ٧$

٣٨) **اذا كان م (س) اقتران بدائي للاقتران ق (س) وكان** م (-١) = ٣، م(٢) = ٧

فجد $\int_{-1}^{2} (٣هـ(س) + ٢س - ١)\ ءس$ ؟

الحل :

٣٩) م (س) بدائي لـ ق (س) المتصل في [٣ ، ٧] وكان م (٣) = – ١

م (٧) = – ١٨ جد $\int_{٧}^{٣} (٢هـ(س) - ٥)\ ءس$

الحل : وزع التكامل اولا

$= ٢\int_{٧}^{٣} هـ(س) ءس - \int_{٧}^{٣} ٥ ءس$

$= ٢ \times ٩(س)]_{٧}^{٣} - ٥(٣ - ٧)$

$= ٢(٩(٣) - ٩(٧)) - ٥(-٤)$

$٢(-١ - (-١٨)) + ٢٠ = ٢(١٧) + ٢٠ = ٥٤$

٤٠) اذا كان $\int_{1}^{3} (٢هـ(س) - ٤س)\ ءس = -٤$ فجد $\int_{1}^{3} (٣هـ(س) + ١)\ ءس$

الحل :

٤١) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ لـو_{هـ} ظاس\ ءس =$

الحل :

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ لـو_{هـ} ظاس\ ءس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ ظاس لـو_{هـ} س\ ءس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ ظاس\ ءس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس \frac{١}{جاس}\ ءس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{جاس}\ ءس$

$= -لـو|جاس|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -لـو١ - لـو\frac{١}{٢} = -لـو١ - (لـو١ - لـو٢) = لـو٢$

٤٢) $\int_{\pi}^{\pi^2} \frac{\text{لـ}٢^{س}}{س^{٢}}$ ء س =

الحل :

ملاحظه : $\int_{أ}^{أ} ق(س)$ ء س = ٠ (**خاصية الحدود المتشابه**)

دائما التكامل المحدود يساوي صفر بشرط ان يكون الحد العلوي يساوي الحد السفلي

أمثلة :

١) $\int_{١}^{١} ٣س^{٢}$ ء س =

الحل :

$= \int_{١}^{١} ٣س^{٢}$ ء س

$\left| \frac{٣س^{٣}}{٣} \right|_{١}^{١} = (١)^{٣} - (١)^{٣} = ٠$

مهما كان الاقتران داخل التكامل سيكون ناتجه صفر

٢) $\int_{\pi٢}^{\pi٢} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}٢س}{٢}}$ ء س =

الحل :

$\int_{\pi٢}^{\pi٢} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}٢س}{٢}}$ ء س = ٠

٣) $\int_{٣}^{٣} \pi$ ء س

الحل :

$\int_{٣}^{٣} \pi$ ء س = ٠

٤) $\int_{٢}^{٢} \frac{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}{١ - هـ^{س}}$ ء س =

الحل :

$\int_{٢}^{٢} \frac{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}{١ - هـ^{س}}$ ء س = ٠

٥) $\int_{١}^{١} \frac{٥س^{٢}}{٥ - س^{٣}}$ ء س =

الحل :

$\int_{١}^{١} \frac{٥س^{٢}}{٥ - س^{٣}}$ ء س = ٠

ماذا تستنتج ؟

أمثلة : **جد قيمة الثابت**

الحالة الاولى : اذا كان ناتج التكامل عدد

١) $\int_{ب}^{جـ} (٢س - ٤)\, دس = ١٢$

الحل :

$= \int_{ب}^{جـ} (٢س - ٤)\, دس = ١٢$

$= \int_{ب}^{جـ} ٢س\, دس - \int_{ب}^{جـ} ٤\, دس = ١٢$

$= [س^{٢} - ٤س]_{ب}^{جـ} = ١٢$

$(جـ)^{٢} - ٤جـ - ((٠)^{٢} - ٤(٠)) = ١٢$

$جـ^{٢} - ٤جـ - ١٢ = ٠$

$(جـ - ٦)(جـ + ٢) = ٠$

$جـ = ٦ \quad جـ = -٢$

---

٢) $\int_{٢ن+١٢}^{٣ن+١٤} ٨\, دس = ٥٦$

الحل :

$= \int_{٢ن+١٢}^{٣ن+١٤} ٨\, دس = ٥٦$

$= [٨س]_{٢ن+١٢}^{٣ن+١٤} = ٥٦$

$= ٣ن + ١٤ - (٢ن + ١٢) = ٧$

$= ٣ن + ١٤ - ٢ن - ١٢ = ٧ \quad \Leftarrow \quad ن = ٣$

---

٣) $\int_{١}^{أ} ١٣\, دس = ١٨$

الحل :

---

٤) $\int_{٢}^{ك} (٢س - ١)\, دس = \int_{٢}^{٤} س\, دس$

احسب قيمة الثابت

الحل :

$= \int_{٢}^{ك} ٢س\, دس - \int_{٢}^{ك} ١\, دس = \int_{٢}^{٤} س\, دس$

$= [\frac{٢س^{٢}}{٢}]_{٢}^{ك} - [س]_{٢}^{ك} = [\frac{س^{٢}}{٢}]_{٢}^{٤}$

$ك^{٢} - ك = \frac{١}{٢}(١٦ - ٤)$

$ك^{٢} - ك = ٦$

$ك^{٢} - ك - ٦ = ٠$

$(ك - ٣)(ك + ٢) = ٠$

$ك = ٣ \ ، \ ك = -٢$

---

٥) $\int_{-٢}^{١} (أس^{٢} - ٢س + ١)\, دس = ١٥$

احسب قيمة الثابت أ ؟

الحل :

---

٦) $\int_{ب}^{أ} هـ^{س} (٦ - ٢هـ^{س})\, دس = ٤$

احسب قيمة الثابت أ ؟

الحل :

---

٧) $\int_{ب}^{٢} (٣س^{٢} - ٢\int_{ب}^{جـ} ٣م^{٢}\, دم)\, دس = -١٦$

احسب قيمة الثابت جـ ؟

الحل :

$\int_{ب}^{٢} (٣س^{٢} - \not{٢} \frac{٣م^{٣}}{\not{٣}}]_{ب}^{جـ})\, دس = -١٦$

$\int_{ب}^{٢} (٣س^{٢} - ٣(جـ^{٣} - ٠))\, دس = -١٦$

$\int_{ب}^{٢} (٣س^{٢} - ٣جـ^{٣})\, دس = -١٦$

$\int_{ب}^{٢} ٣س^{٢}\, دس - \int_{ب}^{٢} ٣جـ^{٣}\, دس = -١٦$

$[\frac{٣س^{٣}}{٣}]_{ب}^{٢} - ٣جـ^{٣}[س]_{ب}^{٢} = -١٦$

$٨ - ٣جـ^{٣}(٢) = -١٦$

$جـ^{٣} = ٤$

$جـ = \pm ٢$

الحالة الثانية : اذا كان ناتج التكامل صفر

١) $\int_{١}^{جـ}(٢س^{٢}+٦س)\,دس=٠$

الحل :

$\int_{١}^{جـ}(٢س^{٢}+٦س)دس=٠$

$\int_{١}^{جـ}٢س^{٢}\,دس+\int_{١}^{جـ}٦س\,دس=٠$

$٢\int_{١}^{جـ}س^{٢}\,دس+٦\int_{١}^{جـ}س\,دس=٠$

$\frac{٢}{٣}س^{٣}\Big]_{١}^{جـ}+٣س^{٢}\Big]_{١}^{جـ}=٠$

$\frac{٢}{٣}((جـ)^{٣}-(١)^{٣})+٣((جـ)^{٢}-(١)^{٢})=٠$

$\left[\times٣\;\frac{٢}{٣}((جـ)^{٣}-(١)^{٣})+٣((جـ)^{٢}-(١)^{٢})=٠\right]$

$\boxed{٢جـ^{٣}+٩جـ^{٢}-١١=٠}$

$(جـ-١)\underline{(٢جـ^{٢}+١١جـ+١١)}=٠$

$جـ=١\quad جـ=\frac{-ب\pm\sqrt{ب^{٢}-٤اجـ}}{٢ا}=\frac{-٧\pm\sqrt{٢١}}{٢}$

$جـ=\left\{١\;،\;\frac{-٧\pm\sqrt{٢١}}{٢}\right\}$

٢) $\int_{١}^{جـ}(س^{٢}+٤س)\,دس=٠$

الحل :

أسئلة (بين أو اثبت)

١) $\int_{-١}^{٢٠٠٠}س^{ن}\,دس=٢\int_{٠}^{١}س^{ن}\,دس\qquad ن\neq-١$ **جد مجموعة قيم ن ؟**

الحل :

$\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big]_{-١}^{١}=٢\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big]_{٠}^{١}$

$\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١}-\frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١}=٢\left(\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١}-\frac{(٠)^{ن+١}}{ن+١}\right)$

$-\frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١}=\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١}-\frac{٢(١)^{ن+١}}{ن+١}$

$-\frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١}=\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١}$

$-(-١)^{ن+١}=(١)^{ن+١}$

$(-١)^{ن+١}=-١$

ن+١ عدد فردي ⇐ ن عدد زوجي

٢) **اثبت ان** $\int_{٠}^{١}(س^{ن}+\sqrt{س})\,دس=١\qquad ن\neq-١$

الحل :

$=\int_{٠}^{١}س^{ن}+\int_{٠}^{١}\sqrt{س}\,دس=١$

$\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big]_{٠}^{١}+\frac{س^{\frac{١}{ن}+١}}{\frac{١}{ن}+١}\Big]_{٠}^{١}=١$

$\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١}-\frac{(٠)^{ن+١}}{ن+١}+\frac{(١)^{\frac{١}{ن}+١}}{\frac{١}{ن}+١}-\frac{(٠)^{\frac{١}{ن}+١}}{\frac{١}{ن}+١}=١$

$\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١}+\frac{(١)^{\frac{١}{ن}+١}}{\frac{١}{ن}+١}=١$

مهما كانت قيمة ن يبقى الناتج (١)

$\frac{١}{ن+١}+\frac{١}{\frac{١}{ن}+١}=١$

$\frac{١}{ن+١}+\frac{١}{\frac{ن}{ن}+\frac{١}{ن}}=١$

$\frac{١}{ن+١}+\frac{١}{\frac{ن+١}{ن}}=١$

$\frac{١}{ن+١}+\frac{ن}{ن+١}=١$

$\frac{ن+١}{ن+١}=١$

$١=١\#$

يمكن كتابة السؤال هكذا

اذا كان ن ≠ -١ فبين ان $\int_{٠}^{١}(س^{ن}+س^{\frac{١}{ن}})\,دس=١$

٣) **تدريب** اذا كانت ن عددا صحيحا موجبا اثبت ان

$\int_{-١}^{١}س^{ن}\,دس=\begin{cases}١ & ن\ زو\\ ٠ & ن\ ف\end{cases}\qquad\frac{ن+١}{٢}$

خواص التكامل المحدود

الخواص الخطية :

١) $\int_{أ}^{ب} ك\,د(س)\,ءس = ك\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$

٢) $\int_{أ}^{ب} (د(س)ءس \pm هـ(س))\,ءس = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س))\,ءس$

التكامل فقط يوزع في حالة الجمع والطرح

يلاحظ ان ناتج التكامل المحدود هو ثابت وليس اقتران مثل ناتج التكامل غير المحدود كما نلاحظ انه لا داعي لكتابة ثابت التكامل جـ عند اجراء التكامل المحدود لأنه يتم اختصاره بعد عملية التعويض المحدود .

أمثلة : جد قيمة كل مما يلي :

١) $\int_{٠}^{١} (س^{٢} + ٣س)\,ءس =$

الحل :

$= \int_{٠}^{١} س^{٢}\,ءس + \int_{٠}^{١} ٣س\,ءس$

$= \int_{٠}^{١} س^{٢} + ٣ \int_{٠}^{١} س\,ءس$

$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} + ٣\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١}$

$\frac{(١)^{٣}}{٣} + ٣\frac{(١)^{٢}}{٢} - \left(\frac{(٠)^{٣}}{٣} + ٣\frac{(٠)^{٢}}{٢}\right) = \frac{١١}{٦}$

٢) $\int_{١}^{٤} (\frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{\sqrt{س}})\,ءس =$ ***

الحل :

٣) $\int_{١}^{٤} (\frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}})\,ءس =$ ***

الحل : نقوم بالتجهيز

$= \int_{١}^{٤} (\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt{س}})\,ءس$

$= \int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}}\,ءس + \int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{س}}\,ءس$

$= \int_{١}^{٤} ١\,ءس + \int_{١}^{٤} س^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$س + ٢س^{\frac{١}{٢}}\Big]_{١}^{٤} = س + ٢\sqrt{س}\Big]_{١}^{٤} = ٤ + ٢\sqrt{٤} - (١ + ٢\sqrt{١}) = ٥$

٤) **اذا كان** $\int_{-٢}^{أ} د(س)\,ءس = ٧$ ، $\int_{-٢}^{أ} هـ(س)\,ءس = -٣$ **جد كل مما يلي :**

١) $\int_{-٢}^{أ} ٢د(س)\,ءس =$

الحل :

٢) $\int_{-٢}^{أ} (د(س) + ٣هـ(س))\,ءس =$

الحل :

٣) $\int_{-٢}^{أ} (د(س) - ٢س + ٣)\,ءس =$

الحل :

٤) **اذا كان** $\int_{-٢}^{٠} (٢د(س) + ٣)\,ءس = ٤$ **فجد** $\int_{-٢}^{١} (٨س - ٣د(س) + ٤)\,ءس$

الحل :

٥) **اذا كان** $\int_{ب}^{ا} جـ\,ه(س)\,ds = ٦$ ، $\int_{ب}^{ا} (ه(س)+٤)\,ds = -٢$ **فجد قيمة**

الثابت جـ ؟

الحل :

$$\int_{ب}^{ا} (ه(س)+٤)\,ds = -٢$$

$$\int_{ب}^{ا} ه(س)ds + \int_{ب}^{ا} ٤\,ds = -٢$$

$$\int_{ب}^{ا} ه(س)ds + ٤[س]_{ب}^{ا} = -٢$$

$$\int_{ب}^{ا} ه(س)ds + ٤(١-٠) = -٢$$

$$\therefore \int_{ب}^{ا} ه(س)ds = -٦$$

$$\int_{ب}^{ا} جـه(س)ds = ٦$$

$$جـ\int_{ب}^{ا} ه(س)ds = ٦$$

$$جـ \times -٦ = ٦ \Leftarrow جـ = -١$$

٦)

أ) **اذا كانت** $م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جا^{٢}س\,ds$ ، $ن = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا^{٢}س\,ds$ **فجد م + ن**

الحل :

$ج = \pi$

ب) **اذا كانت** $ا = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,ds$ ، $ب = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظا^{٢}س\,ds$ **فجد أ - ن**

الحل :

$ج = \frac{\pi}{٤}$

٧) **اذا كانت** $\int_{-\pi}^{\pi} جا^{٢}س\,ds = ا$ ، $\int_{-\pi}^{\pi} جتا^{٢}س\,ds = ب$ **فجد ٣أ + ٣ب**

الحل :

$ج = ٦\pi$

خاصية الحدود المتشابه

$$\int_{ا}^{ا} ه(س)\,ds = ٠$$

أمثلة :

١) $\int_{١}^{١} ٣س^{٢}\,ds =$

الحل :

$$= \int_{١}^{١} ٣س^{٢}\,ds$$

$$\left[\frac{٣س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{١} = (١)^{٣} - (١)^{٣} = ٠$$

مهما كان الاقتران داخل التكامل سيكون ناتجه صفر

(تم شرحها فيما سبق)

خاصية قلب الحدود

$$\int_{ا}^{ب} ه(س)\,ds = -\int_{ب}^{ا} ه(س)\,ds$$

عند عكس حدود التكامل نعكس اشارة الناتج وتكون القاعدة نفسها

أمثلة :

١) **اذا كان** $\int_{١}^{٣} ه(س)\,ds = ٦$ ، $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,ds = -٤$ **احسب**

أ) $\int_{٣}^{١} (٣هـ(س) - ٢ه(س))\,ds$

ب) $\int_{٣}^{١} (هـ(س) - ٢ه(س) + ٢س + ٤)\,ds$

الحل :

أ)

$$= \int_{٣}^{١} (٣هـ(س) - ٢ه(س))\,ds$$

$$= \int_{٣}^{١} ٣هـ(س)ds - \int_{٣}^{١} ٢ه(س)\,ds$$

$$= ٣\int_{٣}^{١} هـ(س)ds - ٢\int_{٣}^{١} ه(س)\,ds = ٣ \times ٤ - ٢ \times -٦ = ٢٤$$

ب)

$$= \int_{٣}^{١} (هـ(س) - ٢ه(س) + ٢س + ٤)\,ds$$

$$= \int_{٣}^{١} هـ(س)ds - \int_{٣}^{١} ٢ه(س)ds + \int_{٣}^{١} ٢س\,ds + \int_{٣}^{١} ٤\,ds$$

$$= \int_{١}^{٣} هـ(س)ds - ٢\int_{١}^{٣} ه(س)ds + ٢\int_{٣}^{١} س\,ds + ٤\int_{٣}^{١} ds$$

$$= ٤ - ٢(-٦) + \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٣}^{١} + ٤س]_{٣}^{١} = ٠$$

خاصية الاضافة

اذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة اعداد (ليس بالضرورة مرتبه) فان :

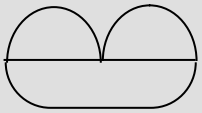
$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ص س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ص س \boxed{+} \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,ص س$$

اهم فائدة لهذه الخاصية هي ايجاد التكامل للاقتران المتشعب

اذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ص س = م$ ، $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,ص س = ن$

$$\Leftarrow \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ص س = م + ن$$

انتبه ب ليس من الضرورة ان تكون بين أ ، جـ



أمثلة :

١) اذا كان $\int_{١}^{٤} ق(س)\,ص س = ٨$ ، $\int_{٦}^{٤} \frac{١}{٢} ق(س)\,ص س = ٥$

احسب $\int_{١}^{٦} ق(س)\,ص س$ ؟

الحل :

نجهز المعطيات $\frac{١}{٢}\int_{٦}^{٤} ق(س)\,ص س = ٥ \Leftarrow \int_{٦}^{٤} ق(س)\,ص س = ١٠$

المطلوب $\int_{١}^{٦} ق(س)\,ص س = \int_{١}^{٤} ق(س)\,ص س + \int_{٤}^{٦} ق(س)\,ص س = ٨ + -١٠ = -٢$

٢) اذا كان $\int_{٢}^{٦} ق(س)\,ص س = ٣$ ، $\int_{٢}^{١} ق(س)\,ص س = ٧$

احسب $\int_{١}^{٦} ق(س)\,ص س$ ؟

الحل :

$$\int_{١}^{٦} ق(س)\,ص س = \int_{١}^{٢} ق(س)\,ص س + \int_{٢}^{٦} ق(س)\,ص س = -٧ + ٢ + ٣ = -٤$$

٣) اذا كان $\int_{-٢}^{٣} (ق(س) + ٢س)\,ص س = ٢١$ ، $\int_{١}^{٣} ٣\,ق(س)\,ص س = ١٥$

احسب $\int_{-٢}^{١} ق(س)\,ص س$ ؟

الحل :

$$\int_{-٢}^{٣} (ق(س) ص س + \int_{-٢}^{٣} ٢س\,ص س = ٢١ \Leftarrow \int_{-٢}^{٣} ق(س) ص س = ١٦$$

$$\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,ص س = ١٥ \Leftarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\,ص س = ٥$$

$$\int_{-٢}^{١} ق(س)\,ص س = \int_{-٢}^{٣} ق(س)\,ص س + \int_{٣}^{١} ق(س)\,ص س = ١٦ - ٥ = ١١$$

٤) اذا كان $\int_{١}^{٧} ق(س)\,ص س = ٦$ **وكان** $\int_{١}^{٣} ق(س)\,ص س = ١٢$

احسب $\int_{٣}^{٧} (٣ق(س) + ٢)\,ص س$ ؟

الحل :

٥) اذا كان $\int_{١}^{٩} ق(س)\,ص س = ٩$ ، $\int_{٤}^{١٠} \frac{١}{٢} ق(س)\,ص س = ١٠$

احسب $\int_{١}^{أ} (ق(س) - ٢س)\,ص س$ ؟

الحل :

٦) اذا كان $\int_{١}^{٢٠٠٧} هـ(س)\,ص س = ١٤$ ، $\int_{٨}^{١} هـ(س)\,ص س = ٥$

احسب $\int_{٨}^{٥} ٢هـ(س)\,ص س$ ؟

الحل :

$$= \int_{٥}^{٨} ٢هـ(س)\,ص س$$

$$= ٢\int_{٥}^{٨} هـ(س)\,ص س$$

$$= ٢(\int_{٥}^{١} هـ(س)\,ص س + \int_{١}^{٨} هـ(س)\,ص س)$$

$$٢(-١٤ + -٥) = -٣٨$$

٧) **اذا كان** $\int_{٢}^{٦}(٢هـ(س)+٥)\,دس = ٢٨$

احسب :

١) $\int_{٦}^{٥} هـ(س)\,دس + \int_{٥}^{٢} هـ(س)دس$

٢) $\int_{٦}^{٦} هـ(س)\,دس - \int_{٣}^{٢} هـ(س)دس$

الحل :

١) **تجهيز المعطيات**

$\int_{٢}^{٦}(٢هـ(س)+٥)\,دس = ٢٨ \Leftarrow ٢\int_{٢}^{٦} هـ(س)دس + ٥\int_{٢}^{٦} دس = ٢٨$

$٢\int_{٢}^{٦} هـ(س)دس + ٥س]_{٢}^{٦}\ دس = ٢٨ \Leftarrow ٢\int_{٢}^{٦} هـ(س)دس + ٥(٦-٢)\,دس = ٢٨$

$\Leftarrow \int_{٢}^{٦} هـ(س)دس = ٤$

$\int_{٦}^{٥} هـ(س)\,دس + \int_{٥}^{٢} هـ(س)دس = \int_{٦}^{٢} هـ(س)دس = -٤$

٢) $= \int_{٣}^{٦} هـ(س)\,دس - \int_{٣}^{٢} هـ(س)دس$

$= \int_{٣}^{٦} هـ(س)\,دس + \int_{٢}^{٣} هـ(س)دس$

$= \int_{٢}^{٦} هـ(س)دس = ٤$

٨) **اذا كان** $\int_{١}^{٣}(٧هـ(س)+١)\,دس = -١٩$

احسب :

١) $\int_{٢}^{١} هـ(س)\,دس + \int_{٣}^{٢} هـ(س)دس = \int_{٣}^{١} هـ(س)دس = ٣$

٢)

$\int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس - \int_{٣}^{٥} هـ(س)\,دس = \int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس + \int_{٥}^{٣} هـ(س)\,دس = \int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = -٣$

الحل :

تجهيز المعطيات

$\int_{١}^{٣}(٧هـ(س)+١)\,دس = -١٩$

$\int_{١}^{٣}٧هـ(س)دس + \int_{١}^{٣}١\,دس = -١٩$

$٧\int_{١}^{٣} هـ(س)دس + \int_{١}^{٣}١\,دس = -١٩$

$٧\int_{١}^{٣} هـ(س)دس + س]_{١}^{٣} = -١٩$

$\therefore \int_{١}^{٣} هـ(س)دس = -٣ \Leftarrow \int_{٣}^{١} هـ(س)دس = ٣$

٩) **اذا كان** $\int_{١}^{٢٠٠١} هـ(س)\,دس - \int_{٥}^{٣} هـ(س)\,دس = \int_{٣}^{١} هـ(س)\,دس$

جد قيمة أ ، ب ؟

الحل :

$\int_{١}^{آ} هـ(س)\,دس = \int_{٣}^{١} هـ(س)\,دس + \int_{٥}^{٣} هـ(س)\,دس$

الجمع التبديلي

$\int_{١}^{آ} هـ(س)\,دس = \int_{٥}^{١} هـ(س)\,دس$

$\therefore$ ١ = ٥ ب = ١

١٠) **اذا كان** $\int_{٢}^{ب} هـ(س)\,دس = \int_{٢}^{٧} هـ(س)\,دس - \int_{آ-١}^{ب+٢} هـ(س)\,دس$

جد قيمة أ ، ب ؟

الحل :

١١) **اذا كان** $\int_{١}^{آ} \frac{١}{٣} هـ(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{آ}^{ه} هـ(س)\,دس = ٢٠$

احسب $\int_{١}^{آ} ٣هـ(س)\,دس$ ؟

الحل :

تستخدم خاصية الاضافة لحساب تكامل الاقترانات التالية :

١) الاقتران المتشعب

٢) اقتران القيمة المطلقة

٣) اقتران الصحيح

ملاحظة : " لا نهتم بالاتصال عند اجراء التكامل "

يجب اعادة تعريف المطلق والصحيح اذا لزم الامر

امثلة :

١) اذا كان

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٢ & ، \ -١ \leq س < ٢ \\ ٤س & ، \ ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

فجد أ) $\int_{-١}^{٣} \text{ه}(س)\ ؤس$ **ب**) $\int_{٠}^{٢} \text{ه}(س)\ ؤس$

الحل : الفكرة " ....."

أ)

$$\int_{-١}^{٣} \text{ه}(س)\ ؤس = \int_{-١}^{٢} \text{ه}(س)\ ؤس + \int_{٢}^{٣} \text{ه}(س)\ ؤس$$

$$= \int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} - ٢)\ ؤس + \int_{٢}^{٣} (٤س)\ ؤس$$

$$= \int_{-١}^{٢} ٣س^{٢} ؤس - ٢\int_{-١}^{٢} ؤس + ٤\int_{٢}^{٣} س\ ؤس$$

$$= \left[\frac{٣س^{٣}}{٣} - ٢س\right]_{-١}^{٢} + \left[\frac{٤س^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٣} = ١٣$$

ب)

$$\int_{٠}^{٢} \text{ه}(س)\ ؤس = \int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ٢)\ ؤس$$

$$= \int_{٠}^{٢} ٣س^{٢} ؤس - ٢\int_{٠}^{٢} ؤس$$

$$\left[\frac{٣س^{٣}}{٣} - ٢س\right]_{٠}^{٢} = ٤$$

٢) اذا كان

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ ٢س + ٥ & ، \ ٢ \leq س \leq ٦ \end{cases}$$

فجد $\int_{٠}^{٦} \text{ه}(س)\ ؤس$

الحل :

$$\int_{٠}^{٦} \text{ه}(س)\ ؤس = \int_{٠}^{٢} \text{ه}(س)\ ؤس + \int_{٢}^{٦} \text{ه}(س)\ ؤس$$

$$= \int_{٠}^{٢} س^{٣}\ ؤس + \int_{٢}^{٦} (٢س + ٥)\ ؤس$$

$$= \int_{٠}^{٢} س^{٣}\ ؤس + \int_{٢}^{٦} ٢س\ ؤس + \int_{٢}^{٦} ٥\ ؤس$$

$$= \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٦} + ٥س]_{٢}^{٦} = ٥٦$$

٣) اذا كان

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} ٢س & ، \ س \geq ٣ \\ ٥ & ، \ س < ٣ \end{cases}$$

فجد أ) $\int_{٠}^{٤} \text{ه}(س)\ ؤس$ **ب**) $\int_{٠}^{٣} (\text{ه}(س) - ٢)\ ؤس$

جـ) $\int_{٣}^{٣} \text{ه}(س - ٢)\ ؤس$ **د)** $\int_{٣}^{٨} \text{ه}(٢س - ٤)\ ؤس$

الحل :

أ)

ب)

جـ)

$$= \int_{٠}^{٣} \text{ه}(س - ٢)\ ؤس$$

$ص = س - ٢ \Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = ١ \Leftarrow ؤص = ؤس$

$س = ٠ \Leftarrow ص = -٢$

$ص = ٣ \Leftarrow ص = ١$

$$= \int_{-٢}^{١} \text{ه}(ص)\ ؤص$$

$$= \int_{-٢}^{١} ٢ص\ ؤص = \int_{-٢}^{١} ٢س\ ؤس = \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{١} = -٣$$

د)

أمثلة : جد قيمة التكاملات التالية :

١) $\int_{1}^{3} |٤-٢س| \, ds$

الحل :إعادة تعريف

$|٤-٢س|$

$٤-٢س=٠ \Leftarrow س=٢$

١		٢		٣
	− − − − − −	٠	+ + + + + +	

$$\int_{1}^{3} |٤-٢س| \, ds = \int_{1}^{2} (٤-٢س) ds + \int_{2}^{4} (٢س-٤) ds$$

$$= \int_{1}^{2} ٤ ds - \int_{1}^{2} ٢س ds + \int_{2}^{4} ٢س ds - \int_{2}^{4} ٤ ds$$

$$= ٤ \int_{1}^{2} ds - ٢ \int_{1}^{2} س ds + ٢ \int_{2}^{4} س ds - ٤ \int_{2}^{4} ds$$

$$= ٤ [س]_{1}^{2} - ٢ \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{1}^{2} + ٢ \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{2}^{4} - ٤ [س]_{2}^{4} = ٢$$

٢) $\int_{-٢}^{١} |٣س| \, س-١ \, | \, ds$

الحل : إعادة تعريف

$|س-١|$

$س-١=٠ \Leftarrow س=١$

١		١		٢−
	− − − − − −	٠	+ + + + + +	

$$\int_{-٢}^{١} |٣س| \, س-١ \, | \, ds = \int_{-٢}^{١} ٣س \, (١-س) \, ds$$

$$= \int_{-٢}^{١} (٣س - ٣س^٢) \, ds$$

$$= \int_{-٢}^{١} ٣س \, ds - \int_{-٢}^{١} ٣س^٢ \, ds$$

$$= \left[\frac{٣س^٢}{٢}\right]_{-٢}^{١} - \left[\frac{٣س^٣}{٣}\right]_{-٢}^{١} = \frac{-٢٧}{٢}$$

٣) $\int_{٠}^{\pi} |١-جا^٢س| \, ds$

الحل : إعادة تعريف

$|١-جا^٢س|$

$١-جا^٢س=٠ \Leftarrow جا^٢س=١ \Leftarrow جاس=١ \Leftarrow س=\frac{\pi}{٢}$

π		$\frac{\pi}{٢}$		٠
	+ + + + + +		+ + + + + +	

$$\int_{٠}^{\pi} |١-جا^٢س| \, ds = \int_{٠}^{\pi} ١-جا^٢س \, ds$$

$$= \int_{٠}^{\pi} ١ ds - \int_{٠}^{\pi} جا^٢س \, ds$$

$$= \int_{٠}^{\pi} ١ ds - \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}(١-جتا٢س) \, ds$$

$$= \int_{٠}^{\pi} ١ ds - \frac{١}{٢} \int_{٠}^{\pi} ds + \frac{١}{٢} \int_{٠}^{\pi} جتا٢س \, ds = \frac{\pi}{٢}$$

٤) $\int_{٠}^{٦} \sqrt{س^٢-٤س+٤} \, ds$

الحل : إعادة تعريف

$$\int_{٠}^{٦} \sqrt{(س-٢)(س-٢)} \, ds = \int_{٠}^{٦} \sqrt{(س-٢)^٢} \, ds \quad ✓ \quad \boxed{\sqrt{س^{٢ن}} = |س|}$$

$$= \int_{٠}^{٦} |س-٢| \, ds$$

$|س-٢|$

$س-٢=٠ \Leftarrow س=٢$

٦		٢		٠
	+ + + + + +		− − − − − −	

$$\int_{٠}^{٦} |س-٢| \, ds = \int_{٠}^{٢} (٢-س) \, ds + \int_{٢}^{٦} (س-٢) ds$$

$$= ٢ \int_{٠}^{٢} ds - \int_{٠}^{٢} س \, ds + \int_{٢}^{٦} س ds - ٢ \int_{٢}^{٦} ds$$

$$= ٢س]_{٠}^{٢} - \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{٢}^{٦} - ٢س]_{٢}^{٦} = ١٠$$

٥) $\int_{٠}^{\pi} |جتاس| \, ds$

الحل :

\

٦) $ق(س) = |٣س-٦|$ **فما قيمة** $\int_{١}^{٣} ق(س) \, ds$ ؟

الحل : إعادة تعريف

٧)

$$ق(س) = \begin{cases} |٢س - ٢| & ، \ ٠ \le س \le ٤ \\ ١٤ & ، \ ٤ < س \le ٥ \end{cases}$$

اذا كان $\int_{أ}^{٦} ق(س)\,د س = ٦$ **جد قيمة أ ؟**

الحل :

أمثلة : جد قيمة التكاملات التالية :

١) $\int_{-٢}^{٣} \left[\frac{س}{٢} + ٥\right] د س$

الحل :

ايجاد طول الفترة $ل = \frac{١}{|م|} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

	٤	٥	٦
٤	٢	٠	-٢

$٤ = -٢ \le س < ٠$

$٥ = ٠ \le س < ٢$

$$\int_{-٢}^{٣} \left[\frac{س}{٢} + ٥\right] د س = \begin{cases} ٤ & ، \ -٢ \le س < ٠ \\ ٥ & ، \ ٠ \le س < ٢ \\ ٦ & ، \ ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

$$\int_{-٢}^{٣} \left[\frac{س}{٢} + ٥\right] د س = \int_{-٢}^{٠} ٤ د س + \int_{٠}^{٢} ٥ د س + \int_{٢}^{٣} ٦ د س$$

$$= ٤[س]_{-٢}^{٠} + ٥[س]_{٠}^{٢} + ٦[س]_{٢}^{٣} = ٢٤$$

---

٢) $\int_{٥ر٠}^{٤} [٣ - س]\,د س$

الحل :

ايجاد طول الفترة $ل = \frac{١}{|م|} = \frac{١}{|-١|} = ١$

	٢-	١-	٠	١	٢
٥	٤	٣	٢	١	٥ر٠

$٠ < س \le ١ = ٢$

$١ < س \le ٢ = ١$

$$\int_{٥ر٠}^{٤} [٣ - س]\,د س = \begin{cases} ٢ & ، \ ٥ر٠ < س \le ١ \\ ١ & ، \ ١ < س \le ٢ \\ ٠ & ، \ ٢ < س \le ٣ \\ -١ & ، \ ٣ < س \le ٤ \end{cases}$$

$$\int_{٥ر٠}^{٤} [٣ - س]\,د س = \int_{٥ر٠}^{١} ٢ د س + \int_{١}^{٢} ١ د س + \int_{٢}^{٣} ٠ د س + \int_{٣}^{٤} -١ د س$$

$$٢[س]_{٥ر٠}^{١} + ٠[س]_{١}^{٢} + -١[س]_{٣}^{٤} = ١$$

---

٣) ق (س) = ٤س - [س + ١] حيث س ∈ [١ ، ٣] **جد** $\int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$

الحل :

٤) اذا كان $\int_{1}^{ك} \left[\frac{1}{3}س+1\right] د س = 11$ فما قيمة الثابت $ك > 1$

الحل : نعيد التعريف ونأخذ القواعد التي تلزم ليكون الجواب ١١

طول الفترة $ل = \frac{1}{|م_{0}.س|} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

١	٢	٣	٤
٠	٣	٦	٩	١٢

$١ \geq س > ٣ = ١$

$٣ \geq س > ٦ = ٠$

نضرب بطول الفترة

$١ \times ٣ = ٣$

$٢ \times ٣ = ٦$

$٣ \times ٣ = ٩$

$\underline{\underline{٤ \times ٣ = ١٢}}$

يجب ان نصل الى الحد ١١ أو اقل من ١١ فقط

$\int_{1}^{ك} \left[\frac{1}{3}س+1\right] د س = \int_{1}^{3} 1 د س + \int_{3}^{6} 2 د س + \int_{6}^{ك} 3 د س = 11$

$\int_{1}^{3} د س + \int_{3}^{6} 2 د س + \int_{6}^{ك} 3 د س = 11$

$[س]_{1}^{3} + [2س]_{3}^{6} + [3س]_{6}^{ك} = 11$

$(3-1) + 2(6-3) + 3(ك-6) = 11$

$ك = 7$

٥) اذا كان $\int_{أ}^{1} \left[\frac{1}{3}س+2\right] د س = 15$ فما قيمة الثابت $أ > 0$

الحل : نعيد التعريف ونأخذ القواعد التي تلزم ليكون الجواب ١٥

طول الفترة $ل = \frac{1}{|م_{0}.س|} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

٣	٢	١	٠
٦	٣	٠	✗	$\boxed{-2}$	-1

$٠ \geq س > ٣ = ٢$

$٣ \geq س > ٦ = ٣$

نضرب بطول الفترة

$٢ \times ٣ = ٦$

$+$

$\underline{٣ \times ٣ = ٩}$

١٥

يجب ان نصل الى الحد ١٥ أو اقل من ١٥ فقط

$\int_{أ}^{1} \left[\frac{1}{3}س+2\right] د س = \int_{أ}^{3} 2 د س + \int_{3}^{6} 3 د س = 15$

$= \int_{أ}^{3} 2 د س + \int_{3}^{6} 3 د س = 15$

$[2س]_{أ}^{3} + [3س]_{3}^{6} = 15$

$2(3-٠) + 3(6-3) = 15$

$15 = 15$

٦) اذا كان $\int_{أ}^{1} \left[\frac{1}{3}س+2\right] د س = 12$ فما قيمة الثابت $أ < 0$

الحل :

٧) اذا كان $\int_{1}^{آ} \left[\frac{1}{2}س+2\right] د س = 17$ فما قيمة الثابت $جـ > 1$

الحل :

Al-Rwnq Fi Al-Riyadiat T. Saed Al-Ward ٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤

٨) **اذا كان** $\int_{0}^{٢٠٠١} \left[\frac{س}{ن}\right] ءس$ **حيث ن عدد طبيعي** ؟

الحل : **نعيد التعريف**

طول الفترة $ل = \frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{\frac{١}{ن}} = ن$

	١	٠	
٢ن	ن	٠	

٠ ≤ س < ن = ٠

ن ≤ س < ٢ن = ١

$$\int_{0}^{٢ن} \left[\frac{س}{ن}\right] ءس = \int_{0}^{ن} ٠ ءس + \int_{ن}^{٢ن} ١ ءس$$

$$= ٠[س]_{0}^{ن} + [س]_{ن}^{٢ن}$$

$$= ٠(ن - ٠) + (٢ن - ن) = ن$$

٩) **ما قيمة** $\int_{0}^{٢} [\, س + ٢ز٠ \,] ءس$

الحل : **نعيد التعريف**

طول الفترة $ل = \frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{١} = ١$

س + ٢ز٠ = [٢ز٠]

س = ٢ز٠

	٢	١	٠	
٨ز٢	٨ز١	٨ز٠	−٢ز٠	

−٢ز٠ ≤ س < ٨ز٠ = ٠

٨ز٠ ≤ س < ٨ز١ = ١

$$\int_{0}^{٢} [\, س + ٢ز٠ \,] ءس = \int_{0}^{٨ز٠} ١ ءس + \int_{٨ز٠}^{٢} ٢ ءس$$

$$= \int_{0}^{٨ز٠} ءس + ٢ \int_{٨ز٠}^{٢} ءس$$

$$= س]_{0}^{٨ز٠} + ٢س]_{٨ز٠}^{٢}$$

$$= (٨ز٠ - ١) + ٢(٢ - ٨ز٠)$$

١٠) **ما قيمة** $\int_{-٣}^{٥} (\, [\, ٢ - س \,] + |\, ٢س - ٤ \,|\,) ءس$

الحل : **نعيد التعريف**

[٢ − س]

طول الفترة $ل = \frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{١} = ١$

	−٣	−٢	−١	٠	١	
٥	٤	٣	٢	١	٠	

٠ < س ≤ ١ = ١

١ < س ≤ ٢ = ٠

| ٢س − ٤ |

٢س − ٤ = ٠ ⟸ س = ٢

	+ + + + +	− − − −	
٥	٣	٢	

$$\int_{-٣}^{٥} (\, [\, ٢ - س \,] + |\, ٢س - ٤ \,|\,) ءس = \int_{-٣}^{٥} [\, ٢ - س \,] ءس + \int_{-٣}^{٥} |\, ٢س - ٤ \,| ءس$$

$$= \int_{-٣}^{٤} -٢ ءس + \int_{٤}^{٥} -٣ ءس + \int_{-٣}^{٥} (٢س - ٤) ءس = ٣$$

خاصية المقارنة

اذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للتكامل في [أ ، ب]

وكان في ق(س) ≤ هـ(س) فان $\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س) ءس$

وكنتيجة لذلك :

١) **اذا كان ق (س) ≥ ٠ في [أ ، ب] فان** $\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \geq ٠$

٢) **اذا كان ق (س) ≤ ٠ في [أ ، ب] فان** $\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \leq ٠$

اي ان التكامل الاقتران السالب يكون سالب والموجب يكون موجب

يستفاد من هذه الخاصية فيما يلي :

أ) ايجاد اشارة التكامل المحدود بدون حساب التكامل .

أمثلة :

١) **بدون حساب التكامل جد اشارة** $\int_{0}^{١} س^{٢} - ٤ ءس$

الحل :

سوف نجد اشارة الاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ١] حيث نستخدم خط الاعداد والاشارات .

$س^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = ٢ ، -٢$

نلاحظ ان ق (س) < ٠

	+ + + + +	− − − − − − − − −	+ + + + + + + + +
	-٢	٢	

$\therefore \int_{0}^{١} س^{٢} - ٤ ءس < ٠$

٢) **بدون حساب التكامل جد اشارة** $\int_{0}^{١} \frac{٣ - س^{٢}}{٦س^{٢} + ١} ءس$

الحل :

نفرض $ق(س) = \frac{٣ - س^{٢}}{٦س^{٢} + ١}$ في [٠ ، ١]

بما ان البسط > ٠ في [٠ ، ١]

المقام > ٠ في [٠ ، ١]

∴ ق (س) > ٠ في [٠ ، ١]

$\therefore \int_{0}^{١} \frac{٣ - س^{٢}}{٦س^{٢} + ١} ءس > ٠$

٣) **بدون حساب التكامل جد اشارة** $\int_{-٤}^{-١} س^{٤} \sqrt{س^{٢} + ٥} ءس$

الحل :

فائدة : لإجراء مقارنة بين ق (س) ، هـ (س) نفرض اقتران

ل (س) = ق (س) - هـ (س) [حاصل طرح الاقترانيين]

ثم ندرس اشارة ل (س) فاذا انتج ان ل (س) > ٠ ⟸ ق (س) - هـ (س) > ٠

وبالتالي ق (س) > هـ (س)

ب) المقارنة بين قيم التكامل بدون حساب التكامل (المقارنة تعني > أو <)

اذا كان ق(س) ≥ هـ (س) في [أ ، ب] فان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ≥ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

١) بدون حساب التكامل ايهما اكبر

$\int_{٠}^{١}$ س ءس **أم** $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

الحل :

نقارن س مع س^{٢} خلال [٠ ، ١]

حيث س ≥ س^{٢} (**تم تعويض اعداد وايضا الاطراف لهذا وضعنا إشارة المساواة**)

∴ حسب خاصية المقارنة $\int_{٠}^{١}$ س ءس ≥ $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

هناك صيغة اخرى لسؤال

بدون حساب التكامل اثبت ان $\int_{٠}^{١}$ س ءس ≥ $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ءس

٢) بدون حساب التكامل

اثبت ان $\int_{-٢}^{١}$ (س^{٢} − ٢س) ءس ≥ $\int_{-٢}^{١}$ (٢ − ٣س) ءس

الحل :

نفرض ق (س) = س^{٢} − ٢س

هـ (س) = ٢ -٣س س ∈ [− ٢ ، ١]

نبحث اشارة

ق(س) − هـ (س) = س^{٢} - ٢س − (٢ - ٣س)

⟸ س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س + ٢) (س − ١) = ٠

س = - ٢ س = ١

∴ ق (س) − هـ (س) ≥ ٠ في [-٢ ، ١]

∴ **ق (س) ≥ هـ (س) في** [− ٢ ، ١]

∴ $\int_{-٢}^{١}$ (س^{٢} − ٢س) ءس ≥ $\int_{-٢}^{١}$ (٢ − ٣س) ءس

٤) دون اجراء عملية التكامل ابحث في اشارة $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٣} + ١) ءس

الحل :

٥) دون اجراء عملية التكامل ابحث في اشارة $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{-٥}{س^{٢}+٢}$ ءس

الحل :

٦) دون حساب التكامل جد اشارة $\int_{\pi}^{\pi٢}$ جاس ءس ≥ ٠

الحل :

لان ق(س) = جاس ≥ ٠ في [π ، **٢**π] **سبب اشارة المساواة ؟؟**

٧) دون حساب التكامل جد اشارة $\int_{-٢}^{٣}$ |٢س − ٥| ءس > ٠

الحل :

نفرض هـ(س) = |٢س − ٥| [-٢ ، ٣]

بما ان هـ(س) > ٠ [-٢ ، ٣]

∴ $\int_{-٢}^{٣}$ |٢س − ٥| ءس > ٠

٣) بدون حساب التكامل ايهما اكبر

$\int_{0}^{1} س^{٢}\,ص س$ **أم** $\int_{0}^{1} س^{٣}\,ص س$

الحل :

٤) بدون حساب التكامل اثبت ان $\int_{1}^{3} جا^{٤}\frac{\pi}{س}\,ص س \geq \int_{1}^{3} س^{٢}\sqrt{س^{٤}+١}\,ص س$

الحل :

جـ) ايجاد القيم القصوى للتكامل المحدود .

مقدمه :

ق(س) $\leq$ **٧** $\longleftarrow$ لدنيا اقل قيمة هي ٧

ق(س) $\geq$ **٥** $\longleftarrow$ لدنيا اكبر قيمة هي ٥

٣ $\leq$ **ق(س)** $\leq$ **٨** $\longleftarrow$ أصغر قيمة هي ٣ واكبر قيمة هي ٨

طريقة الحل : نحصر الاقتران الذي بداخل التكامل اولا ثم نكامل الطرفين

أمثلة :

١) اذا كان ق : [١ ، ٣] **وكان** $\boxed{\text{ق(س)} \leq ٦}$ **ما اقل قيمة للمقدار**

$\int_{1}^{3} (٢ق(س)-٤)\,ص س$ ؟

الحل : **من المعطيات ق(س)** $\leq$ ٦ **نضرب بـ ٢**

٢ ق(س) $\leq$ ١٢ **نطرح بـ ٤**

٢ ق(س) − ٤ $\leq$ ٨ **نأخذ تكامل لطرفين**

$\int_{1}^{3} (٢ق(س)-٤)\,ص س \leq \int_{1}^{3} ٨\,ص س$

$= \int_{1}^{3} (٢ق(س)-٤)\,ص س \leq ٨س]_{1}^{3}$

$= \int_{1}^{3} (٢ق(س)-٤)\,ص س \leq ٨(٣-١)$

$\therefore \int_{1}^{3} (٢ق(س)-٤)\,ص س \leq ١٦ \Longleftarrow$ **١٦ اقل قيمة للمقدار**

لتأكد من الحل :

نعوض العدد ٦ بدل ق (س) و نجري التكامل للعدد الناتج

٢) اذا كان ق(س) $\leq$ **٥** لكل س $\in$ [- ١ ، ٣] **ما اصغر قيمة للمقدار**

$\int_{-2}^{2} (٥ق(س)-٣)\,ص س$ ؟

الحل :

٣) اذا كان ق(س) ≥ ٧ لكل س ∈ [١ ، ٥] ما اكبر قيمة للمقدار

$\int_{١}^{٥} (٣ هـ(س) + ٤)\, د س$ ؟

الحل :

٤) اذا كان ق(س) ≥ ٦ لكل س ∈ [٢ ، ٥] ما اكبر قيمة للمقدار

$\int_{٢}^{٥} (\frac{٢}{هـ(س)} + ١)\, د س$ ؟

الحل :

بما ان ق(س) ≥ ٦ نقلب.....

$$\frac{١}{هـ(س)} \geq \frac{١}{٦}$$

$$\frac{٢}{هـ(س)} \geq \frac{١}{٣}$$

$$\frac{٢}{هـ(س)} + ١ \geq \frac{٤}{٣}$$

$$\int_{٢}^{٥} (\frac{٢}{هـ(س)} + ١)\, د س \geq \int_{٢}^{٥} \frac{٤}{٣}\, د س$$

$$\therefore \int_{٢}^{٥} (\frac{٢}{هـ(س)} + ١)\, د س \geq ٤$$

∴ اكبر قيمة للمقدار المعطى هي ٤

٥) اذا كان ق(س) ≥ ٦ لكل س ∈ [٢ ، ٤] جد

أ) اقل قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٤} هـ(س)\, د س$

ب) اقل قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٤} (٣ هـ(س) + ٤)\, د س$

جـ) اقل قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٤} \sqrt{٢ هـ(س) + ٤}\, د س$

د) اقل قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{١٠ - هـ(س)}\, د س$

الحل :

أ)

ب)

جـ) من المعطيات ق(س) ≥ ٦ نضرب بـ ٢

٢ق(س) ≥ ١٢ نجمع بـ ٤

٢ ق(س) + ٤ ≥ ١٦ نأخذ الجذر للطرفين

$$\int_{٢}^{٤} (٣ هـ(س) + ٤)\, د س \leq \int_{٢}^{٤} ٢٢\, د س$$

$$= \int_{٢}^{٤} (٣ هـ(س) + ٤)\, د س \leq ٤٤$$

$$\therefore \int_{٢}^{٤} (٣ هـ(س) + ٤)\, د س \geq ٤٤ \Leftarrow$$ **٤٤ اقل قيمة للمقدار**

د)

Al-Rumuz Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Warda
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤

٦) **اذا كان** ق(س) ≥ -٧ لكل س ∈ [١ ، ٤] **ما اكبر قيمة للمقدار**

$\int_{1}^{4} (٥ - ٢ هـ(س)) \, دس$ ؟

الحل :

٧) **اذا كان** ق(س) ≥ ١٠ لكل س ∈ [-٢ ، ٣] **فجد**

أ) **اكبر قيمة للمقدار** $\int_{-2}^{3} (٤ هـ(س) - ٦) \, دس$

ب) **اقل قيمة للمقدار** $\int_{-2}^{3} \frac{٤}{هـ(س) - ٣} \, دس$

جـ) **اذا كان** $\int_{-2}^{3} (٣ هـ(س) + ٤) \, دس \leq أ$ **فجد قيمة الثابت أ**

د) **اقل قيمة للمقدار** $\int_{-2}^{3} (٢ - هـ(س)) \, دس$

الحل :

أ)

ب)

جـ)

د)

٨) **اذا كان** -٢ ≥ ق(س) ≥ ٦ لكل س ∈ [١ ، ٦] **وكان**

م ≥ $\int_{1}^{6} هـ(س) \, دس$ ≥ ن **فجد م ، ن** ؟

الحل :

-٢ ≥ ق(س) ≥ ٦ في [١ ، ٦]

$\int_{1}^{6} -٢ \, دس \geq \int_{1}^{6} هـ(س) \, دس \geq \int_{1}^{6} ٦ \, دس$

$-٢ \int_{1}^{6} دس \geq \int_{1}^{6} هـ(س) \, دس \geq ٦ \int_{1}^{6} دس$

$-٢ [س]_{1}^{6} \geq \int_{1}^{6} هـ(س) \, دس \geq ٦ [س]_{1}^{6} \, دس$

$-١٠ \geq \int_{1}^{6} هـ(س) \, دس \geq ٣٠$

$\Leftarrow$ م = -١٠ ن = ٣٠

Al-Rawnaq Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Wardat
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤ - ٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨

٩) **اذا كان** ٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ لكل س ∈ [١ ، ٤] **وكان**

م ≤ $\int_{١}^{٤}$ (هـ(س) − ٣) ءس ≤ ن **فجد م ، ن ؟**

الحل :

١٠) **اذا كان** ٦ ≤ ق(س) ≤ ١١ لكل س ∈ [٢ ، ٥] **فجد قيمتي م ، ن حيث**

أ) م ≤ $\int_{٢}^{٥}$ هـ(س) ءس ≤ ن

ب) م ≤ $\int_{٢}^{٥}$ $\sqrt{هـ(س) - ٢}$ ءس ≤ ن

الحل :

أ)

ب)

١١) **اذا كان** ق: [١ ، ٤] **حيث** ٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ **جد**

أ) **اكبر قيمة للمقدار** $\int_{١}^{٤}$ (٣ + ٢هـ(س)) ءس

ب) **اكبر قيمة للمقدار** $\int_{١}^{٤}$ (٣ − ٢هـ(س)) ءس

جـ) **ما قيمة الثوابت ن ، م حيث** م ≤ $\int_{١}^{٦}$ (٣ − ٢هـ(س)) ءس ≤ ن

الحل :

أ)

ب)

Al-Rumuz Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Wardat
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤ - ٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨

١٢) **بدون اجراء التكامل بين ان** $\int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^٢}\ ءس \geq ٢$ ≥ ٠

حيث $\sqrt{١-س^٢}$ **قابل للتكامل على** [- ١ ، ١] ؟

الحل : **الفكرة " عند اشتقاق الاقتران دائما انتبه لفترة السؤال "**

سوف نقوم بحصر الاقتران ق (س) = $\sqrt{١-س^٢}$

بين اقل قيمة و أكبر قيمة ويتم ذلك من خلال الوحدة الثالثة

ق (س) = $\sqrt{١-س^٢}$ **س** $\in$ [- ١ ، ١]

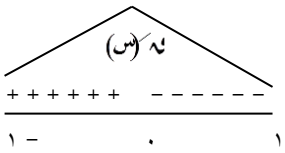
$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١-س^٢}} = ٠$ $\Leftarrow$ **جذور البسط س = ٠**

جذور المقام س = $\pm$ **١**

اكبر قيمة للاقتران هي ق(٠) = ١

اصغر قيمة هي ق (- ١) = صفر

أو ق (١) = **صفر**



$٠ \geq ق'(س) \geq ١$

$\Leftarrow ٠ \geq \sqrt{١-س^٢} \geq ١$

$\Leftarrow \int_{-١}^{١} ٠\ ءس \geq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^٢}\ ءس \geq \int_{-١}^{١} ١\ ءس$

$\Leftarrow [٠س]_{-١}^{١} \geq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^٢} \geq [س]_{-١}^{١}$

$\Leftarrow ٠ \geq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^٢} \geq ٢$

وهو المطلوب

١٣) **ق (س) =** $\sqrt{٤-س^٢}$ **بين ان** $\int_{-٢}^{٢} ق'(س)\ ءس$ **ينحصر بين صفر ، ٨ ؟**

الحل :

١٤) **دون اجراء عملية التكامل بين ان** $\frac{٢}{٣} \leq \int_{٠}^{١} \frac{ءس}{س+٤} \leq ٢$

الحل :

١٥) **دون اجراء عملية التكامل بين ان** $\frac{\pi}{٢} \leq \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} جا\frac{س}{٢}\ ءس \leq \pi$

الحل :

ق (س) = $جا\frac{س}{٢}$

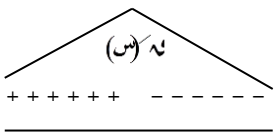
ق (س) = $جا\frac{س}{٢}$ **س** $\in$ [$\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi٤}{٣}$]

$ق'(س) = جتا\frac{س}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٠$ $\Leftarrow$ **جذور الاقتران** $\frac{س}{٢} = \frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi٣}{٢}$

س = $\boxed{\pi}$ ، $\pi٣$

اكبر قيمة للاقتران هي ق(π **) = ١**

اصغر قيمة هي ق ($\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{١}{٢}$



أو ق ($\frac{\pi٤}{٣}$) =

$\frac{١}{٢} \leq ق'(س) \leq ١$

$\Leftarrow \frac{١}{٢} \leq جا\frac{س}{٢} \leq ١$

$\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} \frac{١}{٢}\ ءس \leq \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} جا\frac{س}{٢}\ ءس \leq \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} ١\ ءس$

$\Leftarrow [\frac{١}{٢}س]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} \leq \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} جا\frac{س}{٢} \leq [١س]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}}$

$\Leftarrow \frac{\pi}{٢} \leq \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi٤}{٣}} جا\frac{س}{٢} \leq \pi$

بدايات التكامل

☺ التكامل : هي عملية عكسية للتفاضل حيث يكون لدينا المشتقة ويطلب منا الاقتران الاصلي (الاقتران البدائي) م (س)

⟸ يسمى الاقتران م (س) بدائي للاقتران ق(س) اذا تحقق الشرطين الآتيين :

١ – ق (س) متصل على الفترة [أ ، ب]

٢ – $م'(س) = ق(س)$

ما هو الاقتران الذي مشتقته ٢س ؟

الحل :

$م(س) = س^{٢} + جـ$

يمكن كتابة المطلوب في السؤال بصورة اخرى ؟

اذا كان ق(س) = ٢س جد الاقتران م (س) ؟

الحل :

$م(س) = س^{٢} + جـ$

ويوجد طريقة اخرى لطرح السؤال

جد $\int ٢س\,د س = س^{٢} + جـ$

أمثلة :

١) $\int ٣س^{٢}\,د س = \frac{٣س^{٣}}{٣} + جـ$

٢) $\int ٥\,د س = \frac{٥س}{١} + جـ$

٣) $\int ٥\,د ص = \frac{٥ص}{١} + جـ$

٤) $\int ٠\,د س = جـ$

٥) $\int ٥\,د ن = \frac{٥ن}{١} + جـ$

٦) $\int \sqrt[٣]{س}\,د س = \int س^{\frac{١}{٣}}\,د س = \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ$

٧) $\int قا^{٢} س\,د س = ظاس + جـ$

٨) $\int (٤س^{٣} + قاس ظاس)\,د س = \int ٤س^{٣}\,د س + \int قاس ظاس\,د س = \frac{٤س^{٤}}{٤} + قاس + جـ$

٩) $\int جاس\,د س = -جتاس + جـ$

تلخيص الدرس :

١) $\int ق'(س)\,د س = ق(س) + جـ$

٢) $\int ق(س)\,د س = م(س) + جـ$

٣) $ق'(س) = ق(س)$

$\int ق(س)\,د س \Longleftarrow$ ق متصل $\int ق(س)\,د س = ق(س)$

أمثلة :

١) **بين ان الاقتران الذي قاعدته** $م(س) = س^{٣} + جتاس + جـ$

هو اقتران بدائي ل ق (س) = $٣س^{٢} - جاس$ ؟

الحل :

ق(س) متصل

$ق'(س) = ٣س^{٢} - جاس$

٢) **بين ان الاقتران الذي قاعدته** $م(س) = \sqrt{س^{٢} + ٦س}$ **هو بدائي للاقتران** $ق(س) = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$ حيث ان س > ٠ ؟

الحل :

ق(س) متصل

$ق(س) = م'(س)$

$م'(س) = \frac{٢س + ٦}{٢\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$

$م'(س) = \frac{٢(س + ٣)}{٢\sqrt{س^{٢} + ٦س}} = \frac{(س + ٣)}{\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$

∴ م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س)

٣) **جد الاقتران البدائي للاقتران** $ق(س) = \frac{-٦}{س^{٢}}$ حيث $س \neq ٠$

وان م(٣) = ١ ؟

الحل :

ق(س) متصل

$م(س) = \int ق(س)\,د س$

$= \int \frac{-٦}{س^{٢}}\,د س$ لكن م (٣) = ١ ، س= ٣

$= \int -٦ \times س^{-٢}\,د س$ ١ = $٦س^{-١} + جـ$

$= -٦ \int س^{-٢}\,د س$ ١ = $٦(٣)^{-١} + جـ$

$= -٦\frac{س^{-١}}{-١} + جـ$ جـ = ١-

$م(س) = -٦\frac{س^{-١}}{-١} - ١$

تدريب :

جد الاقتران البدائي للاقترانات التالية :

١) $\text{ه}(س) = \text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س$

٢) $\text{ه}(س) = \text{قا}س(\text{ظا}س + \text{جتا}س)$

٣) $\text{ه}(ص) = (١ + ٤ص)(ص + ٢)$

٤) $\text{ه}(س) = ١ - \text{ظا}^{٢}س$

الحل :

٤) **اذا كان** $\text{ه}'(س) = س^{٣} + ٥س + ١$ ، $\text{ه}(١) = ٢$ **اوجد** ق(٣) ؟

الحل :

$\text{ه}'(س) = س^{٣} + ٥س + ١$

$\text{ه}(س) + جـ = س^{٣} + ٥س + ١$

لكن ق (١) = ٢ س = ١

$٢ + جـ = (١)^{٣} + ٥(١) + ١$

$٢ + جـ = ٧ \Longleftarrow جـ = ٥$

$ق'(س) + ٥ = س^{٣} + ٥س - ٤$

ق(٣) = ٣٨

٥) **بين ان** م (س) = س - $\text{جا}^{٢}س$ + ٣ و $\text{هـ}(س) = \frac{٢س + \text{جتا}٢س + ١}{٢}$

اقترانيين بدائيين لـ ق(س) = ١- جا٢ س ؟

الحل :

ق (س) متصل

$\text{م}'(س) = \text{ه}(س)$

$\text{م}'(س) = ١ - ٢\text{جا}س\text{جتا}س$

$\text{م}'(س) = ١ - \text{جا}٢س$

$\text{هـ}'(س) = \text{ه}(س)$

$\text{هـ}'(س) = \frac{٢ - \text{جا}٢س \times ٢}{٢}$

$\text{هـ}'(س) = \frac{٢(١ - \text{جا}٢س)}{٢}$

$\text{هـ}'(س) = ١ - \text{جا}٢س$

∴ م(س) و هـ(س) اقترانيين بدائيين لـ ق (س)

٦) **اذا كان** $\text{ه}(س) = \int (س^{٢} + ٥)\,\text{د}س$ **جد** $\text{ه}'(٢)$ ؟

الحل :

$\text{ه}(س) = \int \text{ه}'(س)\,\text{د}س$

$\text{ه}'(س) = س^{٢} + ٥$

$\text{ه}'(٢) = ٤ + ٥$

$\text{ه}'(٢) = ٩$

ملاحظة مهمه

$\text{ه}(س) = \int \text{ه}'(س)\,\text{د}س$

٧) **اذا كان** $ص = \int \frac{٣}{س + ١}\,\text{د}س$ جد $\frac{\text{د}^{٢}ص}{\text{د}س^{٢}}$ ؟

الحل :

$\frac{\text{د}}{\text{د}س}(ص = \int \text{ه}'(س)\,\text{د}س)$

$\text{ه}'(س) = \frac{٣}{س + ١}$

$\text{ه}''(س) = \frac{-٣}{(س + ١)^{٢}}$

$\text{ه}''(٢) = \frac{-٣}{٩} = \frac{-١}{٣}$

انتبه ص = ق (س)

قاعدة $\int \frac{د}{دس}\left[و(س) \right] د س = و(س)$

٨) **اذا كان** $\int \left[و(س) د س = س جاس \right.$ **جد** $و(\pi)$ ؟

الحل :

ملاحظة : في هذا السؤال يريد ق (س) ولكي نحصل عليها نضرب ب $\frac{د}{دس}$

$\int \frac{د}{دس}\left[و(س) د س = \frac{د}{دس}(س جاس) \right.$

$و(س) = س \times جتاس + جاس$

$و(\pi) = \pi \times جتا\pi + جا\pi$

$و(\pi) = -\pi$

٩) **اذا كان** $\int \left[(و(س) - ٢س) د س = س^{٣} + ٥س + ١ \right.$ **جد** $و'(٢)$ ؟

الحل :

$\int \frac{د}{دس}\left[(و(س) - ٢س) د س = \frac{د}{دس}(س^{٣} + ٥س + ١) \right.$

$و(س) - ٢س = ٣س^{٢} + ٥$

$و(س) = ٣س^{٢} + ٢س + ٥$

$و'(س) = ٦س + ٢$

$و'(٢) = ١٢ + ٢$

$و'(٢) = ١٤$

١٠) **اذا كان** $\int \left[و'(س) د س = س^{٢} + ٧ \right.$ وكان ق (١) = ٦ **فجد** ق(٢) ؟

الحل :

تذكر $\int \left[و'(س) د س = \underline{و(س) + جـ} \right.$

$و(س) + جـ = س^{٢} + ٧$

$و(١) + جـ = (١)^{٢} + ٧$

$٦ + جـ = ٨ \Leftarrow جـ = ٢$

$و(س) + ٢ = س^{٢} + ٧$

$و(س) = س^{٢} + ٥$

$و(٢) = ٤ + ٥ \Leftarrow و(٢) = ٩$

١١) **اذا كان** $\int \left[(و'(س) + ٢س) د س = س^{٣} + ١٢ \right.$ **وكان** $و'(٢) = ١٠$

ق(١) = ٧ جد ق (٢) ؟

الحل :

١٢) **اذا كان** $\int \left[(و'(س) + س^{٢}) د س = ٢س^{٣} + جـ س^{٢} + ٢ \right.$

وكان $و'(٢) = ٤$ ق(٢) = ٦ اوجد ق(-١) ؟

الحل :

١٣) **اذا كان** $\int \left[و(س) د س = جا^{٢}٢س + ظاس + جـ \right.$ **اوجد** $و'(\frac{\pi}{٤})$ ؟

الحل : باستخدام المتطابقة $جاس جتاس = \frac{١}{٢} جتا٢س$

$\int \frac{د}{دس}\left[و(س) د س = \frac{د}{دس}(جا^{٢}٢س + ظاس + جـ) \right.$

$و(س) = ٢جا٢س جتا٢س \times ٢ + قا^{٢}س$

$و(س) = ٢جا٤س + قا^{٢}س$

$و'(س) = ٢جتا٤س \times ٤ + ٢ قاس قاس ظاس$

$و'(\frac{\pi}{٤}) = ٢ \times -١ \times ٤ + ٢ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١$

$و'(\frac{\pi}{٤}) = -٨ + ٤$

$و'(\frac{\pi}{٤}) = -٤$

١٤) **اذا كان** $\int$ ه ´(س) ء س = س ٢ + ٣س + ٣ **وكان** ق(١)=٢ جد ق(٣) ؟

الحل :

ه (س)+جـ = س ٢ + ٣س + ٣

ه (١)+جـ = ١ + ٣ + ٣

٢+جـ = ٧ ⟸ جـ = ٥

ه(س) + ٥ = س ٢ + ٣س + ٣

ه(٣) + ٥ = ٩ + ٩ + ٣ ⟸ ه(٣) = ١٦

ملاحظة : ننتبه للمعطى وننتبه بشكل كبير على السؤال

١٥) **جد الاقتران البدائي للاقتران** ل(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ **حيث** م(٣)=١ ؟

الحل :

ق(س) = $\int$ ل(س) ء س

ق(س) = $\int \frac{١}{س^{٢}}$ ء س

ق(س) = $\int$ س $^{-٢}$ ء س

ق(س) = $\frac{س^{-١}}{-١}$ + جـ

ق(٣) = $\frac{١}{٣}$ + جـ

١ = $\frac{١}{٣}$ + جـ ⟸ جـ = $\frac{٤}{٣}$

ق(س) = س $^{-١}$ + $\frac{٤}{٣}$

ق(س) = $\frac{١}{س}$ + $\frac{٤}{٣}$

١٦) **اذا كان** ه ´(س)+جتاس = ٢س **فجد** ق (**س**) **حيث** ه($\frac{\pi}{٢}$) = ٤ ؟

الحل :

$\int$ (ه ´(س)+جتاس) ء س = $\int$ ٢س ء س

ه (س)–جاس = س ٢ +جـ

ه($\frac{\pi}{٢}$)–جا$\frac{\pi}{٢}$ = ($\frac{\pi}{٢}$) ٢ +جـ

٤ – ١ = $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + جـ ⟸ جـ = $\frac{٢٠ - \pi^{٢}}{٤}$

ه(س) = س ٢ – جاس + $\frac{٢٠ - \pi^{٢}}{٤}$

١٧) ص = $\int \frac{س}{س - ١}$ ء س اوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ | س=–١ ؟

الحل :

$\frac{ء ص}{ء س}$ (ص) = $\frac{ء ص}{ء س}$ $\int \frac{س}{س - ١}$ ء س

ص ´ = $\frac{س}{س - ١}$

ص | س=–١ = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$

١٨) **اذا كان** ص = هـ ^{س} × $\int$ هـ $^{-س}$ ء س **اثبت** ان $\frac{ء ص}{ء س}$ – ص = ١ ؟

الحل :

$\frac{ء ص}{ء س}$ = هـ ^{س} × هـ $^{-س}$ + $\int$ هـ $^{-س}$ × هـ ^{س}

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ١ + ص

$\frac{ء ص}{ء س}$ – ص = ١

ملاحظة : الاقتران الاسي مثل (هـ ^{س}) مشتقة تبقى كما هي (هـ ^{س}) × مشتقة الاس

١٩) **اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة** (**س** ، **ص**)

يساوي ٥س ^{٤} + ٢س + ٣ **أوجد قاعدة الاقتران ق علما بان** ق(٢) =٣ ؟

الحل :

$\int$ ه ´(س) ء س = $\int$ (٥س ٤ + ٢س + ٣) ء س

ه(س) = $\frac{٥س^{٥}}{٥}$ + $\frac{٢س^{٢}}{٢}$ + ٣س+جـ

ه(٢) = ٣٢ + ٤ + ٦ +جـ

٣ = ٤٢ +جـ ⟸ جـ = –٣٩

ه(س) = س ٥ + س ٢ + ٣س – ٣٩

ملاحظة : ميل المماس هو ه ´(س) لذلك نكامل حتى نحصل على الاقتران البدائي

٢٠) **اذا كان** $\int$ ه(س) ء س = جاس – جتاس + ٢ **اثبت ان** ه ($\frac{\pi}{٢}$) – ه ´($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

الحل :

٢١) اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث ان $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٢$

وكانت النقطة $(٠ ، ١)$ **تقع على منحناه فجد قاعدة الاقتران ق ؟**

الحل :

$$\int ق'(س)\,د س = \int (٣س^{٢} - ٢)\,د س$$

$$ق(س) = س^{٣} - ٢س + جـ$$

$$ق(٠) = ٠ - ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ١$$

$$ق(س) = س^{٣} - ٢س + ١$$

ملاحظة : بما ان التكامل لطرفين فان (جـ) توضع مع قيمة $ق'(س)$ للطرف اليسار وليس مع $ق'(س)$ $\Leftarrow \int ق'(س)\,د س = \int (٣س^{٢} - ٢)\,د س$

$$ق(س) = س^{٣} - ٢س + جـ$$

٢٢) اذا كان $ق'(س) = ٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$ **فجد** $ق(٣) - ق(١)$ ؟

الحل :

٢٣) اذا كان $م_{١}(س) ، م_{٢}(س)$ **اقترانيين بدائيين للاقتران ق (س) وكان**

$م_{١}(س) = س^{٢} - ٢س + ٥$ **بحيث ان** $م_{٢}(٣) = ٧$ فجد $م_{٢}(س)$ ؟

الحل :

بما ان $م_{١}(س) ، م_{٢}(س)$ اقترانين بدائيين لـ ق(س)

$$م_{٢}(س) = س^{٢} - ٢س + جـ$$

$$م_{٢}(٣) = ٩ - ٦ + جـ$$

$$٧ = ٣ + جـ \Leftarrow جـ = ٤$$

$$م_{٢}(س) = س^{٢} - ٢س + ٤$$

٢٤) اذا كان $ق(٢) = -٣$ **وكان** $ص = ٣س^{٢} - ٥$ $\int ق(س)\,د س$

فجد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٢}$ ؟

الحل :

٢٥) اذا كان $\int ق'(س)\,د س = ٢س^{٢} - \int (س^{٣} + ١)\,د س$ **فجد** $ق'(-١)$ ؟

الحل :

$$\frac{د}{د س}\int ق'(س)\,د س = \frac{د}{د س}(٢س^{٢} - \int (س^{٣} + ١)\,د س)$$

$$ق'(س) = \frac{د}{د س}(٢س^{٢}) - \frac{د}{د س}\int (س^{٣} + ١)\,د س$$

$$ق'(س) = ٤س - س^{٣} - ١$$

$$ق''(س) = ٤ - ٣س^{٢}$$

$$ق''(-١) = ٤ - ٣$$

$$ق''(-١) = ١$$

٢٦) اذا كان $\int ق(س)\,د س = جتاس - جاس - ١$ اوجد $ق'(\frac{\pi}{٤})$ ؟

الحل :

٢٧) اذا كان $\int ق(س)\,د س = جتا^{٢}س - ٢س + جـ$ **فان** $ق'(\frac{\pi}{٢})$ ؟

الحل :

الجواب : ٢

٢٨) اذا كان ق اقتران متصل على ح وكان $\int ق(س)\,د س = س^{٢} - جتاس + ٢$

اوجد $ق'(٠)$ ؟

الجواب : ٣

الحل :

٢٩) اذا كان ق(س) اقتران متصل على ح وكان

$\int_{1}^{2}(هـ(س)+٢)\,د س = س^{٣} + أس^{٢} + ٩$ **وكان** ق(١)=٧ **جد قيمة أ ؟**

الحل :

الجواب : أ = ٣

٣٠) اذا كان م(س)،هـ(س) **اقترانيين بدائيين للاقتران المتصل ق(س) فان**

(٢م − هـ)´(س) **يساوي أ ؟**

الحل :

الجواب: د

أ) أ = صفر ب) هـ´(س) جـ) هـ´(س) د) ق(س)

$م(س) = \int هـ(س)\,د س \Leftarrow م´(س) = هـ(س)$

$هـ(س) = \int هـ(س)\,د س \Leftarrow هـ´(س) = هـ(س)$

$\therefore (٢م - هـ)´(س) = ٢م´(س) - هـ´(س)$

$= ٢هـ(س) - هـ(س)$

$= هـ(س)$

٣١) اذا كان $\int هـ(س)\,د س = س^{٣} - س^{٢} + ٢س + ٣$ **جد ق (١) ، هـ´(١) ؟**

الحل :

٣٢) $\int هـ´(س)\,د س = س^{٢} + ٣س + ٣$ **جد ق (٤) علما بان** ق (١) = ٢ **؟**

الحل : نشاق الطرفين

تستخدم بإيجاد جـ

$هـ´(س) = ٢س + ٣$ لكن المطلوب ق(٤) لذلك نكامل الطرفين

$\int هـ´(س)\,د س = \int (٢س + ٣)\,د س$

$هـ(س) = س^{٢} + ٣س + جـ$

نجد جـ حيث

$هـ(١) = ٢$

$١ + ٣ + جـ = ٢$

$جـ = -٢$

$\therefore هـ(س) = س^{٢} + ٣س - ٢$

$\therefore هـ(٤) = ١٦ + ١٢ - ٢ = ٢٦$

٣٣) مهم اذا كان م (س) بدائي لـ ق(س) حيث م(س) = $س^{٢}$ + جـ

جد $\int_{١}^{٢} (هـ(٢س + ١) - ٣)\,د س$ ؟

الحل : نوزع ثم نستبدل

$= \int_{١}^{٢} هـ(٢س + ١)\,د س - \int_{١}^{٢} ٣\,د س$

$= \int_{١}^{٢} هـ(٢س + ١)\,د س - ٣\int_{١}^{٢} د س$

$ص = ٢س + ١ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٢ \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢}$

$س = ١ \Leftarrow ص = ٣$

$س = ٥ \Leftarrow ص = ١١$

$= \int_{٣}^{١١} هـ(ص)\frac{د ص}{٢} - ٣\int_{١}^{٢} د س$

$= \frac{١}{٢}\int_{٣}^{١١} هـ(ص)\,د ص - ٣\int_{١}^{٢} د س$

$= \frac{١}{٢}م(ص)]_{٣}^{١١} - ٣س]_{١}^{٢} = \frac{١}{٢}(م(١١) - م(٣)) - ٣(٥ - ١) = (١٢١ - ٩) - ١٢ = ٤٤$

٣٤) اذا كان $م_{١}(س)$ ، $م_{٢}(س)$ **اقترانيين بدائيين للاقتران ق(س)**

وكان ل(س) = $م_{١}(س)$ - $م_{٢}(س)$ فان ل´(س) = ؟

الحل :

ل (س) = مقدار ثابت لان طرح البدائيين = جـ

ل´(س) = ٠

تذكران : الفرق بين اي اقترانيين بدائيين للاقتران ق(س) يساوي ثابتا

اي ان $م_{١}(س) - م_{٢}(س) = ث$

٣٥) ق (س) كثير حدود من الدرجة الثانية ويمر بالنقطة (٠ ، ٣) وكان

$\int_{١٠}^{١} هـ(س)\,د س = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} هـ(س)\,د س = ٢$ **جد قاعدة الاقتران ؟**

الحل :

الجواب جـ = ٣

أ = − ٣

ب = صفر

٣٦) اذا كان $\text{ه}'(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$ **جد** ق (٣) – ق (١) ؟

الحل :

الجواب – ٤

٣٧) $\int_{٢}^{٣} \text{ه}(س - ١)\,ds = ٦$ **جد** $\int_{-١}^{٠} ٢(\text{ه}(س + ٢) + ٤س)\,ds$

الحل :

الجواب ١٠

افرض ان ص = س – ١ $\Leftarrow \frac{ds}{dس} = ١ \Leftarrow ds = dس$

س = ٣ ← ص = ٢

س = ٢ ← ص = ١

$$\int_{١}^{٢} \text{ه}(س)\,ds = ٦$$

$$\int_{-١}^{٠} ٢(\text{ه}(س + ٢) + ٤س)\,dس$$

$$= \int_{-١}^{٠} ٢(\text{ه}(س + ٢)\,dس + \int_{-١}^{٠} ٤س\,dس$$

$$= ٢\int_{-١}^{٠} \text{ه}(س + ٢)\,dس + ٤\int_{-١}^{٠} س\,dس$$

ص = س + ٢ $\Leftarrow ds = dس$

س = ٠ ← ص = ٢

س = –١ ← س = ١

$$= ٢\int_{١}^{٢} \text{ه}(ص)\,ds + ٤\int_{-١}^{٠} س\,dس$$

$$= ٢ \times ٦ + \left[\frac{٤س^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٠} = ١٠$$

٣٨) جد $\int \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣}\,ds$ ؟

الحل :

$$= \int \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣}\,ds$$

$$= \int (\sqrt{س} + ٣)\,ds$$

$$= \int (س)^{\frac{١}{٢}}\,ds + \int ٣\,ds$$

$$= \frac{(س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٣س + جـ$$

٣٩) $\text{ه}(س) = س^{٢} - \int_{٠}^{١} (٣س^{٢} - ٢ص)\,ds$ **جد** $\text{ه}'(س)$ ؟

الحل :

الجواب – ٨

٤٠) اذا كان $\text{م}(س) = س^{٣} - ٢س + ١$ **اقترانا بدائيا للاقتران ق (س)**

فجد ق (٢) ؟

الحل :

الجواب ١٠

٤١) اذا كان $\int \text{ه}'(س)\,ds = \frac{٢س + ٧}{س^{٢} - ١} - ٥$

فجد ق (٢) علما بان ق(٠)= ٣ ؟

الحل :

الجواب $\frac{٤١}{٣}$

٤٢) اذا كان $\int$ (هـ´(س)−جتاس) ءس = اجاس + ١ **وكان**

هـ´(π) = ١ ، هـ($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{٥}{٢}$ **فجد** :

١) قيمة الثابت أ — الجواب أ = − ٢

٢) هـ´(٠) — الجواب هـ´(٠) = −١

٣) هـ($\frac{\pi}{٢}$) — الجواب هـ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

الحل :

١) $\int_{ءس}$ (هـ´(س)−جتاس) ءس = اجاس + ١)

هـ´(س)−جتاس = اجتاس ⟸ هـ´(س) =جتاس + اجتاس

هـ´(π) =جتاπ + اجتاπ ⟸ ا = −٢

٢) هـ´(س) =جتاس + اجتاس

هـ´(٠) =جتا٠ + −٢جتا٠ ⟸ هـ´(٠) = −١

٣) $\int$ (هـ´(س)−جتاس) ءس = اجاس + ١

$\int$ هـ´(س)ءس−$\int$جتاس ءس = −٢جاس + ١

هـ(س)−جاس+جـ = −٢جاس + ١

هـ($\frac{\pi}{٦}$)−جا$\frac{\pi}{٦}$+جـ = −٢جا$\frac{\pi}{٦}$ + ١

$\frac{٥}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ +جـ = −٢ $\frac{١}{٢}$ + ١ ⟸ جـ = −٢

هـ(س)−جاس − ٢ = −٢جاس + ١

هـ($\frac{\pi}{٢}$)−جا$\frac{\pi}{٢}$ − ٢ = −٢جا$\frac{\pi}{٢}$ + ١ ⟸ هـ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

٤٣) اذا كان هـ(س) هو اقتران بدائي للاقتران ق (س) وكان هـ (٢) − هـ (١) = ٥ أ

وكان $\int_{١}^{٢}$ (٢هـ(س) + ٤) ءس = ٣٤

فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل :

مقدمة لطرق التكامل

قبل اجراء التكامل يجب **تجهيز الاقتران** وذلك **بتخلصه من الجذور والكسور والمتطابقات** ويتم ذلك كما يلي :

١) **نحول** الجذور الى اسس كسرية

٢) **الكسور التي لمقامها** قوة ترفع للبسط مع عكس اشارة القوة ما عدا القوة (١)

٣) **الكسور التي مقامها مثلثي ترفع للبسط بقيمتها وليس بقوتها** ما عدا العائلات الثلاث . وهي (جا مع جتا) ، (ظا مع قا^{٢}) ، (ظتا مع قتا^{٢})

٤) **عند ظهور اي من المتطابقات التالية** لوحدها (مع جمع أو طرح)

تستبدل فورا كما يلي :

$ظاس=\frac{جاس}{جتاس}$ ، $ظتاس=\frac{جتاس}{جاس}$ ، $ظا^{٢}س=قا^{٢}س-١$

$ظتا^{٢}س=قتا^{٢}س-١$ ، $جا^{٢}س=\frac{١}{٢}(١-جتا٢س)$ $جتا^{٢}س=\frac{١}{٢}(١+جتا٢س)$

تذكران جا٢س =٢جاس جتاس

امثلة :

١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}(جا^{٢}٥س+جتا^{٢}٥س)\,ءس=$

الحل :

$=\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}(جا^{٢}٥س+جتا^{٢}٥س)\,ءس$ ✓ $\boxed{جا^{٢}س+جتا^{٢}س=١}$

$=\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}١\,ءس=س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}=(\frac{\pi}{٢}-٠)=\frac{\pi}{٢}$

٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}(١+ظا^{٢}س)\,ءس=$

الحل :

٣) $\int\frac{١}{جاسظاس}\,ءس=$

الحل :

٤) $\int(جتا^{٢}٥س-جا^{٢}٥س)\,ءس=$

الحل :

٥) $\int\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\,ءس=$

الحل :

$=\int\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\,ءس$

$=\int(س^{٢})^{-\frac{١}{٣}}\,ءس=\int س^{-\frac{٢}{٣}}\,ءس$

$=\frac{س^{\frac{١}{٣}}}{\frac{١}{٣}}+جـ$

٦) $\int\frac{١}{٢س-٥}\,ءس=$

الحل :

$=\int\frac{١}{٢س-٥}\,ءس$

$=\frac{١}{٢}لـو_{هـ}|٢س-٥|+جـ$

٧) *** $\int جا^{-٢}س\,ءس=$

الحل :

$=\int جا^{-٢}س\,ءس$ ✓ $\boxed{\frac{١}{جا^{٢}س}=قتا^{٢}س}$

$=\int\frac{١}{جا^{٢}س}\,ءس$

$=\int قتا^{٢}س\,ءس$

$=-ظتاس+جـ$

طرق التكامل

اولا : حالة الجمع والطرح والمركب الخطي (التكامل المباشر)

في هذا النوع نقوم بإجراء التكامل الخطي مباشرا مع مراعاه ما يلي :

١) ما داخل القوس اقتران خطي من الدرجة الاولى .

٢) زاوية الاقتران المثلثي خطية من الدرجة الاولى .

٣) قوة الاقتران الاسي هـ$^{\text{اس}\pm\text{ب}}$ خطية من الدرجة الاولى .

في هذه النوع من الاسئلة يجب القسمة على معامل س (أ) دائما .

أمثلة :

١) $\int (٢س+٥)^{٣}$ د س =

الحل :

$= \frac{(٢س+٥)^{٤}}{٤} \times \frac{١}{٢} +$ جـ

$= \frac{(٢س+٥)^{٤}}{٨} +$ جـ

٢) $\int \sqrt{٢-٥س}$ د س =

الحل :

ج : $\frac{-٣}{٢٠}(٢-٥س)^{\frac{٤}{٣}} +$ جـ

٣) $\int (س^{٣} + س^{-٣} - هـ^{٣س} - جا٣س)$ د س =

الحل :

ج : $\frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{-٢}}{-٢} - \frac{هـ^{٣س}}{٣} + \frac{جتا٣س}{٣} +$ جـ

٤) $\int (س^{٥} + \frac{١}{س^{٥}} + \sqrt{س} + \frac{١}{جا^{٢}٥س})$ د س =

الحل :

ج : $\frac{س^{٦}}{٦} + \frac{س^{-٤}}{-٤} + \frac{٥س^{\frac{٦}{٥}}}{٦} - \frac{ظتا٥س}{٥} + \frac{١}{٢}(س - \frac{جا.١س}{١٠}) +$ جـ

٥) $\int (\sqrt{س} + \frac{١}{س} + ق^{٢}٣س)$ د س =

الحل :

ج : $\frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + لـو|س| + \frac{ظ٣س}{٣} +$ جـ

$= \int (\sqrt{س} + \frac{١}{س} + ق^{٢}٣س)$ د س

$= \int \sqrt{س}$ د س $+ \int \frac{١}{س}$ د س $+ \int ق^{٢}٣س$ د س

$= \int (س)^{\frac{١}{٢}}$ د س $+ \int \frac{١}{س}$ د س $+ \int ق^{٢}٣س$ د س

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + لـو|س| + \frac{ظ٣س}{٣} +$ جـ

٦) $\int (ظ^{٢}٣س + \frac{١}{ق^{٢}٥س} - ق ت ا^{٢}٣س)$ د س =

الحل :

ج : $\frac{ظ٣س}{٣} - س + \frac{١}{٢}(س + \frac{جا.١س}{١٠}) + \frac{ظتا٣س}{٣} +$ جـ

$= \int (ظ^{٢}٣س + \frac{١}{ق^{٢}٥س} - ق ت ا^{٢}٣س)$ د س

$= \int ظ^{٢}٣س$ د س $+ \int \frac{١}{ق^{٢}٥س}$ د س $- \int ق ت ا^{٢}٣س$ د س

$= \int (ق^{٢}٣س - ١)$ د س $+ \int جتا^{٢}٥س$ د س $- \int ق ت ا^{٢}٣س$ د س

$= \int ق^{٢}٣س$ د س $- \int ١$ د س $+ \int \frac{١}{٢}(١ - جتا.١س)$ د س $- \int ق ت ا^{٢}٣س$ د س

$= \frac{ظ٣س}{٣} - س + \frac{١}{٢}(س - \frac{جا.١س}{١٠}) - \frac{ظتا٣س}{٣} +$ جـ

٧) $\int (هـ^{٥س} + \frac{١}{هـ^{٥س}} + \sqrt{هـ^{س}} + هـ^{٥})$ د س =

الحل :

ج : $\frac{هـ^{٥س}}{٥} + \frac{هـ^{-٥س}}{-٥} + ٥هـ^{\frac{١}{٥}س} + هـ^{٥}س +$ جـ

$= \int (هـ^{٥س} + \frac{١}{هـ^{٥س}} + \sqrt{هـ^{س}} + هـ^{٥})$ د س

$= \int هـ^{٥س}$ د س $+ \int \frac{١}{هـ^{٥س}}$ د س $+ \int \sqrt{هـ^{س}}$ د س $+ \int هـ^{٥}$ د س

$= \int هـ^{٥س}$ د س $+ \int هـ^{-٥س}$ د س $+ \int (هـ^{س})^{\frac{١}{٥}}$ د س $+ \int هـ^{٥}$ د س

$= \frac{هـ^{٥س}}{٥} + \frac{هـ^{-٥س}}{-٥} + \frac{هـ^{\frac{س}{٥}}}{\frac{١}{٥}} + هـ^{٥}س +$ جـ

ثانيا : التكامل في حالة الضرب

يمنع اجراء التكامل مباشرة بل نقوم بفك الاقواس ان امكن وبغير ذلك نعتمد على طريقة

تسمى التعويض **حيث** نفرض **ص = جزء من السؤال ونجد** $\frac{د ص}{د س}$ **بحيث اذا**

كانت $\frac{د ص}{د س}$ **= ثابت** تغلى طريقة التعويض وتعتمد طريقة الاجزاء بحيث

نفرض ق = الجزء السهل للاشتقاق ونجد $\frac{د ص}{د س}$

دهـ = باقي السؤال ونجري التكامل .

مبادئ اختيار الفرض في حالة التعويض :

١) $\int$ (اقتران × مركب) دس نفرض ص = ما داخل المركب بدون قوة

أمثلة :

١) $\int \frac{٨س}{(س^{٢}+٥)^{٣}}$ د س =

الحل :

ص = $س^{٢}+٥$ ← $\int \frac{٨س}{س^{٣}}$ ص ^{٣} $\frac{د ص}{٨س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س$ $= \int ٤ص^{٣}$ د ص

$\frac{د ص}{د ٢س} = د س$ $= \frac{٤ص^{٤}}{٤} + جـ = ص^{٤} + جـ$

٢) $\int \frac{(٣س^{٢}+٥)}{(س^{٣}+٥س)^{٣}}$ د س =

الحل :

ص = $س^{٣}+٥س$ ← $\int \frac{(٣س^{٢}+٥)}{٣س^{٢}+٥}$ ص ^{٣} $\frac{د ص}{٣س^{٢}+٥}$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢}+٥$ $= \int ص^{٣}$ د ص

$\frac{د ص}{٣س^{٢}+٥} = د س$ $= \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{(س^{٣}+٥س)^{٤}}{٤} + جـ$

ج : $\frac{(س^{٣}+٥س)^{٤}}{٤} + جـ$

٣) $\int_{أ}^{ب} \frac{٤س}{\sqrt{س^{٢}+٩}}$ د س =

الحل :

$= \int_{أ}^{ب} ٤س (س^{٢}+٩)^{-\frac{١}{٢}}$ د س

ص = $س^{٢}+٩$ ← $= \int_{٩}^{٢٥} ٤س (ص)^{-\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{٢س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س$ $= \int_{٩}^{٢٥} ٢$ (ص) $^{-\frac{١}{٢}}$ د ص $= ٢ص^{\frac{١}{٢}} \Big]_{٩}^{٢٥} = ٨$

س = ٠ ⟸ ص = ٩

س = ٤ ⟸ ص = ٢٥

٤) $\int_{أ}^{ب} \frac{٦س^{٢}}{(س^{٣}+١)^{٣}}$ د س =

الحل :

ص = $س^{٣}+١$ ← $\int_{١}^{٢} \frac{٦س^{٢}}{س^{٣}}$ ص ^{٣} $\frac{د ص}{٣س^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢}$ $= \int_{١}^{٢} ٢ص^{٣}$ د ص

$\frac{د ص}{٣س^{٢}} = د س$ $= \Big[\frac{ص^{٤}}{٤}\Big]_{١}^{٢} = \frac{١}{٢}(١٦-١) = \frac{١٥}{٢}$

س = ١ ص = ٢

س = ٠ ص = ١

ج : $\frac{١٥}{٢}$

٥) $\int \frac{س^{٣}+٥}{\sqrt[٣]{س^{٤}+٢٠س}}$ د س =

الحل :

ج : $\frac{١}{٤} \times \frac{٣ص^{\frac{٢}{٣}}}{٢} + جـ$

٦) $\int \frac{س+١}{(س^{٢}+٢س-٥)^{٣}}$ د س =

الحل :

ج : $\frac{-١}{٤}(س^{٢}+٢س-٥)^{-٢} + جـ$

$= \int (س+١)(س^{٢}+٢س-٥)^{-٣}$ د س

ص = $س^{٢}+٢س-٥$ ← $\int (س+١)$ ص $^{-٣}$ $\frac{د ص}{٢س+٢}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س+٢$ $\int (س+١)$ ص $^{-٣}$ $\frac{د ص}{٢(س+١)}$

$\frac{د ص}{د ٢س+٢} = د س$ $\int \frac{١}{٢}ص^{-٣}$ د ص $= \frac{١}{٢}\frac{ص^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{١}{٢}\frac{(س^{٢}+٢س-٥)^{-٢}}{-٢} + جـ$

٧) $\int (٤س-٢)\sqrt{س-س^{٢}+٣}$ د س =

الحل :

٨) $\int \frac{٥-٤س}{(٢س^{٢}-٥س+٣)^{٦}}\,ﺩس$ =

الحل :

٩) $\int (٢س^{٣}+٣س)(س^{٤}+٣س^{٢}-٥)^{٧}\,ﺩس$ =

الحل :

١٠) $\int \frac{٣س-٦}{(٧+٤س-س^{٢})^{٢}}\,ﺩس$ =

الحل :

١١) $\int هـ^{س}\sqrt{١-هـ^{س}}\,ﺩس$ =

الحل :

ج : $-(١-هـ^{س})^{\frac{٣}{٢}}\times\frac{٢}{٣}+ج$

١٢) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \frac{جاس جتاس}{\sqrt{١+جا^{٢}س}}\,ﺩس$ =

الحل :

ج : $\sqrt{٢}-١$

١٣) $\int_{١}^{هـ} \frac{(١+لـوس)^{٤}}{س}\,ﺩس$ =

الحل :

١٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{جاس-جا^{٣}س}\,ﺩس$ =

الحل :

ج : $\frac{٢}{٣}$

ملاحظة : لا يجوز التكامل بوجود أكثر من متغير داخل التكامل الواحد واذا بقي أكثر من متغير نستفيد من الفرض الاصلي أو باستخدام احدى المتطابقات لتوحيد المتغير

أمثلة :

١) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{د س} =$

الحل :

$= \int \text{س}^{٣}(١+\text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = ١+\text{س}^{٢} \quad \leftarrow = \int \text{س}^{٣}(\text{ص})^{-\frac{١}{٢}}\frac{\text{د ص}}{٢\text{س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\text{س} \quad = \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٢}(\text{ص})^{-\frac{١}{٢}}\,\text{د ص}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢\text{س}} \quad = \frac{١}{٢}\int (\text{ص}-١)(\text{ص})^{-\frac{١}{٢}}\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص}^{\frac{١}{٢}}-\text{ص}^{-\frac{١}{٢}})\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\text{د ص} - \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - ٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\right)+\text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{٢(١+\text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - ٢(١+\text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}\right)+\text{جـ}$

٢) $\int ٢\text{س}^{٣}(\text{س}^{٢}+٣)^{٥}\,\text{د س} =$

الحل :

ج : $\frac{(\text{س}^{٢}+٣)^{٧}}{٧} - \frac{(\text{س}^{٢}+٣)^{٦}}{٢}+\text{جـ}$

$= \int ٢\text{س}^{٣}(\text{س}^{٢}+٣)^{٥}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢}+٣ \quad \leftarrow = \int \cancel{٢\text{س}^{٣}}(\text{ص})^{٥}\frac{\text{د ص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\text{س} \quad = \int \text{س}^{٢}(\text{ص})^{٥}\,\text{د ص}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢\text{س}} \quad = \int \underline{\underline{(\text{ص}-٣)}}(\text{ص})^{٥}\,\text{د ص}$

$= \int (\text{ص}^{٦}-٣\text{ص}^{٥})\,\text{د ص}$

$= \int \text{ص}^{٦}\text{د ص} - \int ٣\text{ص}^{٥}\,\text{د ص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - ٣\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}\right)+\text{جـ}$

$= \left(\frac{(\text{س}^{٢}+٣)^{٧}}{٧} - ٣\frac{(\text{س}^{٢}+٣)^{٦}}{٦}\right)+\text{جـ}$

٣) $\int \text{س}^{٨}(\text{س}^{-٣}-٢)^{٤}\,\text{د س} =$

الحل :

ج : $\frac{١}{٣}\left(\frac{(\text{س}^{-٣}-٢)^{٧}}{٧} + \frac{٤(\text{س}^{-٣}-٢)^{٦}}{٦} + \frac{٤(\text{س}^{-٣}-٢)^{٥}}{٥}\right)+\text{جـ}$

٤) $\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\,\text{د س} =$

الحل :

ج : $\frac{٣}{٢}\left(\frac{\sqrt{(\text{س}^{٢}+١)^{٧}}}{٧} - \frac{\sqrt{(\text{س}^{٢}+١)^{٤}}}{٤}\right)+\text{جـ}$

$= \int \text{س}^{٣}(\text{س}^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \quad \leftarrow = \int \cancel{\text{س}^{٣}}(\text{ص})^{\frac{١}{٣}}\frac{\text{د ص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\text{س} \quad = \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٢}(\text{ص})^{\frac{١}{٣}}\,\text{د ص}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢\text{س}} \quad = \frac{١}{٢}\int (\text{ص}-١)(\text{ص})^{\frac{١}{٣}}\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}-\text{ص}^{\frac{١}{٣}})\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{٤}{٣}}\text{د ص} - \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}^{\frac{٧}{٣}}}{\frac{٧}{٣}} - \frac{\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right)+\text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{(\text{س}^{٢}+١)^{\frac{٧}{٣}}}{\frac{٧}{٣}} - \frac{(\text{س}^{٢}+١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right)+\text{جـ}$

٥) $\int_{-١}^{} \text{س}^{٥}\sqrt{\text{س}^{٣}+١}\,\text{د س} =$

الحل :

٦) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}(٣+\text{هـ}^{\text{س}})^{-٧}\,\text{د س} =$

الحل :

ج : $\frac{(٣+\text{هـ}^{\text{س}})^{-٥}}{-٥} + \frac{(٣+\text{هـ}^{\text{س}})^{-٦}}{٢}+\text{جـ}$

$\text{ص} = ٣+\text{هـ}^{\text{س}} \quad \leftarrow = \int \cancel{\text{هـ}^{٢\text{س}}}(\text{ص})^{-٧}\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}} \quad = \int \text{هـ}^{\text{س}}(\text{ص})^{-٧}\,\text{د ص}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \quad = \int (\text{ص}-٣)(\text{ص})^{-٧}\,\text{د ص}$

$= \int (\text{ص}^{-٦}-٣\text{ص}^{-٧})\,\text{د ص}$

$= \int \text{ص}^{-٦}\text{د ص} - \int ٣\text{ص}^{-٧}\,\text{د ص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{-٥}}{-٥} - ٣\frac{\text{ص}^{-٦}}{-٦}\right)+\text{جـ}$

$= \left(\frac{(٣+\text{هـ}^{\text{س}})^{-٥}}{-٥} - ٣\frac{(٣+\text{هـ}^{\text{س}})^{-٦}}{-٦}\right)+\text{جـ}$

٧) $\int$ جتا^{٣}س (١+جاس)^{٥} د س =

الحل :

ج : $\frac{٢(١+\text{جاس})^{٧}}{٧} - \frac{(١+\text{جاس})^{٨}}{٨} + \text{ج}$

ص = ١+جاس ← $\int$ جتا^{٣}س (ص)^{٥} $\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتاس

$\int$ جتا^{٢}س (ص)^{٥} د ص

د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$

$\int$ (١ − جا^{٢}س) (ص)^{٥} د ص

$\int$ (١ − (ص^{٢} − ٢ص + ١)(ص)^{٥} د ص

$\int$ (١ − ص^{٢} + ٢ص − ١)(ص)^{٥} د ص

$\int$ (− ص^{٧} + ٢ص^{٦}) د ص

$\int$ − ص^{٧} د ص + $\int$ ٢ص^{٦} د ص

= (− $\frac{\text{ص}^{٨}}{٨}$ + ٢ $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$) + ج

= (− $\frac{(١+\text{جاس})^{٨}}{٨}$ + ٢ $\frac{(١+\text{جاس})^{٧}}{٧}$) + ج

اسئلة الغير مباشر

نستخدم في هذه الحالة :

التحليل ، توحيد المقام ، قوانين الاسس ، المتطابقات ، ..... الخ ثم التعويض

أمثلة :

١) $\int$ (س^{٦} + س)^{٤} د س =

الحل :

$\int$ (س (س^{٥} + ١)^{٤} د س

$\int$ س^{٤} (س^{٥} + ١)^{٤} د س

ص = س^{٥} + ١ ← $\int$ س^{٤} (ص)^{٤} $\frac{\text{د ص}}{٥\text{س}^{٤}}$

د ص = ٥س^{٤} د س $\int \frac{١}{٥}$ (ص)^{٤} د ص

د س = $\frac{\text{د ص}}{٥\text{س}^{٤}}$ $\frac{١}{٥} \times \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{ج} = \frac{(\text{س}^{٥}+١)^{٥}}{٢٥} + \text{ج}$

٢) ١٩٩٨ $\int$ س^{٣} $\sqrt[٣]{٢\text{س}^{٥} - \text{س}^{٣}}$ د س =

الحل :

ج : $\frac{٣}{١٦}$ $\sqrt[٣]{(٢\text{س}^{٢}-١)^{٤}} + \text{ج}$

$\int$ س^{٣} $\sqrt[٣]{(٢\text{س}^{٢}-١)}$ د س

$\int$ س $\sqrt[٣]{٢\text{س}^{٢}-١}$ د س

$\int$ س (٢س^{٢} − ١)$^{\frac{١}{٣}}$ د س

ص = ٢س^{٢} − ١ ← $\int$ س (ص)$^{\frac{١}{٣}}$ $\frac{\text{د ص}}{٤\text{س}}$

د ص = ٤س د س $\int \frac{١}{٤}$ (ص)$^{\frac{١}{٣}}$ د ص

د س = $\frac{\text{د ص}}{٤\text{س}}$ $\frac{١}{٤} \times \frac{\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{ج} = \frac{١}{٤} \frac{(٢\text{س}^{٢}-١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{ج}$

٣) $\int$ س^{١٣} $(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢)^{٥}$ د س =

الحل :

ج : $\frac{١}{٨}(\frac{(٢\text{س}^{٢}+١)^{٧}}{٧} - \frac{(٢\text{س}^{٢}+١)^{٦}}{٦}) + \text{ج}$

$\int$ س^{١٣} $(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢)^{٥}$ د س

$\int$ س^{٣} س^{١٠} $(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢)^{٥}$ د س

$\int$ س^{٣} (س^{٢} $(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢)^{٥}$ د س

$\int$ س^{٣} (١ + ٢س^{٢})^{٥} د س

ص = ١ + ٢س^{٢} ← $\int$ س^{٣} (ص)^{٥} $\frac{\text{د ص}}{٤\text{س}}$

د ص = ٤س د س $\int \frac{١}{٤}$ س^{٢} (ص)^{٥} د ص

د س = $\frac{\text{د ص}}{٤\text{س}}$ $\int \frac{١}{٤} \frac{(\text{ص}-١)}{٢}$ (ص)^{٥} د ص

$\int \frac{١}{٨}$ (ص^{٦} − ص^{٥}) د ص

$\int \frac{١}{٨}$ ص^{٦} − $\int \frac{١}{٤}$ ص^{٥} د ص

$\frac{١}{٨} \times \frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{١}{٨}\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{ج} = \frac{١}{٨} \times \frac{(١+٢\text{س}^{٢})^{٧}}{٧} - \frac{١}{٨}\frac{(١+٢\text{س}^{٢})^{٦}}{٦} + \text{ج}$

٤) $\int س^{٦} \sqrt{س - \frac{٣}{س^{٤}}}\ ؤس =$

الحل :

ج : $\frac{٢}{١٥}\sqrt{(س^{-٥} - ٣)^{٣}} + ج$

$= \int س^{٦} \sqrt{\frac{١}{س^{٤}}(س^{-٥} - ٣)}\ ؤس$

$= \int س^{٦} \sqrt{\frac{١}{س^{٤}}}\sqrt{(س^{-٥} - ٣)}\ ؤس$

$= \int س^{٦} \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{(س^{-٥} - ٣)}\ ؤس$

$= \int س^{٤}(س^{-٥} - ٣)^{\frac{١}{٢}}\ ؤس$

$ص = س^{-٥} - ٣ \quad \rightarrow \quad = \int س^{٤}(ص)^{\frac{١}{٢}} \frac{ؤص}{٥س^{٤}}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = ٥س^{٤} \quad = \frac{١}{٥}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ؤص$

$ؤس = \frac{ؤص}{٥س^{٤}} \quad = \frac{١}{٥}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ؤص$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{١}{٥} \times \frac{(س^{-٥} - ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج$

حل اخر

$= \int س^{٤} \boxed{س^{٢}} \sqrt{(س - \frac{٣}{س^{٤}})}\ ؤس$

$= \int س^{٤} \sqrt{س^{٤}(س - \frac{٣}{س^{٤}})}\ ؤس$

$= \int س^{٤} \sqrt{(س^{-٥} - ٣)}\ ؤس$

$= \int س^{٤}(س^{-٥} - ٣)^{\frac{١}{٢}}\ ؤس$

$ص = س^{-٥} - ٣ \quad \rightarrow \quad = \int س^{٤}(ص)^{\frac{١}{٢}} \frac{ؤص}{٥س^{٤}}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = ٥س^{٤} \quad = \frac{١}{٥}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ؤص$

$ؤس = \frac{ؤص}{٥س^{٤}} \quad = \frac{١}{٥}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ؤص$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{١}{٥} \times \frac{(س^{-٥} - ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج$

٥) وزاري $\int \frac{(س^{٣} + ١)^{٥}}{س^{١٩}}\ ؤس =$

الحل :

ج : $\frac{-١}{١٨}(١ + \frac{١}{س^{٣}})^{٦} + ج$

٦) $\int \frac{(س - ٢)^{٨}}{س^{١٠}}\ ؤس =$

الحل :

ج : $\frac{١}{١٨}(١ - \frac{٢}{س})^{٩} + ج$

٧) $\int \sqrt{س^{٢} + ٢س^{٤}}\ ؤس =$ $\boxed{س > ٠}$

الحل :

ج : $\frac{١}{٦}(١ + ٢س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= \int \sqrt{س^{٢}(١ + ٢س^{٢})}\ ؤس$ $\boxed{س > ٠}$

$= \int \sqrt{س^{٢}}\sqrt{(١ + ٢س^{٢})}\ ؤس$ $\boxed{\sqrt{س^{٢}} = |س|}$

$= \int |س| \sqrt{(١ + ٢س^{٢})}\ ؤس$

$|س| \Leftarrow س = ٠$ ++++ ---- $\rightarrow$

٠

$= \int س \sqrt{(١ + ٢س^{٢})}\ ؤس$

$= \int س (١ + ٢س^{٢})^{\frac{١}{٢}}\ ؤس$

$ص = ١ + ٢س^{٢} \quad \rightarrow \quad = \int \frac{١}{٤}ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ؤص}{٤س}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = ٤س \quad = \frac{١}{٤}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ؤص$

$ؤس = \frac{ؤص}{٤س} \quad = \frac{١}{٤} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{١}{٤} \times \frac{(١ + ٢س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج$

٨) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\sqrt{7س^2+8س}}{س^3}\,د س =$

الحل :

ج : $\frac{-1}{12}(-98)$

٩) $\int \frac{(2س+3)^9}{س^{11}}\,د س =$

الحل :

ج : $\frac{-1}{3}(\frac{3}{س}+2)^{10}+$ جـ

١٠) $\int (س+1)^3\,(س^2+2س+7)^5\,د س =$

الحل :

١١) $\int \frac{\sqrt{7س^3+2س}}{س^4}\,د س =$

الحل :

ج : $\frac{-3}{16}(1+\frac{2}{س^2})^{\frac{4}{3}}+$ جـ

Al-Rwaq Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Wardat
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤ - ٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨

١٢) $\int \frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^{٥}}}\,ds$ =

الحل :

$= \int \sqrt{\frac{س+١}{س^{٥}}}\,ds$ ✓ $\boxed{\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}}$

$= \int \sqrt{\frac{س}{س^{٥}} + \frac{١}{س^{٥}}}\,ds$

$= \int \sqrt{\frac{١}{س^{٤}}(١ + \frac{١}{س})}\,ds$

$= \int \sqrt{\frac{١}{س^{٤}}}\sqrt{(١ + \frac{١}{س})}\,ds$

$= \int \frac{١}{س^{٢}}(١ + \frac{١}{س})^{\frac{١}{٢}}\,ds$

$ص = ١ + \frac{١}{س}$ ← $= \int \frac{١}{س^{٢}}(ص)^{\frac{١}{٢}} \times -س^{٢}\,dص$

$\frac{dص}{ds} = \frac{-١}{س^{٢}}$ $= \int -(ص)^{\frac{١}{٢}}\,dص$

$ds = -س^{٢}\,dص$ $= \frac{-ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{-(١ + \frac{١}{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج$

١٣) $\int \frac{١}{س^{٢}-١}\sqrt{\frac{س+١}{س-١}}\,ds$ =

الحل :

ج : $-\sqrt{\frac{س+١}{س-١}} + ج$

$= \int \frac{١}{س^{٢}-١}(\frac{س+١}{س-١})^{\frac{١}{٢}}\,ds$

$ص = \frac{س+١}{س-١}$ ← $= \int \frac{١}{س^{٢}-١}(ص)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{-(س-١)^{٢}\,dص}{٢}$

$\frac{dص}{ds} = \frac{(س-١)-(س+١)}{(س-١)^{٢}}$ $= \int \frac{١}{(س-١)(س+١)}(ص)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{-(س-١)(س-١)\,dص}{٢}$

$ds = \frac{-(س-١)^{٢}\,dص}{٢}$ $= \int \frac{-(س-١)}{(س+١)}(ص)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{dص}{٢}$

$= \int -ص^{-١}(ص)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{dص}{٢} = \int -ص^{\frac{-١}{٢}} \times \frac{dص}{٢}$

$= \frac{-١}{\frac{١}{٢}}ص^{\frac{١}{٢}} + ج = -٢\sqrt{ص} + ج = -٢\sqrt{\frac{س+١}{س-١}} + ج$

١٤) $\int$ جا٢س $\sqrt{١-جاس}\,ds$ =

الحل :

ج : $(\frac{٤}{٥}(١-جاس)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}(١-جاس)^{\frac{٣}{٢}}) + ج$

١٥) $\int \frac{جتا^{٢}س - جا^{٢}س}{\sqrt{جا٢س}}\,ds$ =

الحل :

ج : $\sqrt{جا٢س} + ج$

١٦) $\int \frac{جتا٢س}{جا^{٢}س - جا^{٤}س}\,ds$ =

الحل :

ج : $\frac{-١}{\frac{١}{٢}جا٢س} + ج$

١٧) $\int \frac{١}{س^{٨} - س}\,ds$ =

الحل :

ج : $\frac{-١}{٧}لـو|س^{٧}| + \frac{١}{٧}لـو|س^{٧}-١| + ج$

١٨) $\int \frac{١}{\sqrt[٤]{س} - س}\,ds$ =

الحل :

ج : $\frac{-٤}{٣}لـو\left|١ - س^{\frac{٣}{٤}}\right| + ج$

في هذه الامثلة نقوم بإخراج العامل المشترك حتى تصبح الصورة

(مقدار) ^{ن} × مشتقة المقدار

أمثلة :

١) $\int$ $\sqrt{٢س^{٣}+٣س^{٥}}$ $ءس$ =

الحل :

ج : $\frac{١}{٨}(٢+٣س^{٢})^{\frac{٤}{٣}}+ج$

$= \int س^{٣}\sqrt{(٢+٣س^{٢})}\ ءس$

$= \int س^{٣} \times \sqrt{(٢+٣س^{٢})}\ ءس$

$= \int س \times \sqrt{(٢+٣س^{٢})}\ ءس$

ص $= ٢+٣س^{٢}$ ← $= \int$ بصر $(ص)^{\frac{١}{٣}} \times \frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س$ $= \int (ص)^{\frac{١}{٣}} \times \frac{ءص}{٦}$

$ءس = \frac{ءص}{٦س}$ $= \frac{١}{٦}\int (ص)^{\frac{١}{٣}}\ ءص$

$= \frac{١}{٦} \frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}+ج$

٢) $\int$ $س^{٢} \times \sqrt{س^{٧}+٢س^{٣}}$ $ءس$ =

الحل :

ج : $\frac{٣}{١٦}(س^{٤}+٢)^{\frac{٤}{٣}}+ج$

$= \int س^{٢} \times \sqrt{س^{٣}(س^{٤}+٢)}\ ءس$

$= \int س^{٢} \times س^{٣} \times \sqrt{(س^{٤}+٢)}\ ءس$

$= \int س^{٢} س \times \sqrt{(س^{٤}+٢)}\ ءس$

$= \int س^{٣} \times \sqrt{(س^{٤}+٢)}\ ءس$

٣) $\int$ $س \sqrt{س^{٨}+٢س^{٤}}$ $ءس$ =

الحل :

ج : $\frac{١}{٦}(س^{٤}+٢)^{\frac{٣}{٢}}+ج$

$= \int س \sqrt{س^{٤}(س^{٤}+٢)}\ ءس$

$= \int س \sqrt{س^{٤}} \times \sqrt{(س^{٤}+٢)}\ ءس$

$= \int س س^{٢} \sqrt{(س^{٤}+٢)}\ ءس$

$= \int س^{٣} \sqrt{(س^{٤}+٢)}\ ءس$

٤) $\int$ $(س^{٨}-٤س)^{٦}$ $ءس$ =

الحل :

ج : $\frac{١}{٤٩}(س^{٧}-٤)^{٧}+ج$

$= \int (س(س^{٧}-٤))^{٦}\ ءس$

$= \int س^{٦} (س^{٧}-٤)^{٦}\ ءس$

Al-Rwnq Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Warda
٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨ - ٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤

٢) $\int$ (اقتران × اسي) دس نفرض ص = قوة الاسي

أمثلة :

١) $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}}$ دس =

الحل :

ص = س ^{٣} ← $= \int \frac{س^{٢}}{س^{٢}} هـ^{ص} \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$ $= \frac{١}{٣} \int هـ^{ص}$ دص

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$ $= \frac{١}{٣} \int هـ^{ص}$ دص $= \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}} + ج$

٢) $\int_{٠}^{١} س^{٣} هـ^{س^{٤}-١}$ دس =

الحل :

ص = س ^{٤} − ١ ← $= \int_{٠}^{١} \frac{س^{٣}}{س^{٣}} هـ^{ص} \frac{دص}{٤س^{٣}}$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}$ $= \int_{٠}^{١} \frac{هـ^{ص}}{٤}$ دص

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$ $= \frac{١}{٤} \int_{٠}^{١} هـ^{ص}$ دص $= \frac{١}{٤} هـ^{ص} \Big]_{٠}^{١} = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٤هـ}$

س = ١ ⟸ ص = ٠

س = ٠ ⟸ ص = −١

٣) $\int \frac{دس}{س^{٢} هـ^{\frac{١}{س}}}$ =

الحل :

ج : $هـ^{\frac{-١}{س}} + ج$

ص = $\frac{١}{س}$ ← $= \int \frac{١}{س^{٢}} هـ^{ص} - س^{٢}$ دص

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}}$ $= \int هـ^{ص}$ دص

$دس = -س^{٢}$ دص $= -١ \int هـ^{-ص}$ دص $= -\frac{هـ^{-ص}}{-١} + ج = -\frac{هـ^{\frac{-١}{س}}}{-١} + ج$

٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا٢س $هـ^{جا^{٢}س}$ دس =

الحل :

ج : هـ − ١

ص = جا^{٢}س ← $= \int_{٠}^{١} \frac{جا٢س}{٢جاس\ جتاس} هـ^{ص}$ دص ✓ جا٢س = ٢جاس جتاس

$\frac{دص}{دس} = ٢جاس\ جتاس$ $= \int_{٠}^{١} \frac{٢جاس\ جتاس}{٢جاس\ جتاس} هـ^{ص}$ دص

$دس = \frac{دص}{٢جاس\ جتاس}$ $= \int_{٠}^{١} هـ^{ص}$ دص $= هـ^{ص} \Big]_{٠}^{١} = هـ - ١$

$س = \frac{\pi}{٢}$ ⟸ ص = ١

س = ٠ ⟸ ص = ٠

٥) $\int هـ^{جاس - لـو_{هـ} قاس}$ دس =

الحل :

ج : $هـ^{جاس} + ج$

$= \int \frac{هـ^{جاس}}{هـ^{لـو_{هـ} قاس}}$ دس ✓ $هـ^{س-ص} = \frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}}$

$= \int \frac{هـ^{جاس}}{قاس}$ دس ✓ $هـ^{لـو_{هـ}} = ١$

$= \int هـ^{جاس}$ جتاس دس ✓ $قاس = \frac{١}{جتاس}$

ص = جاس ← $= \int$

$\frac{دص}{دس} = \int$ =

دس = $\int$ =

٦) $٢٠٠٧ \int هـ^{س+٣هـ^{س}}$ دس =

الحل :

ج : $\frac{١}{٣} هـ^{٣هـ^{س}} + ج$

$= \int هـ^{س+٣هـ^{س}}$ دس ✓ $هـ^{س+٣هـ^{س}} = هـ^{س} هـ^{٣هـ^{س}}$

$= \int هـ^{س} هـ^{٣هـ^{س}}$ دس

ص = $٣هـ^{س}$ ← $= \int$

$\frac{دص}{دس} = \int$ =

دس = $\int$ =

٧) $\int_{٠}^{\pi} \frac{جاس\ هـ^{قاس}}{جتا^{٢}س}$ دس =

الحل :

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{جاس\ هـ^{قاس}}{جتا^{٢}س}$ دس

$= \int_{٠}^{\pi}$ ظاس قاس $هـ^{قاس}$ دس

$س = \pi$ ⟸ ص = −١

س = ٠ ⟸ ص = ١

ص = قاس ← $= \int_{١}^{-١}$

$\frac{دص}{دس} = \int_{١}^{-١}$

دس = $\int_{١}^{-١}$

٨) $\int \frac{هـ^{\sqrt{س+١}}}{٨\sqrt{س+١}}$ دس =

الحل :

٣) $\int$ (اقتران × مثلي) دس نفرض ص = زاوية المثلثي

أمثلة :

١) $\int 8س \overline{\text{جتا}^2 س^2}$ دس =

الحل :

ص = $س^2$ ← $\int$ = $\int 8س$ جتا^{2}ص $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = 2س$ = $4\int \frac{1}{2}(1+$جتا2ص) دص

د س = $\frac{د ص}{2س}$ = $2س^2 +$جا2$س^2 +$جـ

٢) $\int$ جتا$^2(هـ^{س})$ $هـ^{س}$ دس =

الحل :

جـ : $\frac{1}{2}(س + \frac{جا2هـ^{س}}{2})+$جـ

ص = $هـ^{س}$ ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = =

٣) $_{2004}$ $\int$ جاس قا^2(جتاس) دس =

الحل :

جـ : $-$ (ظاس (جتاس))+جـ

ص =جتاس ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = =

٤) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\pi}{س^2}$ جا$\frac{\pi}{س}$ دس =

الحل :

جـ : -2

ص = $\frac{\pi}{س}$ ← $\int_{\pi 2}^{\pi}$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int_{\pi 2}^{\pi}$

د س = =

س = ١ ⟸ ص = π

س = $\frac{1}{2}$ ⟸ ص = $\pi 2$

٥) $\int$ س ظا(س^2 + ٥) دس =

الحل :

جـ : $\frac{-1}{2}$لو|جتا(س^2 + ٥)|+جـ

ص = $س^2 +$ ٥ ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = =

٦) $\int \frac{ظا^2 \sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ دس =

الحل :

جـ : $-$ ٢ظا $\sqrt{س} - 2\sqrt{س}+$جـ

ص = $\sqrt{س}$ ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = =

٧) $\int \frac{2س - 1}{ظا^2(س^2 - س + 2)}$ دس =

الحل :

جـ : $-$ظتا(س^2 $-$ س + ٢) $-$ (س^2 $-$ س + ٢)+جـ

ص = $س^2 -$ س + ٢ ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = =

٨) $\int$ س جاس^2 ظا^2(جتاس^2) دس =

الحل :

جـ : $\frac{-1}{2}$(ظا(جتاس^2) $-$ جتاس^2)+جـ

ص =جتاس^2 ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = $\int$ =

$\int$ =

٩) $_{**}$ $\int \frac{ظتا^2(لو_{هـ} س)}{س}$ دس =

الحل :

جـ : $-$ظتا(لو$_{هـ}$ س) $-$ لو$_{هـ}$ س+جـ

ص =لو$_{هـ}$ س ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س}$ = $\int$

د س = س د ص = $\int$

١٠) $\int \frac{2س}{جتا^2(س^2 + 1)}$ دس =

الحل :

جـ : ظا(س^2 + ١)+جـ

ص = $س^2 +$ ١ ← $\int$ =

$\frac{د ص}{د س}$ = $\int$

د س = =

٤) $\int$ جتا^{ن}س جا^{م}س ءس حيث ان ن ، م اعداد صحيحة موجبة

نفرض الاتي (**لتسهيل الحل**) عند الفرض يكون **دون القوة**

١) اذا كانت احدى القوة (١) نفرض الاخرى ص =

٢) اذا كانت احدى القوة زوجية والاخرى فردية **نفرض الزوجية** .

٣) اذا كانت ن ، م فرديتان نفرض اي منهما و**يفضل الكبرى** .

٤) اذا كانت ن ، م زوجيتان نستخدم المتطابقات .

اذا كانت الزاوية مختلفة نفكر بمتطابقة

أمثلة :

١) $\int$ جا^{٢}٣س جتا٣س ءس =

الحل :

ص =جا٣س ← $\int$ = ص^{٢} جتا٣س $\frac{ءص}{٣جتا٣س}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣جتا٣س $\int$ = $\frac{١}{٣}$ ص^{٢} ءص

$\frac{ءص}{٣جتا٣س}$ = ءس $\int$ = $\frac{١}{٩}$ (جا٣س)^{٣} +جـ

٢) $\int$ $\frac{جا٢س}{قتا^{٤}س}$ ءس =

الحل :

ج : $\frac{١}{٣}$ (جاس)^{٦} +جـ

$\int$ = $\int$ جا٢س جا^{٤}س ءس ✓ جا٢س = ٢جاس جتاس

$\int$ = $\int$ ٢جاس جتاس جا^{٤}س ءس

$\int$ = $\int$ ٢جتاس جا^{٥}س ءس

ص =جاس ← $\int$ =

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\int$ =

ءس = =

٣) $\int$ جاس (١+جتا٢س)^{٣} ءس =

الحل :

ج : $\frac{-٨}{٧}$ جتا^{٧}س +جـ

$\int$ = $\int$ جاس (١+جتا٢س)^{٢} ءس ✓ ١+جتا٢س = ٢جتا^{٢}س

$\int$ = $\int$ جاس (٢جتا^{٢}س)^{٣} ءس

$\int$ = $\int$ جاس ٨جتا^{٦}س ءس

ص =جتاس ← $\int$ =

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\int$ =

ءس = =

٤) $\int$ $\frac{جا٢س}{قتا^{٢}س}$ ءس =

الحل :

ج : $\frac{١}{٢}$ جا^{٤}س +جـ

٥) $\int$ قا^{ن}س ظا^{م}س ءس حيث ان ن ، م اعداد صحيحة موجبة

نفرض الاتي (**لتسهيل الحل**)

١) اذا كانت ن زوجية نفرض ظاس = ص دون القوة

٢) اذا كانت ن ، م فرديتان نفرض قاس = ص دون القوة

اذا كانت الزاوية مختلفة نفكر بمتطابقة

أمثلة :

١) $\int$ قا^{٢}٣س ظا٣س ءس =

الحل :

ص =ظا٣س ← $\int$ = قا^{٢}٣س ص $\frac{ءص}{٣قا^{٢}٣س}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣قا^{٢}٣س $\int$ = $\frac{١}{٣}$ ص ءص

$\frac{ءص}{٣قا^{٢}٣س}$ = ءس $\int$ = $\frac{١}{٦}$ (ظا٣س)^{٢} +جـ

٢) $\int$ قا^{٥}س ظاس ءس =

الحل :

ج : $\frac{قا^{٥}س}{٥}$ +جـ

ص =قاس ← $\int$ =

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\int$ =

ءس = =

٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٤}س جاس ءس =

الحل :

ج : $\frac{٧}{٣}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٣}س قاس جاس ءس ✓ قاس = $\frac{١}{جتاس}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٣}س $\frac{١}{جتاس}$ جاس ءس

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٣}س $\frac{جاس}{جتاس}$ ءس

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ قا^{٣}س ظاس ءس

ص =قاس ← $\int_{١}^{٢}$ =

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\int_{١}^{٢}$ =

ءس = =

س = $\frac{\pi}{٣}$ ⇐ ص = ٢

س = ٠ ⇐ ص = ١

٤) $\int \frac{جا^{٥}س}{جتا^{٧}س}\, ءس =$

الحل :

ج : $\frac{ظا^{٦}س}{٦}+ج$

$= \int \frac{جا^{٥}س}{جتا^{٥}س\ جتا^{٢}س}\, ءس$

$= \int \frac{جا^{٥}س}{جتا^{٥}س}\ \frac{١}{جتا^{٢}س}\, ءس$

$= \int ظا^{٥}س\ قا^{٢}س\ ءس$

ص $=$ظاس $\leftarrow = \int$

$\frac{ءص}{ءس} = \int =$

ءس $=$ $=$

٥) $\int \frac{ءس}{جتا^{٢}س\ \sqrt{١+ظاس}} =$

الحل :

$= \int \frac{ءس}{جتا^{٢}س\ \sqrt{١+ظاس}}$

$= \int قا^{٢}س \frac{١}{\sqrt{١+ظاس}}\, ءس$

ص $= \sqrt{١+ظاس}$ $\leftarrow = \int قا^{٢}س \frac{١}{\sqrt{ص}} \frac{ءص}{قا^{٢}س}$

$\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢}س$ $= \int \frac{١}{\sqrt{ص}}\, ءص = \int (ص)^{-\frac{١}{٢}}\, ءص$

ءس $= \frac{ءص}{قا^{٢}س}$ $= \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}+ج$

$= \frac{(\sqrt{١+ظاس})^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}+ج$

حل اخر

$= \int \frac{ءس}{جتا^{٢}س\ \sqrt{١+ظاس}}$

$= \int قا^{٢}س \frac{١}{\sqrt{١+ظاس}}\, ءس$

$قا^{٢}س = ١+ظا^{٢}س \Leftarrow$ قاس $= \sqrt{١+ظا^{٢}س}$

$\leftarrow = \int قا^{٢}س \frac{ءص}{قاس}$

$= \int$ قاس ءص $= \int \frac{قاس(ظاس+قاس)}{(ظاس+قاس)}\, ءص$

$=$لو$_{م}|ظاس+قاس|+ج$

٦) $\int$ قتا^{٥}س ظتا^{٣}س ءس حيث ان ن ، م اعداد صحيحة موجبة

نفرض الاتي (لتسهيل الحل)

١) اذا كانت ن زوجية نفرض ظتاس = ص

٢) اذا كانت ن ، م فرديتان نفرض قتاس = ص

اذا كانت الزاوية مختلفة نفكر بمتطابقة

أمثلة :

١) $\int$ ظتا^{٤}س قتا^{٢}س ءس $=$

الحل :

ص $=$ظتاس $\leftarrow = \int$ ص^{٤} قتا^{٢}س $\frac{ءص}{-قتا^{٢}س}$

$\frac{ءص}{ءس} = -قتا^{٢}س$ $= -\int$ ص^{٤} ءص $= \frac{-ظتا^{٥}س}{٥}+ج$

ءس $= \frac{ءص}{-قتا^{٢}س}$

القوى الفردية والزوجية للجيب والجتا لوحدها

*) اذا كانت القوة فردية نستخدم المتطابقة القديمة

جا^{٢}س = ١ – جتا^{٢}س والعكس ثم التعويض

**) في القوى الزوجية نستخدم المتطابقة

جا^{٢}س $= \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)$

جتا^{٢}س $= \frac{١}{٢}(١ + جتا٢س)$

ثم متطابقات مرة اخرى (لا يمكن تعويض أو الاجزاء للقوة الفردية)

أمثلة :

١) $\int$ جتا^{٣}س ءس =

الحل :

ج : $جاس - \frac{جا^{٣}س}{٣} + ج$

$= \int$ جتا^{٢}س جتاس ءس

$= \int (١ - جا^{٢}س)$ جتاس ءس

ص = جاس ← $= \int$

$\frac{ءص}{ءس} = \int =$

ءس = =

٢) $\int$ جاس$(ظتاس + \frac{١}{قتا^{٢}س})$ ءس =

الحل :

ج : $جاس - جتاس + \frac{جتا^{٢}س}{٣} + ج$

$= \int$ (جاس ظتاس + جاس $\frac{١}{قتا^{٢}س}$) ءس

$= \int$ جاس ظتاس ءس + $\int$ جاس $\frac{١}{قتا^{٢}س}$ ءس

$= \int$ جاس $\frac{جتاس}{جاس}$ ءس + $\int$ جاس جا^{٢}س ءس

$= \int$ جتاس ءس + $\int$ جاس $(١ - جتا^{٢}س)$ ءس

جاس + $\int$ جاس $(١ - جتا^{٢}س)$ ءس

ص = جتاس ← = جاس + $\int$

$\frac{ءص}{ءس} =$ = جاس + $\int$

ءس = = جاس +

تدريبات عامه

١) **جد** $\int (أس + ب)^{ن}$ ءس =

الحل :

ج : $\frac{١}{أ} \times \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن + ١} + ج$

$= \int (أس + ب)^{ن}$ ءس

ص = أس + ب ← $= \int$

$\frac{ءص}{ءس} =$ $= \int$

ءس = =

٢) **جد التكاملات التالية** :

أ) $\int$ س^{٨} $(\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س})^{٤}$ ءس =

الحل :

ج : $\frac{١}{-٣} \times \frac{(٢ - ٣س)^{٥}}{٥} + ج$

$= \int$ س^{٨} $(\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣س}{س^{٢}})^{٤}$ ءس

$= \int$ س^{٨} $(\frac{٢ - ٣س}{س^{٢}})^{٤}$ ءس

$= \int$ $\frac{س^{٨}}{س^{٨}} \frac{١}{}(٢ - ٣س)^{٤}$ ءس

$= \int (٢ - ٣س)^{٤}$ ءس $= \frac{(٢ - ٣س)^{٥}}{٥} \frac{١}{-٣} + ج$

ب) $\int$ س $\sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٥}{س^{٢}}}$ ءس =

الحل :

ج : $\frac{-١}{٥} \times ٣ \frac{(٢ - ٥س)^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + ج$

$= \int$ س $\sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٥س}{س^{٣}}}$ ءس

$= \int$ س $\sqrt[٣]{\frac{٢ - ٥س}{س^{٣}}}$ ءس

$= \int$ س $\frac{١}{س} \sqrt[٣]{٢ - ٥س}$ ءس

$= \int$ $\frac{١}{س}$ $\sqrt[٣]{٢ - ٥س}$ ءس

$= \int (٢ - ٥س)^{\frac{١}{٣}}$ ءس $= \frac{(٢ - ٥س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \frac{١}{-٥} + ج$

جـ) $\int$ س $(س^{٤} + ٢س^{٢} + ١)^{٥}$ ءس =

الحل :

ج : $\frac{(س^{٢} + ١)^{١١}}{٢٢} + ج$

$= \int$ س $(س^{٤} + ٢س^{٢} + ١)^{٥}$ ءس

$= \int$ س $((س^{٢} + ١)^{٢})^{٥}$ ءس

$= \int$ س $(س^{٢} + ١)^{١٠}$ ءس

ص = س^{٢} + ١ ← $= \int$

$\frac{ءص}{ءس} =$ $= \int$

ءس = =

٣) **بين أن** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{ن}س\ ؤس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^{ن}س\ ؤس$

الحل : **فكرة السؤال** (**ابدأ من طرف لإيجاد الطرف الثاني**)

$جاس = جتا(\frac{\pi}{2} - س)$

$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{ن}س\ ؤس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^{ن}(\frac{\pi}{2} - س)\ ؤس$

$ص = \frac{\pi}{2} - س$ $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} جتا^{ن}ص \times -ؤص$

$\frac{ؤص}{ؤس} = -١$ $= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} جتا^{ن}ص\ ؤص = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^{ن}ص\ ؤص$

$ؤس = -ؤص$

$س = \frac{\pi}{2} \Leftarrow ص = ٠$

$س = ٠ \Leftarrow ص = \frac{\pi}{2}$

مهم

٤) **اذا كان ميل المماس لمنحنى يعطى بالعلاقة** $\frac{٤س}{٣ص^{٢}\sqrt{س^{٢}+٥}}$ **وكان منحنى ق يمر بالنقطة** (٢ ، ٣) **اكتب قاعدة هذا المنحنى ؟**

الحل :

ج : $ص = \sqrt[٣]{٤\sqrt{س^{٢}+٥}+١٥}$

$ق'(س) = \frac{٤س}{٣ص^{٢}\sqrt{س^{٢}+٥}}$

$ق'(٢) = ٣$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{٤س}{٣ص^{٢}\sqrt{س^{٢}+٥}}$

$٣ص^{٢}\ ؤص = \frac{٤س}{\sqrt{س^{٢}+٥}}ؤس$

$\int ٣ص^{٢}\ ؤص = ٢\int \frac{٢س}{\sqrt{س^{٢}+٥}}ؤس$

$\frac{٣ص^{٣}}{٣} = ٤\sqrt{س^{٢}+٥}+جـ$

$ص^{٣} = ٤\sqrt{س^{٢}+٥}+جـ$ ✓ $\boxed{ص = ق(س)}$

$(ق(س))^{٣} = ٤\sqrt{س^{٢}+٥}+جـ$

$(ق(٢))^{٣} = ٤\sqrt{(٢)^{٢}+٥}+جـ \Leftarrow جـ = ١٥$

$ص^{٣} = ٤\sqrt{س^{٢}+٥}+جـ \Leftarrow ص^{٣} = ٤\sqrt{س^{٢}+٥}+١٥$

$\therefore ص = \sqrt[٣]{٤\sqrt{س^{٢}+٥}+١٥}$

٥) **جد معادلة التفاضلية** $\frac{ؤص}{ؤس} = \sqrt{س ص + س + ص + ١}$

الحل :

ج : $\frac{٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}+جـ$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \sqrt{س(ص+١)+(ص+١)}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \sqrt{(ص+١)(س+١)}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \sqrt{(ص+١)}\sqrt{(س+١)}$

$\frac{ؤص}{\sqrt{(ص+١)}} = \sqrt{(س+١)}\ ؤس \Leftarrow \int \frac{ؤص}{\sqrt{(ص+١)}} = \int \sqrt{(س+١)}\ ؤس$

$\int (ص+١)^{-\frac{١}{٢}}\ ؤص = \int (س+١)^{\frac{١}{٢}}\ ؤس = \frac{(ص+١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} = \frac{(س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}+جـ$

٦) **اذا كان** $\int_{-١}^{١} (٢ق(س)+١)\ ؤس = ١٤$ **فجد** $\int_{١}^{٤} ق(٢س-٣)\ ؤس$

الحل :

ج : ٢

تجهيز المعطيات

$\int_{-١}^{١} (٢ق(س)+١)\ ؤس = ١٤$

$\int_{-١}^{١} ٢ق(س)ؤس + \int_{-١}^{١} ١\ ؤس = ١٤$

$٢\int_{-١}^{١} ق(س)ؤس + س]_{-١}^{١} = ١٤ \Leftarrow \int_{-١}^{١} ق(س)ؤس = ٤$

$\int_{١}^{٤} ق(٢س-٣)\ ؤس$

$ص = ٢س - ٣$ $\int_{-١}^{١} ق(ص)\ \frac{ؤص}{٢}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = ٢$ $\frac{١}{٢}\int_{-١}^{١} ق(ص)\ ؤص \Leftarrow \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$

$ؤس = \frac{ؤص}{٢}$

$س = ٤ \Leftarrow ص = ٥$

$س = ١ \Leftarrow ص = -١$

٧) **اذا كان** $\int_{-٢}^{١} ق(\frac{١}{٢}س+١)\ ؤس = \int_{٠}^{٣} ٢ق(س)\ ؤس$ **فجد قيمة أ ؟**

الحل :

ج : أ = ٤

$\int_{-٢}^{١} ق(\frac{١}{٢}س+١)\ ؤس = \int_{٠}^{٣} ٢ق(س)\ ؤس$

$ص = \frac{١}{٢}س+١$ $\int_{١}^{أ+١} ق(ص)\ ٢ؤص = \int_{٠}^{٣} ٢ق(س)\ ؤس$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{١}{٢}$ $\int_{١}^{أ+١} ٢ق(ص)\ ؤص = \int_{٠}^{٣} ٢ق(س)\ ؤس$

$ؤس = ٢ؤص$

$س = ١ \Leftarrow ص = \frac{١}{٢}+١$ $\frac{١}{٢}+١ = ٣ \Leftarrow ١ = ٤$

$س = -٢ \Leftarrow ص = ٠$

٨) **اذا كان ق(س) = ٢س^٢ + ٥ فجد** $\int_{-١}^{٢} ق'(٣س+١)\ ؤس$

الحل :

ج : ٣٠

٩) **اذا كان الاقتران ق(س) متصلا على ح وكان أ عدد ثابتا اثبت ان :**

$$\int_{أ}^{١٢} ه(س)\,ءس = \int_{٠}^{أ} ه(١٢-س)\,ءس$$

الحل :

$$\int_{أ}^{١٢} ه(س)\,ءس = \int_{٠}^{أ} ه(١٢-س)\,ءس$$

$ص = ١٢ - س$ $\qquad$ $\int_{أ}^{١٢} ه(س)\,ءس = \int_{١٢}^{أ} ه(ص)\,\frac{ءص}{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = -١$ $\qquad$ $\int_{أ}^{١٢} ه(س)\,ءس = -\int_{١٢}^{أ} ه(ص)\,ءص$

$ءس = \frac{ءص}{-١}$ $\qquad$ $\int_{أ}^{١٢} ه(س)\,ءس = \int_{أ}^{١٢} ه(ص)\,ءص$

$س = أ \iff ص = أ$

$س = ٠ \iff ص = ١٢$

١٠) **اذا كان** $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} ه(س)\,ءس = ٥$ ، $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} ه(س)\,ءس = ٩$

جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا٢س \; ه(جا٢س)\,ءس$ ؟

الحل :

١١) **اذا كان ق (س) يمر بالنقطتين** (١ ، -١) ، (٤ ، ٨) **احسب**

$\int_{٤}^{١} ه`(س) \; ق(ه(س))\,ءس$ ؟

الحل :

Al-Rwnq Fi Al-Riyadiat
T. Saed Al-Wardat
٠٧٨٧٥٥٦٢٧٤ - ٠٧٧٢٠٤٤٠٤٨