الفصل الثالث: الجبر المنطقي (البوولي)

❖ مقدمة:

س١: مما يتكون جهاز الحاسوب ؟

يتكون من مكونات مادية مرتبطة معا لتنفيذ مجموعة من الوظائف.

س٢: ماذا يلزمنا لتحديد وظائف الحاسوب وتنفيذها ؟

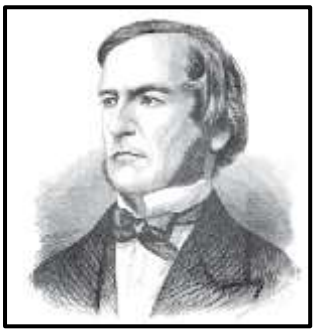
يلزمنا فهم وظائف كل مكون من المكوانت المادية وكيفية ارتباطه بالمكونات الأخرى لتبادل المعلومات.

س٣: كيف يتم تحديد وظائف مكونات الحاسوب وعمليات الربط بينها ؟

يتم تحديدها من خلال نموذج رياضي يمكن تمثيله بعلاقات منطقية أو جبرية.

أولا: مفهوم الجبر البوولي (المنطقي)

س١: عرِّف الجبر البوولي (المنطقي) ؟



- هو أحد فروع علم الجبر في الرياضيات.
- يعتبر الأساس الرياضي اللازم لدراسة التصميم المنطقي للأنظمة الرقمية ومنها الحاسوب.
- تعود تسميته إلى العالم الرياضي الإنجليزي (جورج بوول).
- تم تقديمه للمرة الأولى في كتابه (التحليل الرياضي للمنطق).
- تم تقديم أسسه بشكل واسع في كتابه الأشهر (دراسة في قوانين التفكير).

س٢: ما هي ميزة استخدام الجبر البوولي (المنطقي) في وصف عمل الحاسوب ؟

أن استخدامه أسهل من التعامل مع البوابات المنطقية.

❖ تذكير:

إن أنسب نظام رقمي يمثل الحاسوب هو النظام الثنائي، وذلك لتمثيل الأعداد والرموز وتخزينها ومعالجتها داخله، لأنه يتألف من رمزين هما (1 و 0)، واللذان يعبران عن حالة المتغيرات المنطقية (... ,A, B, C) وفق الحالتين (صواب، وخطأ)، وعن حالة مفاتيح الدارات الإلكترونية (مغلق ، مفتوح)، وعن حالة المصباح كنتيجة للعبارة المنطقية المركبة (مضيء، مطفأ).

ثانيا: العبارات الجبرية المنطقية والعمليات المنطقية

س١: عرِّف العبارة الجبرية المنطقية ؟

- هي ثابت منطقي (0 ,1) أو متغير منطقي (X, Y) أو مزيج من الثوابت والمتغيرات المنطقية يجمع بينها عمليات منطقية (NOT, AND, OR).
- قد تحتوي على أقواس، أو / وقد تحتوي على أكثر من عملية منطقية.

س٢: ما هي العمليات المنطقية المستخدمة في العبارة الجبرية المنطقية ؟

هي NOT و AND و OR ، وحسب محتوى المنهاج فلا وجود للعمليات المشتقة مثل NOR و NAND.

س٣: قارن بين العمليات المنطقية المستخدمة في العبارة الجبرية من حيث الاسم والرمز وجدول الحقيقة لكل منها:

من حيث	العمليات المنطقية								
	NOT		AND			OR			
اسمها	المتممة		و			أو			
رمزها	—		النقطة (.) لا شيء			+			
مثال عليها	$A = \overline{X}$ $A = \overline{XY}$		$A = X . Y$ $A = XY$			$A = X + Y$			
جدول الحقيقة لها	X	$A = \overline{X}$	X	Y	$A = X . Y$	X	Y	$A = X + Y$	
	1	0	1	1	1	1	1	1	
			1	0	0	1	0	1	
	0	1	0	1	0	0	1	1	
			0	0	0	0	0	0	

ثالثا: إيجاد ناتج العبارات الجبرية المنطقية المركبة

تُقرأ العبارة الجبرية المنطقية المركبة من اليسار إلى اليمين، ويتم إيجاد حل لها من خلال تعويض قيم المتغيرات المنطقية أولا ثم تتبع تسلسل الحل وفق قواعد الأولوية.

❖ **قواعد الأولية المستخدمة لحل العبارات الجبرية المنطقية المركبة:**

١ – في حالة وجود الأقواس ( )، تُنفّذ العمليات التي بداخلها أولًا.
٢ – عملية NOT المنطقية.
٣ – عملية AND المنطقية.
٤ – عملية OR المنطقية.
٥ – في حالة التكافؤ في الأولوية، تُنفّذ من اليسار إلى اليمين.

مثال (١): جد ناتج العبارة الجبرية المنطقية $\overline{A}+B.C$ علمًا بأنّ:

$$A=1,\ B=0,\ C=1.$$

الحل: نقوم بتعويض قيم المتغيرات ثم نتسلسل بالحل خطوة خطوة:

$\overline{A} + B . C$

$\overline{1} + 0 . 1$

$0 + 0 . 1$

$0 + 0$

0

مثال (٢): جد ناتج العبارة الجبرية المنطقية $\overline{A . B + C}+D$ علمًا بأنّ:

$$A=0,\ B=1,\ C=1,\ D=0.$$

الحل: نقوم بتعويض قيم المتغيرات ثم نتسلسل بالحل خطوة خطوة:

$\overline{A . B + C} + D$

$\overline{0 . 1 + 1} + 0$

$\overline{0 + 1} + 0$

$\overline{1} + 0$

$0 + 0$

0

❖ **ملاحظات هامة عن المتممات:**

- عند وجود المتممة لأكثر من متغير بينها عمليات منطقية عندها نحل العمليات داخل المتممة حسب الأولوية ثم نجد متممة الناتج النهائي.
- عند وجود متممة لمتممة أخرى عندها نجد ناتج المتممة الداخلية ثم الخارجية.

بالتعاون مع أفراد مجموعتك، جد ناتج العبارات المنطقية الآتية، علمًا بأنّ:

$$A=1,\ B=0,\ C=0,\ D=1.$$

- $A + B . \overline{C + \overline{D}}$
- $\overline{(A . B)} + (C . \overline{D})$
- $\overline{\overline{A + B} . C + D}$

العبارة الجبرية المنطقية	ناتجها
$A + B . \overline{C + \overline{D}}$	$1 + 0 . \overline{0 + \overline{1}}$ $1 + 0 . \overline{0 + 0}$ $1 + 0 . \overline{0}$ $1 + 0 . 1$ $1 + 0$ 1

$(\overline{1} . \overline{0}) + (0 . \overline{1})$ $(0 . \overline{0}) + (0 . \overline{1})$ $(0 . 1) + (0 . \overline{1})$ $(0 . 1) + (0 . 0)$ $0 + (0 . 0)$ $0 + 0$ 0	$\overline{(A . \overline{B})} + (C . \overline{D})$
$\overline{\overline{1 + 0} . 0 + 1}$ $\overline{1 . 0 + 1}$ $\overline{0 . 0 + 1}$ $\overline{0 + 1}$ $\overline{1}$ 0	$\overline{\overline{A + B} . C + D}$

بالتعاون مع أفراد مجموعتك، حوّل العبارات المنطقية الآتية إلى عبارات جبرية منطقية:

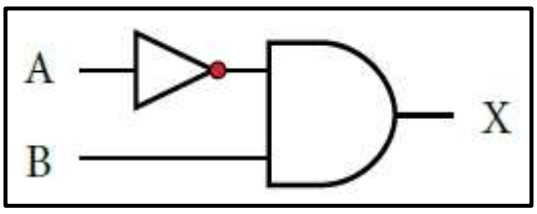
- A AND NOT B
- NOT A OR B AND C
- A AND B AND NOT C
- A OR NOT (B AND NOT C)
- NOT A OR (NOT B OR C AND D)

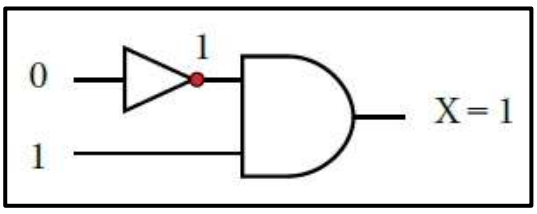
العبارة المنطقية	تحويلها للعبارة الجبرية المنطقية
A AND NOT B	A . B
NOT A OR B AND C	A + B . C
A AND B AND NOT C	A . B . C
A OR NOT (B AND NOT C)	A + (B . C)
NOT A OR (NOT B OR C AND D)	A + (B + C . D)

رابعا: تمثيل العبارات الجبرية المنطقية المركبة باستخدام البوابات المنطقية

مثال (١): مثّل العبارة الجبرية المنطقية $X = \overline{A} \cdot B$ باستخدام البوابات المنطقية، ثم جد قيمة (X) إذا كانت $A = 0 , B = 1$.

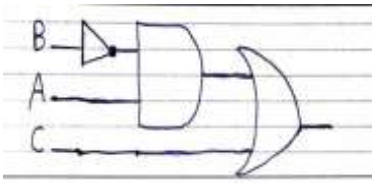
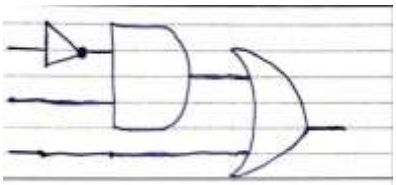
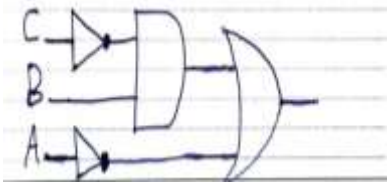
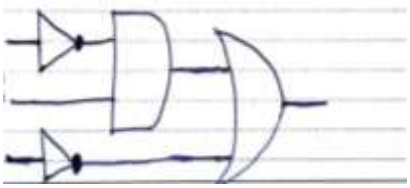
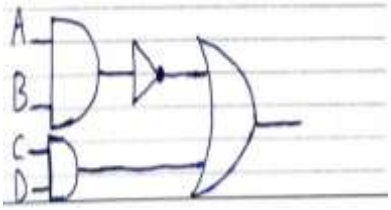
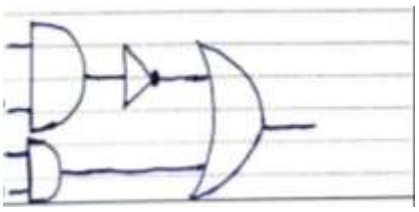
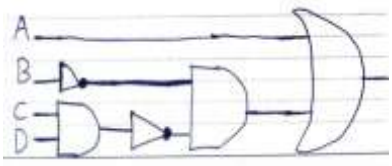
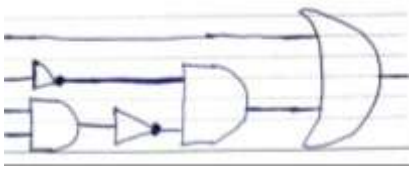
الحل:





بالتعاون مع أفراد مجموعتك، مثّل العبارات المنطقية الجبرية الآتية باستخدام البوابات المنطقية، ثمّ جد الناتج النهائي إذا كانت: $A = 0 , B = 1 , C = 1 , D = 0$.

- $A \cdot \overline{B} + C$
- $\overline{A} + (B \cdot \overline{C})$
- $\overline{A \cdot B} + C \cdot D$
- $A + \overline{B} \cdot (\overline{C \cdot D})$

العبارة المنطقية	تمثيل العبارة الجبرية المنطقية	ناتجها
$A \cdot \overline{B} + C$		
$\overline{A} + (B \cdot \overline{C})$		
$\overline{A \cdot B} + C \cdot D$		
$A + \overline{B} \cdot (\overline{C \cdot D})$		

قبل دراسة الوحدة الرابعة أجب عن

أسئلة الفصل الثالث من الوحدة الثالثة صفحة ١٢٣

ثم أجب عن أسئلة الوحدة الثالثة صفحة ١٢٤

ثم قيم نفسك ذاتيا

إجابات أسئلة الفصل الثالث

١ – ما المقصود بكلٍّ مما يأتي:

أ – الجبر المنطقي. ب– العبارة الجبرية المنطقية.

الفرع	المصطلح	التعريف
أ	الجبر المنطقي	هو أحد فروع علم الجبر في الرياضيات، ويعتبر الأساس الرياضي اللازم لدراسة التصميم المنطقي للأنظمة الرقمية ومنها الحاسوب، حيث تعود تسميته إلى العالم الرياضي الإنجليزي (جورج بوول)، الذي قدمه للمرة الأولى في كتابه (التحليل الرياضي للمنطق)، والذي قدم أسسه بشكل واسع في كتابه الأشهر (دراسة في قوانين التفكير).
ب	العبارة الجبرية المنطقية	هي ثابت منطقي (0, 1) أو متغير منطقي (X, Y) أو مزيج من الثوابت والمتغيرات المنطقية يجمع بينها عمليات منطقية (NOT, AND, OR)، وقد تحتوي على أقواس، أو / وقد تحتوي على أكثر من عملية منطقية.

---

٢ – لماذا سُمّي الجبر المنطقي بهذا الاسم؟

لأنه يعتبر الأساس الرياضي لدراسة التصميم المنطقي للأنظمة الرقمية ومنها الحاسوب.

---

٣ – جد ناتج العبارات الجبرية المنطقية الآتية إذا كانت: $A=1 ، B=0 ، C=1 ، D=0$

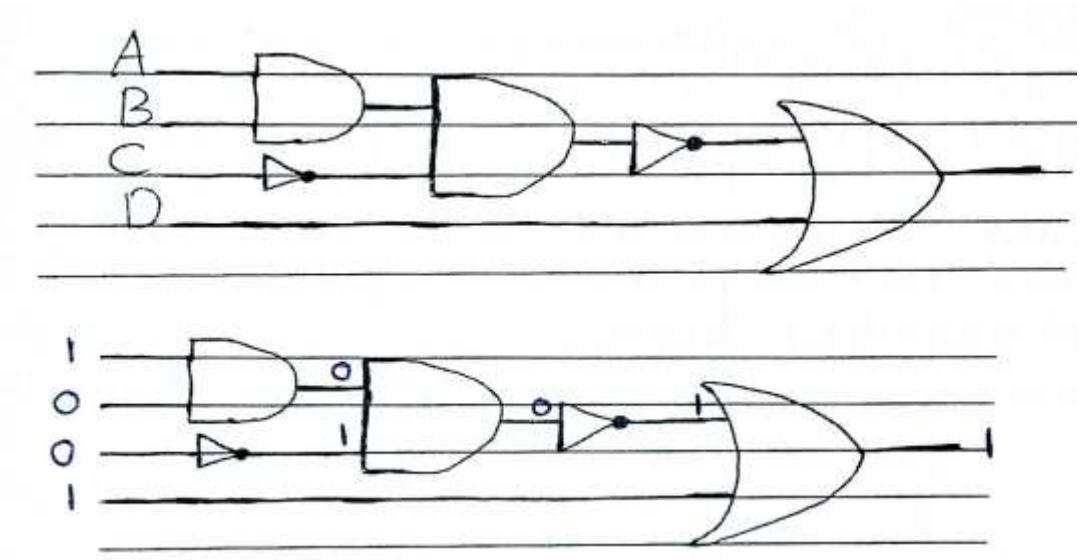
- $F=(A.(B+\overline{C}))+\overline{D}$
- $F=(A+B).(\overline{C}+\overline{D})$
- $F=\overline{\overline{A}.B}+C.\overline{D}$

العبارة الجبرية المنطقية	الناتج
$F=(A.(B+\overline{C}))+\overline{D}$	$F=(1.(0+\overline{1}))+\overline{0}$ $F=(1.(0+0))+\overline{0}$ $F=(1.0)+\overline{0}$ $F=0+1$ $F=1$
$F=(A+B).(\overline{C}+\overline{D})$	$F=(1+0).(\overline{1}+\overline{0})$ $F=(1+0).(0+\overline{0})$ $F=(1+0).(0+1)$ $F=1.(0+1)$ $F=1.1$ $F=1$
$F=\overline{\overline{A}.B}+C.\overline{D}$	$F=\overline{\overline{1}.0}+1.\overline{0}$ $F=\overline{0}.0+1.\overline{0}$ $F=\overline{0}+1.\overline{0}$ $F=1+1.\overline{0}$ $F=1+1.1$ $F=1+1$ $F=1$

٤ – مثّل العبارة الجبرية المنطقية الآتية؛ باستخدام البوابات المنطقية: $\overline{A \cdot B \cdot \overline{C}} + D$

ثمّ جد الناتج النهائي إذا كانت $D = 1$ ، $C = 0$ ، $B = 0$ ، $A = 1$.

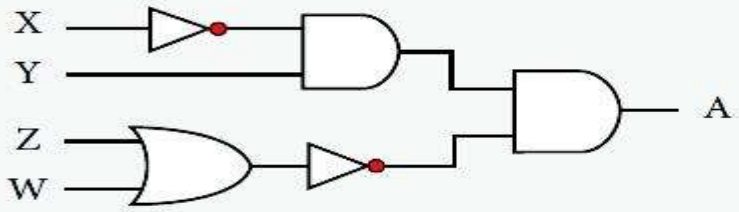
الحل:



---

٥ – اكتب عبارة الجبر المنطقي التي تُمثّلها البوابات المنطقية الآتية، ثمّ جد:

قيمة A علمًا بأنّ $W = 1$ ، $Z = 0$ ، $Y = 1$ ، $X = 0$



الحل: العبارة هي

(NOT X AND Y) AND NOT (Z OR W)

حل العبارة السابقة:

(NOT X AND Y) AND NOT (Z OR W)
(NOT 0 AND 1) AND NOT (0 OR 1)
(1 AND 1) AND NOT (0 OR 1)
1 AND NOT (0 OR 1)
1 AND NOT 1
1 AND 0
0

٦ – حوّل العبارات المنطقية الآتية إلى عبارات جبرية منطقية، ثمّ جد ناتجها علمًا بأنّ:

$X = 1 ، Y = 1 ، W = 0 ، Z = 1$

- X OR (NOT Y OR W) AND NOT Z
- NOT (NOT X AND Y OR NOT W) OR Z

العبارة المنطقية	العبارة الجبرية المنطقية
X OR (NOT Y OR W) AND NOT Z	$X + (\overline{Y} + W) . \overline{Z}$
NOT (NOT X AND Y OR NOT W) OR Z	$\overline{\overline{X} . Y + \overline{W}} + Z$

إجابات أسئلة الوحدة الثالثة

١ – اكتب مثالًا واحدًا لكلٍّ مما يأتي:

أ – بوابة منطقية أساسية. ب– بوابة منطقية مشتقة. جـ– رمز لعملية جبرية منطقية.

د – متغيّر منطقي. هـ – عبارة منطقية. و – عبارة جبرية منطقية.

الفرع	المثال
أ – بوابة منطقية أساسية.	AND
ب– بوابة منطقية مشتقة.	NAND
جـ– رمز لعملية جبرية منطقية.	+
د – متغيّر منطقي.	A
هـ – عبارة منطقية.	A OR B
و – عبارة جبرية منطقية.	A + B

---

٢ – أكمل جدول الحقيقة الآتي:

X	Y	Z	X AND Z OR Y
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	F	F
T	F	F	F
F	F	F	F

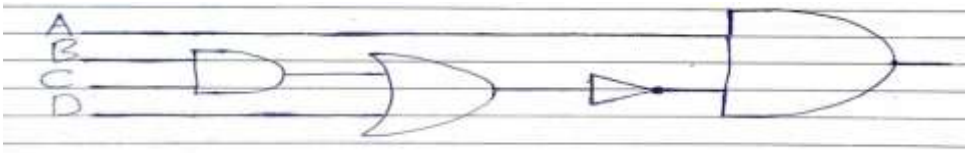
٣– ادرس العبارة المنطقية الآتية، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

A AND NOT (B AND C OR D)

- استخرج من العبارة المنطقية السابقة مثاليين على كلٍّ من:

أ – متغيّر منطقي. ب– بوابة منطقية. جـ– عبارة منطقية بسيطة.

- جد الناتج النهائي للعبارة المنطقية السابقة إذا كانت: $A = 0 ، B = 0 ، C = 1 ، D = 1$
- مثّل العبارة المنطقية السابقة؛ باستخدام البوابات المنطقية.
- حوّل العبارة المنطقية السابقة، إلى عبارة جبرية منطقية.

الفرع	المثال
• استخرج من العبارة المنطقية السابقة مثالين على كلّ من: أ – متغيّر منطقي. ب– بوابة منطقية. جـ– عبارة منطقية بسيطة.	
أ – متغيّر منطقي.	A , B
ب– بوابة منطقية.	AND , NOT
جـ– عبارة منطقية بسيطة.	B AND C
• جد الناتج النهائي للعبارة المنطقية السابقة إذا كانت: A = 0 ، B = 0 ، C = 1 ، D = 1	
0 AND NOT (0 AND 1 OR 1) 0 AND NOT (0 OR 1) 0 AND NOT 1 0 AND 0 0	
• مثّل العبارة المنطقية السابقة؛ باستخدام البوابات المنطقية.	
	
• حوّل العبارة المنطقية السابقة، إلى عبارة جبرية منطقية.	
$A \cdot \overline{B \cdot C + D}$	

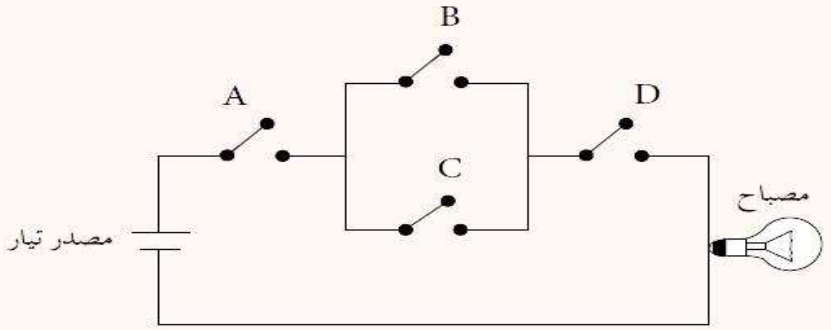
٤– جد ناتج العبارات المنطقية الآتية، علمًا بأن: A = 0 ، B = 1 ، C = 0 ، D = 1

- A NOR NOT (B NOR NOT C)
- A AND B OR NOT(C AND D)
- NOT (A NAND B) NAND NOT C
- A AND NOT (NOT B OR C) AND D

العبارة المنطقية	الناتج
A NOR NOT (B NOR NOT C)	0 NOR NOT (1 NOR NOT 0) 0 NOR NOT (1 NOR 1) 0 NOR NOT 0 0 NOR 1 0
A AND B OR NOT(C AND D)	0 AND 1 OR NOT (0 AND 1) 0 AND 1 OR NOT 0 0 AND 1 OR 1 0 OR 1 1

NOT (0 NAND 1) NAND NOT 0 NOT 1 NAND NOT 0 0 NAND NOT 0 0 NAND 1 1	NOT (A NAND B) NAND NOT C
0 AND NOT (NOT 1 OR 0) AND 1 0 AND NOT (0 OR 0) AND 1 0 AND NOT 0 AND 1 0 AND 1 AND 1 0 AND 1 0	A AND NOT (NOT B OR C) AND D

٥ – تأمّل الدارة الكهربائية الآتية، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:



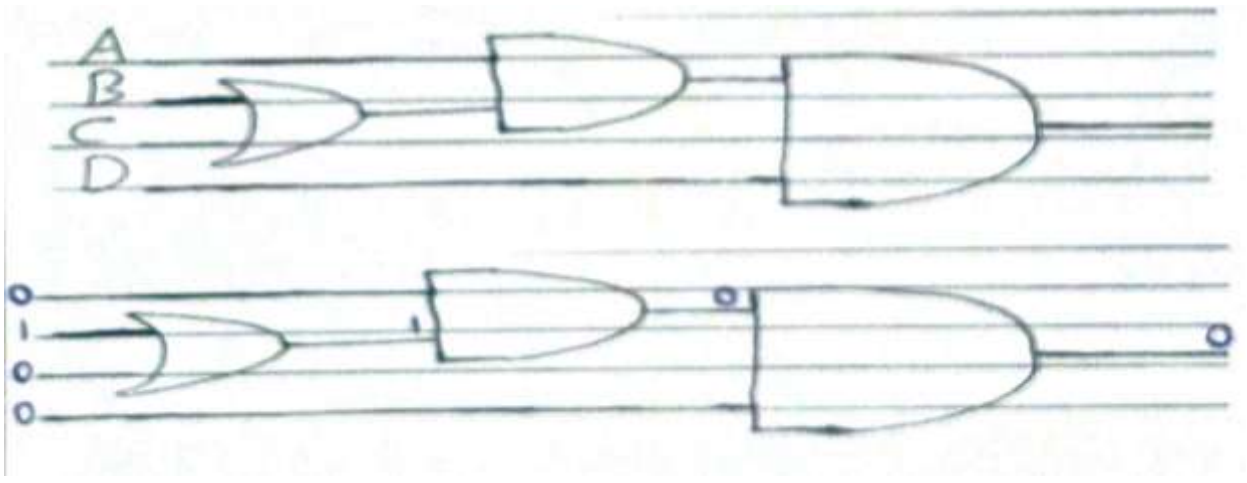
أ – اكتب العبارة المنطقية التي تُمثّلها الدارة الكهربائية السابقة.

ب– مثّل الدارة الكهربائية باستخدام البوابات المنطقية، ثم جد الناتج إذا كانت:

$A = 0 \, ، \, B = 1 \, ، \, C = 0 \, ، \, D = 0$

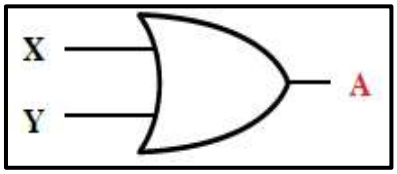
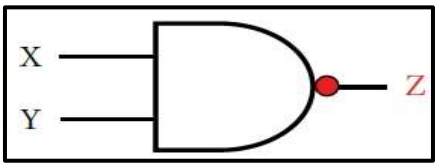
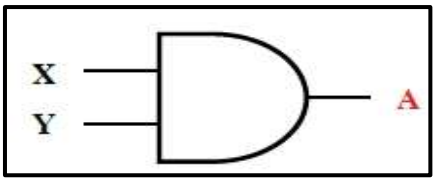
أ- العبارة المنطقية هي : A AND (B OR C) AND D

ب- تمثيل العبارة كما يلي:



٦ – أكمل الجدول الآتي:

اسم البوابة	الرمز	جدول الحقيقة
OR		
		X Y X NAND Y 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1
		X Y X AND Y 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0

اسم البوابة	الرمز	جدول الحقيقة
OR		X Y A = X OR Y 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0
NOT		X A = NOT X 1 0 0 1
NAND		
NOR		X Y Z = X NOR Y 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
AND		

تقويم ذاتي

بناء على ما درسته في هذه الوحدة، قيّم نفسك ذاتيًا؛ باختيار تقديرك المناسب في المهارات المذكورة في الجدول الآتي:

الرقم	المهارة	ممتاز	جيد	ضعيف
١	أتعرّف البوابات المنطقية.			
٢	أعدّد أنواع البوابات المنطقية، وأبيّن آلية عملها.			
٣	أميّز رموز البوابات المنطقية الأساسية والمشتقة.			
٤	أكتب جداول الحقيقة للبوابات المنطقية الأساسية والمشتقة.			
٥	أتتبع ناتج البوابات المنطقية الأساسية والمشتقة.			
٦	أرسم البوابات المنطقية الأساسية والمشتقة.			
٧	أتعرّف مفهوم الجبر المنطقي (البوولي).			
٨	أمثّل العبارات المنطقية؛ باستخدام التعابير الجبرية المنطقية.			
٩	أجد ناتج التعابير الجبرية المنطقية.			
١٠	أمثّل العبارات المنطقية؛ باستخدام البوابات المنطقية.			
١١	أمثّل الدارات الكهربائية بعبارات منطقية.			