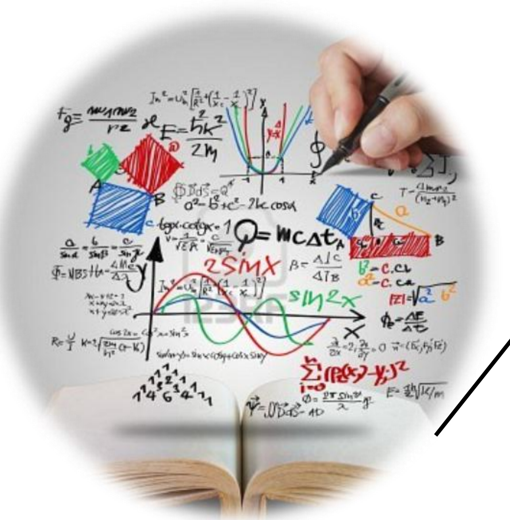
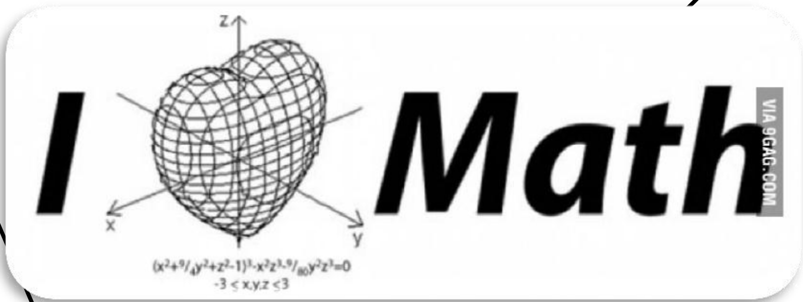


المستوى الثالث (الوحدة الثانية)

الفروع الأكاديمية (أدبي ، الفندقي ، والسياحة)

التفاضل



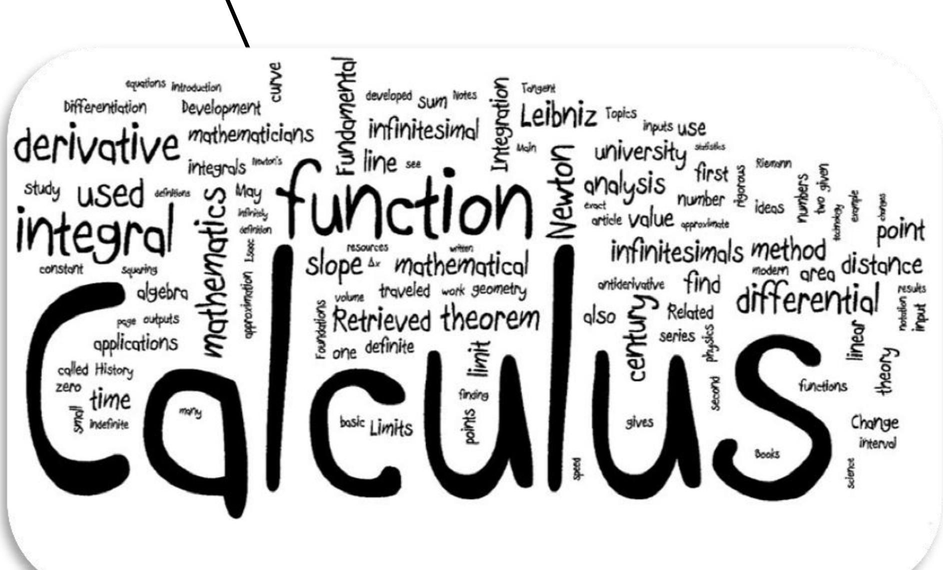
الرونق في الرياضيات

إعداد : أ . سائد الوردات

0772044048 — 0787556274

2017 / 2018

للمراسلة : عبر الفيس بوك https://www.facebook.com/Sa2ed.wardat



الدرس الأول : معدل التغير

Δس ← **تقرأ** دلتا (س) أي التغير في س .

معدل التغير : هو التغير في س مقدار الزيادة أو النقصان س

ويعطى بالرمز Δس **وتكون** Δس = س$_{٢}$ – س$_{١}$

حيث **س$_{١}$** : القيمة الأولى للمتغير س

س$_{٢}$: القيمة الثانية للمتغير س

و اذا اردنا التغير في ع Δع = ع$_{٢}$ – ع$_{١}$

وأيضا اذا اردنا التغير في ص Δص = ص$_{٢}$ – ص$_{١}$ **لكن انتبه**

....

....

....

أمثلة :

١) اذا كانت س$_{١}$= – ١.٢ ، س$_{٢}$ = ٢.٧ **جد** Δس ؟

الحل :

الفكرة " Δس معناها معدل أو مقدار التغير في س وقانونها Δس = س$_{٢}$ – س$_{١}$ "

وقد تكون موجبة أو سالبة

Δس = س$_{٢}$ – س$_{١}$

= ٢.٧ – (–١.٢) = ٣.٩

٢) **جد** Δع اذا تغيرت ع من ع$_{١}$= – ٢ إلى ع$_{٢}$ = – ٥ ؟

الحل :

الفكرة " طرح السؤال هنا يختلف عن السابق "

Δع = ع$_{٢}$ – ع$_{١}$

= –٢ – (–٥) = –٣

٣) اذا كانت س$_{١}$= ٥ ، س$_{٢}$ = ٨ **جد** Δس ؟

الحل :

Δس = س$_{٢}$ – س$_{١}$

= ٨ – (٥) = ٣

٤) **جد** Δع اذا تغيرت ع من ع$_{١}$= – ٢.٥ إلى ع$_{٢}$ = ١.٥ ؟

الحل :

٥) اذا كانت س$_{١}$= ٤.٣ ، س$_{٢}$ = ١.٤ **جد** Δس ؟

الحل :

أمثلة :

١) اذا كانت $س_١ = ٢$ ، $\Delta س = ٥$ **جد** $س_٢$ ؟

الحل :

الفكرة " نستخدم القانون معدل أو مقدار التغير ونضع المعطيات فيه ونجد $س_٢$ "

$\Delta س = س_٢ - س_١$

$٥ = س_٢ - (٢)$

$س_٢ = ٢ + ٥$

$س_٢ = ٧$

٢) اذا كانت $س_١ = ٤.٣$ ، $\Delta س = -٢.٩$ **جد** $س_٢$ ؟

الحل :

$\Delta س = س_٢ - س_١$

$-٢.٩ = س_٢ - (٤.٣)$

$س_٢ = -٢.٩ + ٤.٣$

$س_٢ = ١.٤$

٣) اذا كانت $س_٢ = ٣$ ، $\Delta س = ٢$ **جد** $س_١$ ؟

الحل :

$\Delta س = س_٢ - س_١$

$٢ = ٣ - س_١$

$-س_١ = ٢ - ٣$

$-س_١ = -١$

$س_١ = ١$

٤) اذا كانت $س_٢ = ١.٧$ ، $\Delta س = -٣.١$ **جد** $س_١$ ؟

الحل :

ملاحظات اذا طلب

١) مقدار التغير أو معدل التغير لـ ق(س) تعني $\Delta س = س_٢ - س_١$

٢) التغير أو مقدار التغير للاقتران تعني $\Delta ق(س) = ق(س_٢) - ق(س_١)$

٣) معدل التغير للاقتران أو متوسط التغير أو ميل القاطع $م = \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

أمثلة :

١) اذا كان $ق(س) = س^٢ - ٣$ ، وتغيرت س من ٣ الى ٢ **فجد**

أ) مقدار التغير في س .

ب) مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) .

جـ) متوسط التغير

الحل :

أ) $\Delta س = س_٢ - س_١$

$= ٢ - ٣ = -١$

ب) **الفكرة** " التغير في س يصاحبه تغير في ق(س) فاذا كانت ص = ق(س)

فإن مقدار التغير في قيمة الاقتران $\Delta ص = ص_٢ - ص_١$ أو $\Delta ق(س) = ق(س_٢) - ق(س_١)$ "

بما ان $ق(س_٢) = ص_٢$ ، $ق(س_١) = ص_١$ فإن :

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١$

$\Delta ق(س) = ق(س_٢) - ق(س_١)$

$= ق(٢) - ق(٣)$

$$\boxed{\begin{array}{l} ق(٢) = ((٢)^٢ - ٣) = ١ \\ ق(٣) = ((٣)^٢ - ٣) = ٦ \end{array}}$$

$= ١ - ٦ = -٥$

جـ) متوسط التغير = ________________ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

ملاحظة : " $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ تسمى معدل تغير الاقتران ص = ق(س) "

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ $(س_١ ، ق(س_١))$ ، $(س_٢ ، ق(س_٢))$

اذا اعطي ....

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{\Delta س}$ $س_١$ ، $س_٢$

اذا اعطي..

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_١ + \Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س}$ $س_١$ ، $\Delta س$

اذا اعطي ....

$م = \frac{\Delta س}{\Delta ص} = \frac{-٥}{-١} = ٥$

٢) [٧٠/مثال] اذا كان ص = س^{٢} − ٢س ، وتغيرت س من س$_{١}$ = ٢ الى س$_{٢}$ = ٤

فجد :

أ) مقدار التغير في س .

ب) مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) .

جـ) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

الحل :

أ) Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$
= ٤ − ٢ = ٢

ب) بما ان ق(س$_{٢}$) = ص$_{٢}$ ، ق(س$_{١}$) = ص$_{١}$ فإن :

Δص = ص$_{٢}$ − ص$_{١}$

= ص(٤) − ص(٢)

ص(٤) = ((٤)^{٢} − ٢(٤)) = ٨
ص(٢) = ((٢)^{٢} − ٢(٢)) = ٠

= ٨ − ٠ = ٨

جـ) م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

٣) ق(س) = ٤س + ٣ **أوجد مقدار التغير في ق(س)** عندما س من س$_{١}$ = ١ الى س$_{٢}$= ٦ ؟

الحل :

٤) ق(س) = س^{٢} + ٣س **أوجد** Δص اذا كانت س$_{١}$ = ٢ الى س$_{٢}$= ٥ ؟

الحل :

٥) اذا كانت ق(س) = $\sqrt{س}$ وتغيرت س من (٤٩) الى (٢٥) **احسب** متوسط التغير ؟

الحل :

٦) اذا كان ص = ٩ − ٢س^{٢} وكانت Δص = ٣ وكانت س$_{١}$ = ٢ **جد** ص$_{٢}$ ؟

الحل :

٧) ق(س) = $\frac{١٢}{س}$ **جد معدل تغير ق(س)** عندما تتغير س من ٢ الى ٦ ؟

الحل :

٨) $ق(س) = س^٢ + ٢س - ٥$ س ∈ [١ ، ٢] **احسب** :

أ) التغير في س ؟

ب) التغير في ص ؟

جـ) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

الحل :

الفكرة " الفترة المعطاه في السؤال عباره عن بداية ونهاية لـ س "

س ∈ [١ ، ٢] $س_١ = ١$ ، $س_٢ = ٢$ "

أ) $\Delta س = س_٢ - س_١$
$= ٢ - ١ = ١$

ب) بما ان $ق(س_٢) = ص_٢$ ، $ق(س_١) = ص_١$ فإن :

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١$

$\Delta ق(س) = ق(س_٢) - ق(س_١)$

$= ق(٢) - ق(١)$

$ق(٢) = (٢)^٢ + ٢(٢) - ٥ = ٣$

$ق(١) = (١)^٢ + ٢(١) - ٥ = -٢$

$= ٣ - (-٢) = ٥$

جـ) $م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٥}{١} = ٥$

٩) اذا كانت $ق(س) = \sqrt{س+١}$ س ∈ [٠ ، ٣] **احسب** :

أ) التغير في س ؟

ب) التغير في الاقتران ؟

جـ) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

الحل :

١٠) اذا كانت $ق(س) = \frac{س+١}{٢}$ س ∈ [١ ، ٥] **احسب** :

أ) التغير في س ؟

ب) التغير في الاقتران ؟

جـ) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

الحل :

١١) اذا كان ص = س^{3} + ١ وتغيرت س_1 = ٢ ، $\Delta\text{س} = 2$ **جد** :

أ) مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) .

ب) متوسط التغير

الحل :

$$\Delta\text{س} = \text{س}_2 - \text{س}_1$$
$$2 = \text{س}_2 - (2)$$
$$\text{س}_2 = 2 + 2$$
$$\text{س}_2 = 4$$

ب) متوسط التغير " **هناك طريقتين للحل** "

طريقة الأولى

الفكرة " نستخدم القانون معدل أو مقدار التغير ونضع المعطيات فيه ونجد المجهول "

$$\Delta\text{س} = \text{س}_2 - \text{س}_1$$
$$2 = \text{س}_2 - (2)$$
$$\text{س}_2 = 2 + 2$$
$$\text{س}_2 = 4$$

$$\text{م} = \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$$

طريقة الثانية للحل :

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$$

١٢) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{3\text{س}+1}$ وكانت س_1 = صفر ، $\Delta\text{س} = 5$ **فجد** معدل التغير الاقتران ؟

الحل :

١٣) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = 9$ وكانت س_1 = ١ ، $\text{س}_2 = 6$ **فجد معدل التغير الاقتران** ؟

الحل :

الفكرة " معدل التغير للاقتران الثابت دائما يساوي صفر "

$$\text{م} = \frac{\text{ق}(6) - \text{ق}(1)}{6 - 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{ق}(6) = 9 \\ \text{ق}(1) = 9\end{array}}$$

$$= \frac{9 - 9}{5} = 0$$

١٤) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = -2$ وكانت س_1 = −١ ، $\text{س}_2 = 4$ **فجد معدل التغير الاقتران** ؟

الحل :

١٥) ٧١/مثال اذا كانت

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٢س} &،\ \text{س} < ٠ \\ ٤ &،\ \text{س} \geq ٠ \end{cases}$$

فجد قيمة معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س = −١ الى س = ٥

الحل :

الفكرة " الاقتران المتشعب يفضل رسمه على خط الاعداد

٢س | ٤ (٠) نختار القاعدة الأنسب لقيم س

س = −١ قاعدتها على خط الاعداد هي ٢س

س = ٥ قاعدتها على خط الاعداد هي ٤

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(-١)}{٥ - (-١)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ق}(٥) = ٤ \\ \text{ق}(-١) = \text{٢س} = ٢(-١) = -٢ \end{array}}$$

$$= \frac{٤ - (-٢)}{٥ - (-١)} = ١$$

١٦) اذا كانت

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٣ - ٥ &،\ ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ \text{٦س} + ٤ &،\ ٣ < \text{س} \leq ٧ \end{cases}$$

فجد قيمة معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س = ٢ الى س = ٤

الحل :

أمثلة :

١) اذا كان معدل تغير ق(س) يساوي ١٢ وذلك عند $\text{س}_١ = ٣$ ، $\text{س}_٢ = ٥$

وكان ق(٣)= −٤ **فجد** ق(٥) ؟

الحل :

معدل التغير

$$\text{م} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\Delta \text{س}}$$

$$١٢ = \frac{\text{ق}(٥) - \boxed{\text{ق}(٣)}}{٥ - (٣)}$$

$$١٢ = \frac{\text{ق}(٥) - (-٤)}{٥ - (٣)}$$

$$١٢ = \frac{\text{ق}(٥) - (-٤)}{٢}$$

$$\frac{١٢}{١} = \frac{\text{ق}(٥) - (-٤)}{٢}$$

$$٢٤ = \text{ق}(٥) + ٤ \quad \leftarrow \quad \text{ق}(٥) = ٢٠$$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢$ وكان متوسط التغير يساوي ٨ والتغير في $\Delta \text{س} = ٤$

أحسب التغير في Δص ؟

الحل :

أمثلة :

١) اذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين : أ (-١ ، -٣) ، (٢ ، ١٨) **فجد ميل القاطع** المار بالنقطتين أ ، ب ؟

الحل :

الفكرة " يطلق على المتوسط أيضا اسم (ميل القاطع)

وهو ما يسمى التفسر الهندسي لمتوسط التغير

ميل المستقيم القاطع = متوسط التغير "

" **يفضل لتسهيل الحل ترميز النقطتين** " (س١ ، ص١) (س٢ ، ص٢)

$$(\overset{\text{س}_1}{-١} ، \overset{\text{ص}_1}{-٣}) ، (\overset{\text{س}_2}{٢} ، \overset{\text{ص}_2}{١٨})$$

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{١٨ - (-٣)}{٢ - (-١)} = ٧$$

٢) اذا كان ق (س) يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٥ ، ٢٣) **جد ميل القاطع** المار بالنقطتين ؟

الحل :

٣) ق (س) = $\text{س}^٣ - ٧$ **أوجد** ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٠ ، ق(٠)) ، (١ ، ق (١)) ؟

الحل :

الفكرة " تذكر دائما ان العدد في الأزواج المرتبه تكون العدد وصورة العدد

نجهيز النقطتين (نعوض العدد ٠ في الاقتران لايجاد صورته) (ونعوض العدد ١ في الاقتران لايجاد صورته)

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$\text{ص}_1 = \text{ق}(٠) = \text{س}^٣ - ٧ \Leftarrow \text{ق}(٠) = (٠)^٣ - ٧ = -٧$

$\text{ص}_1 = \text{ق}(١) = \text{س}^٣ - ٧ \Leftarrow \text{ق}(١) = (١)^٣ - ٧ = -٦$

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-٦ - (-٧)}{١ - ٠} = \frac{١}{١} = ١$$

٤) ق (س) = ٥ - $\text{س}^٢$ **أوجد ميل القاطع** الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق (٣)) ؟

الحل :

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$\text{ص}_1 = \text{ق}(١) = ٥ - \text{س}^٢ \Leftarrow \text{ق}(١) = ٥ - (١)^٣ = ٤$

$\text{ص}_1 = \text{ق}(٣) = ٥ - \text{س}^٢ \Leftarrow \text{ق}(٣) = ٥ - (٣)^٣ = -٤$

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-٤ - (٤)}{٣ - ١} = \frac{-٨}{٢} = -٤$$

٥) ق(س) = $\text{س}^٣ + ٢\text{س}$ **أوجد** :

أ) ميل القاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) ؟

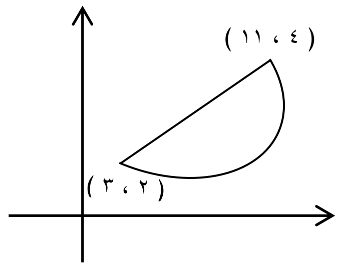
ب) احسب معدل التغير في ق(س) عندما $\text{س}_1 = ١$ ، $\text{س}_2 = ٣$ ؟

الحل :

٦) **جد ميل القاطع** المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (-٣ ، -٦) علما أن ق (س)= ٣- $\text{س}^٢$ ؟

الحل :

٧) معتمدا على الرسم **أوجد** :



أ) ميل القاطع الواصل بين النقطتين أ ، ب ؟

ب) معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ الى ٤ ؟

الحل :

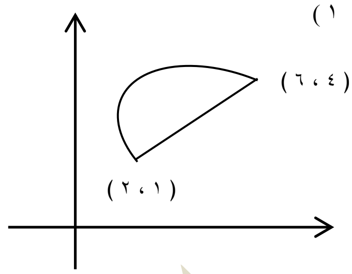
الفكرة " .... "

أ) ميل القاطع $= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{١١} - (\text{٣})}{\text{٤} - (\text{٢})} = \frac{\text{٨}}{\text{٢}} = \text{٤}$

ب) ميل التغير $= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{٤}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{١١} - (\text{٣})}{\text{٤} - (\text{٢})} = \frac{\text{٨}}{\text{٢}} = \text{٤}$

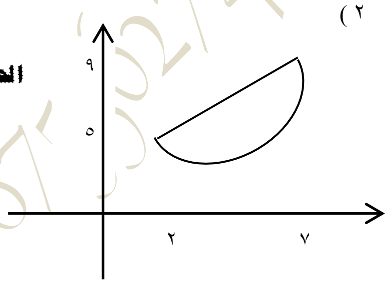
٨) من الرسم المجاور **جد ميل القاطع** (**متوسط التغير**) :

١)



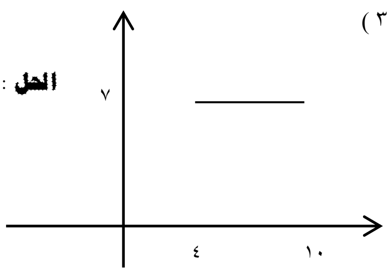
الحل :

٢)



الحل :

٣)



الحل :

٤) **فكرة سؤال الكتاب ص ٧٧** " **جميله جدا** "

الفكرة " ....

٩) اذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين أ (٣ ، ٧) ، ب (-١ ، ل) وكان ميل القاطع يساوي (-٣) **فجد** قيمة ل ؟

الحل :

ميل القاطع $= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$-\text{٣} = \frac{\text{ل} - \text{٧}}{(-\text{١}) - (\text{٣})}$

$-\text{٣} = \frac{\text{ل} - \text{٧}}{-\text{٤}}$

$\text{١٢} = \text{ل} - \text{٧} \Leftarrow \text{ل} = \text{١٩}$

١٠) اذا كان ق (س) يمر بالنقاط (٢ ، ق(٢)) ، (٤ ، ٦) وعلم ان ميل القاطع يساوي ٨ **جد** ق(٢) ؟

الحل :

معدل التغير لاقتران المسافة ف(ن) يساوي السرعة المتوسطة في الفترة الزمنيه [ن١ ، ن٢] حيث السرعة المتوسطة $\text{ع} = \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2)-\text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2-\text{ن}_1}$

أمثلة :

١) تحرك جسم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} +٤ن **احسب** السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، ٥] ؟

الحل :

الفكرة " ن$_1$ = ١ ثانيه ، ن$_2$ = ٥ ثانيه "

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2)-\text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2-\text{ن}_1}$

$= \frac{\text{ف}(٥)-\text{ف}(١)}{٥-١}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{ف}(٥) = (٥)^{٢} + ٤(٥) = ٤٥ \\ \text{ف}(١) = (١)^{٢} + ٤(١) = ٥\end{array}}$

$= \frac{(٤٥)-(٥)}{٤} = \frac{٤٠}{٤} = ١٠$

٢) تحرك جسم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} +٣ن **احسب** السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، ٢] ؟

الحل :

٣) اذا كان المسافة التي يقطعها جسيم في اثناء سقوط الى اسفل تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن – ٥ن^{٢} **احسب** السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [١ ، ٣] ؟

الحل :

٤) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} حيث ف المسافة بالامتار و ن الزمن بالثواني **احسب** السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٢] ؟

الحل :

أمثلة :

١) اذا كان معدل تغير ق (س) عندما تتغير س من ١ الى ٥ يساوي ١٢ وكان هـ(س) = ٢ ق(س) + ٧ س **فجد معدل تغير هـ(س)** عندما تتغير من ١ الى ٥ ؟

الحل :

معدل التغير ق(س) $= \frac{\text{ق}(\text{س}_2)-\text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2-\text{س}_1}$

$= \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(١)}{٥-١} = ١٢$

معدل التغير هـ (س) $= \frac{\text{هـ}(\text{س}_2)-\text{هـ}(\text{س}_1)}{\text{س}_2-\text{س}_1}$

$= \frac{\text{هـ}(٥)-\text{هـ}(١)}{٥-١}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{هـ}(٥) = ٢\text{ق}(٥) + ٧(٥) \\ \text{هـ}(١) = ٢\text{ق}(١) + ٧(١)\end{array}}$

$= \frac{(٢\text{ق}(٥)+٧\times٥)-(٢\text{ق}(١)+٧\times١)}{٥-١}$

$= \frac{(٢\text{ق}(٥)+٣٥)-(٢\text{ق}(١)+٧)}{٥-١}$

$= \frac{٢\text{ق}(٥)+٣٥-٢\text{ق}(١)-٧}{٥-١}$

$= \frac{٢\text{ق}(٥)\boxed{+٣٥}-٢\text{ق}(١)\boxed{-٧}}{٥-١}$

$= \frac{٢\text{ق}(٥)-٢\text{ق}(١)+٢٨}{٥-١}$

$= \frac{٢\text{ق}(٥)-٢\text{ق}(١)}{٥-١} + \frac{٢٨}{٥-١}$

$= \frac{٢(\text{ق}(٥)-\text{ق}(١))}{٥-١} + \frac{٢٨}{٤}$

$= ٢\frac{(\text{ق}(٥)-\text{ق}(١))}{٥-١} + \frac{٢٨}{٤}$

$= ٢(١٢)+٧ = ٣١$

٢) $^{\text{٧٥/مثال}}$ اذا كان معدل تغير ق في الفترة [-٣ ، ١] يساوي ٢ وكان هـ(س) = ق(س) - س^{٢} **فجد معدل تغير هـ** في الفترة [-٣ ، ١] ؟

الحل :

٣) ق(س) = ل(س) − $س^٢$ ، س∈[١ ، ٣] وكان متوسط التغير لـ ل(س) = ٥

جد متوسط التغير لـ (ق(س)) ؟

الحل :

معدل التغير ل(س) $= \frac{ل(س_٢) - ل(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ل(٥) - ل(١)}{٣ - ١} = ٥$

معدل التغير هـ (س) $= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

$\boxed{\begin{array}{l} ق(٣) = ل(٣) - (٣)^٢ \\ ق(١) = ل(١) - (١)^٢ \end{array}}$

$= \frac{(ل(٣) - (٣)^٢) - (ل(١) - (١)^٢)}{٣ - ١}$

$= \frac{(ل(٣) - ٩) - (ل(١) - ١)}{٥ - ١}$

$= \frac{٢ق(٥) + ٣٥ - ٢ق(١) - ٧}{٣ - ١}$

$= \frac{ل(٥) \boxed{-٩} - ل(١) \boxed{+١}}{٥ - ١}$

$= \frac{ل(٣) - ل(١) - ٨}{٣ - ١}$

$= ٥ - \frac{٨}{٢}$

$= ٥ - ٤ = ١$

٤) ق(س) = هـ(س) + ٢س ، س∈[٢ ، ٤] وكان متوسط التغير لـ هـ(س) = ٧

جد متوسط التغير لـ (ق(س)) ؟

الحل :

أسئلة الثوابت

١) ق(س) = أ$س^٢$ + ٤ ، س∈[١ ، ٢] وكان التغير في الاقتران يساوي ٩ **جد قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

$\Delta ق(س) = ق(س_٢) - ق(س_١)$

$٩ = ق(٢) - ق(١)$

$\boxed{\begin{array}{l} ق(٢) = أ(٢)^٢ + ٤ = ٤أ + ٤ \\ ق(١) = أ(١)^٢ + ٤ = أ + ٤ \end{array}}$

$٩ = ق(٢) - ق(١)$

$٩ = (٤أ + ٤) - (أ + ٤)$

$٩ = ٤أ + \cancel{٤} - أ - \cancel{٤}$

$٩ = ٣أ \Leftarrow أ = ٣$

٢) $ق(س) = \frac{أ}{س + ٢}$ اذا كان معدل تغير ق(س) عندما تتغير س من صفر الى ٣ يساوي -٢ **فجد أ** ؟

الحل :

٣) ق(س) = $س^٢$ + أس ، س∈[١ ، ٣] وكان التغير في الاقتران يساوي ٢٤ **جد قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

الدرس الثاني : المشتقة الأولى

يرمز للمشتقة $\text{ق}'(\text{س})$ ، $\text{ص}'$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، ميل المماس

$\text{ق}'(\text{س}) \leftarrow$ اقرأ (ق فتحه لـ س)

تعريف المشتقه الأولى

اذا كانت ص = ق(س) فإن

$$\leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\Delta\text{س})-\text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}} \quad : \Delta\text{س} = \text{هـ}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

متى يتم استخدام هذا القانون عندما " يطلب إيجاد المشتقة باستخدام تعريف المشتقة العام "

خطوات حل أسئلة على هذا الدرس

١) كتابة القانون

٢) تعويض الاقتران المعطى في السؤال في القانون

٣) نفك الاقواس (**تجهيز السؤال**)

٤) يكون ناتج التعويض داخل النهاية $\frac{0}{0}$ (**ابحث عن مسبب المشكلة**)

٥) نخرج هـ عامل مشترك من البسط ونختصرها مع هـ التي في المقام

٦) نعوض بدل هـ = صفر وتخرج لنا المشتقة الأولى هـ

أمثلة :

١) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ ق(س) = ٥س − ٧ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س} - 7 \leftarrow \text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = 5(\text{س}+\text{هـ}) - 7$$

$$\boxed{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = 5\text{س} + 5\text{هـ} - 7}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{5\text{س}+5\text{هـ}-7-(5\text{س}-7)}{\text{هـ}}$$

$$= \boxed{\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{5\text{س}+5\text{هـ}-7-5\text{س}+7}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{5\text{س}}+5\text{هـ}\cancel{-7}\cancel{-5\text{س}}\cancel{+7}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{5\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{5\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} 5 = 5$$

٢) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ ق(س) = $\text{س}^2 + 5$ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 5 \leftarrow \text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = (\text{س}+\text{هـ})^2 + 5$$

$$\boxed{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{س}^2 + 2\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^2 + 5}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2+2\text{س}\text{هـ}+\text{هـ}^2+5-(\text{س}^2+5)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2+2\text{س}\text{هـ}+\text{هـ}^2+5-\text{س}^2-5}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س}^2}+2\text{س}\text{هـ}+\text{هـ}^2\cancel{+5}\cancel{-\text{س}^2}\cancel{-5}}{\text{هـ}}$$

$$= \boxed{\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}\text{هـ}+\text{هـ}^2}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(2\text{س}+\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(2\text{س}+\text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} (2\text{س}+\text{هـ}) = (2\text{س}+0) = 2\text{س}$$

٣) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٤$ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٤ \leftarrow \text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = (\text{س}+\text{هـ})^{٣} - ٤$$

$$\boxed{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣} - ٤}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣} - ٤ - (\text{س}^{٣} - ٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣} - ٤ - \text{س}^{٣} + ٤}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\cancel{\text{س}^{٣}} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣} \cancel{- ٤} \cancel{- \text{س}^{٣}} \cancel{+ ٤}}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{س}\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣}}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢})}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} (٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}) = (٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}(٠) + (٠)^{٢}) = ٣\text{س}^{٢}$$

٤) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} \leftarrow \boxed{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = \sqrt{\text{س}+\text{هـ}}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + \text{هـ} - \text{س}}{\text{هـ}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\cancel{\text{س}} + \text{هـ} \cancel{- \text{س}}}{\text{هـ}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}+(٠)} + \sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

٥) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}} \leftarrow \boxed{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{٢}{\text{س}+\text{هـ}}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٢}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{٢}{\text{س}}}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{٢}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{٢}{\text{س}}\right)\frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{٢\text{س} - ٢(\text{س}+\text{هـ})}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}\right)\frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{٢\text{س} - ٢\text{س} - ٢\text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}\right)\frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{\cancel{٢\text{س}} \cancel{- ٢\text{س}} - ٢\text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}\right)\frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{-٢\cancel{\text{هـ}}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}\right)\frac{١}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{-٢}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} = \frac{-٢}{\text{س}(\text{س}+٠)} = \frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$$

٦) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س} + ٦$ ؟

الحل :

٧) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ ق(س) = ٣س^{٢} – ٤ ؟

الحل :

٨) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ ق(س) = س^{٣} ؟

الحل :

٩) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ ه(س) = $\sqrt{٣ - ٢س}$ ؟

الحل :

١٠) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ ه(س) = $\frac{-٣}{س}$ ؟

الحل :

١١) **استخدم تعريف المشتقة الأولى** لـ $ق(س) = \frac{٢}{٥ - ٢س}$ ؟

الحل :

أمثلة :

يوضع س + هـ = ع يمكن التعبير عن **المشتقة الأولى باستخدام التعريف** حسب العلاقة الاتية :

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{\Delta س}$$

$$\boxed{ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}}$$

١) اذا كان ق(س) = س^٢ فجد ق'(س) **باستخدام التعريف** ؟

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{ع \to ٠} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق(س) = س^٢ \leftarrow \boxed{ق(ع) = ع^٢}$$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \boxed{\lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{(ع - س)}(ع + س)}{\cancel{ع - س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} (ع + س) = (س + س) = ٢س$$

٢) اذا كان $ق(س) = \sqrt{س}$ **فجد** ق'(س) **باستخدام التعريف** ؟

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{ع \to ٠} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق(س) = \sqrt{س} \leftarrow \boxed{ق(ع) = \sqrt{ع}}$$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \boxed{\lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{(\sqrt{ع} - \sqrt{س})(\sqrt{ع} + \sqrt{س})}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}}{(\cancel{\sqrt{ع} - \sqrt{س}})(\sqrt{ع} + \sqrt{س})}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}} = \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

طريقة أخرى للحل :

٣) اذا كان ق(س) = $س^٣$ **فجد** ق´(س) **باستخدام التعريف ؟**

الحل :

٤) اذا كان ق(س) = ٤$س^٢$ – ٣ **فجد** ق´(س) **باستخدام التعريف ؟**

الحل :

٥) اذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ **فجد** ق´(س) **باستخدام التعريف ؟**

الحل :

٦) اذا كان ق(س) = $\sqrt{٢س}$ ، س > ٠ **فجد** ق´(س) **باستخدام التعريف ؟**

الحل :

أمثلة :

يستخدم هذا القانون عندما يطلب المشتقة الأولى **عند عدد ما** .

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

١) مثال٨١ اذا كان ق(س) = ٦ – ٥س **فجد** ق′(٢) **باستخدام التعريف** ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٦ - ٥\text{س} \leftarrow \text{ق}(٢+\text{هـ}) = ٦ - ٥(٢+\text{هـ})$$

$$\boxed{\text{ق}(٢+\text{هـ}) = ٦ - ١٠ - ٥\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(٢) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٦-١٠-٥\text{هـ}-(٦-٥(٢))}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٦-١٠-٥\text{هـ}-(٦-١٠)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٦-١٠-٥\text{هـ}-٦+١٠}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{٦}-\cancel{١٠}-٥\text{هـ}-\cancel{٦}+\cancel{١٠}}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٥\text{هـ}}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٥\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} -٥ = -٥$$

٢) باستخدام تعريف المشتقة لايجاد المشتقة الأولى لـ ق(س) = س^٢ + ٥س عند س = ٢ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٥\text{س} \leftarrow \text{ق}(٢+\text{هـ}) = (٢+\text{هـ})^٢ + ٥(٢+\text{هـ})$$

$$\boxed{\text{ق}(٢+\text{هـ}) = ٤ + ٢\text{هـ} + \text{هـ}^٢ + ١٠ + ٥\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(٢) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤+٢\text{هـ}+\text{هـ}^٢+١٠+٥\text{هـ}-((٢)^٢+٥(٢))}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤+٢\text{هـ}+\text{هـ}^٢+١٠+٥\text{هـ}-(٤+١٠)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤+٢\text{هـ}+\text{هـ}^٢+١٠+٥\text{هـ}-٤-١٠}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{٤}+٢\text{هـ}+\text{هـ}^٢\cancel{+١٠}+٥\text{هـ}\cancel{-٤}\cancel{-١٠}}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{هـ}+\text{هـ}^٢+٥\text{هـ}}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٩\text{هـ}+\text{هـ}^٢}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٥\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} -٥ = -٥$$

٣) استخدام تعريف المشتقة لايجاد المشتقة الأولى لـ ق(س) = س^٣ + ٥

عند س = - ١ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٥ \leftarrow \text{ق}(-١+\text{هـ}) = (-١+\text{هـ})^٣ + ٥$$

$$\boxed{\text{ق}(-١+\text{هـ}) = (-١)^٣ + ٣(-١)^٢\text{هـ} + ٣(-١)\text{هـ}^٢ + \text{هـ}^٣ + ٥}$$

$$\text{ق}'(-١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(-١)^٣+٣(-١)^٢\text{هـ}+٣(-١)\text{هـ}^٢+\text{هـ}^٣+٥-((-١)^٣+٥)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(-١)^٣+٣(-١)^٢\text{هـ}+٣(-١)\text{هـ}^٢+\text{هـ}^٣+٥-(-١)^٣-٥}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-١+٣\text{هـ}-٣\text{هـ}^٢+\text{هـ}^٣+٥-(-١)-٥}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{-١}+٣\text{هـ}-٣\text{هـ}^٢+\text{هـ}^٣\cancel{+٥}\cancel{+١}\cancel{-٥}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{هـ}-٣\text{هـ}^٢+\text{هـ}^٣}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}(٣-٣\text{هـ}+\text{هـ}^٢)}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٣-٣\text{هـ}+\text{هـ}^٢)}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} (٣-٣\text{هـ}+\text{هـ}^٢) = ٣ - ٣(٠) + (٠)^٢ = ٣$$

٤) باستخدام تعريف المشتقة لايجاد المشتقة الأولى لـ ق(س) = $\sqrt{\text{س}-١}$ ، س ≥ ١

عند س = ٥ ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-١} \leftarrow \text{ق}(٥+\text{هـ}) = \sqrt{(٥+\text{هـ})-١}$$

$$\boxed{\text{ق}(٥+\text{هـ}) = \sqrt{\text{هـ}+٤}}$$

$$\text{ق}'(٥) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{هـ}+٤}-(\sqrt{٥-١})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{هـ}+٤}-\sqrt{٤}}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{هـ}+٤}-٢}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{هـ}+٤}-٢}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{هـ}+٤}+٢}{\sqrt{\text{هـ}+٤}+٢}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}+٤-٤}{\text{هـ}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}+٤}+٢}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}\cancel{+٤}\cancel{-٤}}{\text{هـ}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}+٤}+٢}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}+٤}+٢}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١}{\sqrt{\text{هـ}+٤}+٢}\right) = \frac{١}{\sqrt{٠+٤}+٢} = \frac{١}{٤}$$

٥) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ٣}$ ، $\text{س} \neq ٣$ فجد $\text{ق}'(٤)$ باستخدام التعريف ؟

الحل :

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ٣} \leftarrow \text{ق}(٤+\text{هـ}) = \frac{٢}{(٤+\text{هـ}) - ٣}$$

$$\boxed{\text{ق}(٤+\text{هـ}) = \frac{٢}{\text{هـ} - ١}}$$

$$\text{ق}'(٢) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٢}{\text{هـ}-١} - (\frac{٢}{٤-٣})}{\text{هـ}}$$

$$= \boxed{\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٢}{\text{هـ}+١} - \frac{٢}{١}}{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{٢}{\text{هـ}+١} - \frac{٢}{١}) \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{٢ \times ١ - ٢(\text{هـ}+١)}{(\text{هـ}+١)(١)}) \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{٢ - ٢(\text{هـ}+١)}{(\text{هـ}+١)}) \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{٢ - ٢\text{هـ} + ٢}{(\text{هـ}+١)}) \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{\cancel{٢} - ٢\text{هـ} \cancel{- ٢}}{(\text{هـ}+١)}) \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{-٢\text{هـ}}{(\text{هـ}+١)}) \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{-٢\cancel{\text{هـ}}}{(\text{هـ}+١)}) \frac{١}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (\frac{-٢}{(\text{هـ}+١)}) = \frac{-٢}{٠+١} = -٢$$

٦) [٨٤/مثال] اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} - ٣}$ فجد $\text{ق}'(٤)$ باستخدام التعريف ؟

الحل :

٧) [٨٥/تدريب] اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{١ - ٣\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \frac{١}{٣}$ فجد $\text{ق}'(\text{س})$باستخدام التعريف

ثم جد $\text{ق}'(\frac{١}{٢})$ ؟

الحل :

٨) **استخدم تعريف المشتقة** الأولى عند نقطة في حساب مشتقة كل مما يأتي عند نقطة س المبينة إزاء كل منها :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = ١ - \text{س}^٢$ ، $\text{س} = ٤$

ب) $\text{ص} = ٢\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ٤$ ، $\text{س} = ٠$

جـ) $\text{ص} = \frac{٥}{٤ + ٣\text{س}}$ ، $\text{س} = ١$

الحل :

أمثلة :

١) اذا مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س الى س + هـ

هو ٧س هـ + ٣هـ^{٢} فجد ق$'$(س) ، ثم جد ق$'$(٥) ؟

الحل :

الفكرة " تذكر ان التغير في الاقتران هو Δق(س) = ق(س + هـ) − ق(س)

Δق(س) = ق(س + هـ) − ق(س) = ٧سهـ + ٣هـ^{٢}

ق$'$(س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \boxed{\dfrac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{٧سهـ + ٣هـ^{٢}}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{هـ(٧س + ٣هـ)}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\cancel{هـ}(٧س + ٣هـ)}{\cancel{هـ}}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$(٧س + ٣هـ) = (٧س + ٣(٠)) = ٧س

ق$'$(س) = ٧س

ق$'$(٥) = ٧(٥) = ٣٥

٢) اذا مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ الى ع

هو ع^{٣} − ٨ فجد ق$'$(س) ثم جد ق$'$(٢) ؟

الحل :

الدرس الثالث : قواعد الاشتقاق

ليكن هناك اقتران ق(س) فان المشتقة الأولى يرمز لها $\text{ق}'(\text{س})$ واذا كانت ص فان المشتقة الأولى $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ أو $\text{ص}'$

وهناك بعض القواعد التي **تسهل عملية الاشتقاق** :

القاعدة الأولى :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٠$

الاقتران الثابت دائما اشتقاقه صفر

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية :

١) $\text{ق}(\text{س}) = ٥ \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٠$

٢) $\text{ص} = -٩ \Leftarrow \text{ص}' = ٠$

٣) $\text{ص} = ١٠^{٢} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٨} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٠$

٥) $\text{ص} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ص}' = ٠$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = (\frac{٩}{٤})^{٢} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \pi \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٠$

٨) $\text{ق}(\text{س}) = -١ \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٠$

القاعدة الثانية :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-١}$

الاقتران المرفوع لقوة يتم اشتقاقه بنزال القوة وطرح القوة من واحد

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية :

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢-١} = ٢\text{س}$

٢) $\text{ص} = \text{س}^{٣} \Leftarrow \text{ص}' = ٣\text{س}^{٣-١} = ٣\text{س}^{٢}$

٣) $\text{ص} = \text{س}^{-٥} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٥\ \text{س}^{-٥-١} = -٥\ \text{س}^{-٦}$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}\ \text{س}^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}\ \text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

٥) $\text{ص} = \text{س}^{-٢} \Leftarrow$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٦} \Leftarrow$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Leftarrow$

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \Leftarrow$

القاعدة الثالثة :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{م}(\text{س}) \;\Leftarrow\; \text{ق}'(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{م}'(\text{س})$$

اذا كان مع الاقتران ثابت لتسهيل الحل اخراج الثابت واشتقاق الاقتران لوحده

تذكر : **الاقتران الجذرية** لتسهيل لحلها تحويلها لقترانات اسسية

الاقترانات الكسرية لتسهيل لحلها رفع المقام الى البسط

*) $\frac{1}{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{-\text{م}}$

**) $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية

١) $\text{ق}(\text{س}) = 5\,\text{س}^2 \;\Leftarrow\; \text{ق}'(\text{س}) = 5\,(2\text{س}^{2-1}) = 10\,\text{س}$

٢) $\text{ص} = 4\,\text{س}^3 \;\Leftarrow\; \text{ص}' = 4\,(3\text{س}^{3-1}) = 12\,\text{س}^2$

٣) $\text{ص} = 5\,\sqrt[3]{\text{س}} \;\Leftarrow\; \text{ص} = 5\,\text{س}^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 5\,\frac{1}{3}\,\text{س}^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}\,\text{س}^{\frac{-2}{3}} = \frac{5}{3\text{س}^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{3\,\sqrt[3]{\text{س}^2}}$$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{7}{\text{س}^5} \;\Leftarrow\; \text{ق}(\text{س}) = 7\,\text{س}^{-5}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 7\,(-5\text{س}^{-5-1}) = -35\text{س}^{-6} = \frac{-35}{\text{س}^6}$$

٥) $\text{ص} = \frac{4}{\text{س}^2} \;\Leftarrow$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^6 \;\Leftarrow$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{3}{2}} \;\Leftarrow$

٨) $\text{ص} = \sqrt[5]{\text{س}^8} \;\Leftarrow$

٩) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{8}{\text{س}^3} \;\Leftarrow$

١٠) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{6}{\sqrt[5]{\text{س}}} \;\Leftarrow$

القاعدة الرابعة :

في حالة الجمع والطرح نشتق كل قاعدة لوحدها :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \;\Leftarrow\; \text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س})$$

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية

١) $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^7 - 2\text{س}^5 - 3 \;\Leftarrow\; \text{ق}'(\text{س}) = 28\text{س}^6 - 10\text{س}^4 - 0$

٢) $\text{ص} = 5\text{س}^{-10} + 2\text{س}^2 - \sqrt{2} \;\Leftarrow\; \text{ص}' = -50\text{س}^{-11} + 4\text{س} - 0$

٣) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + \text{س}^2 - 100 \;\Leftarrow\; \text{ص} = \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^2 - 100$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{1}{2}\,\text{س}^{\frac{-1}{2}} - 2\text{س} - 0 = \frac{1}{2}$$

٤) $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \text{س}^2$

٥) $\text{ص} = \text{س}^{-3} - 2\text{س}$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^6$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س}^4 - 2\text{س}^3 - \text{س} + 2$

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[4]{\text{س}^5} - 3\text{س}^{-4} + 5\text{س} + 2$

٩) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{3}{4}\text{س}^8 - \frac{5}{2}\text{س}^2 + \frac{7}{3}\text{س}^3 - \frac{15}{4}\text{س} + \frac{9}{17}$

١٠) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} + 3\text{س}^2 + 4\text{س} + 9$

١١) $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^{-0.5} + \sqrt[3]{\text{س}^5} + \text{س}$

القاعدة الخامسة :

تستخدم لحاصل ضرب اقترانيين

$$\text{ص} = \text{ق(س)} \times \text{ع(س)} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق(س)} \times \text{ع}'\text{(س)} + \text{ع(س)} \times \text{ق}'\text{(س)}$$

بمعنى " الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول "

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية

١) $\text{ق(س)} = (\text{س}^{٢} + ٣)(\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢})$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = (\text{س}^{٢} + ٣)(٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}) + (\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢}) \times (٢\text{س})$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = ٣\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} + ٩\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٢\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = ٥\text{س}^{٤} + ٨\text{س}^{٣} + ٩\text{س}^{٢} + ١٢\text{س}$

٢) $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ٢\text{س})(٥\text{س}^{٢} + ٨)$

$\Leftarrow \text{ص}' =$

٣) $\text{ص} = (\text{س}^{٣} + ٤\text{س})(\text{س} + ٧)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$

٤) $\text{ق(س)} = \text{س}^{-٣}(\text{س}^{٣} + ٧)$

٥) $\text{ص} = (٥\text{س} + ٣)(\text{س}^{٢} - ١)$

٦) $\text{ق(س)} = ٤\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} + ٢)$

٧) $\text{ق(س)} = (٣\text{س}^{٢} + ٧)(\text{س}^{-٥} + ٣)$

٨) $\text{ص} = ٢\text{س} \times (٣ - \text{س}^{٢}) + \frac{٢}{\text{س}}$

٩) $\text{ق(س)} = ٦\text{س}$

القاعدة السادسة :

تستخدم لحاصل قسمة اقترانيين

$$\text{ص} = \frac{\text{ق(س)}}{\text{ع(س)}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ع(س)} \times \text{ق}'\text{(س)} + \text{ق(س)} \times \text{ع}'\text{(س)}}{(\text{ع(س)})^{٢}}$$

بمعنى $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{مقام})^{٢}}$

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية

١) $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣}{٢\text{س}^{٢} + ٥}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = \frac{(٢\text{س}^{٢} + ٥) \times ٢\text{س} - (\text{س}^{٢} - ٣) \times ٤\text{س}}{(٢\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = \frac{٤\text{س}^{٣} + ١٠\text{س} - ٤\text{س}^{٣} + ١٢\text{س}}{(٢\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(س)} = \frac{٢٢\text{س}}{(٢\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}$

٢) $\text{ص} = \frac{٥\text{س}}{\text{س}^{٣} + ١}$

$\Leftarrow \text{ص}' =$

٣) $\text{ص} = \frac{٣\text{س} - ٥}{٨\text{س} - ٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$

٤) $\text{ق(س)} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢}}$

٥) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{٤ - \text{س}^{٢}}$

٦) $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{٢}(٣\text{س} + ١)}{٢\text{س} + ٥}$

٧) $\text{ق(س)} = \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ٣} + \frac{٥\text{س}}{٣\text{س} + ١}$

٨) $\text{ق(س)} = \frac{٣}{٢\text{س}}$

القاعدة السابعة :

$$ق(س) = \frac{أ}{ع(س)} \quad \Leftarrow \quad ق'(س) = \frac{أ \times ع'(س)}{(ع(س))^٢}$$

بمعنى $\dfrac{\text{– الثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^٢}$

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل من الاقترانات التالية

١) $ق(س) = \dfrac{٥}{س^٢ + ١}$

$ق'(س) = \dfrac{-٥ \times ٢س}{(س^٢ + ١)^٢} = \dfrac{-١٠س}{(س^٢ + ١)^٢}$

٢) $ص = \dfrac{-٣}{٢ - س}$

$ص' = \dfrac{-(-٣) \times -١}{(٢ - س)^٢} = \dfrac{-٣}{(١ - س)^٢}$

٣) $ص = \dfrac{٤}{س^٣ + ٥س + ١}$

$\dfrac{ءص}{ءس} =$

٤) $ق(س) = \dfrac{-٢}{س^٢ + س}$

٥) $ص = \dfrac{٣}{٢س}$

٦) $ق(س) = \dfrac{-٥}{٢س^٧ - ٣}$

٧) $ق(س) = \dfrac{\sqrt{٢}}{س - ١}$

٨) $ق(س) = \dfrac{٥}{٢س} - \dfrac{٧}{٣س - ١} + \dfrac{٦}{س^٢}$

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل مما يأتي عند قيم س المبينه إزاء كل منها :

١) $ص = ٥س^{٣} - ٢س^{٢} + ١$ ، $س = -٣$

٢) $ق(س) = س^{٣} + \sqrt[٣]{س}$ ، $س = ١$

٣) $ص = \frac{-٣}{٢ - س}$ ، $س = -٢$

٤) $ق(س) = \frac{٢س}{٥ - ٤س}$ ، $س = ١$

٥) $ص = (٤ - ٦س^{٢})(٢س + ١)$ ، $س = -٢$

٦) $ص = ٢س(٣ - س^{٢}) + \frac{٢}{س}$ ، $س = ١$

٧) $ص = (٣س^{٢} - ٥س + ٤)(٢س^{٣} - ٤س + ٣)$ ، $س = ١$

٨) $ق(س) = ٨\sqrt{س} - \frac{١٢}{\sqrt[٣]{س}}$ ، $س = ١$

الحل :

الفكرة " عند الاشتقاق يتم تعويض ....

مشتقات على صورة نهايات

أمثلة :

١) اذا كان $ق(س) = س^{٤} - ٣س^{٢} + ٨س$ **جد** :

أ) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ ب) $\underset{ع \to س}{\text{نها}} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

ج) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$ د) $\underset{ع \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$

الحل :

الفكرة "
....
....

أ) $ق'(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$ق'(س) = ٤س^{٣} - ٦س + ٨$

ب) $ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$ق'(س) = ٤س^{٣} - ٦س + ٨$

ج) $ق'(١) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$

$ق'(س) = ٤س^{٣} - ٦س + ٨$

$ق'(١) = ٤(١)^{٣} - ٦(١) + ٨ = ٦$

د) $ق'(٢) = \underset{ع \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$

$ق'(س) = ٤س^{٣} - ٦س + ٨$

$ق'(٢) = ٤(٢)^{٣} - ٦(٢) + ٨ = ٢٨$

٢) اذا كان $ق(س) = ٤س^{٢} - ٩س + ٥$ **فجد** $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$ ؟

الحل :

٣) اذا كان $ق(س) = س^{٣} - ١٢س + ١١$ **فجد** قيم س حيث $ق'(س) = ٠$ ؟

الحل :

٤) اذا كان $ق(س) = ٣س^{٢} - ٥س + ٤$ وكانت $ق'(أ) = ١٣$ **فجد** الثابت أ ؟

الحل :

٥) اذا كان $ق(س) = \sqrt{س}$ **فجد** $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$ ؟

الحل :

أمثلة :

١) اذا كان $\text{ق}(١) = ٤$ ، $\text{ق}'(١) = -٢$ ، $\text{هـ}(١) = -٢$ ، $\text{هـ}'(١) = ١$ **فجد** :

أ) $(\text{ق}\times\text{هـ})'(١)$ ب) $((\text{ق}\times\text{هـ})(١))'$ جـ) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(١)$

د) $\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)'(١)$ هـ) $(\text{ق}+\text{هـ})'(١)$ و) $(٣\text{ق}-٢\text{هـ})'(١)$

الحل :

الفكرة "

....

....

....

أ) $(\text{ق}\times\text{هـ})'(١)$

$= \text{ق}(١)\times\text{هـ}'(١) + \text{هـ}(١)\times\text{ق}'(١)$

$= ٤\times١ + -٢\times-٢ = ٤+٤ = ٨$

ب) $((\text{ق}\times\text{هـ})(١))'$

$= (\text{ق}(١)\times\text{هـ}(١))'$

$= (٤\times-٢)' = (-٨)' = ٠$

جـ) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(١)$

$= \frac{\text{هـ}(١)\times\text{ق}'(١) - \text{ق}(١)\times\text{هـ}'(١)}{(\text{هـ}(١))^{٢}}$

$= \frac{(-٢\times-٢) - (٤\times١)}{(-٢)^{٢}} = \frac{٤-٤}{٤} = ٠$

د) $\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)'(١)$

$= \frac{-٣\times\text{هـ}'(١)}{(\text{هـ}(١))^{٢}}$

$= \frac{-٣\times١}{(-٢)^{٢}} = \frac{-٣}{٤}$

هـ) $(\text{ق}+\text{هـ})'(١)$

$= \text{ق}'(١) + \text{هـ}'(١)$

$= -٢+١ = -١$

و) $(٣\text{ق}-٢\text{هـ})'(١)$

$= ٣\text{ق}'(١) - ٢\text{هـ}'(١)$

$= ٣\times(-٢) - ٢\times(١) = -٦-٢ = -٨$

الدرس الرابع : قاعدة السلسلة

تستخدم **قاعدة السلسلة** اذا كان لدينا معادلتين وطلب منا إيجاد المشتقة

مثال للتوضيح : ص = اقتران يعتمد على ع

ع = اقتران يعتمد على س (بمعنى ع هو الوسيط)

ص   ع   س

القاعدة الأولى :

اذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ(س) فإن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{ع}) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

كيفية إيجاد المشتقة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

١) **نضع** الأسهم الدالة ص ← ع ← س

٢) **نكتب** القانون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\boxed{\text{دع}}} \times \frac{\boxed{\text{دع}}}{\text{دس}}$

٣) **نضرب** المشتقات (تجهيز)

٤) **نضع** مكان كل ع قيمتها .

أمثلة :

١) اذا كانت ص = ع² + ٣ع ، ع = ٥س − ٢ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

ص ← ع ← س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢ع + ٣$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

= (٢ع + ٣)٥

= ٥ × ٢ع + ٥ × ٣

= ١٠$\boxed{\text{ع}}$ + ١٥   ✓ $\boxed{\text{ع = ٥س − ٢}}$

= ١٠(٥س − ٢) + ١٥

= ٥٠س − ٢٠ + ١٥

= ٥٠س − ٥

٢) اذا كانت ص = ٥ع² ، ع = س³ + ٤ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

ص ← ع ← س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ١٠ع$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٣س^٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

= (١٠ع)(٣س²)

= ٣٠س²ع

= ٣٠س²$\boxed{\text{ع}}$ ✓ $\boxed{\text{ع = س}^٣\text{ + ٤}}$

= ٣٠س²(س³ + ٤)

= ٣٠س⁵ + ١٢٠س²

٣) اذا كانت ص = ع⁷ ، ع = ٣س² + ٢ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٤) اذا كانت ص = ع³ + ٥ع ، ع = ٣س² − ٢ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٥) اذا كانت $\text{ص} = \frac{٣}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \frac{٢}{\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٦) اذا كانت $\text{ص} = \text{م}^{٣} + ٣\text{م}^{٢} - ٥$ ، $\text{م} = ٣\text{س} + ٧$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

ص ← م ← س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دم}} = ٣\text{م}^{٢} + ٦\text{م}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دس}} = ٣$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}}$$

$$= (٣\text{م}^{٢} + ٦\text{م})(٣)$$

$$= ٩\text{م}^{٢} + ١٨\text{م}$$

$$= ٩\boxed{\text{م}^{٢}} + ١٨\boxed{\text{م}} \qquad \checkmark \quad \boxed{\text{م} = ٣\text{س} + ٧}$$

$$= ٩(٣\text{س} + ٧)^{٢} + ١٨(٣\text{س} + ٧)$$

٧) اذا كانت $\text{ص} = \text{م}^{٣} + ٢\text{م}^{٢} + ٦$ ، $\text{م} = \text{س}^{٢} + ٣$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٨) اذا كانت $\text{ص} = \text{ن}^{٥} + ٣\text{ن}$ ، $\text{ن} = ٣\text{س}^{\frac{٢}{٥}} - ١$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

أمثلة : جد **المشتقة الأولى** لكل مما يأتي :

١) ١٠١/الأسئلة ص = ل^{٣} ، ل = ٨س ، عندما س = -٢

٢) ٩٧/مثال ص = ع^{٣}+١ ، ع = ٥س – ٢ ، عندما س = ١

٣) ص = ع^{٣}+ع^{٢} ، ع = ٣س+١ ، عندما س = ٠

٤) ١٠١/الأسئلة ص = م^{٢}+٣م – ٢ ، م = ٤س^{٢} ، عندما س = ٢

٥) ص = ع^{٢}+٣ع ، ع = ٣ – ٢س^{٢} ، عندما س = ١

٦) *** ص = ل^{٢}+٧ ، ل = س^{٢}+١ ، عندما ل = ٥

الحل :

القاعدة الثانية :

اذا كانت $\text{ص} = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$ ، ن عدداً حقيقياً ، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$$

بلغتنا : ....

أمثلة :

١) اذا كانت $\text{ص} = (\text{س}^{٢}+١)^{٥}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥(\text{س}^{٢}+١)^{٥-١} \times (٢\text{س}^{٢-١}+٠)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥(\text{س}^{٢}+١)^{٤}(٢\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٠\text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{٤}$

٢) اذا كانت $\text{ص} = (٣\text{س}^{٢}+٧\text{س}+٨)^{٩}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٣) تدريب ٩٩/ اذا كانت $\text{ص} = (\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٥)^{-٢}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٤) اذا كانت $\text{ص} = \frac{١}{(\text{س}^{٣}-٤)^{٣}}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل : تجهيز السؤال

$\text{ص} = (\text{س}^{٣}-٤)^{-٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣(\text{س}^{٣}-٤)^{-٣-١} \times (٣\text{س}^{٣-١}-٠)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣(\text{س}^{٣}-٤)^{-٤} \times ٣\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٩\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}-٤)^{-٤}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{(\text{س}^{٣}-٤)^{٤}}$

٥) اذا كانت $\text{ص} = \frac{١}{(٥\text{س}^{٢}\ ٧\text{س}+٤)^{٩}}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٦) اذا كانت $\text{ص} = \frac{٦}{(٣\text{س}-٢)^{٧}}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

الحل :

٧) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}-٤}$ فجد $\text{ق}'(\text{س})$ ؟

الحل :

$\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٣}-٤)^{\frac{١}{٣}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}(\text{س}^{٣}-٤)^{\frac{١}{٣}-١} \times (٣\text{س}^{٣-١}-٠)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}(\text{س}^{٣}-٤)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{٣}\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}-٤)^{\frac{-٢}{٣}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt[٣]{(\text{س}^{٣}-٤)^{٢}}}$

٨) ٩٩/مثال اذا كانت $ص = \sqrt{س^{٣}+١}$ ، $س > ١$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

٩) اذا كانت $ص = \sqrt[٣]{(س^{٢}-٤)^{٢}}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

١٠) اذا كانت $ص = \sqrt[٥]{٥س^{٢}+٧س+١٩}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

١١) اذا كانت $ص = (\frac{٤}{س})^{-٧}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ن\,(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٧(\frac{٤}{س})^{-٧-١} \times (\frac{-٤\times١}{س^{٢}})$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٧(\frac{٤}{س})^{-٨} \times (\frac{-٤}{س^{٢}})$$

١٢) اذا كانت $ص = (\frac{٢}{س^{٢}+٢})^{٤}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

١٣) اذا كانت $ع(س) = (\frac{٥س}{٢س+٧})^{٦}$ فجد $ع'(س)$ ؟

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ن\,(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٦(\frac{٥س}{٢س+٧})^{٦-١} \times (\frac{(٢س+٧)٥ - (٥س)\times(٢)}{(٢س+٧)^{٢}})$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٦(\frac{٥س}{٢س+٧})^{٥} \times (\frac{١٠س+٣٥-١٠س}{(٢س+٧)^{٢}})$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٦(\frac{٥س}{٢س+٧})^{٥} \times (\frac{\cancel{١٠س}+٣٥-\cancel{١٠س}}{(٢س+٧)^{٢}})$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٦(\frac{٥س}{٢س+٧})^{٥} \times (\frac{٣٥}{(٢س+٧)^{٢}})$$

١٤) اذا كانت $ص = (\frac{٢س+١}{س^{٣}+١})^{-٤}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

١٥) اذا كانت $ص = (\frac{س}{٤-س^{٢}})^{٣}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل :

١٦) اذا كانت $ص = \sqrt{\frac{س^{٢}-١}{س^{٢}+١}}$ فجد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل :

١٧) اذا كانت $ق(س) = (س^{٢}-٢)^{٥}(٣س+٢)^{٧}$ فجد $ق'(س)$ ؟

الحل :

١٨) اذا كانت $ق(س) = س^{-٤}(٥-٥س^{٣})^{٢}$ فجد $ق'(س)$ ؟

الحل :

القاعدة الثالثة :

تستخدم **للجذر التربيعي**

اذا كانت $ق(س) = \sqrt{هـ(س)}$ ، $هـ(س) > ٠$ ، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن :

$$ق'(س) = \frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

بلغتنا : ....

أمثلة :

١) اذا كانت $ق(س) = \sqrt{س^{٢}+٥س}$ فجد $ق'(س)$ ؟

الحل :

$ق'(س) =$ ______________

$$ق'(س) = \frac{٢س+٥}{٢\sqrt{س^{٢}+٥س}}$$

٢) اذا كانت $ص = \sqrt{٣س^{٣}+٦س}$ فجد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل :

٣) ١٠٠/تدريب اذا كانت $ق(س) = \sqrt{س^{٢}-س+٣}$ فجد $ق'(س)$ ؟

الحل :

٤) اذا كانت $ص = \sqrt{١-٧س}$ فجد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل :

٥) [مهم] اذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٧$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}$ فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل :

أمثلة : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١) [١٠١/الأسئلة] $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٥ + ٣\text{س}^{٢}}$ عندما س = ٠

٢) [١٠١/الأسئلة] $\text{ص} = -٥(١ - ٣\text{س}^{٣})^{-٢}$ عندما س = - ١

٣) [١٠١/الأسئلة] $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ٣)(٢ - ٤\text{س}^{٣})^{٢}$ عندما س = ٢

٤) $\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٧)^{٤}$ عندما س = ٢

الحل :

مشتقات على صورة نهايات

١) اذا كانت $ق(س) = \sqrt{٣س^{٢} + ٦س}$ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$ ؟

الحل :

٢) اذا كانت $ق(س) = (س^{٢} - ٣)^{٤}$ فجد $\lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$ ؟

الحل :

٣) اذا كانت $ق(س) = ٢(٢س - ٣)^{٤}$ وكان $ق'(أ) = ١٦$ فجد أ ؟

الحل :

الدرس الخامس : مشتقة الاقترانات المثلثية

قاعدة :

١) اذا كان ق (س) = جاس فإن ق̄(س) = جتاس × ١

٢) اذا كان ق (س) = جتاس فإن ق̄(س) = − جاس × ١

٣) اذا كان ق (س) = ظاس فإن ق̄(س) = قا²س × ١

بلغتنا :

....

....

أمثلة : جد $\frac{دص}{دس}$ ، ق̄(س) ، ص̄ فيما يلي :

١) ص = جاس

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = جتاس × ١ = جتاس

٢) ق(س) = ٧ جاس

الحل :

ق̄(س) = ٧ جتاس × ١ = ٧ جتاس

٣) ص = ٢ ظاس − ٥ جتاس

الحل :

ص̄ = ٢ قا²س × ١ − ٥ × −جاس × ١ = ٢ قا²س + ٥ جاس

٤) مثال/١٠٣ ص = ٢س + $\frac{ظاس}{٢}$ − ٤جتاس

الحل :

٥) مثال/١٠٣ ص = $\frac{٢}{جتاس}$ + ظاس + ٢س

الحل :

٦) الاسئلة/١٠٧ ص = ٥س² جتاس − ظاس

الحل :

٧) ص = س² جتاس

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = س³ × −جاس × ١ + جتاس × ٣س² = −س³ جاس + ٣س² جتاس

٨) ص = جتاس ظاس

الحل :

ص = $\cancel{جتاس}$ × $\frac{جاس}{\cancel{جتاس}}$ ✓ $\boxed{ظاس = \frac{جاس}{جتاس}}$

ص = جاس

$\frac{دص}{دس}$ = جتاس × ١ = جتاس

٩) ص = س² ظاس

الحل :

١٠) مثال/١٠٣ ص = جاس جتاس

الحل :

١١) ص = $\frac{س^٥}{٥}$ جاس − ظاس

الحل :

١٢) ق(س) = $\frac{٣س}{ظاس}$

الحل :

ق̄(س) = $\frac{ظاس × ٣ − ٣س قا²س × ١}{(ظاس)^٢}$ = $\frac{٣ ظاس − ٣س قا²س}{(ظاس)^٢}$

١٣) ص = $\frac{٥}{\text{جتاس}}$

الحل :

$\text{ص}' = \frac{-٥\times-\text{جاس}\times١}{(\text{جتاس})^{٢}} = \frac{٥\ \text{جاس}}{(\text{جتاس})^{٢}}$

١٤) ص = $\frac{\text{جاس}}{١+\text{جتاس}}$

الحل :

$\text{ص}' = \frac{(١+\text{جتاس})\times\text{جتاس} - \text{جاس}\times-\text{جاس}}{(١+\text{جتاس})^{٢}}$

$= \frac{\text{جتاس} + \boxed{\text{جتا}^{٢}\text{س}+\text{جا}^{٢}\text{س}}}{(١+\text{جتاس})^{٢}}$ ✓ $\boxed{\text{جتا}^{٢}\text{س}+\text{جا}^{٢}\text{س} = ١}$

$= \frac{\text{جتاس}+١}{(١+\text{جتاس})^{٢}}$

$= \frac{١+\text{جتاس}}{(١+\text{جتاس})^{٢}}$

$= \frac{١+\text{جتاس}}{(١+\text{جتاس})\ (١+\text{جتاس})}$

$= \frac{\cancel{١+\text{جتاس}}}{\cancel{(١+\text{جتاس})}\ (١+\text{جتاس})}$

$= \frac{١}{١+\text{جتاس}}$

أمثلة : جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، ق َ(س) ، ص َ فيما يلي :

١) ص = جتا٧س + ظا٥س

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جا٧س}\times٧+\text{قا}^{٢}\text{٥س}\times٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٧\ \text{جا٧س}+٥\ \text{قا}^{٢}\text{٥س}$

٢) ص = ٢ظا٣س – جتا٤س

الحل :

٣) ق(س) = $\text{جتا٤س}^{٢}$

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا٤س}^{٢}\times٤(٢\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٨\text{س}\ \text{جتا٤س}^{٢}$

٤) ق(س) = $\text{ظا٦س}^{٤}$

الحل :

٥) ص = ٥س ظا٣س

الحل :

$\text{ص}' = ٥\text{س}\times\text{قا}^{٢}\text{٣س}\times٣+\text{ظا٣س}\times٥$

$\text{ص}' = ١٥\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{٣س}+٥\text{ظا٣س}$

٦) ص = س جا٤س

الحل :

٧) ص = جتا $(\text{س}^{٣}+٤\text{س})$

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جا}(\text{س}^{٣}+٤\text{س})\times(٣\text{س}^{٢}+٤)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -(٣\text{س}^{٢}+٤)\ \text{جا}(\text{س}^{٣}+٤\text{س})$

ملاحظة : *) جا^{ن}س = (جاس)^{ن}
**) جا^{ن}س ≠ جاس^{ن}

أمثلة : جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، ق$'$(س) ، ص$'$ فيما يلي :

١) ق(س) = جا^{٥}س

الحل :

ق(س) = (جاس)^{٥}
ق$'$(س) = ٥ (جاس)^{٤}×جتاس

٢) ص = ظا^{٣}٤س

الحل :

ص = (ظا٤س)^{٣}
ص$'$ = ٣ (ظا٤س)^{٢}×قا^{٢}٤س×٤
ص$'$ = ١٢ (ظا٤س)^{٢}×قا^{٢}٤س

٣)$^{١٠٥/مثال}$ ق(س) = جا^{٤}٢س

الحل :

٤) ص = جتا^{٣}٤س^{٢}

الحل :

ص = (جتا٤س^{٢})^{٣}
ص$'$ = ٣ (جتا٤س^{٢})^{٢}× −جا٤س^{٢} ×٨س
ص$'$ = −٢٤س (جتا٤س^{٢})^{٢}×جا٤س^{٢}

٥) ق(س) = جا^{٢}٥س + س^{٣}

الحل :

ق(س) = (جا٥س)^{٢} + س^{٣}
ق$'$(س) = ٢ (جا٥س)×جتا٥س × ٥ + ٣س^{٢}
ق$'$(س) = ١٠ (جا٥س)×جتا٥س + ٣س^{٢}

٦)$^{١٠٥/تدريب}$ ق(س) = ٢جتا٤س+جا^{٢}س−ظا(٥س + ١)

الحل :

٨) ص = ظا (٢س^{٢} − ٥س + ٦)

الحل :

٩)$^{١٠٥/مثال}$ ص = س ظا (س^{٢} + ١)

الحل :

١٠) ق(س) = س^{٢} جتا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$

الحل :

ق(س)$'$ = ٥س^{٢} × −جا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ($\frac{\text{−١}}{\text{س}^{٢}}$)+جتا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$ × ٢س
ق(س)$'$ = $\frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$جا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$ + ٢س جتا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$
ق(س)$'$ = ٥ جا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$ + ٢س جتا$\frac{\text{١}}{\text{س}}$

١١) ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ جتا٣س

الحل :

١٢) ص = $\frac{\text{٢جاس}}{\text{جتا٤س}}$

الحل :

٧) ص =ظاس^{٤}+ظا^{٤}س

الحل :

ص =ظاس ^{٤}+ (ظاس)^{٤}

ص$'$ = (قا^{٢}س^{٤}) × ٤س ^{٣} + ٤(ظاس) ^{٣}×قا^{٢}س ×١

ص$'$ = ٤س ^{٣} (قا^{٢}س^{٤}) + ٤(ظاس) ^{٣}×قا^{٢}س

٨) ق(س) = س ^{٢} جا^{٣}٣س

الحل :

ق(س) = س ^{٢} (جا٣س) ^{٣}

ق$'$(س) = س ^{٢}× ٣(جا٣س)^{٢}×جتا٣س × ٣ + (جا٣س) ^{٣}×٢س

ق$'$(س) = ٩س ^{٢} (٣جا٣س)^{٢}×جتا٣س + ٢ س (جا٣س) ^{٣}

٩) ق(س) = ٦س ظا^{٥}٢س

الحل :

١٠) ق(س) =جا^{٢}س(١ –جتاس)

الحل :

١١) ق(س) = (س جاس) ^{٣} ظاس

الحل :

أمثلة : جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، ق$'$(س) ، ص$'$ فيما يلي :

١) ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٣}\text{+جتا٢س}}$

الحل :

ق$'$(س) = $\frac{\text{٣س}^{٢}\text{–جا٢س} \times ٢}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}\text{+جتا٢س}}} = \frac{\text{٣س}^{٢} – \text{٢جا٢س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}\text{+جتا٢س}}}$

٢) ص = $\sqrt{\text{٥س+ظا٣س}}$

الحل :

أمثلة : جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، ق$'$(س) ، ص$'$ فيما يلي :

١) ق(س) = (س^{٢}– ظاس)^{٥}

الحل :

ق$'$(س) = ٥ (س^{٢}– ظاس) ^{٤}× (٢س–قا^{٢}س)

٢) ص = (جاس + جتاس) ^{٣}

الحل :

٣) ص = (جاس– جتاس) $^{-٢}$

الحل :

٤) ص = (جا(٢س)) ^{٣}

الحل :

ص$'$ =٣(جا(٢س)) ^{٢}× (جتا٢ س) ×٢

ص$'$ = ٦(جا(٢س)) ^{٢}× (جتا٢ س)

٥) ص = (جا(س^{٢} + س))^{٩}

الحل :

٦) ق(س) = ظا^{٣}(٥ + س^{٢})

الحل :

مثال : اذا كان ص = ظاع ، ع = س^{٣} + ٣ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل :

مشتقات على شكل نهايات

أمثلة :

١) اذا كانت ق(س) = جا٣س جد $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + هـ) − ق(س)}}{\text{هـ}}$

الحل :

٢) اذا كانت ق(س) = ظا٥س جد $\underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(ع) − ق(س)}}{\text{ع − س}}$

الحل :

الدرس السادس : المشتقات العليا

اذا كان ص = ق (س) قابلا للاشتقاق بالنسبه الى س ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ص$'$ = ق$'$(س)

تسمى **المتشقة الأولى للاقتران** ق بالنسبة لـ س

وإذا أردنا الاشتقاق مرة ثانية نعتبر المشتقة الأولى كاقتران اصلي ثم نشتقه ونركز

للمشتقة الثانية $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = ص$''$ = ق$''$(س)

ويرمز الى قيمة المشتقة عندما س = أ $\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}\right|_{\text{س=أ}}$ = ص$''\Big|_{\text{س=أ}}$ = ق$''$(أ)

وبصورة مشابهه نرمز الى **المشتقة الثالثة** بالرمز : $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{دس}^{٣}}$ = ص$'''$ = ق$'''$(س)

لكن في هذا الموضوع فقط ينركز على إيجاد المشتقة الثانية .

أمثلة : جد **المشتقة الثانية** لكل مما يأتي .

١) ق(س) = س^{٥} − ٢س^{٢}

الحل :

ق$'$(س) = ٥س^{٤} − ٤س

ق$''$(س) = ٥(٤س^{٣}) − ٤ = ٢٠س^{٣} − ٤

٢) ص = $\frac{\text{س}^{٥}}{٤}$ − $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + ٢س + ٤

الحل :

ص = $\frac{١}{٤}$س^{٥} − $\frac{١}{٣}$س^{٣} + ٢س + ٤

ص$'$ = $\frac{١}{٤}$(٤س^{٣}) − $\frac{١}{٣}$(٣س^{٢}) + ٢ + ٠

ص$'$ = $\frac{٤}{٤}$س^{٣} − $\frac{٣}{٣}$س^{٢} + ٢

ص$'$ = س^{٣} − س^{٢} + ٢

ص$''$ = ٣س^{٢} − ٢س + ٠ = ٣س^{٢} − ٢س

٣) ص = ٥س جتا٢س

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥س × −جا٢س × ٢ + جتا٢س × ٥

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −١٠س جا٢س + ٥جتا٢س

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = −١٠س × جتا٢س × ٢ + جا٢س × −١٠ + ٥(−جا٢س) × ٢

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = −٢٠س جتا٢س $\boxed{\text{−١٠جا٢س − ١٠جا٢س}}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = −٢٠س جتا٢س −٢٠جا٢س

٤)[الأسئلة/١١١] ق(س) = جا٢س جتاس

الحل :

٥) ق(س) = س جاس + ٢جتاس

الحل :

٦)[بداية الدرس] ص = س^{٢} جاس

الحل :

٧) ق(س) = جتاس^{٢}

الحل :

ق$'$(س) = جتا٣س^{٢} × ٣(٢س)

ق$'$(س) = ٦س جتا٣س^{٢}

ق$''$(س) = ٦س × −جا٣س^{٢} × ٣(٢س) + جتا٣س^{٢} × ٦

ق$''$(س) = −٣٦س^{٢} جا٣س^{٢} + ٦جتا٣س^{٢}

٨) $ص = جتاس - \frac{١}{س^{٢}}$

الحل :

$ص^{\prime} = -جاس \times ٥ - \frac{-١ \times ٢س}{(س^{٢})^{٢}}$

$ص^{\prime} = -٥ \ جاس - \frac{-٢س}{س^{٤}}$

$ص^{\prime\prime} = -٥(جتاس) \times ٥ - \frac{س^{٤} \times -٢ - (-٢س \times ٤س^{٣})}{(س^{٤})^{٢}}$

$ص^{\prime\prime} = -٢٥ \ جتاس - \frac{-٢س^{٤} + ٨س^{٤}}{(س^{٤})^{٢}}$

$ص^{\prime\prime} = -٢٥ \ جتاس - \frac{\cancel{س^{٤}}(-٢ + ٨)}{\cancel{س^{٨}}}$

$ص^{\prime\prime} = -٢٥ \ جتاس - \frac{(-٢ + ٨)}{س^{٤}}$

$ص^{\prime\prime} = -٢٥ \ جتاس - \frac{٦}{س^{٤}}$

هناك طريقة أخرى للحل :

٩) [١٠٩/تدريب] $ق(س) = \frac{٥}{س}$ يحل السؤال بطريقتين

الحل :

١٠) $ق(س) = ٢س^{٣} + \frac{١٦}{س}$ يحل بالطريقتين

الحل :

١١) $ق(س) = جا(س^{٢} - س)$

الحل :

١٢) $ق(س) = س^{٣}(س^{٢} - ٢)$

الحل :

الفكرة " بما ان المعطى يمكن تجهيزه لتسهيل عملية الاشتقاق يفضل تجهيزه "

$ق(س) = س^{٥} - ٢س^{٣}$

$ق^{\prime}(س) = ٥س^{٤} - ٢(٣س^{٢})$

$ق^{\prime}(س) = ٥س^{٤} - ٦س^{٢}$

$ق^{\prime\prime}(س) = ٥(٤س^{٣}) - ٦(٢س)$

$ق^{\prime\prime}(س) = ٢٠س^{٣} - ١٢س$

١٣) ص = (س^{٢} + ٢)(س^{٣} − ١)

الحل :

ص′ = (س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} − ٠) + (س^{٣} − ١)(٢س + ٠)

ص′ = (س^{٢} + ٢) ٣س^{٢} + (س^{٣} − ١) ٢س

ص′ = ٣س^{٤} + ٦س^{٢} + ٢س^{٤} − ٢س

ص″ = ٣(٤س^{٣}) + ٦(٢س) − ٢

ص″ = ١٢س^{٣} + ١٢س − ٢

١٤)[١١١/الأسئلة] ق(س) = (٢س^{٤} − ٥)(٨ − ٥س)

الحل :

١٥)[١٠٩/تدريب] ق(س) = س ، س > ٠

الحل :

أسئلة الثابت

أمثلة :

١) اذا كانت ق(س) = س^{٣} − ٤س^{٢} + ٩س + ٨ وكانت ق″(أ) = ١٦ جد قيمة أ ؟

الحل :

ق(س) = س^{٣} − ٤س^{٢} + ٩س + ٨

ق′(س) = ٣س^{٢} − ٤(٢س) + ٩ + ٠

ق′(س) = ٣س^{٢} − ٨س + ٩

ق″(س) = ٣(٢س) − ٨ + ٠

ق″(س) = ٦س − ٨

ق″(أ) = ١٦

ق″(س) = ٦س − ٨

⇐ ق″(أ) = ٦(أ) − ٨

⇐ ١٦ = ٦أ − ٨

⇐ ١٦ + ٨ = ٦أ

⇐ ٢٤ = ٦أ ⇐ أ = ٤

٢) اذا كانت ق(س) = (٣س − ٢)^{٣} وكانت ق″(أ) = ١٠٨ جد قيمة الثابت أ ؟

الحل :

ج أ = $\frac{٤}{٣}$

٣) اذا كانت ق(س) = أ^{٢} س^{٣} − ٢أس^{٢} فجد قيم أ التي تجعل ق″(١) = ٠ ؟

الحل :

ج أ = ±٢

أمثلة :

١) اذا كانت $ق(س) = \frac{1}{4}س^{4} - \frac{2}{3}س^{3} + 5س$ جد قيم س حيث $ق''(س) = 0$ ؟

الحل :

$ق(س) = \frac{1}{4}س^{4} - \frac{2}{3}س^{3} + 5س$

$ق'(س) = \frac{1}{4}(4س^{3}) - \frac{2}{3}(3س^{2}) + 5$

$ق'(س) = س^{3} - 2س^{2} + 5$

$ق''(س) = 3س^{2} - 2(2س) + 0$

$ق''(س) = 3س^{2} - 4س$

$ق''(س) = 0$

$ق''(س) = 3س^{2} - 4س$

$\Leftarrow$ $ق''(س) = 3س^{2} - 4س$

$\Leftarrow$ $0 = س(3س - 4)$

$\Leftarrow$ $س = 0$ ، $س = \frac{4}{3}$

٢) اذا كانت $ق(س) = \frac{س^{3}}{3} + \frac{س^{2}}{2} + 7$ فجد :

أ) أصفار المشتقة الأولى ب) أصفار المشتقة الثانية

الحل :

٣) اذا كانت $ق(س) = (س^{2})(س+1)^{3}$ فجد $ق''(1)$ ؟

الحل :

٤) اذا كانت $ق(س) = أس^{2} - بس^{3} + 3$ وكانت $ق'(1) = 7$ ، $ق''(0) = 10$ جد القيمة أ ، ب ؟

الحل :

ج $أ = 5$ ، $ب = 1$

٥) اذا كانت $ق(س) = (أس - 1)^{4}$ وكانت $ق''(0) = 48$ جد أ ؟

الحل :

ج $أ = \pm 2$

٦) اذا كانت $ق(س) = أس^{3} - بس^{2} + 7$ وكانت $ق'(-1) = 12$ ، $ق''(1) = 6$ جد القيمة أ ، ب ؟

الحل :

ج $أ = \frac{18}{9}$ ، $ب = \frac{6}{2}$