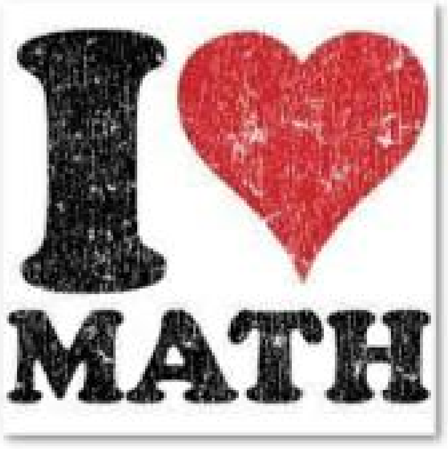


الوحدة الاولى

النهايات و الاتصال

أ. مصطفى الشرفا

٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

رياضيات علمي

٢٠١٧ - ٢٠١٨

[1] مفهوم النهاية (نهاية اقتران عند نقطة)

قاعدة: اذا كانت نهـا$_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) = ل فإنه:

نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة وتساوي ل .

ملاحظة: لايجاد نهاية الاقتران ق عند نقطة ما مثل أ ندرس سلوك الاقتران عندما تقترب قيم المتغير س من النقطة أ من الجهتين .

ملاحظة: ١) لتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س الى عدد حقيقي مثل أ من اليمين فانه من الضروري ان يكون الاقتران معرفاً عند أ من اليمين

٢) لتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س الى عدد حقيقي مثل أ من اليسار فانه من الضروري ان يكون الاقتران معرفاً عند أ من اليسار

٣) لتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س الى عدد حقيقي مثل أ فانه من الضروري ان يكون الاقتران معرفاً حول أ وليس من الضروري ان يكون معرفاً عند أ نفسه

ملاحظة: من الممكن ان يكون ق معرفاً عند س = أ وتكون نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة .

ملاحظة: الحالات التي تكون فيها نهـا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة :

١) نهـا$_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) غير موجودة   ٢) نهـا$_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س) غير موجودة .

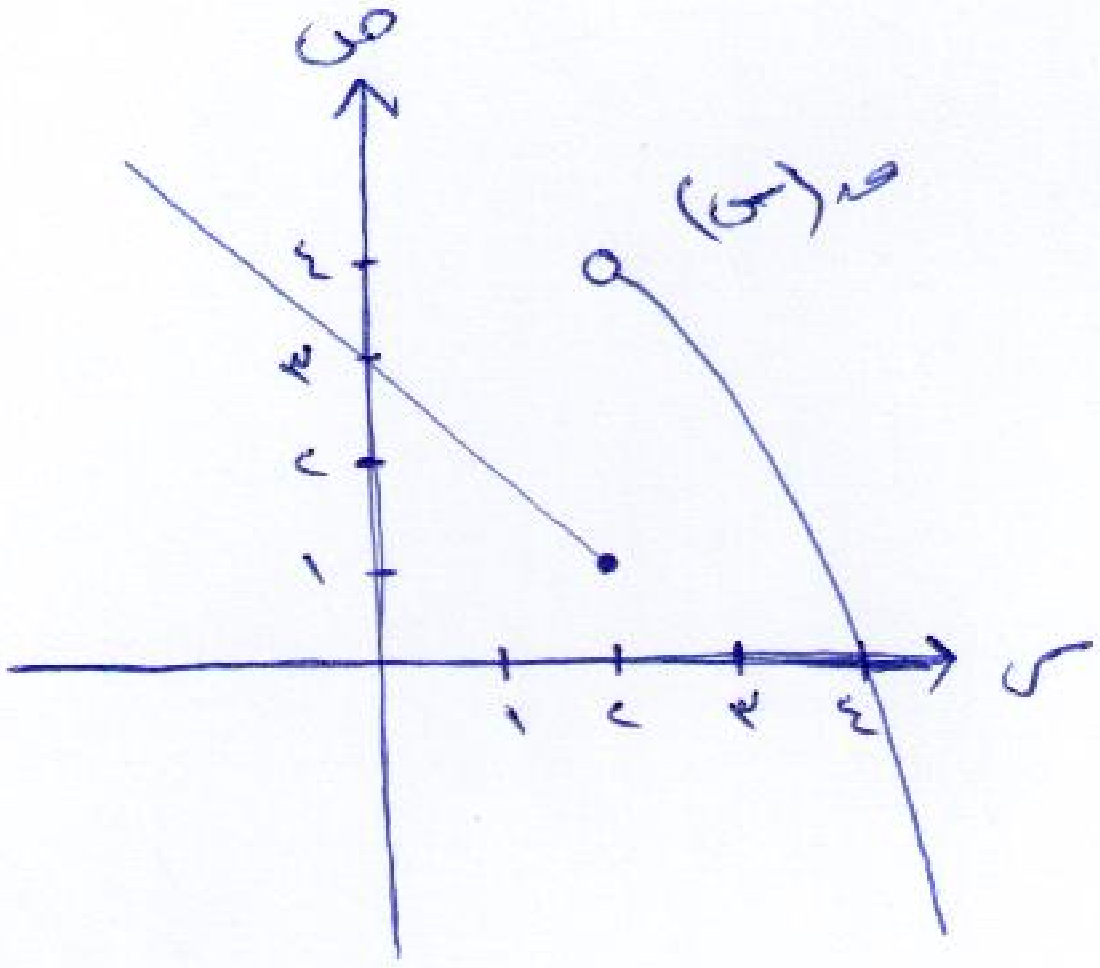
٣) نهـا$_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) ≠ نهـا$_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س)   ٤) بيانياً: عند القفزات وأطراف الفترة

مثال: اذا كانت ه(س) = ٢س + ٣ جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ ه(س) باستخدام الجدول

مثال: اذا كانت ه(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ جد مجال الاقتران ه وما $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ه(س)
باستخدام الجدول

أ. مصطفى الشرفا
[illegible]

مثال : في الشكل المجاور ، جد ما يلي :

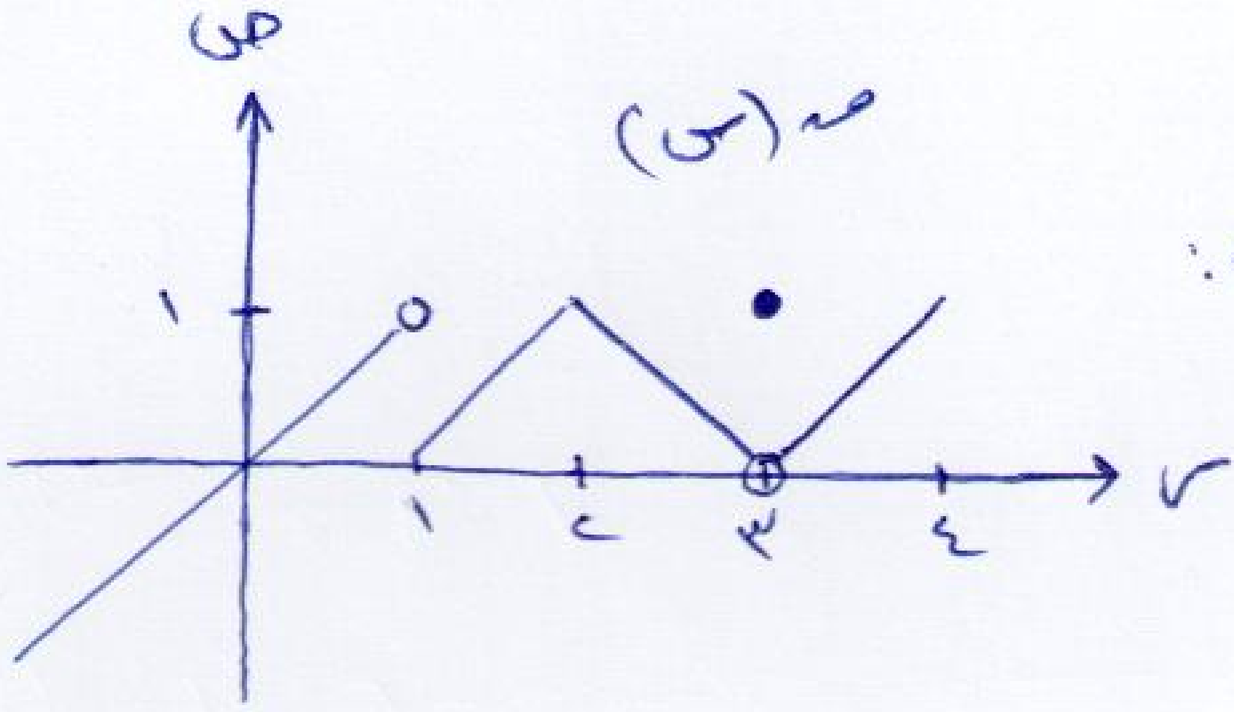


١) نهـا ق(س) =
س ← ٢^{+}

٢) نهـا ق(س) =
س ← ٢^{-}

٣) نهـا ق(س) =
س ← ٢

٤) نهـا ق(س) =
س ← ٠



مثال : اعتماداً على الشكل جد ما يلي :

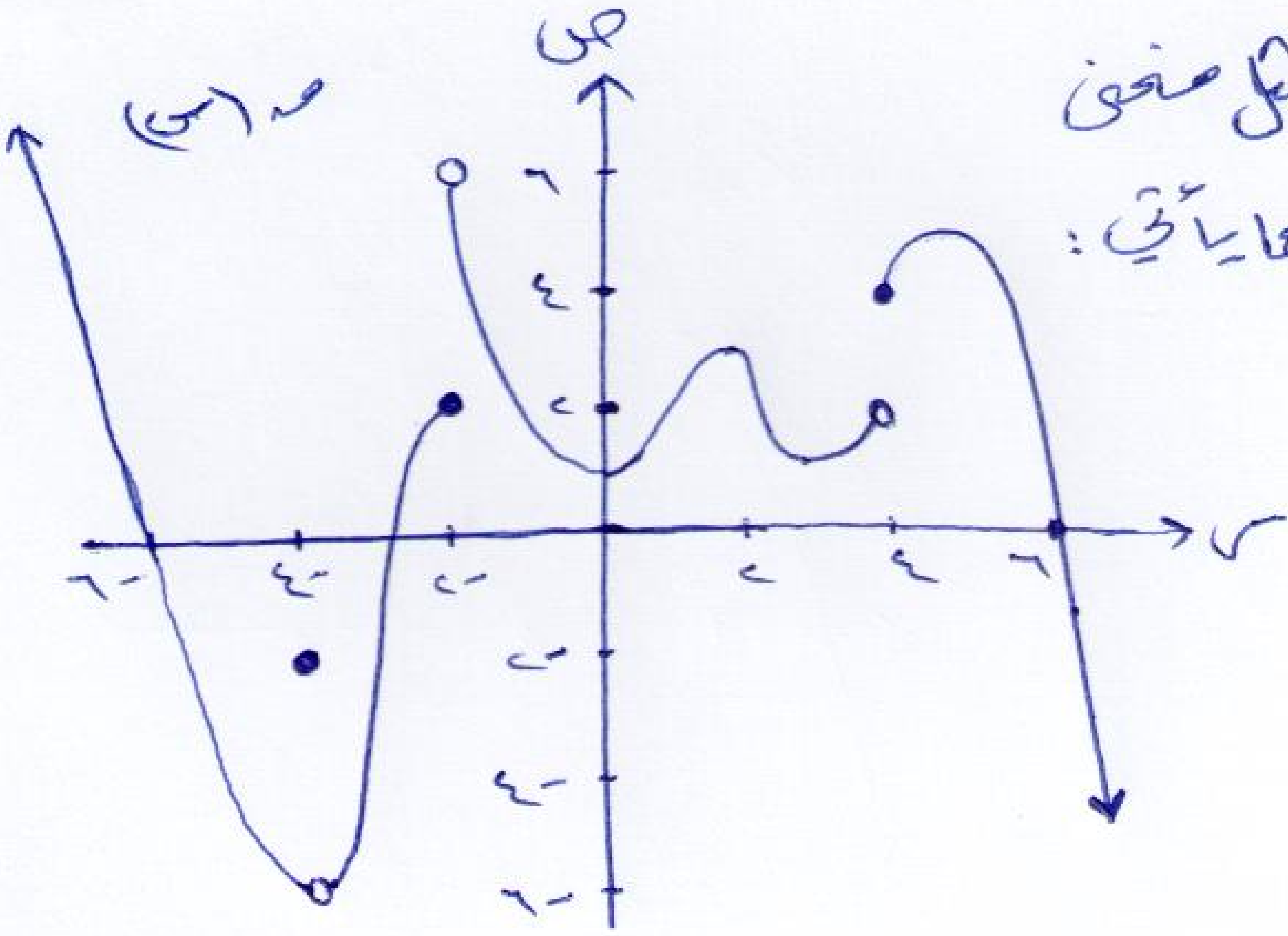
١) نهـا ق(س)
س ← ١

٢) نهـا ق(س)
س ← ٠

٣) نهـا ق(س)
س ← ٣

٤) نهـا ق(س)
س ← ٢

مثال: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ﻫ المعرف على ح جد كلاً مما يأتي:



أ) نها ﻫ(س)
س ← ٤

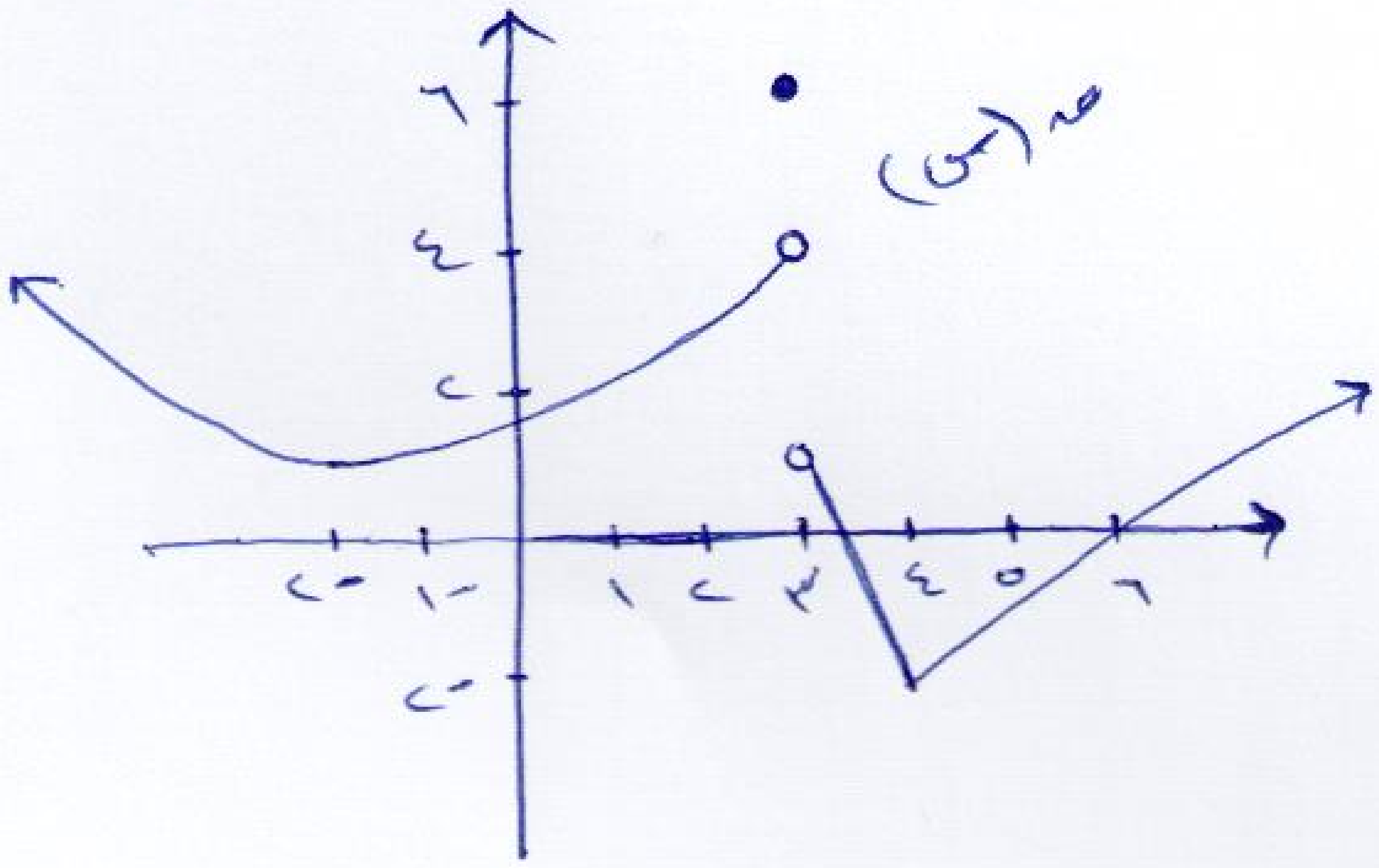
ب) نها ﻫ(س)
س ← -٤

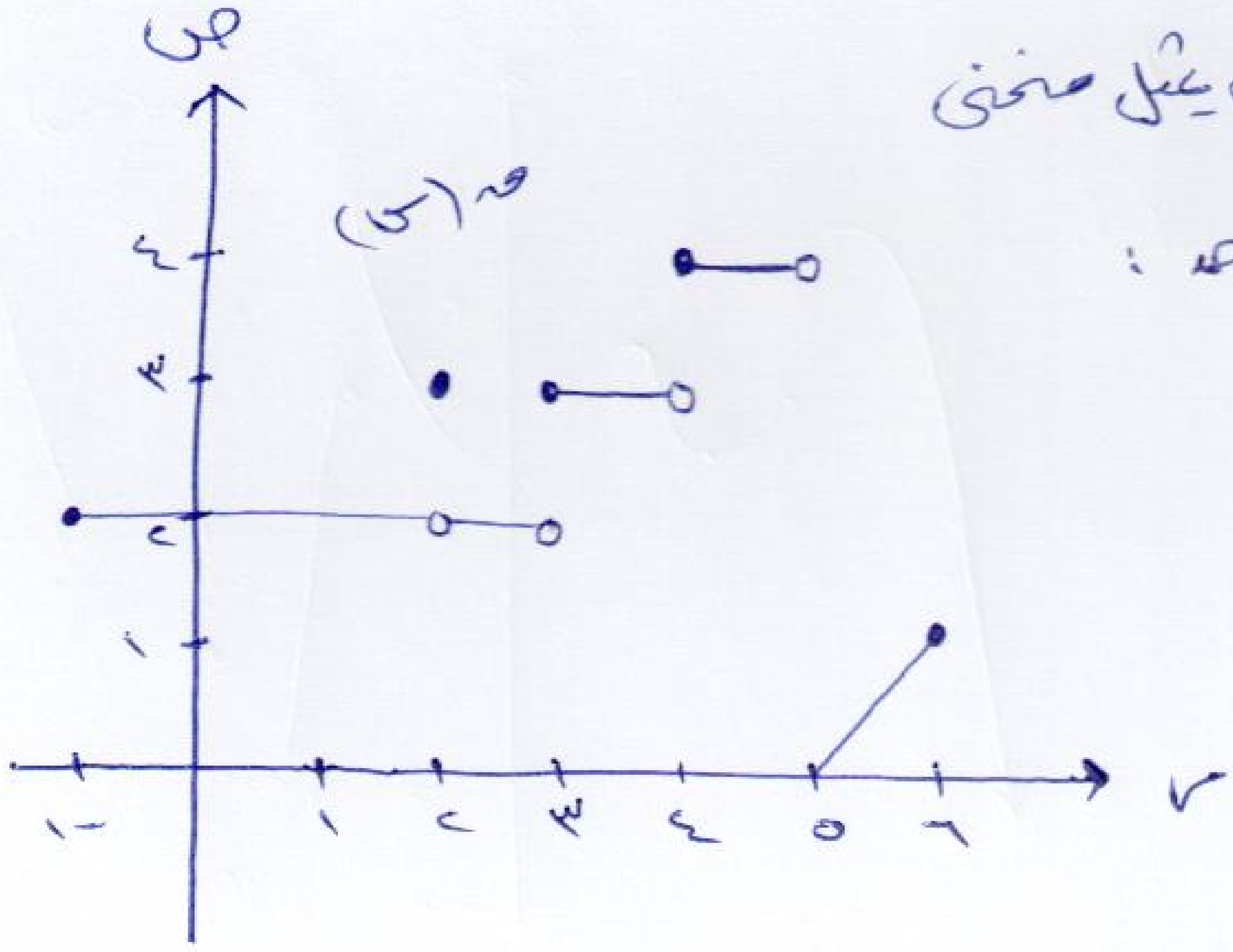
جـ) نها ﻫ(س)
س ← ٠

د) نها ﻫ(س)
س ← -٢

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ﻫ جد نها ﻫ(س)
س ← ٣

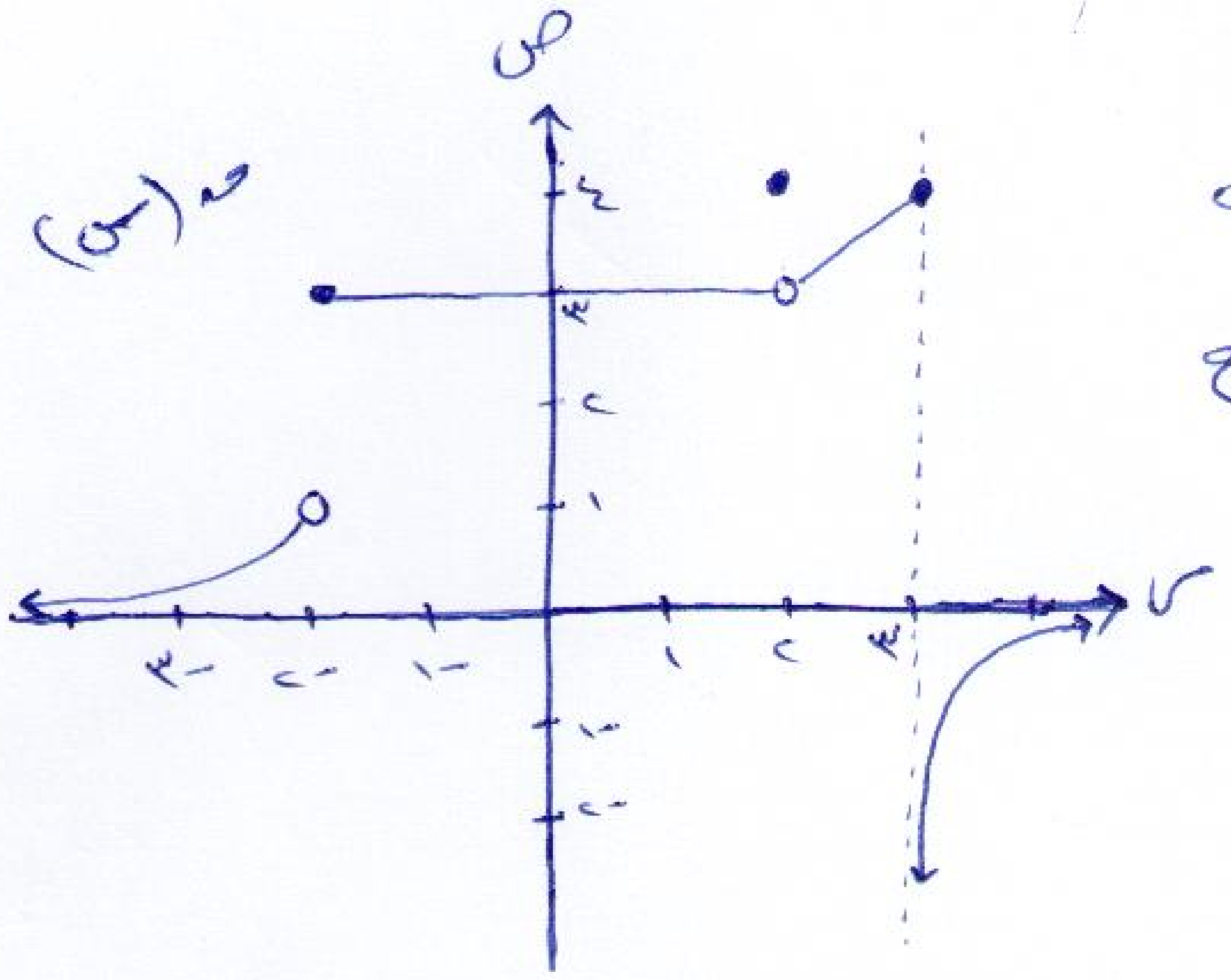




مثال: اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق المعرف على الفترة [-١، ٦] جد:

١) مجموعة قيم م حيث
نها ق(س) غير موجودة
س←م

٢) مجموعة قيم ج حيث نها ق(س) = ٣
س←ج



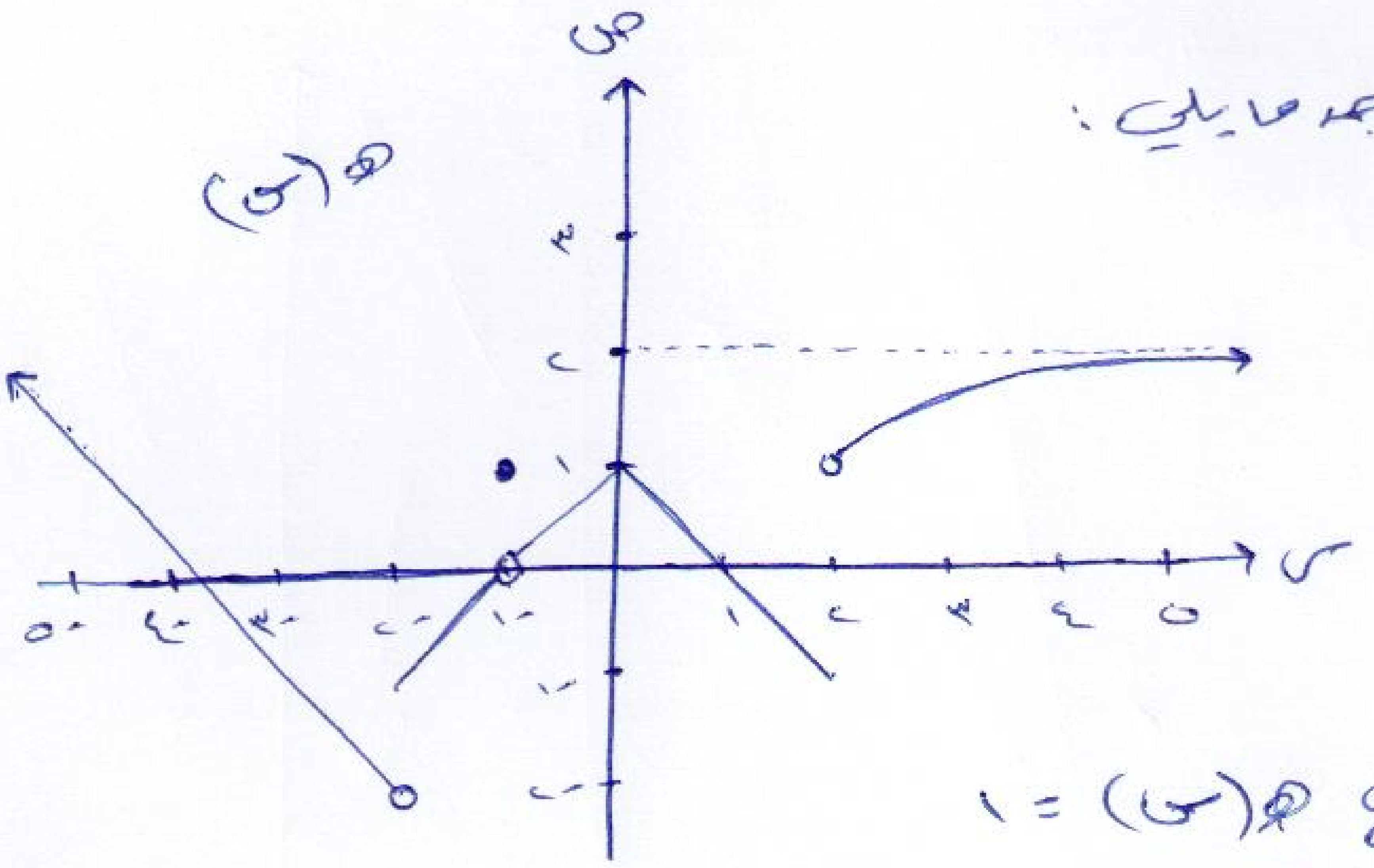
مثال: بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح جد كلا مما يأتي:

١) نها ق(س)
س←١

٢) نها ق(س)
س←٠

٣) نها ق(س)
س←-٢

مثال: اعتماداً على الشكل جد ما يلي:

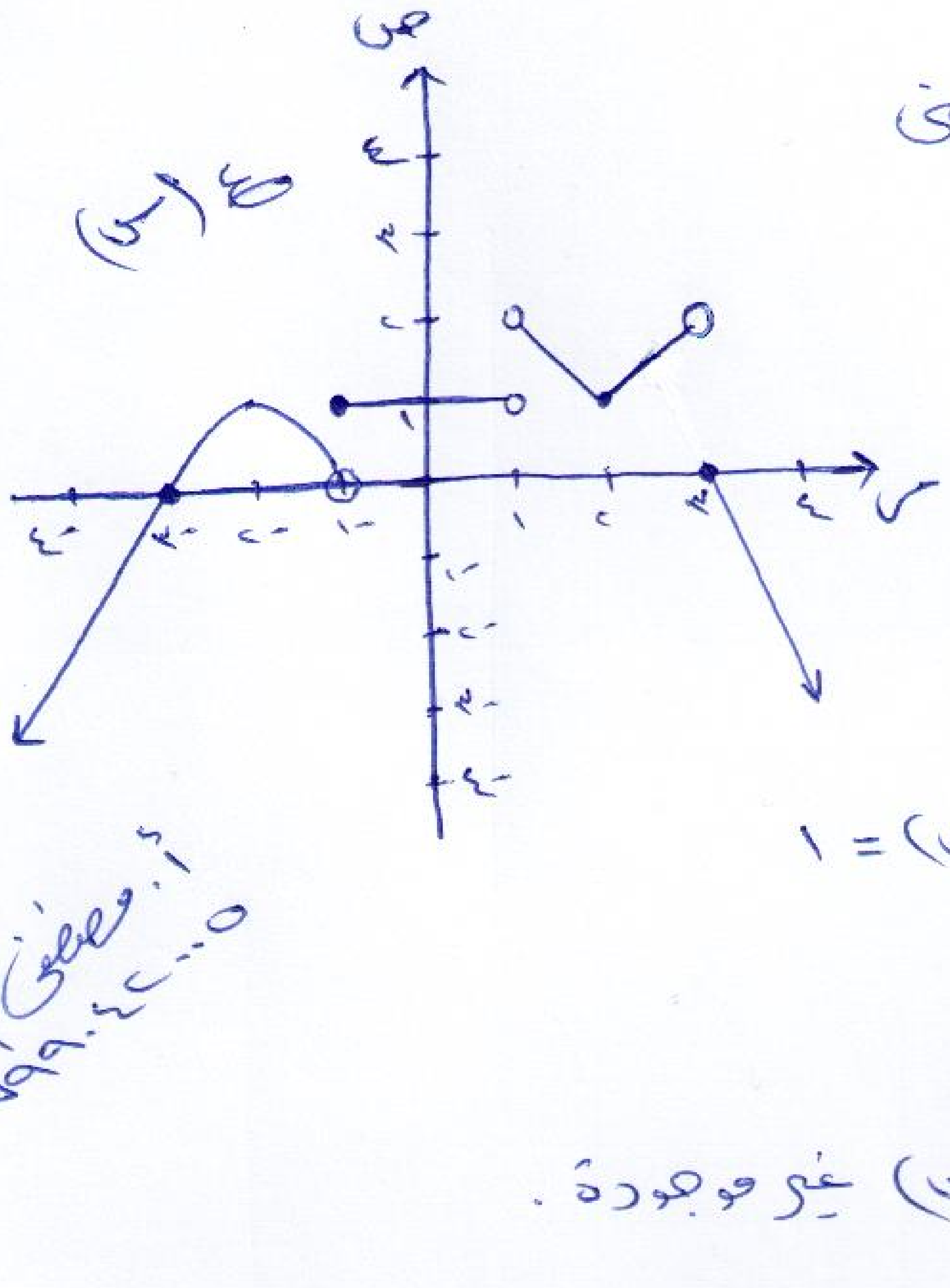


١) نهـا هـ(س)
س ← ‎-٢$^{-}$

٢) نهـا هـ(س)
س ← ‎-١

٣) مجموعة قيم م حيث نهـا هـ(س) = ١
س ← م$^{+}$

مثال: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ع جد كلاً مما يأتي:



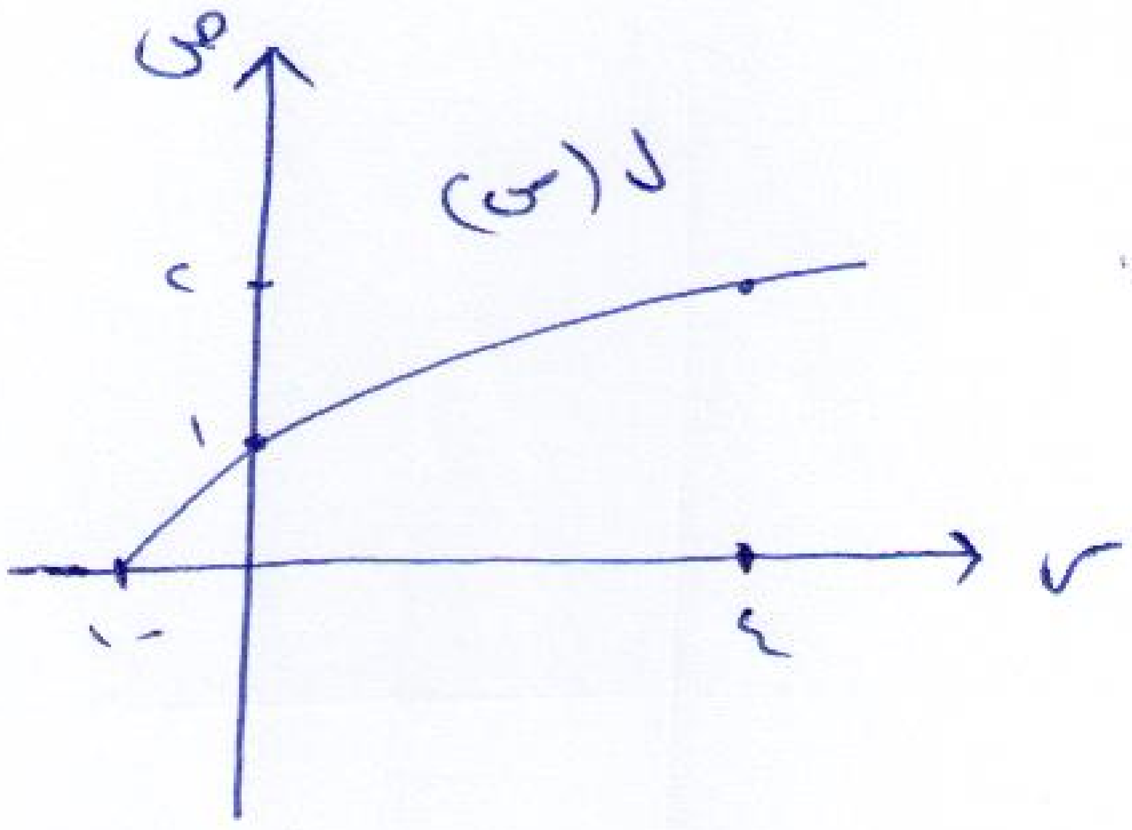
أ) مجموعة قيم ب حيث نهـا ع(س) = ١
س ← ب

ب) مجموعة قيم جـ حيث نهـا ع(س) = ١
س ← جـ$^{+}$

أ. مصطفى الشوا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

جـ) مجموعة قيم ل حيث نهـا ع(س) غير موجودة.
س ← ل

د) مجموعة قيم ك حيث نهـا ع(س) = ٠
س ← ك

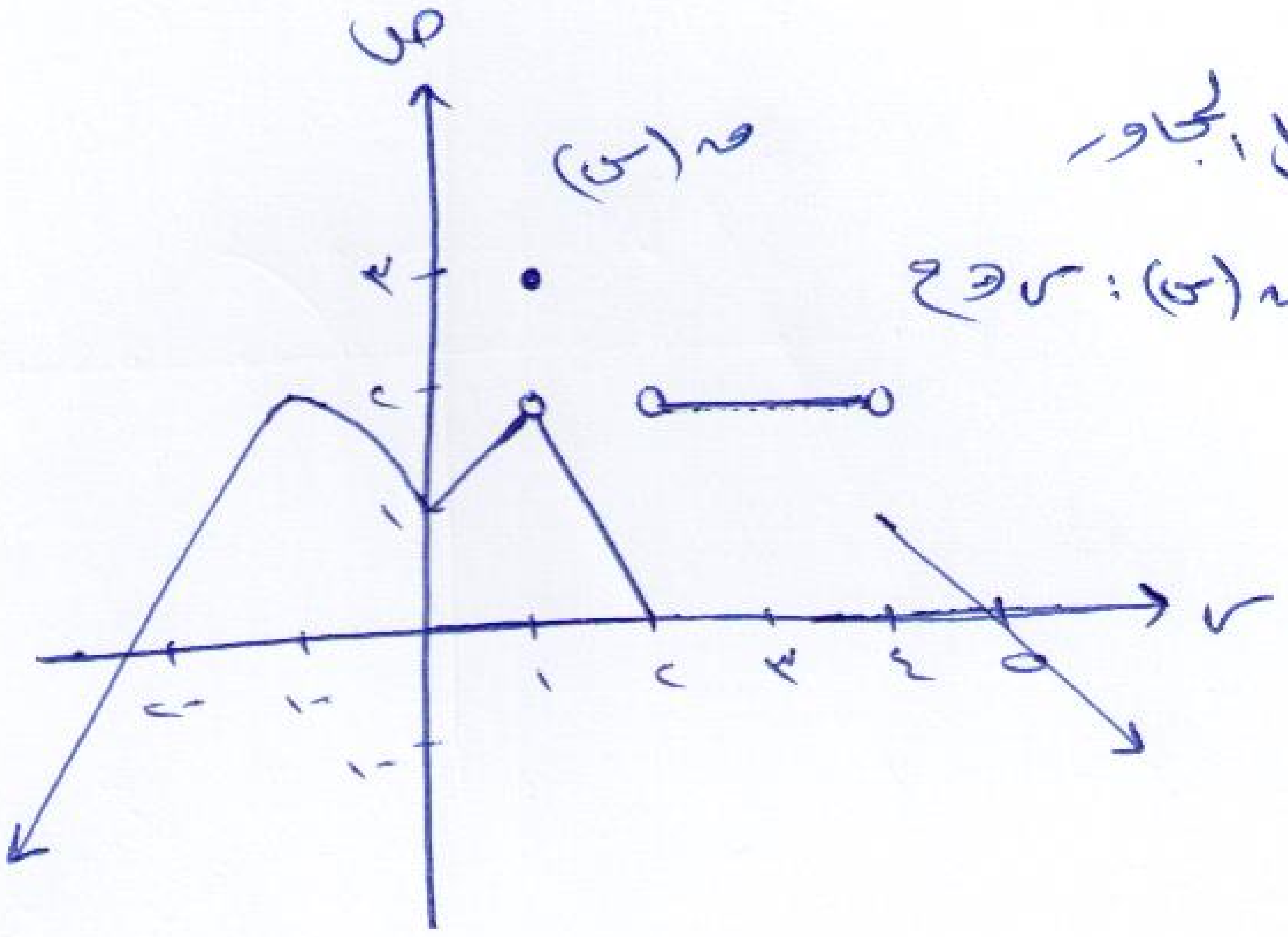


مثال : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{س+١}$ جد ما يلي :

أ) مجال الاقتران ل

ب) نهـا ل(س)
س ← ١-

جـ) نهـا ل(س)
س ← ٤-



س٢٦ : بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران هـ(س) : س ∈ ح أجب عن كل ما يأتي :

١) اذا كانت نهـا هـ(س) = ٢
س ← أ
نجد قيم الثابت أ

٢) اذا كانت نهـا هـ(س) غير موجودة نجد قيم الثابت ب
س ← ب

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـ}}$ ق(س) بيانياً اذا كانت ق(س) = ٢س + ٣

مثال : اذا كانت ق(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١ . ارسم منحنى ق(س) وجد

من الرسم $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـ}}$ ق(س)

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س < ١ \\ س & س \geq ١ \end{cases}$ ، ارسم منحنى هـ(س)

ومن الرسم جد $\lim_{س \to ١} هـ(س)$

مثال: ارسم منحنى ع حيث $ع(س) = \begin{cases} ٧ - س & س \geq -٢ \\ س^٢ + ٥ & س < -٢ \end{cases}$ ؟

جد $\lim_{س \to -٢} ع(س)$

مثال : اذا كان د(س) = $\begin{cases} ٢س - ١ & س \in ص \\ س^٢ + ٣ & س \notin ص \end{cases}$ حيث ص مجموعة

الاعداد الصحيحة جد $\underset{س \to ٤}{نهـ}$ د(س)

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٢٢٠٠٥

مثال : اذا كان ل(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ارسم منحنى ل(س) ثم جد

$\underset{س \to ٣}{نهـ}$ ل(س)

٢) نظريات النهايات

نظرية : ① اذا كان ق(س) = جـ فان نها$_{س \to أ}$ ق(س) = جـ

② اذا كان ق(س) = س^{ن} فان نها$_{س \to أ}$ ق(س) = أ^{ن} حيث ن :

عدد صحيح موجب (طبيعي)

نظرية : اذا كانت نها$_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، نها$_{س \to أ}$ هـ(س) = ل فان :

① نها$_{س \to أ}$ (ق(س) ± هـ(س)) = نها$_{س \to أ}$ ق(س) ± نها$_{س \to أ}$ هـ(س) = ل ± ل

② نها$_{س \to أ}$ جـ ق(س) = جـ نها$_{س \to أ}$ ق(س) = جـ × ل

③ نها$_{س \to أ}$ (ق(س) × هـ(س)) = نها$_{س \to أ}$ ق(س) × نها$_{س \to أ}$ هـ(س) = ل × ل

ملاحظة : النظريات السابقة صحيحة في حالتي النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

ملاحظة : اذا كان ق كثير حدود فان : نها$_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

ملاحظة : اذا كان ق(أ) = ل فليس شرطاً ان تكون نها$_{س \to أ}$ ق(س) = ل

ملاحظة : اذا كانت نها$_{س \to أ}$ ق(س) = ل فان نها$_{س \to أ}$ (ق(س))^{ن} = (نها$_{س \to أ}$ ق(س))^{ن}

= ل^{ن} حيث ن عدد طبيعي

مثال : اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = ٩\text{س} - ٢\text{س}^{٣}$ جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـ}} \text{ه}(\text{س})$

مثال : اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٤$ جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـ}} \text{ه}(\text{س})$

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـ}} (\text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\text{س} + ٥) = -٤$ جد قيمة أ

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـ}} \text{ه}(\text{س}) = ٤$ جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـ}} (\text{س}^{٢} \text{ه}(\text{س}) - (\text{ه}(\text{س}))^{٢} + ٢\text{س})$

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـ}} \text{ل}(\text{س}) = -٢$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـ}} \text{ع}(\text{س}) = ٤$ جد :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـ}} (\text{ع}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})) =$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـ}} (\text{ل}^{٣}(\text{س}) \times \text{ع}(\text{س}) - ٦) =$

مثال : اذا كان هـ كثير حدود يمر بالنقطة (-٢،١) وكانت :

نهـا$_{س \to -٢}$ (س^{٢} - ل(س)) = -٥ جد نهـا$_{س \to -٢}$ (هـ^{٣}(س) - ٢ل(س))

مثال : اذا كان هـ(س) كثير حدود باقي قسمته على س-١ يساوي ٥

جد نهـا$_{س \to ١}$ (٢هـ(س) + ٣س^{٢})

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٢\text{ع}(\text{س}) = ٨$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\left(٢\text{ل}(\text{س}) + ١\right) = ١٣$ جد :

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ع}(\text{س}) + ٣\text{ل}(\text{س})\right)$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ع}^{٢}(\text{س}) + ٢\text{ل}^{٣}(\text{س})\right)$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ل}^{٢}(\text{س})}{٢} - ٢\text{ع}(\text{س})\right)$

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ص}(\text{س}) = ٤$ ، $\text{ص}(٥) = ١$ جد قيمة

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\left(\text{ص}^{٣}(٢\text{س}-١) - ٣\text{س} + ٤\right)$

مثال: اذا كان د(س) = س^{٢} + س − ٦ ، ل(س) = س^{٢} + ٢س − ٣

أوجد كلا مما يأتي:

أ) نهـا$_{س \to ١}$ (د(س) + ل(س))

ب) نهـا$_{س \to ١}$ (د(س) × ل(س))

جـ) نهـا$_{س \to ٢}$ (ل(س))^{٣}

أ/ مصطفى لبشرف
٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان د(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = س^{٢} + ٢س أوجد:

نهـا$_{س \to -٣}$ (٢د(س) + هـ(س) × س)

نهايات الجذور :

① الجذور الفردية : ندخل النهاية على الجذر

② الجذور الزوجية : هناك ٣ حالات :

أ - اذا كانت نهاية ما داخل الجذر موجبة : ندخل النهاية على الجذر

ب - اذا كانت نهاية ما داخل الجذر سالبة : النهاية غير موجودة

جـ - اذا كانت نهاية ما داخل الجذر صفراً ؛ نقوم بما يلي :

① ندرس اشارة ما داخل الجذر حول نقطة الدراسة

② الجهة التي تكون عندها الاشارة موجبة تكون النهاية عندها تساوي صفراً

③ الجهة التي تكون عندها الاشارة سالبة تكون النهاية عندها غير موجودة .

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ١}{نهـ} \sqrt[3]{س^{٢}+٧}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٦}{نهـ} - \sqrt{س+٣}$

مثال: جد $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt{س - ٣}$

مثال: جد $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \sqrt{(٤ - س)^{٢}}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد $\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{نها}} \sqrt{٢ - س^{٢}}$

مثال: جد قيم م التي تجعل $\underset{س \to م}{\text{نها}} \sqrt{٤ - س}$ غير موجودة

مثال : اذا كان ع(س) = √(س - ٥) جد :

١) نها ع(س)
س ← ٥

٢) نها ع(س)
س ← ٧

٣) نها ع(س)
س ← ٢

مثال : اذا كان هـ(س) = √(س² - ٩) جد :

١) نها هـ(س)
س ← -٣

٢) نها هـ(س)
س ← -٤

٣) نها هـ(س)
س ← ١

مثال: جد $\underset{س \leftarrow ١-}{نهـ} (س+٢) \sqrt{س^٢+١٥}$

مثال: اذا كان $د(س) = ٩س - ٢س^٣$ جد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـ} \sqrt{د(س)}$

مثال: اذا كان $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـ} د(س) = ٤$ جد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـ} \sqrt[٣]{٢ د(س)}$

مثال: اذا كان $د(س) = ٢س^٣$ ، $هـ(س) = س^٢+٢س$ جد قيمة:

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـ} \left(\sqrt{د(س)} - \sqrt[٣]{هـ(س)} \right) + ١٥$$

مثال: اذا كان $د(س) = س^٢+س-٦$ جد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـ} \sqrt[٣]{١ - د(س)}$

نهاية الاقتران المتشعب :

مثال : اذا كان د(س) = { ٢س^٢ - ١٥ ، س < ٣
٧ ، س = ٣
٥ ، س > ٣

فجد :

١) نها د(س)
س ← ٣

٢) نها د(س)
س ← ٠

٣) نها د(س)
س ← ٤

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد نها |س - ٥|
س ← ٥

مثال : اذا كان ه(س) = |٦ - ٢س| جد :

١) نها ه(س)
س ← ٣

٢) نها ه(س)
س ← -٢

مثال : جد نها |س - ٨|
س ← ٣

مثال : جد نها |س - ٤|
س ← ٤⁻

مثال : اذا كانت هـ(س) = $\begin{cases} |٢س| & س \geq ٠ \\ \sqrt{-س} & س < ٠ \end{cases}$ فجد :

① هـ(٠)

② نهـا هـ(س)
$س \to ٠$

مثال : جد نهـا $\sqrt{س^2 + ٦س + ٩}$
$س \to -٣$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : اذا كان هـ(س) = |٤ - س٢| جد :

١) نها هـ(س)
س ← -١

٢) نها هـ(س)
س ← ٣

٣) نها هـ(س)
س ← ٢

مثال : جد نها |س٢ - ٢٥|
س ← -٥

مثال : اذا كان هـ(س) = [١ + ٢س] جد :

١) نهـا هـ(س)
س ← ١/٢

٢) نهـا هـ(س)
س ← ١/٣

مثال : جد نهـا [١/٢ س]
س ← ٢

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد نهـ [٦-٢س]
س ← $\frac{٥}{٢}$

مثال : جد نهـ [س+١]
س ← ٠١٣

مثال : اذا كان د(س) = [٠٫٢٥ س] جد قيم ب التي تجعل نهـ د(س) = -٣
س ← ب

مثال : اذا كان ق(س) = [١ - س] فاجب عن كل مما يأتي :

١) جد قيم أ التي تجعل $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) غير موجودة .

٢) جد قيم جـ التي تجعل $\underset{س \leftarrow جـ}{نها}$ ق(س) = -١

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٣جـ & ، س \leq ٢ \\ [٧ - س] & ، س > ٢ \end{cases}$ وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ ق(س) موجودة جد قيمة الثابت جـ .

أ. مصطفى البشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

ملاحظة : اذا كانت نهـا د(س) غير موجودة ، نهـا هـ(س) غير موجودة
س ← أ ، س ← أ

فليس بالضرورة ان تكون نهـا (د(س) + هـ(س)) غير موجودة
س ← أ

مثال : اذا كان د(س) = [س+٥] ، هـ(س) = [٤-س] أوجد :

١) نهـا د(س)
س ← ١

٢) نهـا هـ(س)
س ← ١

أ. مصطفى لعشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

٣) نهـا (د(س) + هـ(س))
س ← ١

مثال : جد $\lim_{س \to ٢} \left(س[س] - |س| \right)$

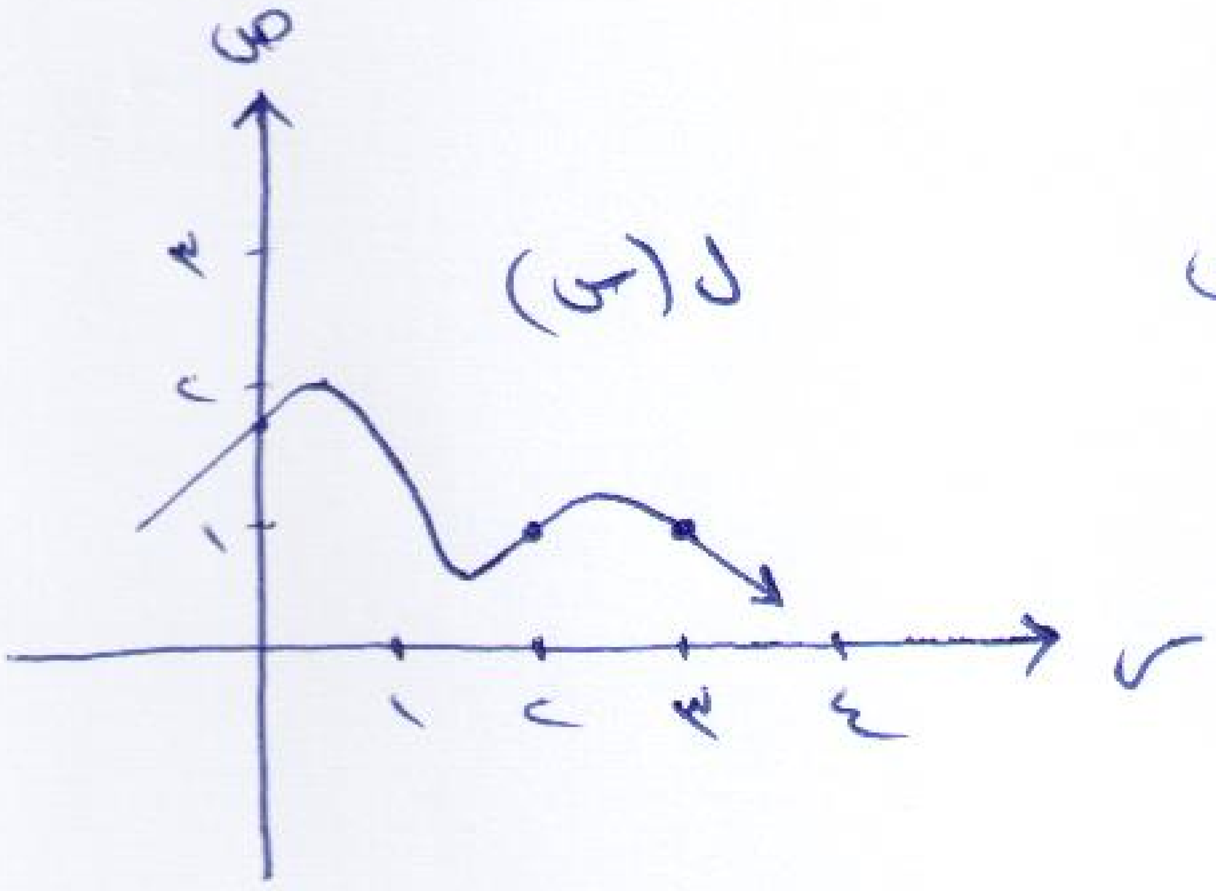
مثال : اذا كان ه(س) = $\begin{cases} |س - ٤| & س \geq ٤ \\ [٥ - س] & س < ٤ \end{cases}$ فجد $\lim_{س \to ٤}$ ه(س)

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

س٤ : اذا كان ه(س) =
$$\begin{cases} ٢س^{٢} + \frac{١}{س} + \left[\frac{س}{٣}\right] & ١ \leq س < ٣ \\ \frac{|س - ٣|}{س^{٢} - ٩} & ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ه(س)

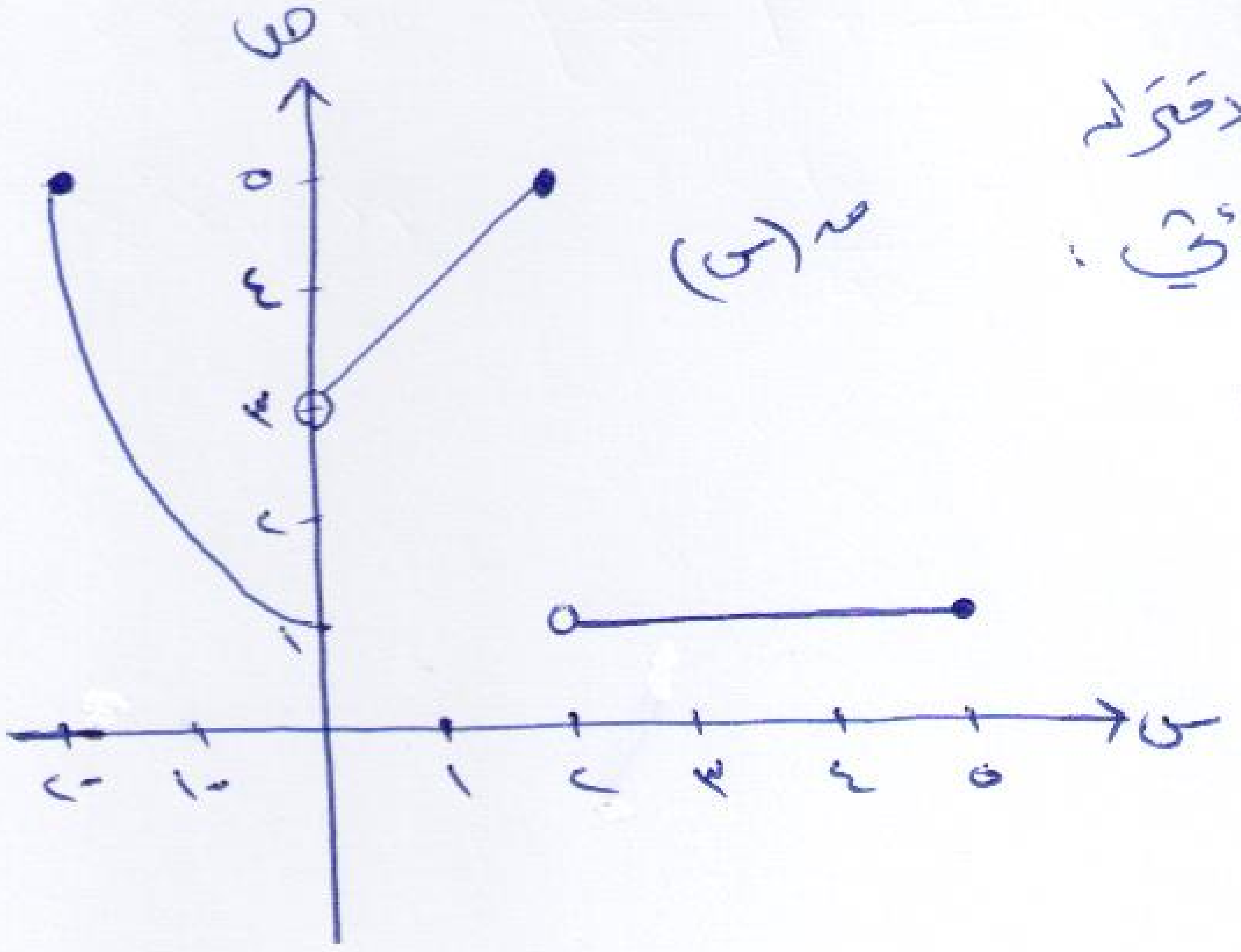
مثال: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ل ، جد كلاً مما يأتي :



أ) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نها}}$ ل(٢س + ٢)

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (٢س - ل(س))

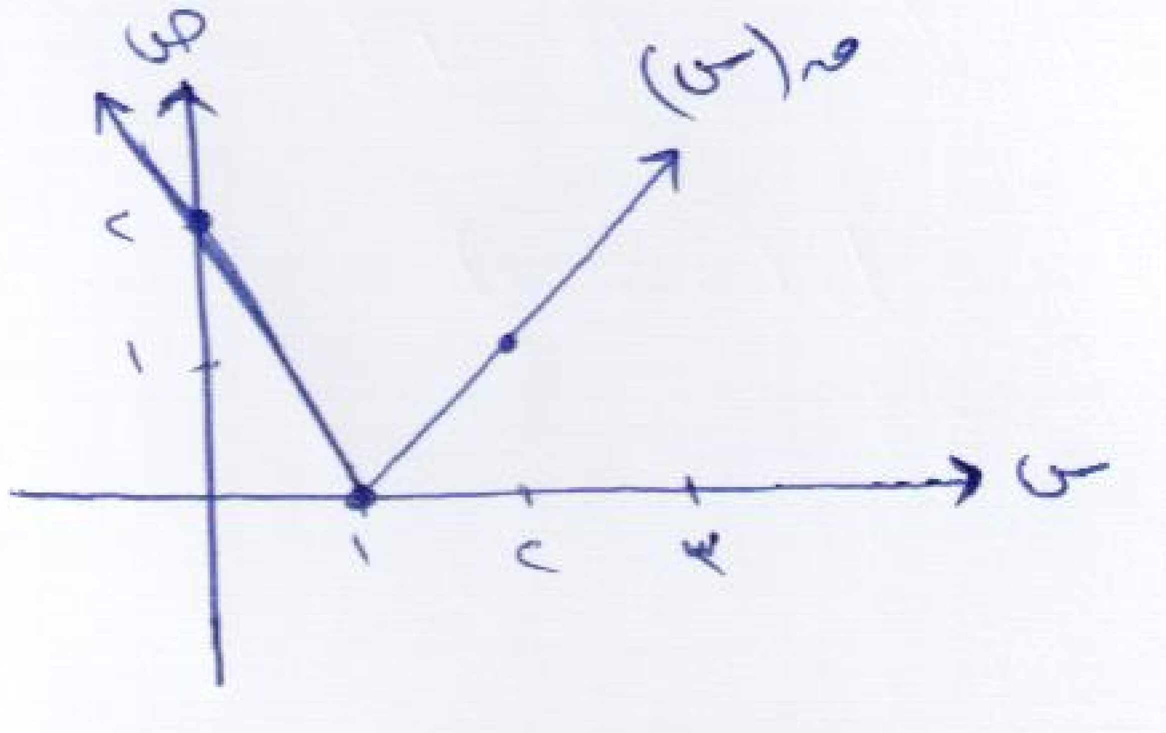
ص١٧: يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران هـ(س)، س ∈ [-٢، ٥] جد ما يأتي:

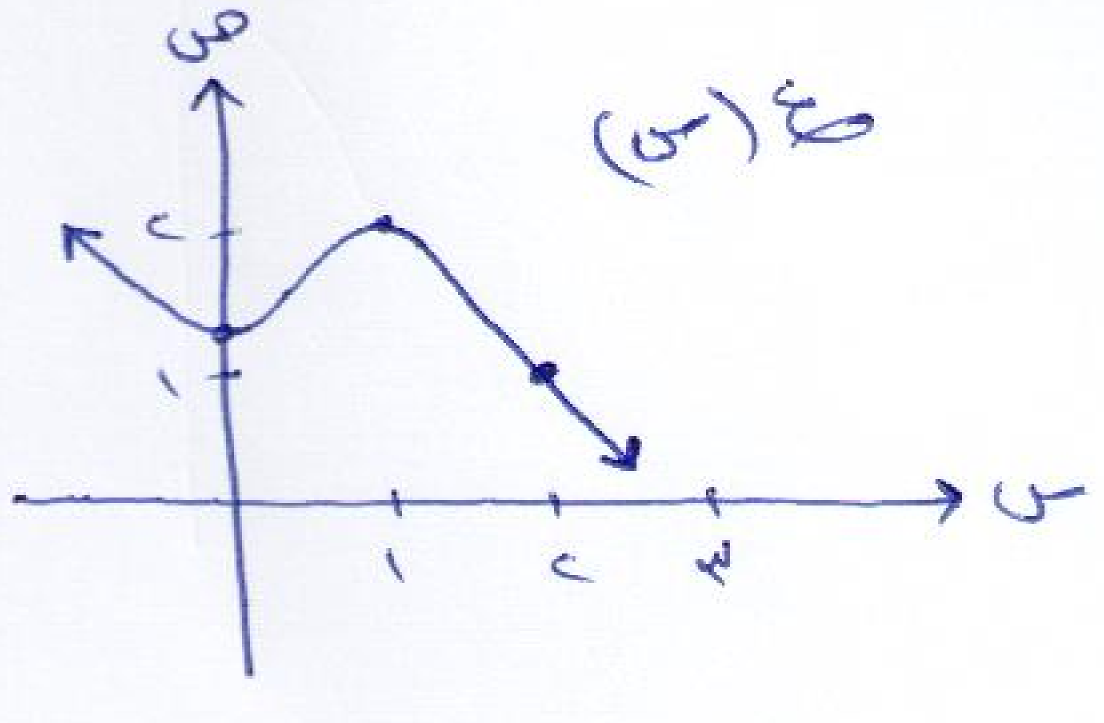


١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(س\,هـ^2(س) + \frac{2}{هـ(س)} \right)$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ هـ(٣-س)$

مثال: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنيي الاقترانين هـ، ع جد كلاً مما يأتي:





أ) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(هـ(س) \times ع^2(س) \right)$

ب) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(٣\,هـ(س-٢) + ٢ع(س) \right)$

$\boxed{٣}$ نهايات اقترانات كسرية

ملاحظة : النهايات الكسرية على اربع حالات :

١) $\boxed{\dfrac{\text{نهاية البسط عدد}}{\text{نهاية المقام عدد} \neq ٠}}$

في هذه الحالة تُوزَّع النهاية على كل من البسط والمقام

مثال : جد $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س}^{٣} - ١}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٣} - ٣}$

أ. مصطفى الشوفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^{٣} - ٢}{\text{س} - ١} + \text{س}^{٢} + ١ \right)$

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}}\ ٢\text{ع(س)} = ٨$ ، $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \left(٢\text{ل(س)} + ١ \right) = ١٥$ فجد :

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{ل(س)}}{\sqrt{\text{ع(س)}}}$

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = -٢$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)} = ٤$ جد :

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{٥ - ٣\,\text{ق(س)}}{٢\,\text{هـ(س)}}$$

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = -١$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نها}}\ \text{ع(س)} = ٩$ جد :

$$\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س} - ١}{\text{ع(س)} - ٣} - \sqrt[٣]{\text{ق(س)} - ٧}\right)$$

مثال : اذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^٢ + \text{س} - ٦$ ، $\text{ل(س)} = \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣$ جد :

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}\ \frac{٣\,\text{ل(س)}}{٢\,\text{ق(س)}}$$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ١}{نهـ} ق(س)$ اذا علمت ان $ق(س) = \sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}}$

مثال : اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـ} \frac{ق(س)}{س^٢} = -٢$ جد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـ} \frac{ق(س)}{س}$

أ. مصطفى لشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : اذا كان ق اقتران كثير حدود وكانت $\underset{س \leftarrow ١}{نهـ} \frac{ق(س)}{س - ١} = ٣$ جد :

$\underset{س \leftarrow ١}{نهـ} \frac{ق^٢(س)}{س}$

② $\boxed{\dfrac{\text{نهاية البسط عدد} \neq ٠}{\text{نهاية المقام} = ٠}}$

مثال : جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـ}} \dfrac{س^{٢} - ١}{س - ٢}$

مثال : جد $\underset{س \to -٣}{\text{نهـ}} \dfrac{س^{٢}}{س + ٣}$

③ $\boxed{\dfrac{\text{نهاية البسط غير موجودة}}{\text{نهاية المقام غير موجودة}}}$

مثال : جد $\underset{س \to ٤}{\text{نهـ}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}}$

④ $\boxed{\dfrac{\text{نهاية البسط} = ٠}{\text{نهاية المقام} = ٠}}$

في هذه الحالة يجب ان نتخذ اجراء معين لتغيير شكل المقدار الكسري بحيث نتخلص من العامل المتسبب بهذه الحالة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، وهذه الاجراءات :

1) التحليل الى العوامل
2) توحيد المقامات
3) الضرب بالمرافق
4) اعادة التعريف
5) اضافة وطرح عدد او مقدار
6) الاستبدال أو التعويض

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

أولاً : التحليل الى العوامل - نهايات $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٤س + ٣}{س - ٣}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to \text{-٥}}{\text{نهـ}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{١٠}}{\text{س} + \text{٥}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to \text{-٢}}{\text{نهـ}} \dfrac{\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{٢}}{\text{س} + \text{٢}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـ}} \dfrac{\text{٦س}^{\text{٤}} + \text{٢٤س}^{\text{٢}}}{\text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$

مثال: جد نهـ $\frac{(٤٩)^{س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}}$

س ← ٠

مثال: جد نهـ $\frac{(٨١)^{س} - ٩^{س}}{١ - ٩^{س}}$

س ← ٠

أ. مصطفى المشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد نهـ $\frac{س^{٢} - ٨١}{س^{٢} - ١٠س + ٩}$

س ← ٩

مثال: جد $\underset{\text{ر} \leftarrow \text{٧}^{+}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ر} - \text{٧}}}{\sqrt{\text{ر}^{\text{٢}} - \text{٤٩}}}$

مثال: جد $\underset{\text{ر} \leftarrow \text{١١}^{+}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ر}^{\text{٢}} - \text{١٢١}}}{\sqrt{\text{ر} - \text{١١}}}$

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}^{-}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}}{\sqrt{\text{١} - \text{س}}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+١)^{٢} - ٨١}{٨ - \text{س}}$

ص١٧ : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\left((\text{س}+١)^{٢} - ٤\right)^{٢}}{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{٢}}$

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}} - ١}{\text{س} - \frac{١}{٢}}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـ}} \frac{٤٨ - ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٦٤}$

مثال : ليكن $هـ(س) = \begin{cases} \frac{٢٧س^{٣} + ١}{٣س + ١} & س \neq -\frac{١}{٣} \\ ٥ & س = -\frac{١}{٣} \end{cases}$ جد $\underset{س \leftarrow -\frac{١}{٣}}{\text{نهـ}} هـ(س)$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـ}} \frac{س^{٤} - ٢س^{٢} + ١}{س^{٣} - ١}$

مثال : جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س^{٣} - ٨}$

مثال : جد $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

س١٧ : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س^{٢} - ٤}$

مثال: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(٢س + ١)^٣ - ١٢٥}{٢ + س^٢(س - ٢) - س}$

مثال: اذا كان $ل(س) = \begin{cases} \frac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٢س^٢ - ٣س + ١} & ١ < س \\ ب & ١ \geq س \end{cases}$ جد قيمة

ب علماً ان $\lim\limits_{س \leftarrow ١} ل(س)$ موجودة.

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كانت ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} & \text{أ} \leq \text{س} \\ \text{س} - \dfrac{٢}{٥} & \text{أ} > \text{س} \end{cases}$ جد قيمة

الثابت أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ ل(س) موجودة .

مثال: اذا كانت ه(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$ جد قيم أ التي تجعل

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ ه(س) غير موجودة .

مثال: اذا كان ق(س) = $\frac{٤س^{٢} + (جـ + ٥)س + ٢جـ - ١}{س - ٣}$ فجد قيمة الثابت جـ التي تجعل $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - أس + ٣}{س - ١} & ١ > س \\ ب س - ٥ & ١ < س \end{cases}$ فجد قيم أ، ب الحقيقية التي تجعل $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة.

مثال: اذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{نهـ} \frac{أس^٢ + ٤ب س + ٣}{س - ١} = ٢$ أوجد قيمة كل من الثابتين أ، ب

مثال: اذا كانت $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـ} \frac{ق(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$ وكانت ق(س) كثيرة حدود

أوجد: ⓐ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـ} \left(ق(س) + ٢س \right)$

أ/ مصطفى الشرقاوي ٠١٠٠٤٢٠٩٩٦٧

ⓑ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـ} \left(ق^٢(س) + ٤س^٢ \right)$

مثال : اذا كان ق كثير حدود وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـ}} \frac{\text{ق(س)} + ٣}{\text{س} - ١} = ٤$ ،

$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـ}} (\text{ق(س)} - \text{س} + ٢\text{ب}) = ٧$ نجد قيمة الثابت ب

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٣-}{\text{نهـ}} \frac{\text{ق(س)} - ٤}{\text{س} + ٣} = ١$ وكانت

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣-}{\text{نهـ}} \frac{٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٣}{\text{ق(س)} - ٤} + \text{م} = -٣$ نجد قيمة الثابت م

ثانياً : توحيد المقامات - نهايات $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال : جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س} - ٣} + \dfrac{١}{٣}}{\text{س}}$

مثال : جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\dfrac{١}{٣} - \dfrac{١}{\text{س}}}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١٥}$

مثال : جد $\lim\limits_{\text{س} \to -٥} \left(\dfrac{٢}{\text{س}} + \dfrac{٢}{٥}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}^٢ - ٢٥}\right)$

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{٥+س} - \frac{١}{٥-س}\right)$

مثال : جد $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{١}{١-س}\left(\frac{١}{\sqrt{س}} - ١\right)$

مثال : جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(٣+س)^{٢}} - \frac{١}{٩}\right)$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢--٥

مثال: جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(س+١)^{٢}} - ١ \right)$

مثال: جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \left(\frac{س}{٩ - س^{٢}} + \frac{٣س}{س^{٣} - ٩س} \right)$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

س١٥: جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \left(\frac{س^{٢} + ٢٧}{س^{٢} - ٩} - \frac{س + ٣}{س - ٣} \right)$

ثالثاً : الضرب بالمرافق - نهايات $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س+٦} - ٢}{س+٢}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س+٢٢} - ٥}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٤ - س\sqrt{س+٢}}{٨ - ٤\sqrt{\ }}$

س١٥ : جد $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{س+٣}{س+\sqrt{٢س^{٢}-٩}}$

س١٤ : جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^{٣}}-٢|س|}{٢س^{٢}-٥س-١٢}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢--٥

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١+س^{٢}}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـ}} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨}$

$\hat{س}$١٤ : جد $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـ}} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \frac{س}{٢}}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـ}} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ٧}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٢٥}} - \text{٣}}{\text{س} - \text{٢}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١٢٤}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{١}} - \text{٥}}{\text{س} - \text{١٢٤}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٣}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} - \text{٥}} + \text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢٧}}$

أ. مصطفى العشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}+١} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}} + ١ \right)$

س١٦: جد $\underset{\text{س} \to -٢٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩-\text{س}} - ٦}{٣ + \sqrt[٣]{\text{س}}}$

أ. مصطفى الشوفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

رابعاً: اعادة التعريف - نهايات $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}-٣|-١}{\text{س}-٢}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}-٣|-|٢\text{س}-٣|}{\text{س}}$

مثال: جد $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \dfrac{\left|\dfrac{١}{س+٣}\right| - \dfrac{١}{٤}}{\left|س-١\right|}$

أ. مصطفى العشرفا
٠٧٩٩٠٢٢٠٠٥

مثال: جد $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}} \dfrac{٥ - \left|٣س+١\right|}{س^{٣}+٨}$

مثال: اذا كانت ه(س) = $\begin{cases} \frac{٥ - س}{|س - ٥|} & س > ٥ \\ ج س^{٢} - ٢٦ & س < ٥ \end{cases}$ وكانت نهـ ه(س) موجودة
س ← ٥

نجد قيمة الثابت ج

مثال: اذا كانت ه(س) = $\begin{cases} \frac{|س^{٢} - ٦س - ٧|}{|س - ٧|} & س > ٧ \\ م جا \frac{\pi}{٧} س + ٤ & س < ٧ \end{cases}$ وكانت نهـ ه(س) موجودة
س ← ٧

نجد قيمة الثابت م

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow -\frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١}}{٢\text{س} + ١}$

مثال: جد $\underset{س \to -٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}+٨س+١٦}}{س+٤}$

مثال: جد $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}-١٠س+٢٥}}{٢٥-س^{٢}}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{٥}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - [\text{٢س}]}{\text{٤س}^{٢} - \text{٢٥}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - [\text{س}]}{\text{س}^{٢} - \text{٤}}$

خامساً : الاستبدال أو التعويض - نهايات $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \to ٨} \frac{س \sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ٤\sqrt{س} + ٣}{س^٢ - ١}$

مثال: جد $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٨س}{س - \sqrt{٢س} - ٤}$

مثال: جد $\underset{س \leftarrow ٢٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٣}{س - ٢٧}$

سادساً: اضافة وطرح عدد او مقدار - نهايات $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال: جد $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٢}\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - \frac{س}{٢٠ - س}}{س - ١٦}$

$\boxed{٤}$ نهايات اقترانات مثلثية

قاعدة: ① نهـا جاس = جا أ
س ← أ

② نهـا جتاس = جتا أ
س ← أ

③ نهـا ظاس = ظا أ   حيث أ ∈ ح - {± $\frac{ن}{٢}$ π}
س ← أ   ن: عدد صحيح فردي

مثال: جد نهـا (٢ جاس - ظا ½ س)
س ← $\frac{π}{٢}$

مثال: جد نهـا (جاس + ٢ جتاس)
س ← ٠

مثال: جد نهـا (قاس + ظا ٤ س)
س ← ٠

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$

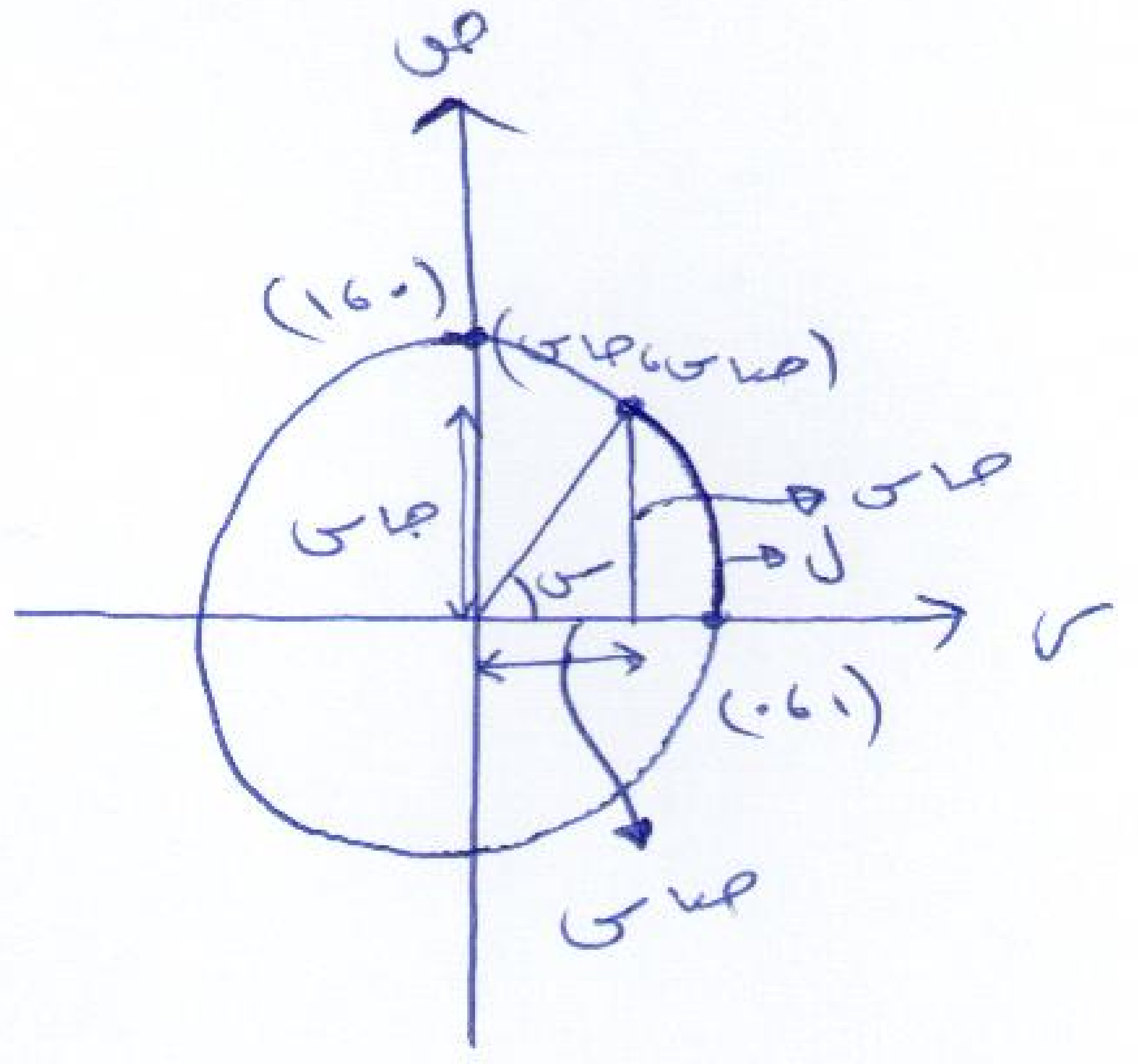
مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـ}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

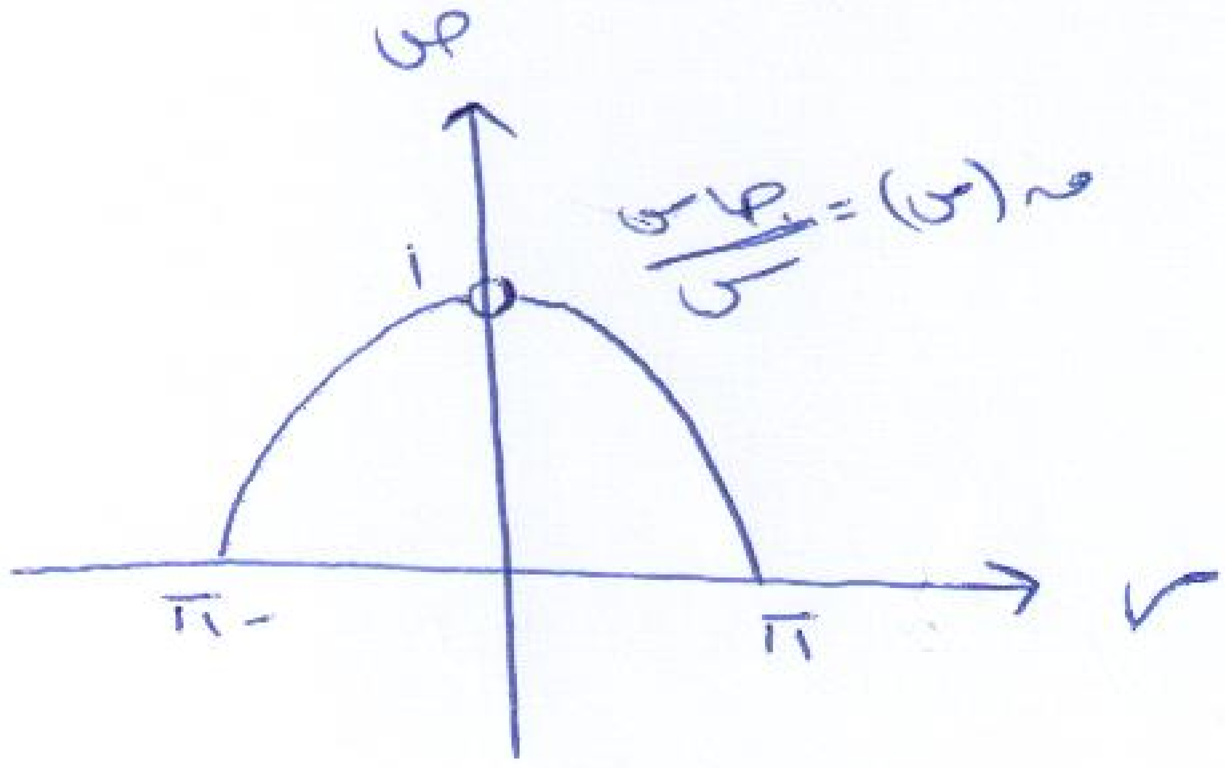
مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{جاس}}{\text{٢س} - \pi}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}$

نظرية : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا}س}{س} = ١$ حيث س بالقياس الدائري





طول القوس ل = س × ١

ل = س

عندما س ← ٠ فإن

ل ← جا س

$\Leftarrow$ س ← جا س

$\Leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا}س}{س} = ١$

قاعدة : ① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا}\,أس}{ب\,س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{أس}{\text{جا}\,ب\,س} = \frac{أ}{ب}$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{ظا}\,أس}{ب\,س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{أس}{\text{ظا}\,ب\,س} = \frac{أ}{ب}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٣س}}{\text{٥س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٩س}}{\text{جا٢س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا٢س}}{\text{٧س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٦س}}{\text{ظا٢س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س}^{٢}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{٢ط} - \text{٢س})}{-\text{٥س}}$

مثال : جد نهـا (س² ظتا ٣س قتا س)
س ← ٠

مثال : جد نهـا (٢س³ ظتا²(٣س) قتا(٥س))
س ← ٠

مثال : جد نهـا ٢س (ظتا ٣س - قتا ٢س)
س ← ٠

مثال : جد نهـا $\dfrac{\text{٢س جا٣س - ظا س}}{\text{جا٢س - ٣س}}$
س ← ٠

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد نهـا $\dfrac{\text{س - جا٣س + ظا٥س}}{\text{٢س - ظا²س}}$
س ← ٠

مثال: اذا كانت $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{٤س}^{2} - \text{جا ب س}}{\text{٢ب س} - \text{ظا ٤س}} = -\frac{٣}{٢}$ أوجد قيمة ب

مثال: جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{س}^{2} - \text{٢س ظا س}}{\text{٣جا}^{2}\text{٤س}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{ظا س} - \text{٢جا س}}{\text{س}}$

س١٤: اذا كانت $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{٥س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا ٦س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٢$ أوجد قيمة

كل من الثابتين أ ، ب

نهايات دائرية $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ - الاستبدال أو التعويض :

مثال : جد $\underset{س \to \frac{\pi}{2}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{2})}{س - \frac{\pi}{2}}$

مثال : جد $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(٢س - ٦)}{٣ - س}$

مثال : جد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,٢س^{٢}}{٤س^{٢}}$

مثال : جد $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(س + ٥)}{٢٥ - س^{٢}}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا}(س+٣)}{س^{٢} - ٩}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا}(س^{٢} - ٦٤)}{س - ٨}$

أ. مصطفى الشوفا
٤٢٢٠٠٥
٠٧٩٩٠

مثال : جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـ}} \frac{س - ١}{\text{جا}(س^{٣} - ١)}$

مثال : جد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـ}} \frac{\text{جتا}\, س}{\frac{\pi}{٢} - س}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣\pi}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـ}} \frac{١ - \text{جا س}}{(\pi - ٢\text{س})^{٢}}$

أ. مصطفى العشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

س١٥ : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نهـ}} \frac{١ + \text{ظا س}}{(\text{س} - \pi)^{٢}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـ}} \frac{\text{جا} \frac{\pi}{٢} \text{س}}{\text{س} - ١}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,\frac{٣\pi}{٢}\,\text{س}}{٣\text{س} - ١}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - ١}$

س١٤: جد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$

س١٥ : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \sqrt{3}\,\text{جاس}}{6\text{س} - \pi}$

نهايات دائرية $\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}}$ - المتطابقات :

مثال : جد نهـ $\frac{\text{١ - جتا٢س}}{\text{٢س}^{٢}}$
س ← ٠

مثال : جد نهـ $\frac{\text{جتا}^{٤}\text{س - جا}^{٤}\text{س - }\sqrt{\text{جتا٢س}}}{\text{س}^{٢}}$
س ← ٠

أ. مصطفى البشري
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد نهـ $\frac{\text{١ - ٣س جا٢س - جتا٢س}}{\text{س ظا٢س}}$
س ← ٠

ش ١٧ : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢ جا٢س − جا٤س}}{\text{س}^{\text{٣}}}$

ص ١٦ : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٤ − س ظاس − ٤ جتاس}}{\text{س جا٤س}}$

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − جتاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{قا(س) - ١}{س^{٢}}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - قاس}{ظا^{٢}س}$

مثال : جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - ظتاس}{قتاس}$

مثال: جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـ}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتاس}}}{س}$

س١٦: جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـ}} \frac{٢س - \text{جاس}}{\sqrt{١ - \text{جتا٢س}}}$

أ. مصطفى البشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جتا س} - \text{جا}٣\text{س}}{\text{س}^٢}$

مثال : جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا}٥\text{س} - \text{جا}٣\text{س}}{٣\text{س}^٢}$

مثال : جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{١ - \text{جا}٤\text{س}}{\text{جا}(٦\text{س}) - ١}$

مثال: جد $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٢} - جا\left(\frac{\pi}{٣} + هـ\right)}{هـ}$

مثال: جد $\lim\limits_{ر \to ٠} \frac{١ + جا٦ر - ٢جا^{٢}٣ر}{٣ر جا٢ر}$

أ. مصطفى المشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: جد $\lim\limits_{ر \to م} \frac{جار - جام}{ر - م}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{م-}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس + جام}}{\text{س + م}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا٦س + جا٤س}}{\text{س}}$

مثال: جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ + جا٤س - جتا٢س}}{\text{س}}$

٥-٢ الاتصال عند نقطة

تعريف: يكون الاقتران هـ متصلاً عند س = أ إذا حقق الشروط الآتية:

١) أن يكون هـ معرفاً عند س = أ

٢) نهـا هـ(س) موجودة
س ← أ

٣) نهـا هـ(س) = هـ(أ)
س ← أ

ملاحظة: بوصف تقريبي يكون الاقتران هـ متصلاً عند س = أ إذا كان منحنى الاقتران هـ ليس فيه فجوة أو انقطاع عند س = أ (بيانياً: نقاط عدم الاتصال عند الفجوات والقفزات)

مثال: إذا كان ع(س) = { ١ - ٤س ، س ≤ -٢
٣س^٢ - ٥ ، س > -٢

فابحث في اتصال الاقتران ع عند كل من: س = -٢ ، س = ٠

مثال: ليكن ق(س) = { ٢ - ٣س ، س < ٢
٣ ، س = ٢
س^٢ - ٨ ، س > ٢

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

مثال: اذا كان ل(س) = { ٤ + س ، س < -١
٢ - س ، -١ ≤ س ≤ ١
٢س + ١ ، س > ١

فابحث في اتصال الاقتران ل عند كل من س = ١ ، س = -١

مثال: اذا كان ق(س) = { ٢س - ٥ ، س ≥ ص
٢س^٣ - ٤س - ٩ ، س ≱ ص

حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = (س^٢ - ١) / (س - ١) عند س = ١

مثال: اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{٣ - \text{س}} & \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ٩ & \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ فابحث في

اتصال الاقتران هـ عند س = ٣

مثال: اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \frac{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ١} & \text{س} \neq ١ \\ ٣\text{س} + ١ & \text{س} = ١ \end{cases}$ فابحث في

اتصال الاقتران ل عند س = ١

س١٥) : اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} ٤س + ٢ & ٢ > س \geq ١٠ \\ ١٠ & س = ٢ \\ \dfrac{(٢س+١)^{٢} - ٢٥}{س - ٢} & ٤ \geq س > ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

مثال : اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{جا٣س}{س} & س \neq ٠ \\ ٣ & س = ٠ \end{cases}$$
فابحث في اتصال

ق عند س = ٠

مثال: ليكن ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|٦ - ٢س|}{٣ - س} & س \neq ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$ ابحث في اتصال

الاقتران ق عند س = ٣

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|٨١ - س^{٢}|}{س - ٩} & س \neq ٩ \\ س + ٩ & س = ٩ \end{cases}$ فابحث في اتصال

الاقتران ق عند س = ٩

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س}| - ٥}{\text{س} - ٥} & \text{س} \neq ٥ \\ ٢ & \text{س} = ٥ \end{cases}$ فابحث في

اتصال الاقتران ق عند س = ٥

مثال : اذا كان ق(س) = $\dfrac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} + ٢}$ ، س ≠ -٢ فابحث في اتصال

ق عند س = ٢

مثال : اذا كان ق اقتران متصل عند س = ٢ وكان ق(٢) = -٤ جد

$$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} \left(\frac{|س-٢|}{س-٢} + ٢ق(س) \right)$$

مثال : اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \sqrt{٤-س} & س < ٤ \\ |س^٢-١٦| & س \geq ٤ \end{cases}$ فابحث في اتصال

الاقتران ل عند س = ٤

مثال: ليكن د(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{ظاس}|}{\text{س}} & \text{س} > ٠ \\ ١ - ٢\,\text{جتاس} & \text{س} \leq ٠ \end{cases}$ ابحث في اتصال

د عند س = ٠

مثال: اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \\ ١ & \text{س} = ٠ \end{cases}$ فابحث في اتصال

ل عند س = ٠

أ/ مصطفى البشوفا

٠١٠٠٢٠٠٠٥

٧٩٩٠٤

مثال : اذا كان ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س] فابحث في اتصال ق عند كل من
س = ١ ، س = ٣

مثال : اذا كان ق(س) = [٣ - ٠,٥ س] فابحث في اتصال الاقتران ق
عند س = ٥

مثال: اذا كان ق(س) = [٨ - ٤س] فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ١٫٥

مثال: اذا كان ق(س) = [س] فما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق اقتراناً غير متصل

مثال : ابحث في اتصال الاقتران ق حيث ق(س) = س [س+١] عند س=١

مثال : ليكن ق(س) = { [٣س] + ١ ، -١ ≤ س < ٠
٣س^٢ + س ، ٠ ≤ س ≤ ٤ فابحث في اتصال ق
عند كل من س = - ١/٣ ، س = ٠

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان ه(س) =

$$\begin{cases} س^{٣} + س & س < -١ \\ [س + ١] & س = -١ \\ \sqrt{س^{٢} + ٣} + \frac{٢}{س} & س > -١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ه عند س = -١

س١٦: اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} \frac{٩س^{٢} - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^{٢}}} & -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & \frac{١}{٣} < س < \frac{٢}{٣} \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\frac{١}{٣}$

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: ابحث في اتصال الاقتران هـ(س) = $\sqrt{[س] + ٢س}$ على الفترة (١، ٢]

س١٤) إذا كان هـ(س) = {
|س/٢ − ١| ، −١ ≤ س < ٣
[½س + ٣] ، ٣ ≤ س < ٤

فابحث في اتصال الاقتران هـ(س) عند س = ٣

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

س١٦ : إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{(٥ - س^٢) - [٢س + ٣]}{١ - س} & ٠ < س < ١ \\ ٢س - |١ - س^٢| & ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١

س١٧ : إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{|[س] - س| + [س - ٤]}{س - ٤} & س < ٤ \\ (س - ٣)^٢ & س \ge ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٤

أ. مصطفى المشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

س١٧ : اذا كان ه(س) =

$$\begin{array}{ll} ١ > س > ٠ & \dfrac{\frac{١}{٣} - \left|\dfrac{١}{٤-س}\right|}{س-١} \\ ٢ > س \geq ١ & \dfrac{\left[١ + س\frac{١}{٢}\right]}{س٩-} \end{array}\right\}$$

فابحث في اتصال الاقتران ه(س) عند س = ١

مثال : اذا كان ه اقتران متصل عند س = -٣ وكان ٣ه(-٣) = ١٢ وكان

نهـا ه(س) = ٤م جد قيمة الثابت م
س ← -٣⁺

مثال: اذا كان ه(س) = $\begin{cases} ٢م س^{٢} + ب & س > ٢ \\ ٧ & س = ٢ \\ ب س + ٩م & س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

أوجد قيمة كل من الثابتين م ، ب

مثال: اذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{س\sqrt{س} - ١}{س - ١} & س > ١ \\ ب & س = ١ \\ ٢م س & س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

أ. مصطفى الشوف
٠٧٩٩٠٢٠٠٥

أوجد كلا من م ، ب

مثال: اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} \text{٤ جا}^{2}\text{س} & \text{س} < \pi \\ \frac{\text{أ}}{\pi}\,\text{س} + \text{٢} & \text{س} \geq \pi \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = π

س١٥: اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{2}(\text{ب س}) - \text{٩س}^{2}}{\text{س جا س}} & -\frac{\pi}{\text{٦}} < \text{س} < \text{٠} \\ \text{١١} & \text{س} = \text{٠} \\ \dfrac{\text{س}^{2} + (\text{٢} - \text{أ})\,\text{س}}{\text{أ س}} & \text{٠} < \text{س} < \frac{\pi}{\text{٢}} \end{cases}$$

اقترانا متصلاً عند س = ٠ جد قيم كل من الثابتين أ ، ب

مثال: اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^2 - \text{أ} & -٤ \le \text{س} < -٢ \\ |١ - \text{س}| + ٣ & -٢ \le \text{س} < ٠ \end{cases}$$

جد قيمة الثابت أ التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = -٢

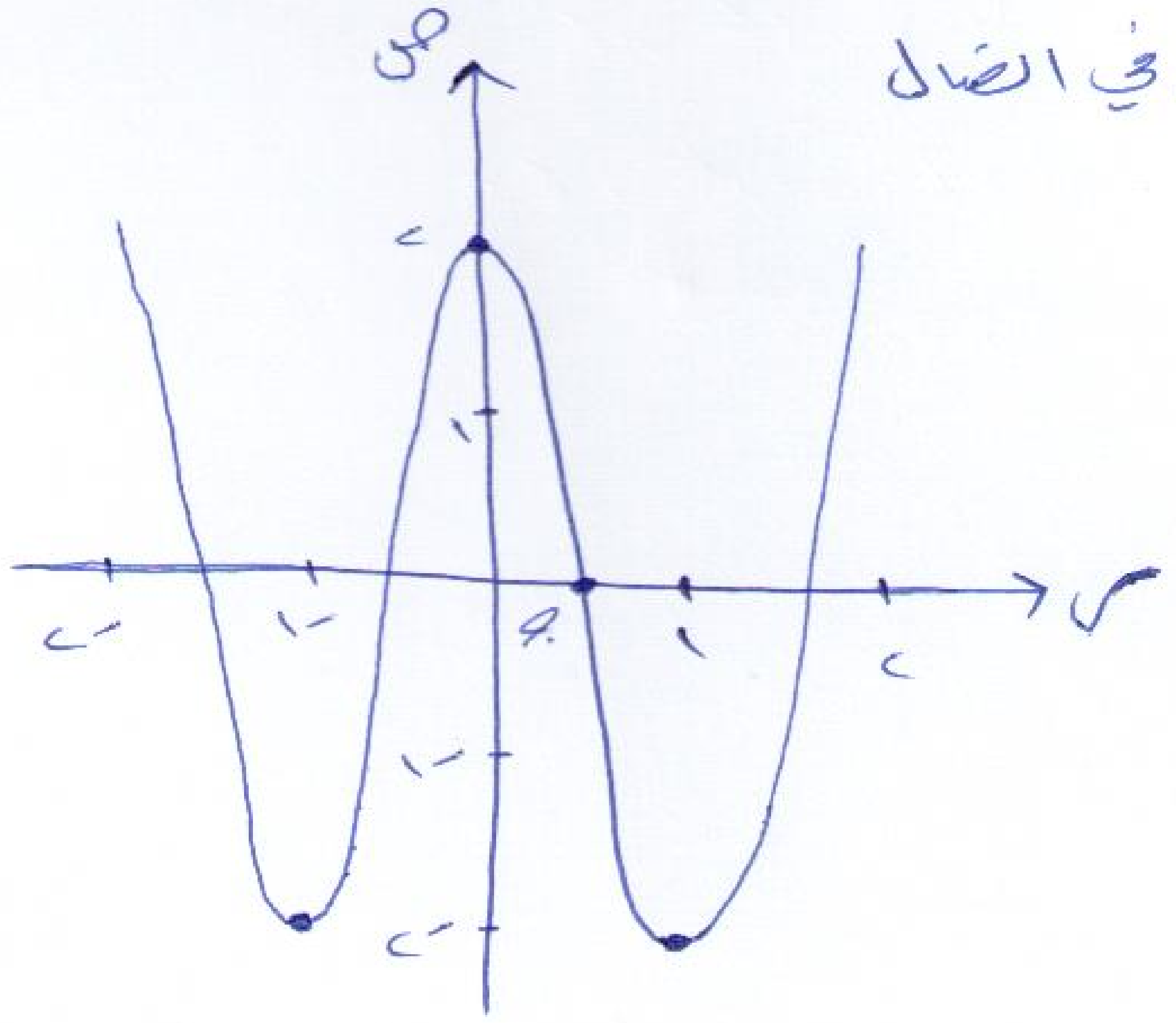
مثال: اذا كان ع(س) =

$$\begin{cases} \frac{\text{ب}}{\text{س}^2} + \text{س} & ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٥ - [\text{س}] & ٢ < \text{س} < ٣ \\ ١٠ & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

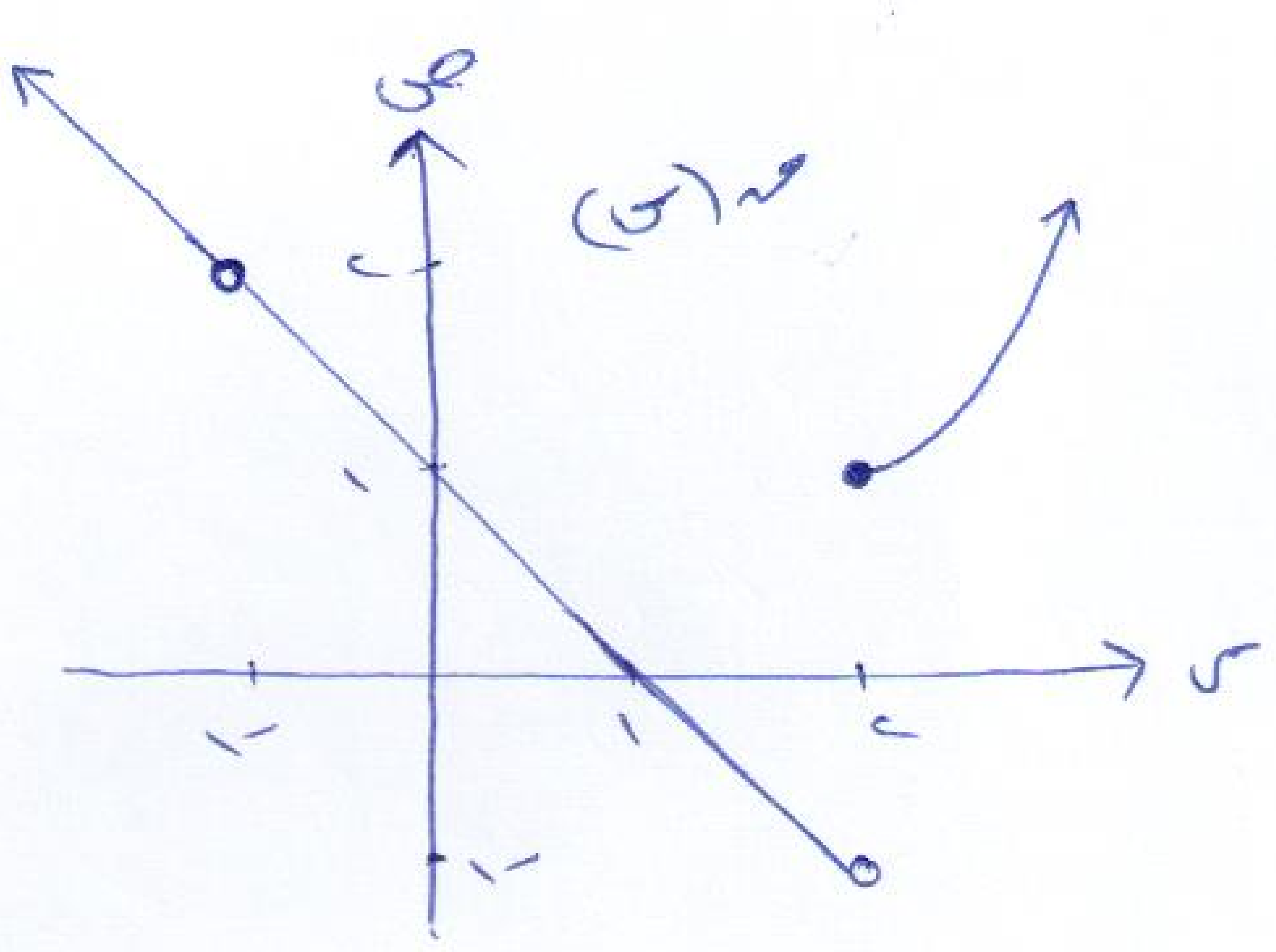
متصلاً عند س = ٢ جد قيمة الثابت ب

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٢٤٠٠٥

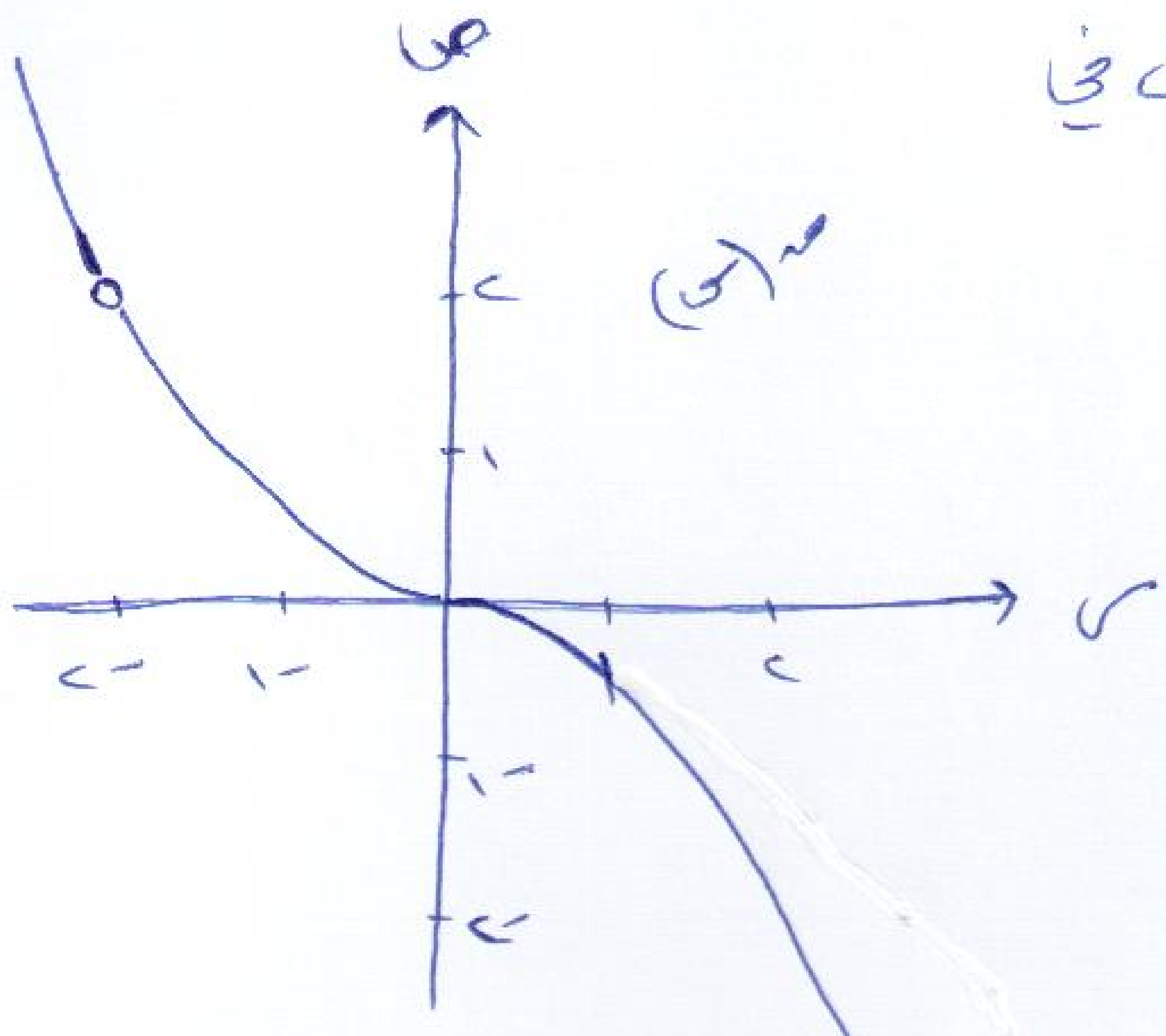
مثال : في الشكل المجاور ابحث في اتصال الاقتران د عند س = جـ



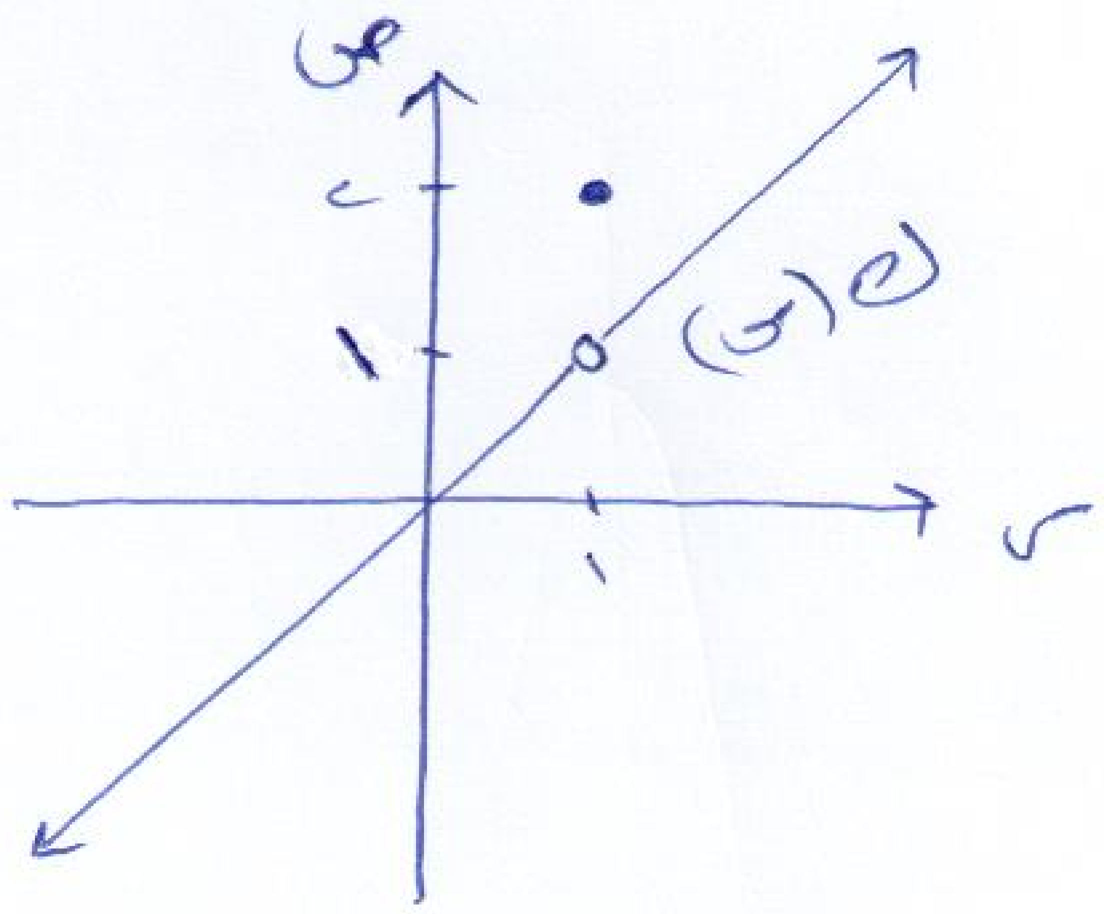
مثال : في الشكل المجاور حدد قيم س التي يكون عندها ق غير متصل



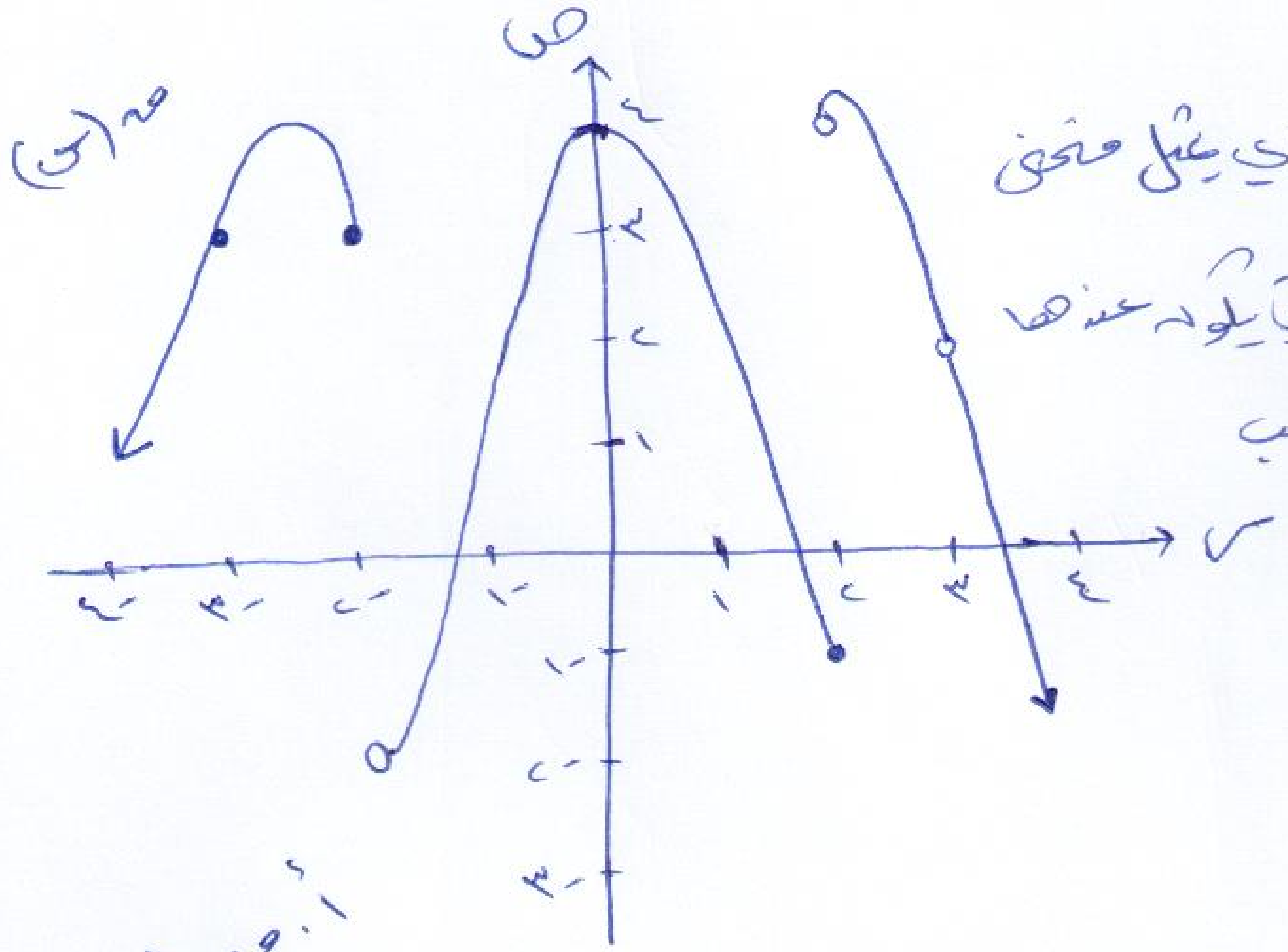
مثال : في الشكل المجاور ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢



مثال : في الشكل المجاور ابحث في اتصال ق عند س = ١

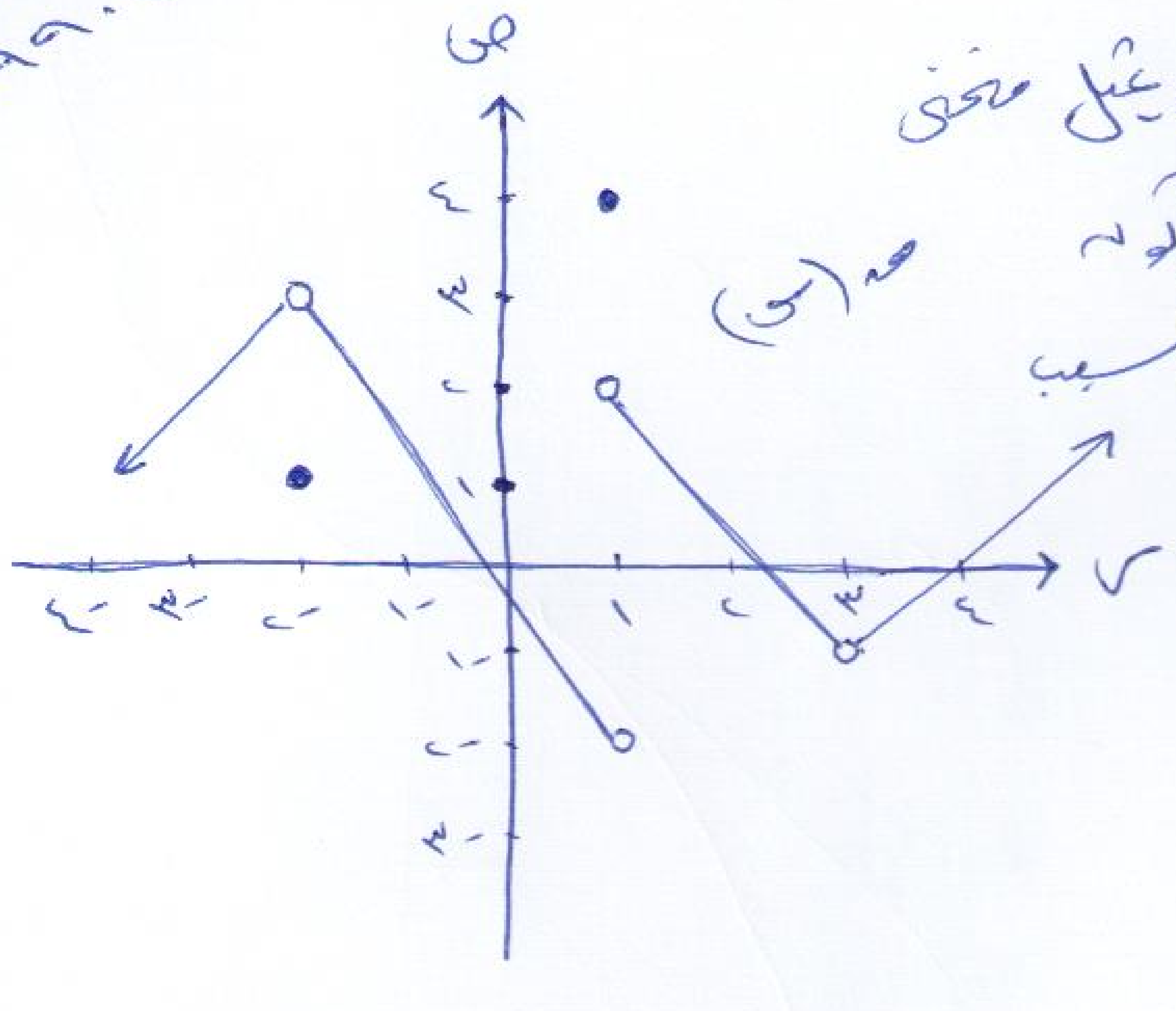


مثال : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران هـ، ما قيم س التي يكون عندها هـ غير متصل مع ذكر السبب

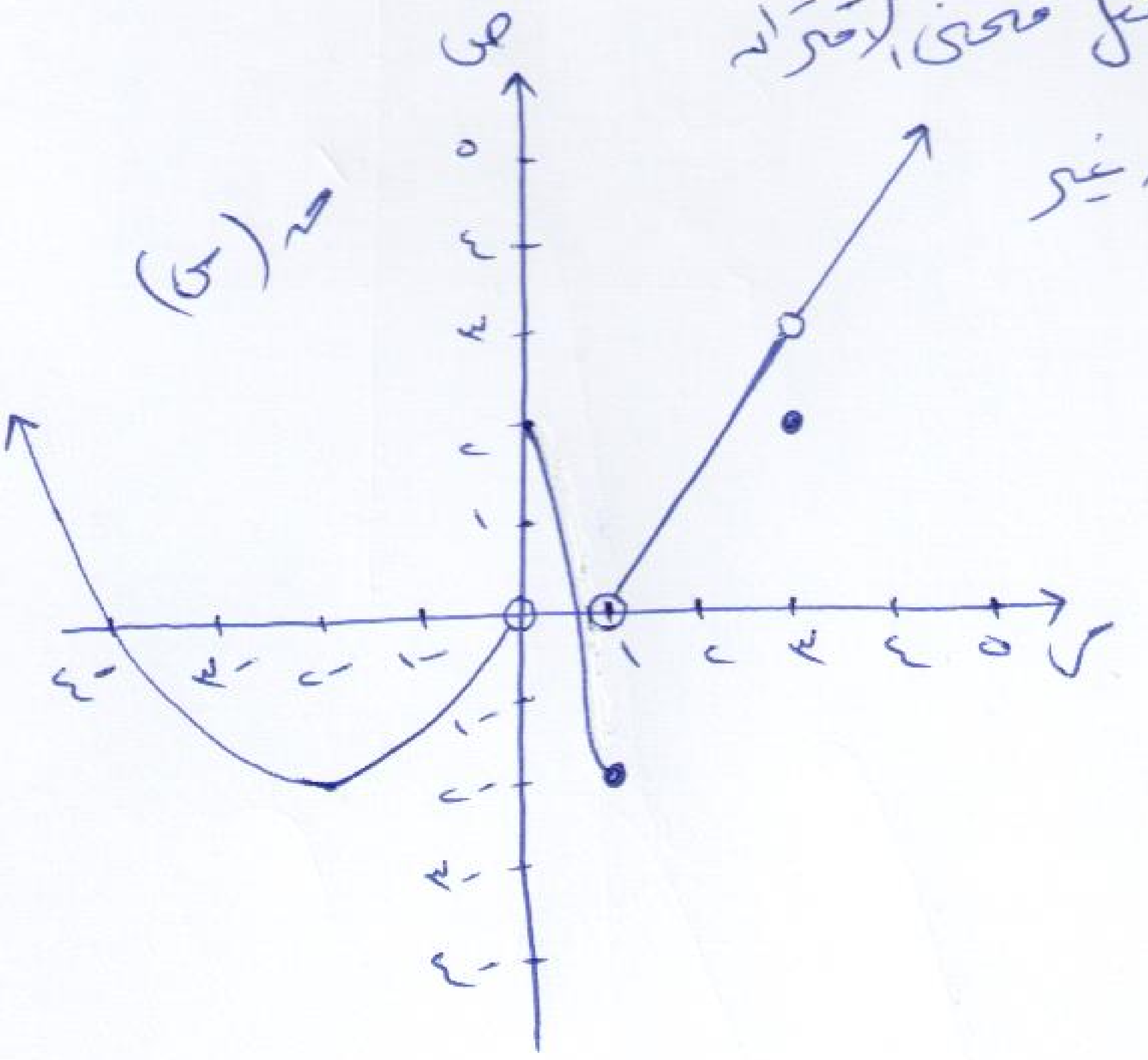


أ. مصطفى البشيتي
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

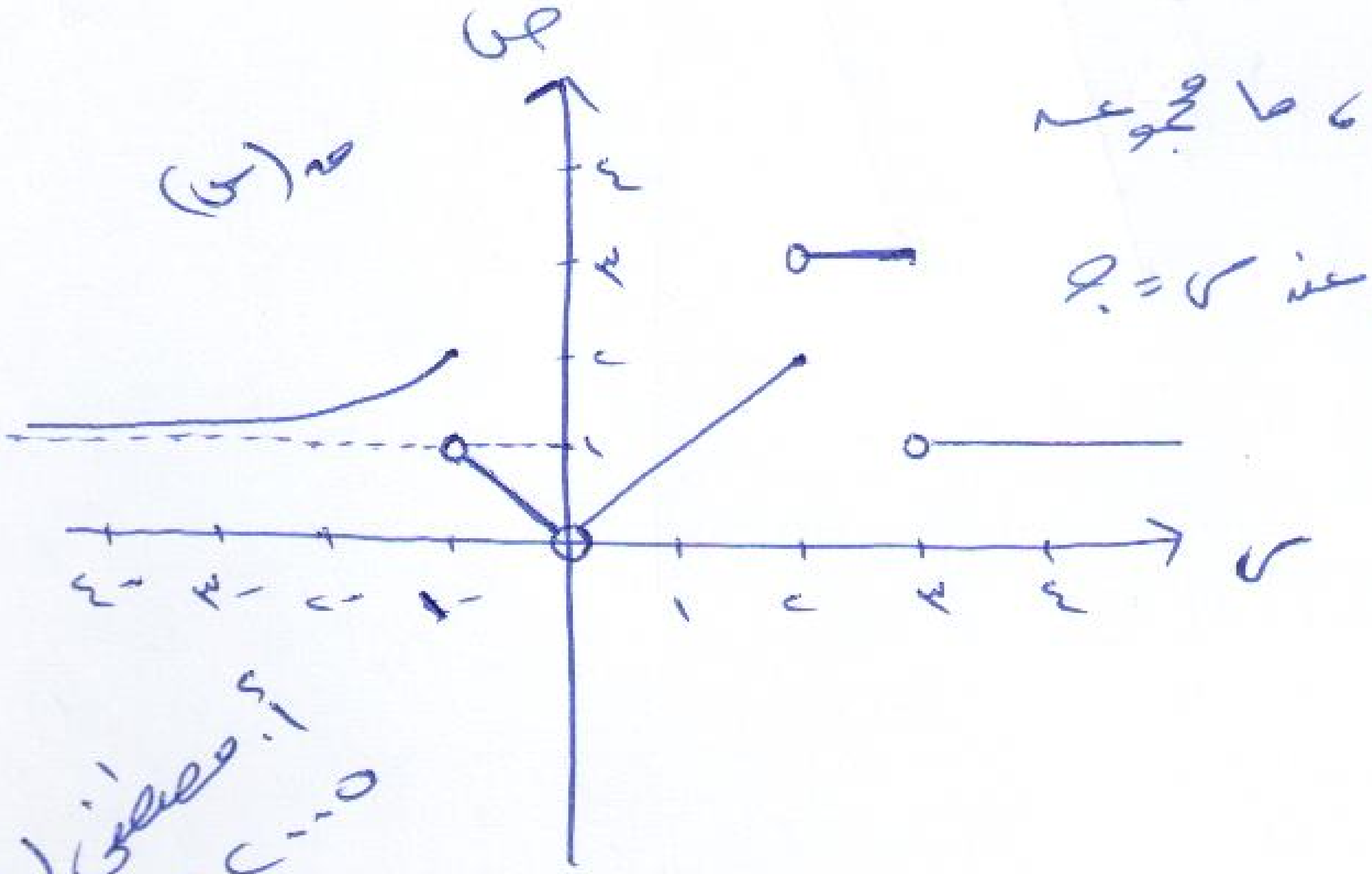
مثال : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران هـ، ما قيم س التي يكون عندها هـ غير متصل مع ذكر السبب



مثال : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق جد مجموعة قيم ب حيث ق غير متصل عند س = ب

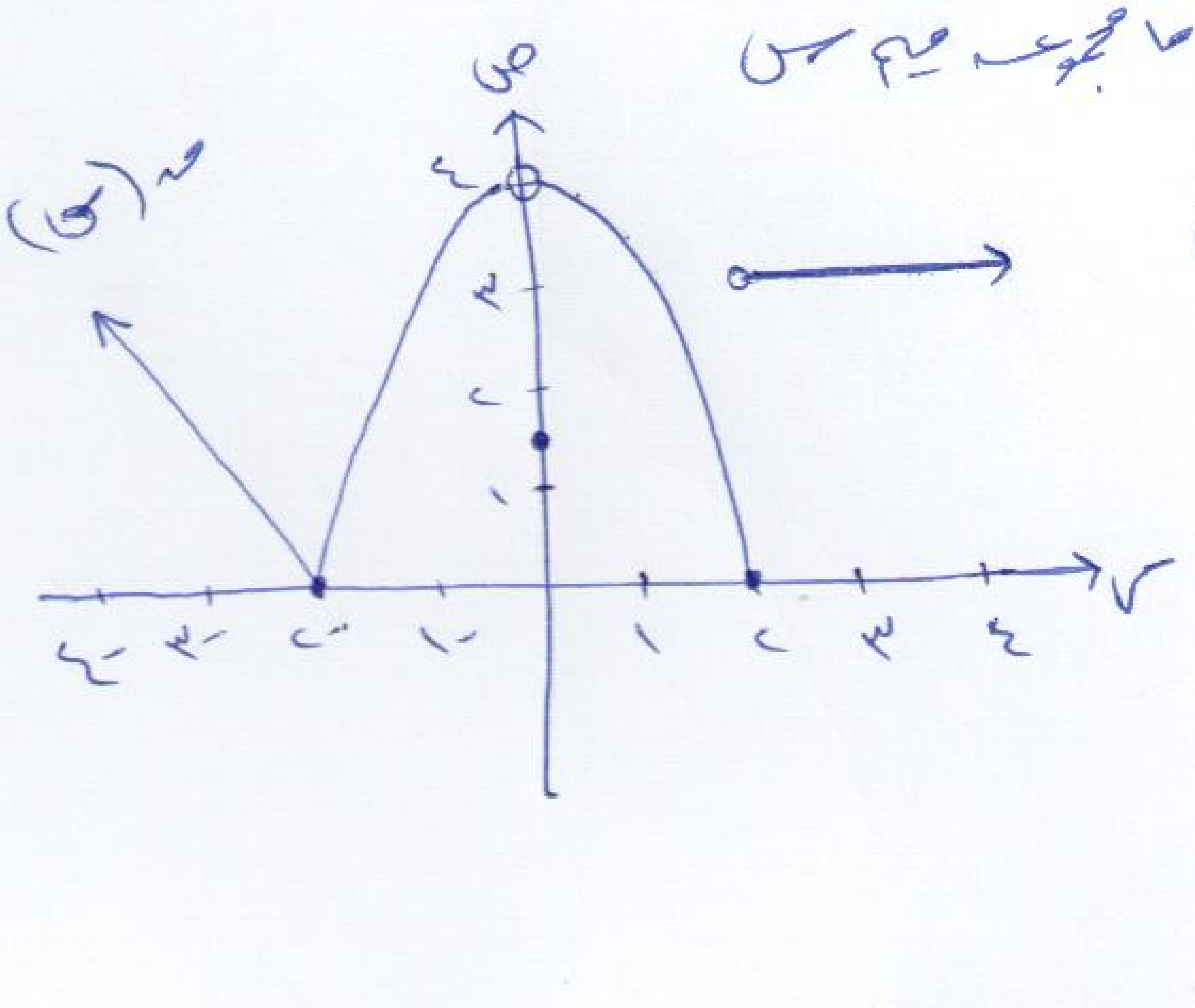


مثال : اعتماداً على الشكل ، ما مجموعة قيم جـ حيث ق غير متصل عند س = جـ



أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : اعتماداً على الشكل ، ما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق غير متصل



نظرية : ① اذا كان ق اقتران كثير حدود فإن ق متصل عند كل قيم س ∈ ح

② اذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = أ فإن :

أ- الاقتران ق + هـ والاقتران ق - هـ اقترانان متصلان عند س = أ

ب- الاقتران ق × هـ متصل عند س = أ

جـ- الاقتران $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ متصل عند س = أ بشرط هـ(أ) ≠ ٠

د- الاقتران $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ غير متصل عند س = أ اذا كان هـ(أ) = ٠

③ اذا كان ق(س) متصل عند س = أ ، ق(س) ≥ ٠ في فترة مفتوحة تحوي
أ فان هـ(س) = $\sqrt{\text{ق(س)}}$ اقتران متصل عند س = أ

ملاحظة: اذا كان ق غير متصل عند س = أ أو هـ غير متصل عند س = أ أو كلاهما غير متصلين عند س = أ فليس شرطاً ان ق + هـ غير متصل عند أ وكذلك الحال بالنسبة الى ق - هـ ، ق × هـ

ملاحظة: اذا كان ق + هـ متصلاً عند س = أ فانه ليس من الضروري ان يكون كل من الاقترانين ق ، هـ متصلين عند س = أ وكذلك الاقترانان ق - هـ ، ق × هـ

قاعدة: اذا كان ق اقتران نسبي معرف عند س = أ فان ق متصل عند س = أ (اي أن الاقتران النسبي متصل عند كل قيم س الحقيقية ما عدا اصفار المقام)

مثال: اذا كان ق(س) = $\frac{١ - س^٢}{س - ١}$ ، هـ(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤}$ فابحث في اتصال الاقتران ق×هـ عند س = ٢

مثال: اذا كان ق(س) = $(س - ٢)^٢$ ، هـ(س) = [س + ١] فابحث في اتصال ق(س)×هـ(س) عند س = ٢

مثال: اذا كان ق(س) = $(٢س-١)^٢$ ، ل(س) = [١-س] فابحث في اتصال الاقتران ق×ل عند س=٣

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ١-٢س & س<١ \\ -س^٢ & س\geq١ \end{cases}$ ، ع(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ & س<١ \\ |س-٤| & س\geq١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق×ع) عند س=١

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال : اذا كان م(س) = $\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{8}\text{س}^{3} + 1}{\text{س} + 2} & \text{س} > -2 \\ \dfrac{3}{2} & \text{س} = -2 \end{cases}$ ،

هـ(س) = $\dfrac{\text{صا}\frac{\pi}{4}\text{س}}{\text{س}}$ فابحث في اتصال الاقتران م + هـ عند س = -٢

مثال : اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{2} + 1 & \text{س} < 3 \\ \text{س} + 7 & \text{س} \geq 3 \end{cases}$ ، ع(س) = $\begin{cases} \text{س}^{3} & \text{س} < 3 \\ 3\text{س} & \text{س} \geq 3 \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (هـ + ع) عند س = ٣

مثال: اذا كان ق(س) = { ٢ + ٢س ، س < ١
٣س^٢ ، س ≥ ١ } ،

هـ(س) = { س^٢ ، س < ١
|٢س| ، س ≥ ١ } فابحث في اتصال الاقتران (ق + هـ)(س)
عندما س = ١

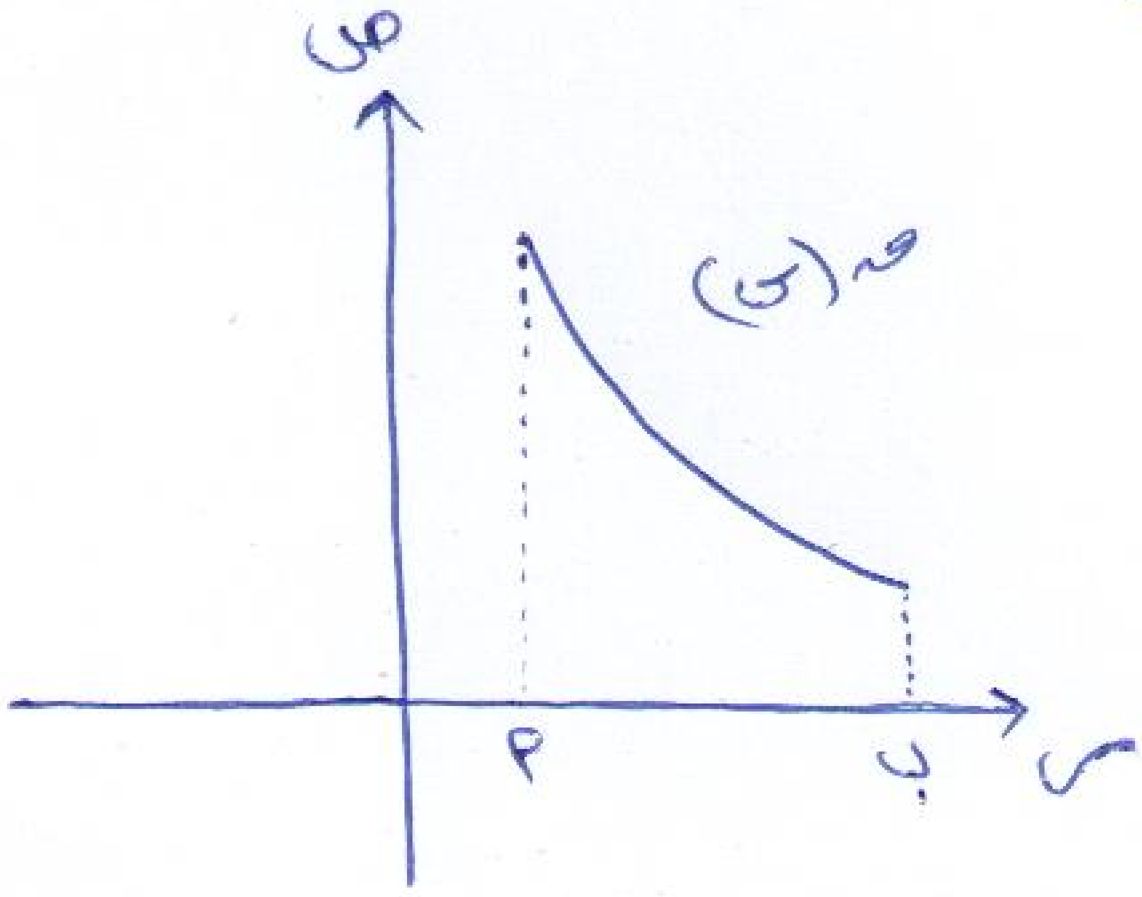
مثال: اعط مثالاً لاقترانين مثل ق ، هـ بحيث يكونان غير متصلين عند
س = ٣ ، والاقتران ق + هـ متصلاً عند س = ٣

أ. مصطفى العشوف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان هـ ، م هو اقترانين متصلين عند س = ٢ أثبت ان الاقتران هـ × هو متصل عند س = ٢

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

$\boxed{6}$ الاتصال على فترة



تعريف : ليكن هـ اقتران معرفاً على
الفترة [أ، ب]

① يكون هـ متصل عند س = أ من اليمين
اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{أ})$

② يكون هـ متصل عند س = ب من اليسار
اذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{ب}^{-}}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{ب})$

③ يكون هـ متصل على (أ، ب) اذا كان متصل عند كل قيمة من قيم
س ∈ (أ، ب)

④ يكون هـ متصل على [أ، ب] اذا كان :
أ- متصل على (أ، ب)
ب- متصل عند س = أ من اليمين
جـ- متصل عند س = ب من اليسار

ملاحظة :

① يكون هـ متصل على [أ، ب) اذا كان متصل على (أ، ب) ومتصل عند س = أ من اليمين .

② يكون هـ متصل على (أ، ب] اذا كان متصل على (أ، ب) ومتصل عند س = ب من اليسار

③ يكون هـ متصل على (أ، ∞) اذا كان متصل عند كل قيم س ∈ (أ، ∞)

④ يكون هـ متصل على (-∞، ب) اذا كان متصل عند كل قيم س ∈ (-∞، ب)

⑤ يكون هـ متصل على ح اذا كان متصل عند كل قيم س ∈ ح

ملاحظة: ① اذا كان ق كثير حدود فان ق متصل على ح

② اذا كان ق اقتران نسبي فان ق متصل على أية فترة يكون معرف عليها (فترة لا تحتوي اصفار المقام)

③ اذا كان ق متصل على ح فان ق متصل على أية فترة جزئية من ح

④ ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس اقترانان متصلان على ح

⑤ ق(س) = ظاس متصل على ح ماعدا قيم س ∈ $\{\pm \frac{ن\pi}{٢}\}$ حيث ن عدد طبيعي فردي.

مثال: اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} ٢س + ١ & -٢ \le س \le ١ \\ س^٢ + ٥ & ١ < س \le ٣ \end{cases}$$
فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [-٢، ٣]

مثال: اذا كان ه(س) =

$$\begin{cases} -\text{س}^2 & ٣ \le \text{س} < ٥ \\ -٣\text{س} - ١٠ & ٥ \le \text{س} < ٧ \\ ٨ & \text{س} = ٧ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ه على الفترة [٣ ، ٧]

مثال: اذا كان ع(س) = |٢س - ١٠| فابحث في اتصال الاقتران ع على [٠ ، ٣]

مثال: اذا كان ق(س) = |٤س - ١٦| فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [١، ٦]

مثال: اذا كان ق(س) = |س - ٠٫٢| فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠٫٢ ، ٠٫٥]

أ. مصطفى العشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} & س < ١ ، س \neq ٠ \\ \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢} & س \geq ١ \end{cases}$ فابحث في اتصال الاقتران د على ح

مثال: اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \sqrt{٧ - س} & س < ٧ \\ |س^٢ - ٤٩| & س \geq ٧ \end{cases}$ فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: ليكن ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س}{س} & ، -٢ \le س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ [٢ + س] & ، ٠ < س \le ١ \end{cases}$ ادرس اتصال ق

على [-٢، ١]

مثال: اذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٢ & ، س = ٢ \\ [\frac{١}{٢} س] + ٣ & ، ٢ < س < ٤ \\ ٧ & ، س = ٤ \end{cases}$ فابحث في اتصال

الاقتران ع على الفترة [٢، ٤]

مثال: اذا كان ع(س) =

$$\begin{cases} ٢س^{٢} & س < ٢ \\ \left[\frac{١}{٢}س + ٤\right] & ٢ \le س < ٤ \\ \dfrac{١١س}{س^{٢} - ٤٩} & س \ge ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية

مثال: اذا كان هـ(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س + ٢} & -٥ \le س < -٢ \\ ٢س\left[\frac{١}{٢}س\right] & -٢ \le س < ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران هـ على الفترة [-٥، ٢)

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٢٤٠٠٠٥

مثال: اذا كان ل(ص) =

$$\begin{cases} ص + [ص] & ، -١ \le ص < ٠ \\ \frac{٣ص^{٢}}{٥} + \sqrt{ص} & ، ٠ \le ص \le ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة [-١، ٢]

مثال: اذا كان ع(س) =

$$\begin{cases} |٢س - ١| & ، -١ \le س < ١ \\ [\frac{١}{٢}س + ٢] & ، ١ \le س \le ٣ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع على [-١، ٣]

أ. مصطفى العشوش
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{\text{س} + ٧} & ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ [٠٫٥\text{س} + ٣] & ٢ \leq \text{س} < ٦ \\ |\text{س} - ٢| & \text{س} = ٦ \end{cases}$ فابحث

في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٦]

أ. مصطفى الشرف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: ليكن هـ(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} & \text{س} < ٢ \\ ٣\sqrt{\text{س}} + ٦ & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ ابحث في اتصال هـ على ح

مثال: اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س} - ٦} & \text{س} \neq ٦ \\ ٦ + \text{س} & \text{س} = ٦ \end{cases}$ فابحث في اتصال الاقتران

ل على مجاله.

مثال: ابحث في اتصال الاقتران ق(س) =
$$\begin{cases} \frac{1}{س} + ٥ & س \geq ١ \\ ٢س^{٢} + ٤ & س < ١ \end{cases}$$
على ح

مثال: ليكن ق(س) =
$$\begin{cases} \frac{\frac{١}{٢}س^{٢} - س}{س - ٢} & س < ٢ \\ \frac{٥س - ٨}{س} & س \geq ٢ \end{cases}$$
فابحث في اتصال الاقتران ق على ح

أ. مصطفى الشرفا
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} \frac{س^2 - ٢س - ١٥}{٥س - س^2} + \frac{٨}{٥} & س > ٥ \\ \sqrt{٥ - س} & س \le ٥ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل على ح

مثال: اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} س^2 + ٣ & س > ١ \\ ٢س^3 \sqrt{س + ١} - ٢ & س \le ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل لجميع قيم س الحقيقية.

أ. مصطفى لبشوف
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان ل(س) = $\sqrt{٢س+٦}$ فابحث في اتصال الاقتران ل
على [-٣ ، ∞)

مثال: اذا كان ه(س) = $\begin{cases} ٢ + س & ٢ \geq |س| \\ س^{٢} & ٢ < |س| \end{cases}$ فابحث في اتصال

ه(س) على مجاله

مثال: اذا كان د(س) = {

(س² - س - ٣٠) / (م س - ٦ م) ، س > ٦ اقتران متصل

١ ، س = ٦

ب س ، س < ٦

على ح جد قيمة كل من م ، ب

أ. مصطفى الشرفا
٠٥٩٩٦٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان الاقتران هـ(س) = {

(س² + ٢(م - ١)س - ٤م) / (س - ٢) ، س ≠ ٢

٧ ، س = ٢

متصلاً على ح جد قيمة الثابت م

مثال: اذا كان ل(س) = $\frac{\text{٢س}^{٢} + \text{٦س} - ٢}{\text{جـ س}^{٢} + \text{س} + ٣}$ فما قيم جـ التي تجعل الاقتران ل متصلاً على مجموعة الاعداد الحقيقية ح .

مثال: اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا أ س}}{\text{٣ب س}} & ، -\frac{\pi}{2} \le \text{س} < ٠ \\ ٤ & \text{س} = ٠ \\ \text{ب}\left(\frac{\text{أ}}{٣} + \text{س}\right) & ، ٠ < \text{س} \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وكان هـ

متصلاً على $[-\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$ فجد قيمة كل من أ ، ب

مثال: اذا كان ل(س) = $\frac{س^2 - ٤}{س + ٣}$ ، هـ(س) = [س] فابحث في اتصال

الاقتران ل×هـ على الفترة [٠، ٣]

أ. مصطفى العتوم
٠٧٩٩٠٤٢٠٠٥

مثال: اذا كان ع(س) = س + ٢ ، هـ(س) = [٥ - س] فابحث في اتصال

$\frac{ع(س)}{هـ(س)}$ في الفترة (٤، ٧)