مثال: جد $\int$ ١٦ س² جتا٢س دس ⟸ ق = ١٦ س² ، دهـ = جتا٢س دس

دق = ٣٢ س دس ، هـ = $\frac{1}{2}$ جا٢س

I = (١٦ س²)($\frac{1}{2}$ جا٢س) − $\int$ ($\frac{1}{2}$ جا٢س)(٣٢ س دس)

I = ٨ س² جا٢س − $\int$ ١٦ س جا٢س دس   أجزاء مرة أخرى

ق = ١٦ س ، دهـ = جا٢س دس

دق = ١٦ دس ، هـ = − $\frac{1}{2}$ جتا٢س

I = ٨ س² جا٢س − (١٦ س × − $\frac{1}{2}$ جتا٢س) − $\int$ (− $\frac{1}{2}$ جتا٢س)(١٦ دس)

= ٨ س² جا٢س + ٨ س جتا٢س − $\int$ ٨ جتا٢س دس

= ٨ س² جا٢س + ٨ س جتا٢س − ٨ × $\frac{1}{2}$ جا٢س + جـ

طريقة أخرى للحل: $\int$ ١٦ س² جتا٢س دس

الاقتران المشتق ق	الاقتران الذي نكامله دهـ
	جتا٢س
(+) ١٦ س²	$\frac{1}{2}$ جا٢س
(−) ٣٢ س	− $\frac{1}{4}$ جتا٢س
(+) ٣٢	− $\frac{1}{8}$ جا٢س
(−) صفر	

I = ٨ س² جا٢س + ٨ س جتا٢س − ٤ جا٢س + جـ

مثال: $\int \frac{\text{٤س}}{\text{قتا}^2\text{س}}$ دس = $\int$ ٤ س جتا²س دس = $\int$ ٤ س × $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س) دس

= $\int$ ٢ س × (١ + جتا٢س) دس = $\int$ ٢ س + ٢ س جتا٢س دس

= $\underbrace{\int \text{٢س دس}}_{\text{مباشر}}$ + $\int \underbrace{\text{٢س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{جتا٢س دس}}_{\text{دهـ}}$ أجزاء   ثم نكمل ———

مثال: $\int \text{س}\,(\text{جاس} + \text{جتاس})^2\,\text{دس} = \int \text{س}\,(\text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس})\,\text{دس} = \int \text{س}\,(1 + \text{جا}2\text{س})\,\text{دس}$

$= \int (\underbrace{\text{س}}_{\text{مباشر}} + \underbrace{\text{س}}_{\text{ص}}\,\underbrace{\text{جا}2\text{س}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}}) = \frac{\text{س}^2}{2} + \int \text{س}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{جا}2\text{س}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س}$

$\text{I} = \frac{\text{س}^2}{2} + \text{س} \times -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س} - \int -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{1}{2}\,\text{س}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س} + \text{جـ}$

مثال: اذا كان $\text{ق}(1) = 3$ ، $\text{ق}'(1) = -2$ ، $\text{ق}(2) = 5$ ، $\text{ق}'(2) = 7$

$\text{ق}(4) = -9$ ، $\text{ق}'(4) = -8$

جد قيمة $\int_2^4 3\text{س}\,\text{ق}''(\tfrac{1}{2}\text{س})\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = 3\text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{ق}''(\tfrac{1}{2}\text{س})\,\text{دس}$

$\text{دص} = 3\,\text{دس} \qquad \text{هـ} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س})$

$\text{I} = 3\text{س} \times 2\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س}) - \int 2\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س}) \times 3\,\text{دس}\,\Big|_2^4$

$= 6\text{س}\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س}) - \int 6\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س})\,\text{دس}\,\Big|_2^4$

$= 6\text{س}\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س})\Big|_2^4 - 6 \times \frac{1}{\frac{1}{2}}\,\text{ق}(\tfrac{1}{2}\text{س})\Big|_2^4$

$= 6\text{س}\,\text{ق}'(\tfrac{1}{2}\text{س})\Big|_2^4 - 12\,\text{ق}(\tfrac{1}{2}\text{س})\Big|_2^4$ ثم نعوض ونكمل الحل

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int_{0}^{4} \frac{6\text{س}}{\sqrt{2\text{س}+1}}\, d\text{س}$ نستطيع ايجاد التكامل بالتعويض أو بالأجزاء : $\int_{0}^{4} 6\text{س}\,(2\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\, d\text{س}$

$\text{ع} = 6\text{س}$ $\qquad d\text{هـ} = (2\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\, d\text{س}$

$d\text{ع} = 6\, d\text{س}$ $\qquad \text{هـ} = \frac{1}{2} \times 2 \times (2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}$

$I = 6\text{س} \times (2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} \Big|_{0}^{4} - \int_{0}^{4} (2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} \times 6\, d\text{س}$

$= 6\text{س}\sqrt{2\text{س}+1} \Big|_{0}^{4} - 6 \times \frac{1}{2} \times 2 \frac{(2\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{0}^{4}$

$= (24 \times \sqrt{9} - 0) - 2\left((9)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right) = 72 - 0 - 2\left((3^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

$= 72 - 2(27-1) = 72 - 52 = 20$

٢) $\int \text{جا}\sqrt{2\text{س}+3}\, d\text{س}$ (اذا كان ما داخل الجا أو الجتا مقدار ليس خطية نجب البدء بالتعويض)

نفرض $\text{ص} = \sqrt{2\text{س}+3} \Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{2}{2\sqrt{2\text{س}+3}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+3}}$

$d\text{س} = \sqrt{2\text{س}+3}\, d\text{ص} \Leftarrow d\text{س} = \text{ص}\, d\text{ص}$

$= \int \text{جاص} \times \text{ص}\, d\text{ص} = \int \text{ص جاص}\, d\text{ص}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

$\text{ع} = \text{ص}$ $\qquad d\text{هـ} = \text{جاص}\, d\text{ص}$

$d\text{ع} = d\text{ص}$ $\qquad \text{هـ} = -\text{جتاص}$

$I = -\text{ص جتاص} - \int -\text{جتاص}\, d\text{ص} = -\text{ص جتاص} + \text{جاص} + \text{ج}$

$= -\sqrt{2\text{س}+3}\ \text{جتا}\sqrt{2\text{س}+3} + \text{جا}\sqrt{2\text{س}+3} + \text{ج}$

٣) $\int \text{س جتا}\sqrt{\text{س}^2+1}\, d\text{س} = \int \text{س جتاص} \frac{\text{ص}\, d\text{ص}}{\text{س}}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+1}$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2+1}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

$d\text{س} = \frac{\text{ص}\, d\text{ص}}{\text{س}}$

$= \int \text{ص جتاص}\, d\text{ص}$

$\text{ع} = \text{ص}$ $\qquad d\text{هـ} = \text{جتاص}\, d\text{ص}$

$d\text{ع} = d\text{ص}$ $\qquad \text{هـ} = \text{جاص}$

$I = \text{ص جاص} - \int \text{جاص}\, d\text{ص} = \text{ص جاص} + \text{جتاص} + \text{ج}$

$= \sqrt{\text{س}^2+1}\ \text{جا}\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{جتا}\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{ج}$

③ $\int (س+٢)^2 \,جتا\, ٢س \,ءس$

$م = (س+٢)^2 \qquad ءهـ = جتا\,٢س\,ءس$

$ءم = ٢(س+٢)\,ءس \qquad هـ = \frac{1}{2}\,جا\,٢س$

$= (س+٢)^2 \times \frac{1}{2}\,جا\,٢س - \int \frac{1}{2}\,جا\,٢س \times ٢(س+٢)\,ءس$

$= \frac{(س+٢)^2}{2}\,جا\,٢س - \int (س+٢)\,جا\,٢س\,ءس$ أجزاء مرة أخرى

$م = س+٢ \qquad ءهـ = جا\,٢س\,ءس$

$ءم = ءس \qquad هـ = -\frac{1}{2}\,جتا\,٢س$

$= \frac{(س+٢)^2}{2}\,جا\,٢س - \left((س+٢) \times -\frac{1}{2}\,جتا\,٢س - \int -\frac{1}{2}\,جتا\,٢س\,ءس\right)$

$= \frac{(س+٢)^2}{2}\,جا\,٢س + \frac{(س+٢)}{2}\,جتا\,٢س - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\,جا\,٢س + جـ$

④ $\int س^5 \,جتا\, س^3 \,ءس = \int س^5 \,جتا\, ص \,\frac{ءص}{٣س^2}$

$ص = س^3 \qquad \frac{ءص}{ءس} = ٣س^2 \qquad ءس = \frac{ءص}{٣س^2}$

$= \frac{1}{3}\int س^3 \,جتا\, ص\,ءص = \frac{1}{3}\int \underbrace{ص}_{م}\, \underbrace{جتا\, ص \,ءص}_{ءهـ}$

ثم نكمل الحل ---

⑤ $\int \frac{س\,جا\,س}{قا\,س}\,ءس = \int س\,جا\,س\,جتا\,س\,ءس = \int \frac{1}{2}\underbrace{س}_{م}\,\underbrace{جا\,٢س\,ءس}_{ءهـ}$ نكمل

⑥ $\int جا\,س\,(س + قتا^3 س)\,ءس = \int جا\,س\left(س + \frac{1}{جا^3 س}\right)ءس$

$= \int \left(س\,جا\,س + \frac{1}{جا^2 س}\right)ءس = \int \underbrace{س}_{م}\,\underbrace{جا\,س}_{ءهـ} + \int \underbrace{قتا^2 س\,ءس}_{مباشر}$

$م = س \qquad ءهـ = جا\,س\,ءس$

$ءم = ءس \qquad هـ = -جتا\,س$

$أ = -س\,جتا\,س - \int -جتا\,س\,ءس - ظتا\,س + جـ$

$= -س\,جتا\,س + جا\,س - ظتا\,س + جـ$

(٧) $\int_{١}^{٢} \underbrace{٥٦(س-٢)^{٢}}_{ع} \underbrace{(س-١)^{٥}}_{د هـ} د س$

$ع = ٥٦(س-٢)^{٢}$ $د هـ = (س-١)^{٥} د س$

$دع = ١١٢(س-٢) د س$ $هـ = \frac{(س-١)^{٦}}{٦}$

$= ٥٦(س-٢)^{٢} \times \frac{(س-١)^{٦}}{٦} \Big|_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \frac{(س-١)^{٦}}{٦} \times ١١٢(س-٢) د س$

$= (٠-٠) - \frac{٥٦}{٣} \int_{١}^{٢} (س-٢)(س-١)^{٦} د س$

$ع = س-٢$ $د هـ = (س-١)^{٦} د س$

$دع = د س$ $هـ = \frac{(س-١)^{٧}}{٧}$

$= -\frac{٥٦}{٣} \left((س-٢) \times \frac{(س-١)^{٧}}{٧} \Big|_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \frac{(س-١)^{٧}}{٧} د س \right)$

$= -\frac{٥٦}{٣} \left(٠ - \frac{(س-١)^{٨}}{٧ \times ٨} \Big|_{١}^{٢} \right) = \frac{١}{٣} (س-١)^{٨} \Big|_{١}^{٢} = \frac{١}{٣}(١-٠) = \frac{١}{٣}$

(٨) $\int جا\sqrt{س}\, جتا\sqrt{س}\, د س = \int \frac{١}{٢} جا٢\sqrt{س}\, د س$

$= \int \frac{١}{٢} جا٢ص \times ٢ص\, دص = \int \underbrace{ص}_{ع} \underbrace{جا٢ص}_{د هـ} دص$ – يكمل

$ص = \sqrt{س}$ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{١}{٢ص}$ $دس = ٢ص\, دص$

(٩) $\int \frac{س\, جاس}{قتاس} د س = \int س\, جاس\, جتاس\, د س = \int س \times \frac{١}{٢} جا٢س\, د س$

$= \frac{١}{٢} \int \underbrace{س}_{ع} \underbrace{جا٢س}_{د هـ} د س \Leftarrow$ $ع = س$ $د هـ = جا٢س$

$دع = د س$ $هـ = -\frac{١}{٢} جتا٢س$

$= \frac{١}{٢} \left(س \times -\frac{١}{٢} جتا٢س - \int -\frac{١}{٢} جتا٢س\, د س \right)$

$= \frac{١}{٢} \left(-\frac{١}{٢} س\, جتا٢س + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} جا٢س \right) + ث$

سؤال ٤- $\int \underbrace{س}_{ع} \underbrace{جا^{٢}س}_{د هـ} د س$

الأستاذ/ رهين التفوق

(١٠) $\int \text{س} \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}} \text{ دس}$ $\qquad$ $\text{ص} = \text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}$

$\text{دص} = \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}} \text{ دس}$ (تعويض)

$\text{ع} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{جاس}} \Leftarrow \int \frac{\text{جاس}}{\text{ع}^3} \cdot \frac{\text{دع}}{-\text{جاس}} = \int -\text{ع}^{-3} \text{ دع}$

$= \frac{-\text{ع}^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\text{ع}^2} = \frac{1}{2\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{1}{2}\text{قا}^2\text{س}$

$\Leftarrow \text{I} = \text{س} \times \frac{1}{2}\text{قا}^2\text{س} - \int \frac{1}{2}\text{قا}^2\text{س دس} = \frac{1}{2}\text{س قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظاس} + \text{ث}$

(١١) $\int \text{جا٢س}(\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}) \text{ دس} = \int (\text{جا٢س} \times \text{س} + \text{جا٢س جتا}^2\text{س}) \text{ دس}$

$= \int (\text{س جا٢س} + \text{٢جاس جتاس جتا}^2\text{س}) \text{ دس}$

$= \int \underbrace{\text{س}}_{\text{ص}} \underbrace{\text{جا٢س دس}}_{\text{دهـ}} + \int \text{٢جاس جتا}^3\text{س دس}$ $\quad$ نفرض $\text{ع} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{-\text{جاس}}$

$\text{ص} = \text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{جا٢س دس}$

$\text{دص} = \text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = -\frac{1}{2}\text{جتا٢س}$

$\text{I} = \text{س} \times -\frac{1}{2}\text{جتا٢س} - \int -\frac{1}{2}\text{جتا٢س دس} + \int \text{٢جاس ع}^3 \frac{\text{دع}}{-\text{جاس}}$

$= -\frac{1}{2}\text{س جتا٢س} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\text{جا٢س} + \int -\text{٢ع}^3 \text{ دع}$

$= \frac{1}{2}\text{س جتا٢س} + \frac{1}{4}\text{جا٢س} - \frac{\text{٢ع}^4}{4} + \text{ث}$

$= \frac{1}{2}\text{س جتا٢س} + \frac{1}{4}\text{جا٢س} - \frac{1}{2}\text{جتا}^4\text{س} + \text{ث}$

(١٢) $\int \left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}^2} - \frac{\text{جتاس}}{\text{س}}\right) \text{دس} = \int \underbrace{\text{جاس}}_{\text{ص}} \times \underbrace{\text{س}^{-2} \text{ دس}}_{\text{دهـ}} - \int \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} \text{ دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{س}^{-2} \text{ دس}$

$\text{دص} = \text{جتاس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^{-1}}{-1} = \frac{-1}{\text{س}}$

$\text{I} = \text{جاس} \times \frac{-1}{\text{س}} - \int \frac{-1}{\text{س}} \times \text{جتاس دس} - \int \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} \text{ دس}$

$= -\frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \cancel{\int \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} \text{ دس}} - \cancel{\int \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} \text{ دس}} = -\frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{ث}$

مثال: اذا كانت $\text{ق}(1) = \text{ق}'(5) = 6$ ، $\text{ق}(5) = \text{ق}'(1) = 2$ جد

$$\int_{1}^{5} \text{س}\,\text{ق}''(\text{س})\,\text{دس}$$

الحل: $\int_{1}^{5} \text{س}\,\text{ق}''(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{دق} = \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \text{ق}'(\text{س})$

$$I = \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})\Big|_{1}^{5} - \int_{1}^{5} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})\Big|_{1}^{5} - \text{ق}(\text{س})\Big|_{1}^{5}$$

$$= (5\times 6 - 1\times 2) - (2 - 6) = 30 - 2 + 4 = 32$$

مثال: اذا كان $\text{ق}(1) = 4$ ، $\text{ق}(-1) = 3$ ؛ $\int_{-1}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 20$ جد:

$$\int_{2}^{3} 8\text{س}\,\text{ق}'(5 - 2\text{س})\,\text{دس}$$

الحل: نفرض $\text{ص} = 5 - 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2}$

$\Leftarrow 2\text{س} = 5 - \text{ص} \Leftarrow \text{س} = \frac{5 - \text{ص}}{2}$

عندما $\text{س} = 2 \longleftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 3 \longleftarrow \text{ص} = -1$

$$\int_{2}^{3} 8\text{س}\,\text{ق}'(5 - 2\text{س})\,\text{دس} = \int_{1}^{-1} 8\text{س}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{-2} = \int_{1}^{-1} 8\,\frac{5 - \text{ص}}{2}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{-2}$$

$$= -2\int_{1}^{-1} (5 - \text{ص})\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص}$$ بالاجزاء

$\text{ق} = 5 - \text{ص}$ ، $\text{دهـ} = \text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص}$

$\text{دق} = -\text{دص}$ ، $\text{هـ} = \text{ق}(\text{ص})$

$$I = -2\left((5 - \text{ص}) \times \text{ق}(\text{ص})\Big|_{1}^{-1} - \int_{1}^{-1} \text{ق}(\text{ص}) \times -\text{دص}\right)$$

$$= -2\left[6 \times \text{ق}(-1) - (4 \times \text{ق}(1)) + \int_{1}^{-1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}\right]$$

$$= -2\left[6\times 3 - 4\times 4 + (-20)\right]$$

$$= -2(18 - 16 - 20) = -2 \times -18 = 36$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

① ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ٣س ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣}{٣\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$

② ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ (٢س^{٢} + ٥س) ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\text{س} + ٥}{٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}$

③ ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ جتاس ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = − ظاس

④ ص = جا $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتا $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س × $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ جتا $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س

مثال: اذا كان ∫ ق(س) دس = س $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س + جـ ، جد ق$'$(س)

الحل: ق(س) = س × $\frac{١}{\text{س}}$ + $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س × ١ = ١ + $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س

ق$'$(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي:

⟸ ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س^{٣} − $\text{لو}_{\text{هـ}}$ (٥س^{٤} + ١)

[redacted]

نظرية (١): اذا كانت ص = لو$_{هـ}$ س فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

(٢): اذا كانت ص = لو$_{هـ}$ ع(س) أو ص = لو$_{هـ}$ |ع(س)| فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{ع'(س)}{ع(س)}$

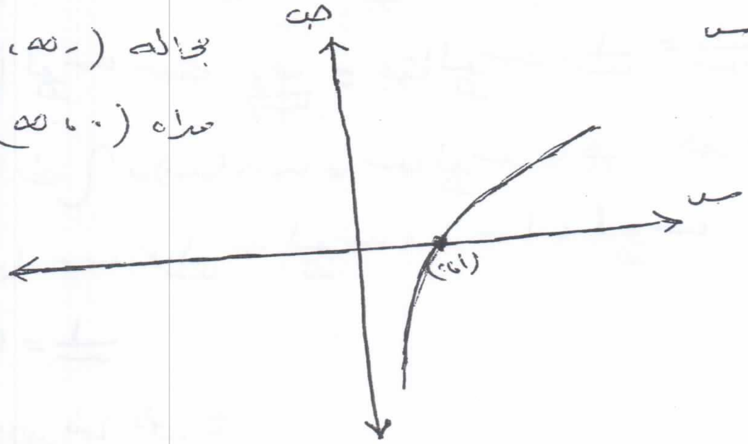
* التمثيل البياني لاقتران اللوغاريتم:

ص = ق(س) = لو$_{٢}$ س

س	ص
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣
$\frac{1}{2}$	-١
$\frac{1}{4}$	-٢
$\frac{1}{8}$	-٣

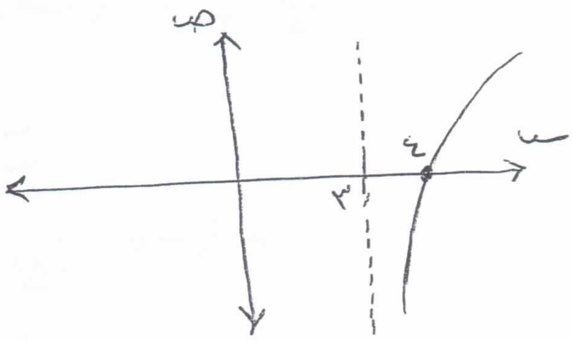
مجاله (-∞ ، ∞)

مداه (٠ ، ∞)



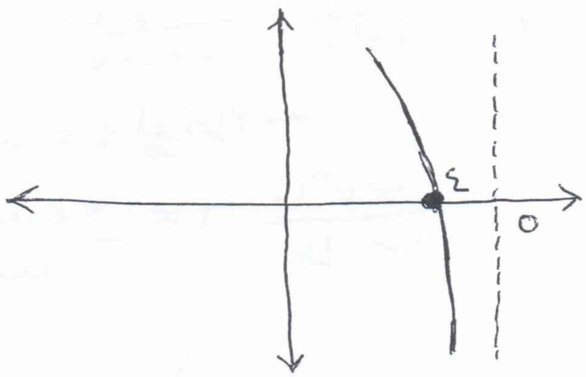
ص = لو$_{٢}$(س-٣) ⇐ س-٣ > ٠ ⇐ س > ٣ ⇐ س-٣ = ١

⇐ $\boxed{س = ٤}$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات



ص = لو$_{٢}$(٥-س) ⇐ ٥-س > ٠ ⇐ ٥ > س ⇐ ٥-س = ١

⇐ $\boxed{٤ = س}$



مثال: جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يلي:

① $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^3$

الحل: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^3 = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3 \times \frac{1}{\text{س}} = \frac{3}{\text{س}}$

② $\text{ص} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^3 \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^2 \times \frac{1}{\text{س}} = \frac{3}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^2$

$* \int \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int_1^{\text{هـ}} \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_1^{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,1 = 1 - 0 = 1$

② $\int_1^{\text{هـ}^3} \frac{5}{\text{س}}\,\text{د س} = 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_1^{\text{هـ}^3} = 5(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^3 - \text{لو}_{\text{هـ}}\,1) = 5(3-0) = 15$

③ $\int_{15}^{45} \frac{2}{\text{س}}\,\text{د س} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{15}^{45} = 2(\text{لو}_{\text{هـ}}\,45 - \text{لو}_{\text{هـ}}\,15) = 2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{45}{15}\right) = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,3$

④ $\int \frac{3\text{س}+5}{\text{س}}\,\text{د س} = \int \frac{3\text{س}}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}}\,\text{د س} = \int 3 + \frac{5}{\text{س}}\,\text{د س}$

$= 3\text{س} + 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

⑤ $\int \frac{1}{\text{أس}+\text{ب}}\,\text{د س} \Leftarrow$ نفرض $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{أ} \Leftarrow \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

$\Leftarrow \int \frac{1}{\text{ص}}\,\frac{\text{د ص}}{\text{أ}} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{أس}+\text{ب}| + \text{جـ}$ (نتيجة)

⑥ $\int \frac{5}{4\text{س}+3}\,\text{د س} = \frac{5}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|4\text{س}+3| + \text{جـ}$

⑦ $\int_2^3 \frac{8}{3-2\text{س}}\,\text{د س} = \frac{8}{-2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3-2\text{س}|\Big|_2^3 = -4(\text{لو}_{\text{هـ}}\,3 - \text{لو}_{\text{هـ}}\,1) = -4\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,3$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى م(س) عند أي نقطة يعطى بالعلاقة $\frac{7}{2\text{س}-3}$ وكان منحنى م يمر بالنقطة (2، 5) اكتب قاعدة الاقتران م(س)

الحل: $\text{م}'(\text{س}) = \frac{7}{2\text{س}-3} \Leftarrow \text{م}(\text{س}) = \int \frac{7}{2\text{س}-3}\,\text{د س} = \frac{7}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س}-3| + \text{جـ}$

لكن: $\text{م}(2) = 5 \Leftarrow 5 = \frac{7}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,1 + \text{جـ} \Leftarrow 0 + \text{جـ} = 5 \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 5}$

$\therefore \text{م}(\text{س}) = \frac{7}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س}-3| + 5$

* **نظرية**: $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = لو_{هـ} |ق(س)| + جـ$

مثال: ① $\int \frac{٣س^{٢} + ٥}{س^{٣} + ٥س + ٦}\, دس$ ؛ البسط هنا مشتقة المقام $= لو_{هـ} |س^{٣} + ٥س + ٦| + جـ$

② $\int (ظتا س + ظا س)\, دس = \int \left(\frac{جتا س}{جا س} + \frac{جا س}{جتا س}\right) دس$

$= لو_{هـ} |جا س| - لو_{هـ} |جتا س| + جـ$

③ $\int \frac{٤(١ + ظا^{٢} س)}{ظا س}\, دس = \int \frac{٤ قا^{٢} س}{ظا س}\, دس = ٤ لو_{هـ} |ظا س| + جـ$

④ $\int \left(\frac{٥}{ظا س} + \frac{٢ ظا^{٢} س}{ظا س}\right) دس = \int (٥ ظتا س + ٢ ظا س)\, دس$

$= \int \left(\frac{٥ جتا س}{جا س} + \frac{٢ جا س}{جتا س}\right) دس = ٥ لو_{هـ} |جا س| + ٢ لو_{هـ} |جتا س| + جـ$

⑤ $\int \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٣} + ١٥س}\, دس = \frac{١}{٣} \int \frac{٣(س^{٢} + ٥)}{(س^{٣} + ١٥س)} = \frac{١}{٣} لو_{هـ} |س^{٣} + ١٥س| + جـ$

⑥ $\int ظتا ٣س\, دس = \int \frac{جتا ٣س}{جا ٣س}\, دس = \frac{١}{٣} \int \frac{٣ جتا ٣س}{جا ٣س}\, دس$ (ضربنا البسط والمقام في ٣)

$= \frac{١}{٣} لو_{هـ} |جا ٣س| + جـ$

⑦ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جا ٢س}{٥ - ٣ جتا^{٢} س}\, دس$ نفرض $ص = ٥ - ٣ جتا^{٢} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٦ جتا س \times -جا س$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٦ جا س جتا س}$ عندما $س = ٠$ فإن $ص = ٢$ ، $س = \frac{\pi}{2}$ فإن $ص = ٥$

$\Leftarrow \int_{٢}^{٥} \frac{٢ جا س جتا س}{ص} \cdot \frac{دص}{٦ جا س جتا س} = \frac{١}{٣} \int_{٢}^{٥} \frac{١}{ص}\, دص$

$= \frac{١}{٣} لو_{هـ} |ص| \Big|_{٢}^{٥} = \frac{١}{٣} (لو_{هـ} ٥ - لو_{هـ} ٢)$

(8) $\int \frac{\sqrt{س}}{س\sqrt{س}+1}\, دس = \int \frac{ص}{ص^3+1} \times 2ص\, دص$ | $ص = \sqrt{س}$, $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$, $دس = 2ص\, دص$

$= \int \frac{2ص^2}{ص^3+1}\, دص = \frac{2}{3}\int \frac{3ص^2}{ص^3+1}\, دص$ (ضربنا في $\frac{3}{3}$)

$= \frac{2}{3}\, لو_{هـ}|ص^3+1| = \frac{2}{3}\, لو_{هـ}|(\sqrt{س})^3+1| + ج$

(9) $\int \frac{\sqrt[3]{س}}{7 - س\sqrt[3]{س}}\, دس = \int \frac{ص}{7 - ص^3 \times ص} \times 3ص^2\, دص$ | $ص = \sqrt[3]{س} \Leftarrow س = ص^3$, $دس = 3ص^2\, دص$

$= \int \frac{3ص^3}{7 - ص^4}\, دص = \frac{3}{-4}\int \frac{-4ص^3}{7-ص^4}\, دص$

$= \frac{-3}{4}\, لو_{هـ}|7 - ص^4| + ج$

(10) $\int_0^{هـ} \frac{دس}{س+هـ} = \int_0^{هـ} \frac{1}{س+هـ}\, دس = لو_{هـ}|س+هـ| \Big|_0^{هـ}$

$= لو_{هـ} 2هـ - لو_{هـ} هـ = لو_{هـ} \frac{2هـ}{هـ} = لو_{هـ} 2$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{س}(1+\sqrt{س})}\, دس$ نفرض $ص = \sqrt{س}$ ---- ثم نكمل

(12) $\int لو_{هـ} س\, دس$ بالأجزاء: $ع = لو_{هـ} س$, $دو = دس$; $دع = \frac{1}{س}\, دس$, $و = س$

$I = لو_{هـ} س \times س - \int س \times \frac{1}{س}\, دس = س\, لو_{هـ} س - س + ج$

* ملاحظة: اذا وجد $لو_{هـ} س$ داخل التكامل نستخدم التعويض إذا وجدت المشتقة واذا لم توجد نستخدم الأجزاء ويكون $لو_{هـ} س$ هو ع

(13) $\int س^3\, لو_{هـ} س\, دس$: $ع = لو_{هـ} س$, $دو = س^3\, دس$; $دع = \frac{1}{س}\, دس$, $و = \frac{س^4}{4}$

ثم نكمل ---

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

(١٤) ∫ (لوهـ س)² د س = س (لوهـ س)² − ∫ س × ٢ لوهـ س × $\frac{1}{س}$ د س

ع = (لوهـ س)² ، د هـ = د س

= س (لوهـ س)² − ٢ ∫ لوهـ س د س

ع = لوهـ س ، د هـ = د س

= س (لوهـ س)² − ٢ (س لوهـ س − ∫ س × $\frac{1}{س}$ د س)

= س (لوهـ س)² − ٢ (س لوهـ س − س) + ث

(١٥) ∫ $\frac{لوهـ\ س}{س}$ د س نفرض ص = لوهـ س ⟸ $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س}$ ⟸ د س = س د ص

= ∫ $\frac{ص}{\cancel{س}}$ × $\cancel{س}$ د ص = $\frac{ص^2}{٢}$ + ث = $\frac{(لوهـ\ س)^2}{٢}$ + ث

(١٦) ∫ $\frac{1}{س\ لوهـ\ س}$ د س نفرض ص = لوهـ س ⟸ د س = س د ص

= ∫ $\frac{1}{س\ ص}$ × س د ص = ∫ $\frac{1}{ص}$ د ص = لوهـ |ص| + ث = لوهـ |لوهـ س| + ث

(١٧) ∫ ظتا س لوهـ جا س د س

ص = لوهـ جا س ⟸ $\frac{د ص}{د س} = \frac{جتا\ س}{جا\ س}$ ⟸ د س = $\frac{جا\ س}{جتا\ س}$ د ص

= ∫ $\frac{\cancel{جتا\ س}}{\cancel{جا\ س}}$ × ص × $\frac{\cancel{جا\ س}}{\cancel{جتا\ س}}$ د ص = ∫ ص د ص

= $\frac{ص^2}{٢}$ + ث = $\frac{(لوهـ\ جا\ س)^2}{٢}$ + ث

(١٨) ∫ جتا س لوهـ جا س د س

ع = لوهـ جا س ، د هـ = جتا س د س

د ع = $\frac{جتا\ س}{جا\ س}$ د س ، هـ = جا س

∴ = لوهـ جا س × جا س − ∫ جا س × $\frac{جتا\ س}{جا\ س}$ د س

= جا س لوهـ جا س − ∫ جتا س د س = جا س لوهـ جا س − جا س + ث

(١٩) ∫ قا² س لوهـ ظا س د س ——— ثم نكمل

ع = لوهـ ظا س ، د هـ = قا² س د س

٢٠) $\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}} = \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \int \underbrace{(1+\text{ظا}^2\text{س})}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{ع}}\ \text{دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{دهـ} = 1 + \text{ظا}^2\text{س} = 1 + \text{ص}^2$

$\text{دع} = \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص} \qquad \text{هـ} = \text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}$

$\text{أ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \times \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) - \int \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \times \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int 1 + \frac{\text{ص}^2}{3}\,\text{دص}$

$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{9}\right) + \text{ث}$

$= \left(\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظاس} - \left(\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{9}\right) + \text{ث}$

٢١) $\int \underbrace{\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ع}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ع} = \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\text{أ} = \text{س}\ \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}\ \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{س}\ \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \underbrace{\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ع}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ع} = \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = -\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\text{أ} = \text{س}\ \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \left(\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{س} - \int \cancel{\text{س}} \times -\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}}\,\text{دس}\right)$

$= \text{س}\ \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\ \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$ التكامل الأصلي

$\Leftarrow 2\int \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \text{س}\ \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\ \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \int \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \frac{\text{س}\ \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\ \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{2}$

(٢٢) $\int ٤س^{٢} \text{لو}_{هـ} س \, دس$

$ع = \text{لو}_{هـ} س \qquad د هـ = ٤ س^{٢} \, دس$

$دع = \frac{1}{س} \, دس \qquad هـ = \frac{٤}{٣} س^{٣}$

$I = \text{لو}_{هـ} س \times \frac{٤}{٣} س^{٣} - \int \frac{٤}{٣} س^{٣} \times \frac{1}{س} \, دس$

$= \frac{٤}{٣} س^{٣} \text{لو}_{هـ} س - \int \frac{٤}{٣} س^{٢} \, دس = \frac{٤}{٣} س^{٣} \text{لو}_{هـ} س - \frac{٤}{٣} \times \frac{س^{٣}}{٣} + ث$

$= \frac{٤}{٣} س^{٣} \left(\text{لو}_{هـ} س - \frac{1}{٣} \right) + ث$

(٢٣) $\int \frac{٢س + \text{ظا}\, س}{\text{جتا}^{٢} س} \, دس = \int \frac{٢س}{\text{جتا}^{٢} س} + \frac{\text{ظا}\, س}{\text{جتا}^{٢} س} \, دس$

$= \int ٢س \, \text{قا}^{٢} س + \text{ظا}\, س \, \text{قا}^{٢} س \, دس$

$= \int ٢س \, \text{قا}^{٢} س \, دس + \int ص \, \cancel{\text{قا}^{٢} س} \, \frac{دص}{\cancel{\text{قا}^{٢} س}}$

$ص = \text{ظا}\, س$

$\frac{دص}{دس} = \text{قا}^{٢} س$

$دس = \frac{دص}{\text{قا}^{٢} س}$

$ع = ٢س \qquad د هـ = \text{قا}^{٢} س \, دس$

$دع = ٢ \, دس \qquad هـ = \text{ظا}\, س$

$\therefore \int = ٢س \, \text{ظا}\, س - \int ٢ \, \text{ظا}\, س \, دس + \int ص \, دص$

$= ٢س \, \text{ظا}\, س - \int ٢ \frac{\text{جا}\, س}{\text{جتا}\, س} \, دس + \frac{ص^{٢}}{٢} + ث$

$= ٢س \, \text{ظا}\, س + ٢ \text{لو}_{هـ} |\text{جتا}\, س| + \frac{\text{ظا}^{٢} س}{٢} + ث$

(٢٤) $\int ٦س \, \text{لو}_{هـ} \frac{٣}{\sqrt{س}} \, دس = \int ٦س \left(\text{لو}_{هـ} ٣ - \text{لو}_{هـ} \sqrt{س} \right) دس = \int ٦س \left(\text{لو}_{هـ} ٣ - \frac{1}{٢} \text{لو}_{هـ} س \right) دس$

$= \int ٦س \, \text{لو}_{هـ} ٣ - ٣س \, \text{لو}_{هـ} س \, دس = ٣س^{٢} \text{لو}_{هـ} ٣ - \left(\text{لو}_{هـ} س \times \frac{٣س^{٢}}{٢} - \int \frac{٣س^{٢}}{٢} \times \frac{1}{س} \, دس \right)$

$= ٣س^{٢} \text{لو}_{هـ} ٣ - \frac{٣س^{٢}}{٢} \text{لو}_{هـ} س + \int \frac{٣}{٢} س \, دس$

$= ٣س^{٢} \text{لو}_{هـ} ٣ - \frac{٣}{٢} س^{٢} \text{لو}_{هـ} س + \frac{٣}{٤} س^{٢} + ث$

(25) $\int$ جتا^{3}س لو$_{هـ}$ جاس دس $= \int$ جتا^{3}س لو$_{هـ}$ص $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

ص = جاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int$ جتا^{2}س لو$_{هـ}$ص دص $= \int (1-$جا^{2}س$)$ لو$_{هـ}$ص دص

$= \int \underbrace{(1-\text{ص}^2)}_{\text{دهـ}} \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{م}}$ دص

م = لو$_{هـ}$ص $\qquad$ دهـ $= 1 -$ ص^2 دص

دم = $\frac{1}{\text{ص}}$ دص $\qquad$ هـ = ص $- \frac{\text{ص}^3}{3}$

$I =$ لو$_{هـ}$ص $\left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3}\right) - \int \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \times \frac{1}{\text{ص}}$ دص

$= \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3}\right)$ لو$_{هـ}$ص $- \int \left(1 - \frac{\text{ص}^2}{3}\right)$ دص $= \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3}\right)$ لو$_{هـ}$ص $- \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{9}\right) +$ ث

$= \left(\text{جاس} - \frac{\text{جا}^3\text{س}}{3}\right)$ لو$_{هـ}$جاس $- \left(\text{جاس} - \frac{\text{جا}^3\text{س}}{9}\right) +$ ث

تمارين: جد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{\text{س قا}^2\text{س} - \text{ظاس}}{\text{س}^2}$ دس $= \int \frac{\text{س قا}^2\text{س}}{\text{س}^2} - \frac{\text{ظاس}}{\text{س}^2}$ دس

$= \int \underbrace{\frac{1}{\text{س}}}_{\text{م}} \underbrace{\text{قا}^2\text{س}}_{\text{دهـ}}$ دس $- \int \frac{\text{ظاس}}{\text{س}^2}$ دس $= \frac{1}{\text{س}}$ ظاس $- \int$ ظاس $\times \frac{-1}{\text{س}^2} - \int \frac{\text{ظاس}}{\text{س}^2}$ دس

$= \frac{1}{\text{س}}$ ظاس $+ \int \frac{\text{ظاس}}{\text{س}^2} - \int \frac{\text{ظاس}}{\text{س}^2}$ دس $= \frac{1}{\text{س}}$ ظاس $+$ ث

(2) $\int$ 2 جاس جتاس لو$_{هـ}$جاس دس $\qquad$ نفرض ص = جاس $\quad$ ثم نكمل بالأجزاء

(3) $\int \frac{\text{ظاس}}{1 + \text{قاس}}$ دس $= \int \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\frac{1}{\text{جتاس}} + 1}$ دس $= \int \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\frac{\text{جتاس} + 1}{\text{جتاس}}}$ دس $= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس} + 1}$ دس

$= -$ لو$_{هـ}|$جتاس $+ 1| +$ ث $\quad$ (لأن البسط مشتقة المقام)

(4) $\int$ قاس دس $= \int \frac{\text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$ دس $= \int \frac{\text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$ دس

$=$ لو$_{هـ}|$قاس $+$ ظاس$| +$ ث

(5) $\int_1^{\text{هـ}^3} \frac{1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}$ دس $= \int_1^{\text{هـ}^3} \frac{1}{\text{س}} - \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}$ دس

ص = لو$_{هـ}$س

ونغير الحدود

ثم نكمل ـ ـ ـ

٦) $\int_{1}^{هـ^3} \frac{1}{س\sqrt{1+لو_{هـ} س}}\, دس$ نفرض $ص = 1 + لو_{هـ} س$ نغير الحدود ونكامل ــــ

٧) $\int \frac{4س\, لو_{هـ}\sqrt{س^2+5}}{س^2+5}\, دس$

$ص = لو_{هـ}(س^2+5)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{2س}{س^2+5}$

$دس = \frac{(س^2+5)\, دص}{2س}$

$= \int \frac{4س\, لو_{هـ}(س^2+5)^{\frac{1}{2}}}{س^2+5}\, دس = \int \frac{2س\, لو_{هـ}(س^2+5)}{س^2+5}\, دس$

$= \int \frac{\cancel{2س}\, ص}{\cancel{س^2+5}} \cdot \frac{\cancel{(س^2+5)}}{\cancel{2س}}\, دص$

$= \int ص\, دص = \frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{\left(لو_{هـ}(س^2+5)\right)^2}{2} + جـ$

٨) $\int \frac{لو_{هـ}(س+2)}{\sqrt{س+2}}\, دس$ نفرض $\sqrt{س+2} = ص$ ثم نكامل بالأجزاء ــــ

٩) $\int \frac{لو_{هـ}\sqrt{س+2}}{س+2}\, دس = \int \frac{لو_{هـ}(س+2)^{\frac{1}{2}}}{س+2}\, دس = \frac{1}{2}\int \frac{لو_{هـ}(س+2)}{س+2}\, دس$

نفرض $ص = لو_{هـ}(س+2) \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{س+2} \Leftarrow دس = (س+2)\, دص$

$= \int \frac{\frac{1}{2}\, ص}{\cancel{س+2}}\, \cancel{(س+2)}\, دص = \frac{1}{2}\cdot\frac{ص^2}{2} + جـ = \frac{1}{4}\left(لو_{هـ}(س+2)\right)^2 + جـ$

مثال ٤ اذا كانت $ع'(س) \times جاس - ع(س) \times جتاس = .$ وكان $ع(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ جد $ع(\frac{\pi}{4})$

الحل: $ع'(س) \times جاس = ع(س) \times جتاس$

$\Leftarrow \frac{ع'(س)}{ع(س)} = \frac{جتاس}{جاس} \Leftarrow \int \frac{ع'(س)}{ع(س)}\, دس = \int \frac{جتاس}{جاس}\, دس$

$\Leftarrow لو_{هـ} ع(س) = لو_{هـ}|جاس| + جـ \xLeftarrow{لكن} ع(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$

$\Leftarrow لو_{هـ}\sqrt{2} = لو_{هـ}1 + جـ \Leftarrow \boxed{لو_{هـ}\sqrt{2} = جـ}$ ∴ $لو_{هـ} ع(\frac{\pi}{4}) = لو_{هـ} جا\frac{\pi}{4} + لو_{هـ}\sqrt{2}$

$\Leftarrow لو_{هـ} ع(\frac{\pi}{4}) = لو_{هـ}\frac{1}{\sqrt{2}} + لو_{هـ}\sqrt{2} = لو_{هـ}1 - لو_{هـ}\sqrt{2} + لو_{هـ}\sqrt{2} =$ صفر

∴ $ع(\frac{\pi}{4}) = هـ^{0} = 1$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: يتحرك جسم بحيث أن سرعته $ع = \frac{لو_هـ ن}{ن}$ فإذا قطع الجسم مسافة ٤ م بعد ١ ث ، جد المسافة المقطوعة بعد مرور $هـ^٢$ من الثواني.

الحل: $ع = \frac{دف}{دن} = \frac{لو_هـ ن}{ن} \Leftarrow دف = \frac{لو_هـ ن}{ن}\, دن$

$\Leftarrow \int دف = \int \frac{لو_هـ ن}{ن}\, دن$

$\Leftarrow ف = \int \frac{ص}{\cancel{ن}} \times \cancel{ن}\, دص = \int ص\, دص = \frac{ص^٢}{٢} + جـ$

$ص = لو_هـ ن$

$\frac{دص}{دن} = \frac{١}{ن}$

$دن = ن\, دص$

$\Leftarrow ف = \frac{(لو_هـ ن)^٢}{٢} + جـ \Leftarrow$ لكن $ف(١) = ٤$

$\therefore ٤ = \frac{(لو_هـ ١)^٢}{٢} + جـ \Leftarrow ٤ = ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$

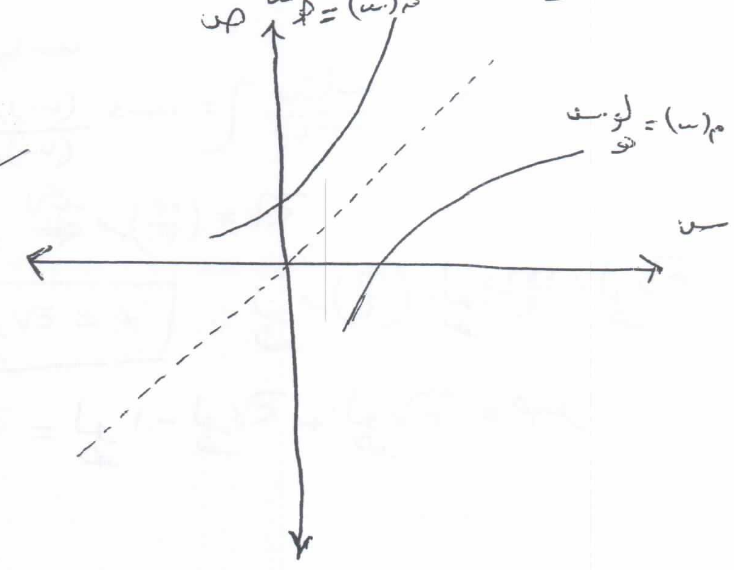
$\therefore ف = \frac{(لو_هـ ن)^٢}{٢} + ٤ \Leftarrow ف(هـ^٢) = \frac{(لو_هـ هـ^٢)^٢}{٢} + ٤ = \frac{٤}{٢} + ٤ = ٦$

* **الاقتران الأسي:** هو الاقتران العكسي للاقتران $م(س) = لو_هـ س$

$ص = لو_هـ س$ فإن $س = هـ^ص$

* $هـ^٠ = ١$ ، $هـ^أ \times هـ^ب = هـ^{أ+ب}$ ، $(هـ^أ)^ب = هـ^{أب}$ ، $\frac{هـ^أ}{هـ^ب} = هـ^{أ-ب}$

ويكون $لو_هـ هـ^{ق(س)} = ق(س)$ وأيضاً $هـ^{لو_هـ ق(س)} = ق(س)$



* **نظرية:** اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

البرهان: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$ نشتق الطرفين

$$\Leftarrow \frac{1}{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \quad \#$$

$\boxed{\text{نتيجة}}$: اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ع(س)}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{عَ(س)} \times \text{هـ}^{\text{ع(س)}}$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يلي:

1) $\text{ص} = 5\text{س}^2 + 2\,\text{هـ}^{\text{جاس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 10\,\text{س} + 2\,\text{جتاس}\;\text{هـ}^{\text{جاس}}$

2) $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftarrow 1 = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \frac{1}{\text{س}}$

3) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{4\text{س}^2}} \Leftarrow \text{ص} = \left(\text{هـ}^{4\text{س}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{هـ}^{2\text{س}^2} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\,\text{س}\;\text{هـ}^{2\text{س}^2}$

4) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1)$ جد $\text{قَ}(0)$

الحل: $\text{قَ(س)} = \text{جتاس}\;\text{هـ}^{\text{جاس}} + \frac{2}{2\text{س}+1} \Leftarrow \text{قَ}(0) = 1 \times \text{هـ}^0 + \frac{2}{0+1} = 1 + 2 = 3$

5) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2}$ جد $\text{قَ}\left(-\frac{1}{2}\right)$

الحل: $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^4} = \text{س}^4 \Leftarrow \text{قَ(س)} = 4\,\text{س}^3$

$$\text{قَ}\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \times -\frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$$

مثال: $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس} + 2\text{س}) + \text{جـ}$ جد $\text{ق}(0)$

الحل: $\text{ق(س)} = 2\,\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{-\text{جاس} + 2}{\text{جتاس} + 2\text{س}} \Leftarrow \text{ق}(0) = 2 \times 1 + \frac{0+2}{1+0} = 2 + 2 = 4$

مثال: اذا كان $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \text{جـ}$ جد قَ(س)

الحل: $\text{ق(س)} = 2\,\text{س}\;\text{هـ}^{\text{س}^2} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = 2\,\text{س}\;\text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{ظتاس}$

$$\text{قَ(س)} = 2\,\text{س} \times 2\,\text{س}\;\text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{هـ}^{\text{س}^2} \times 2 + -\,\text{قتا}^2\text{س}$$

$$= 4\,\text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}^2} - \text{قتا}^2\text{س}$$

مثال: اذا كانت $ص = هـ^{م س}$ وكانت $ص'' - ٣ص' + ٢ص = ٠$ جد م

الحل: $ص' = م هـ^{م س} \Leftarrow ص'' = م^٢ هـ^{م س}$

$\Leftarrow ص'' - ٣ص' + ٢ص = ٠ \Leftarrow م^٢ هـ^{م س} - ٣م هـ^{م س} + ٢ هـ^{م س} = ٠$

$\Leftarrow هـ^{م س} \underbrace{(م^٢ - ٣م + ٢)}_{\text{عبارة تربيعية}} = ٠ \Leftarrow هـ^{م س} (م-٢)(م-١) = ٠ \Leftarrow م = ٢ ، م = ١$

مثال: اذا كانت $ص = ٥^{٣س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = \frac{١}{٣}$

نشتقه

الحل: نأخذ اللوغاريتم للطرفين:

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٥^{٣س} \Leftarrow لو_{هـ} ص = ٣س لو_{هـ} ٥ \Leftarrow لو ص = (٣ لو_{هـ} ٥)(س)$

$\Leftarrow \frac{١}{ص} \times \frac{دص}{دس} = ٣ لو_{هـ} ٥ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣ لو_{هـ} ٥ \times ص = ٣ لو_{هـ} ٥ \times ٥^{٣س}$

وعند $\boxed{س = \frac{١}{٣}}$ $= ٣ لو_{هـ} ٥ \times ٥^{٣ \times \frac{١}{٣}} = ١٥ لو_{هـ} ٥$

مثال: اذا كانت $ص = هـ^{س ص} = س + ص$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $\boxed{س = ٠}$

الحل: عند $س = ٠ \Leftarrow هـ^٠ = ٠ + ص \Leftarrow ١ = ص$ نشتق

$هـ^{س ص} \times \left(س \frac{دص}{دس} + ص \times ١\right) = ١ + \frac{دص}{دس}$ نعوض $س = ٠ ، ص = ١$

$هـ^٠ \left(٠ \frac{دص}{دس} + ١\right) = ١ + \frac{دص}{دس} \Leftarrow ١ = ١ + \frac{دص}{دس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = صفر$

مثال: اذا كان $م(س) = هـ^{٢س} لو_{هـ} س$ وكان $ع(س) = هـ^{٢س} \left(\frac{١}{س} + ٢ لو_{هـ} س\right)$

أثبت أن م(س) اقتران بدائي للاقتران ع(س) ثم جد $\int_{١}^{٢} ع(س) \, دس$

الحل: $م'(س) = هـ^{٢س} \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times ٢ هـ^{٢س} = هـ^{٢س} \left(\frac{١}{س} + ٢ لو_{هـ} س\right) = ع(س)$

∴ م(س) اقتران بدائي لـ ع(س)

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} ع(س) \, دس = م(٢) - م(١)$

$= هـ^٤ لو_{هـ} ٢ - هـ^٢ لو_{هـ} ١ = هـ^٤ لو_{هـ} ٢$

مثال: اذا كانت $هـ^{ص} = جاس$ أثبت أن $ص'' + (ص')^2 + 1 = 0$

الحل: $هـ^{ص} = جاس$ نشتق ⇐ $هـ^{ص} \times ص' = جتاس$ نشتق مرة أخرى

$هـ^{ص} \times ص'' + ص' \times هـ^{ص} \times ص' = -جاس$

$هـ^{ص} \times ص'' + هـ^{ص} \times (ص')^2 + جاس = 0$

$هـ^{ص} \times ص'' + هـ^{ص} \times (ص')^2 + هـ^{ص} = 0$ نقسم على $هـ^{ص}$

⇐ $ص'' + (ص')^2 + 1 = 0$

$$* \boxed{\int هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ}$$

مثال: $\int_{0}^{2} (5س^3 + 4هـ^{س}) دس = \frac{5س^4}{4} + 4هـ^{س} \Big|_{0}^{2}$

$= (5 \times \frac{16}{4} + 4هـ^2) - (0 + 4 \times 1) = 20 + 4هـ^2 - 4 = 16 + 4هـ^2$

$$* \boxed{\int هـ^{أس+ب} دس = \frac{1}{أ} هـ^{أس+ب} + جـ}$$

مثال: (1) $\int 8 هـ^{\frac{س}{4}} دس = 8 \times \frac{1}{(\frac{1}{4})} هـ^{\frac{س}{4}} + جـ = 32 هـ^{\frac{س}{4}} + جـ$

(2) $\int \frac{5 + 2هـ^{7س}}{هـ^{4س}} دس = \int \left(\frac{5}{هـ^{4س}} + \frac{2هـ^{7س}}{هـ^{4س}}\right) دس = \int (5هـ^{-4س} + 2هـ^{3س}) دس$

$= \frac{5}{-4} هـ^{-4س} + \frac{2}{3} هـ^{3س} + جـ$

(3) $\int_{1}^{هـ^2} \frac{1}{هـ - 1} دس = \frac{1}{هـ-1} س \Big|_{1}^{هـ^2} = \frac{1}{هـ-1}(هـ^2 - 1) = \frac{1}{\cancel{هـ-1}}(\cancel{هـ-1})(هـ+1)$

$= هـ + 1$

(4) $\int هـ^{3س} \sqrt{هـ^{2س} + 2هـ^{س} + 1}\, دس = \int هـ^{3س} \sqrt{(هـ^{س} + 1)^2}\, دس$

$= \int هـ^{3س} |هـ^{س} + 1| دس = \int هـ^{3س} (هـ^{س} + 1) دس = \int (هـ^{4س} + هـ^{3س}) دس$

$= \frac{1}{4} هـ^{4س} + \frac{1}{3} هـ^{3س} + جـ$

⑤ $\int \text{هـ}^{٥\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}^{٤\text{س}}}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{٥\text{س}} + \frac{١}{(\text{هـ}^{٤\text{س}})^{\frac{١}{٢}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{٥\text{س}} + \frac{١}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{٥\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٥}\text{هـ}^{٥\text{س}} + \frac{١}{-٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٥}\text{هـ}^{٥\text{س}} - \frac{١}{٢\text{هـ}^{٢\text{س}}} + \text{ث}$

⑥ $\int_{-٣}^{٠} \sqrt[٣]{\text{هـ}^{٦-\text{س}}}\,\text{دس} = \int_{-٣}^{٠} (\text{هـ}^{٦-\text{س}})^{\frac{١}{٣}}\,\text{دس} = \int_{-٣}^{٠} \text{هـ}^{٢-\frac{\text{س}}{٣}}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{(-\frac{١}{٣})}\,\text{هـ}^{٢-\frac{\text{س}}{٣}}\Big|_{-٣}^{٠} = (-٣\text{هـ}^{٢}) - (-٣\text{هـ}^{٣}) = -٣\text{هـ}^{٢} + ٣\text{هـ}^{٣}$

$= ٣\text{هـ}^{٢}(\text{هـ} - ١)$

سؤال: اذا كان $\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٥\text{س} - \text{ص} + ٤$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال: ① $\int_{١}^{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{دس} = \int_{١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{دس} = \text{س}^{٢}\Big|_{١}^{٢} = ٤ - ١ = ٣$

② $\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٥} \text{هـ}^{\text{س}}(٣ - ٤\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس} = \int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٥} (٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٤\text{هـ}^{٢\text{س}})\,\text{دس} = ٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\Big|_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٥}$

$= (٣\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٥} - ٢\text{هـ}^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}٥}) - (٣\times١ - ٢\times١)$

$= (٣\times٥ - ٢\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢٥}) - (١) = ١٥ - (٢\times٢٥) - ١ = -٣٦$

مثال: $\int ٦\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٢\text{ص}} \Leftarrow \text{دس} = ٢\text{ص}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int ٦\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} = \int ٦\text{هـ}^{\text{ص}} \times ٢\text{ص}\,\text{دص} = \int ١٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$ أجزاء

$\text{م} = ١٢\text{ص} \qquad \text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دم} = ١٢\,\text{دص} \qquad \text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{I} = (١٢\text{ص})(\text{هـ}^{\text{ص}}) - \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times ١٢\,\text{دص} = ١٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - ١٢\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ث}$

$\therefore \text{I} = ١٢\sqrt{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - ١٢\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{ث}$

مثال: ١) $\int (\text{س}^2+4)\, \text{هـ}^{\text{س}^3+12\text{س}}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + 12\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 + 12$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2+12}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3(\text{س}^2+4)}$

$= \int \cancel{(\text{س}^2+4)}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{3\cancel{(\text{س}^2+4)}}$

$= \frac{1}{3}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{دص} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}^3+12\text{س}} + \text{ج}$

٢) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\, \text{هـ}^{\text{جاس}}\, \text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{جاس}$ ونغير الحدود ثم نكمل ——

٣) $\int \text{جا}2\text{س}\, \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$

$= \int \cancel{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{\cancel{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} + \text{ج}$

٤) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^2}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^2} = \int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{ص}^2} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$= \int \text{ص}^{-2}\, \text{دص} = \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{ج}$

$= \frac{-1}{\text{ص}} + \text{ج} = \frac{-1}{\text{هـ}^{\text{س}}+1} + \text{ج}$

سؤال: جد $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جتاس}\, \text{دس}$ ——— (دوري)

مثال: جد التكاملات التالية:

(١) $\int_{0}^{2} \underbrace{\text{٣س}}_{\text{م}} \underbrace{\text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}+1}}_{\text{د هـ}} \text{دس} = \text{٣س} \times \text{٢هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}+1} \Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} \text{٢هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}+1} \times \text{٣ دس}$

$= \text{٦س هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}+1} \Big|_{0}^{2} - \text{٦} \times \text{٢هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}+1} \Big|_{0}^{2}$

$= (\text{١٢هـ}^{2} - ٠) - (\text{١٢هـ}^{2} - \text{١٢هـ}) = \text{١٢هـ}$

(٢) $\int \text{جا٢س هـ}^{\text{جتاس}} \text{ دس} = \int \text{٢جاس جتاس هـ}^{\text{جتاس}} \text{ دس}$ نفرض ص = جتاس

ثم نكمل بالأجزاء ———

(٣) $\int \text{قا}^{2}\text{س هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} \text{ دس}$ —— نفرض ص = $\sqrt{\text{ظاس}}$ $\Leftarrow$ ص^{2} = ظاس

ثم نكمل بالأجزاء ———

(٤) $\int \text{س}^{5} \text{هـ}^{\text{س}^{2}} \text{دس} = \int \text{س}^{5} \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

ص = س^{2}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$= \frac{1}{2} \int \text{س}^{4} \text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص} = \frac{1}{2} \int \underbrace{\text{ص}^{2}}_{\text{م}} \underbrace{\text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص}}_{\text{د هـ}}$

م = ص^{2} $\times$ د هـ = هـ$^{\text{ص}}$ دص

دم = ٢ص دص   هـ = هـ$^{\text{ص}}$

$I = \frac{1}{2} \int \left(\text{ص}^{2} \times \text{هـ}^{\text{ص}} - \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{٢ص دص}\right) = \frac{1}{2} \left(\text{ص}^{2}\text{هـ}^{\text{ص}} - \int \underbrace{\text{٢ص}}_{\text{م}} \underbrace{\text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص}}_{\text{د هـ}}\right)$

م = ٢ص $\times$ د هـ = هـ$^{\text{ص}}$ دص

دم = ٢دص   هـ = هـ$^{\text{ص}}$

$I = \frac{1}{2} \left(\text{ص}^{2}\text{هـ}^{\text{ص}} - \left(\text{٢ص هـ}^{\text{ص}} - \int \text{٢هـ}^{\text{ص}} \text{دص}\right)\right)$

$I = \frac{1}{2} \left(\text{ص}^{2}\text{هـ}^{\text{ص}} - \text{٢ص هـ}^{\text{ص}} + \text{٢هـ}^{\text{ص}}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2} \left(\text{س}^{4}\text{هـ}^{\text{س}^{2}} - \text{٢س}^{2}\text{هـ}^{\text{س}^{2}} + \text{٢هـ}^{\text{س}^{2}}\right) + \text{جـ}$

(٥) $\int \text{هـ}^{\sqrt[3]{\text{س}}} \text{ دس}$ —— نفرض ص = $\sqrt[3]{\text{س}}$ $\Leftarrow$ ص^{3} = س $\Leftarrow$ دس = ٣ص^{2} دص

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{٣ص}^{2} \text{ دص} = \int \underbrace{\text{٣ص}^{2}}_{\text{م}} \underbrace{\text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص}}_{\text{د هـ}}$ أجزاء مرتين ———

$$\text{(٦)}\quad \int \text{هـ}^{س}\,\text{ظتا}^2\,\text{هـ}^{س}\,\text{د}س = \int \text{هـ}^{س}\,\text{ظتا}^2 ص \;\frac{\text{د}ص}{\text{هـ}^{س}}$$

$$ص = \text{هـ}^{س} \qquad \frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \text{هـ}^{س} \qquad \text{د}س = \frac{\text{د}ص}{\text{هـ}^{س}} \qquad \text{د}س = \frac{\text{د}ص}{ص}$$

$$= \int \text{هـ}^{س}\,\text{ظتا}^2 ص\,\text{د}ص = \int ص\,\text{ظتا}^2 ص\,\text{د}ص$$

$$= \int ص\left(\text{قتا}^2 ص - 1\right)\text{د}ص = \int \underbrace{ص}_{ع}\,\underbrace{\text{قتا}^2 ص}_{\text{دهـ}} - \underbrace{ص}_{\text{مباشر}}\,\text{د}ص$$

$$= ص \times -\text{ظتا}\,ص - \int -\text{ظتا}\,ص\,\text{د}ص - \frac{ص^2}{2} + جـ$$

$$= -ص\,\text{ظتا}\,ص + \int \frac{\text{جتا}\,ص}{\text{جا}\,ص}\,\text{د}ص - \frac{ص^2}{2} + جـ$$

$$= -ص\,\text{ظتا}\,ص + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{جا}\,ص\right| - \frac{ص^2}{2} + جـ$$

$$= -\text{هـ}^{س}\,\text{ظتا}\,\text{هـ}^{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{جا}\,\text{هـ}^{س}\right| - \frac{\text{هـ}^{2س}}{2} + جـ$$

$$\text{(٧)}\quad \int \underbrace{س\,\text{هـ}^{س}}_{ع}\,\underbrace{(س+1)^{-2}\,\text{د}س}_{\text{دهـ}}$$

$$ع = س\,\text{هـ}^{س} \qquad \text{د}ع = س\,\text{هـ}^{س} + \text{هـ}^{س}$$

$$\text{دهـ} = (س+1)^{-2}\,\text{د}س \qquad \text{هـ} = \frac{(س+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{س+1}$$

$$I = س\,\text{هـ}^{س} \times \frac{(س+1)^{-1}}{-1} - \int \frac{(س+1)^{-1}}{-1} \times \left(س\,\text{هـ}^{س} + \text{هـ}^{س}\right)\text{د}س$$

$$= \frac{-س\,\text{هـ}^{س}}{س+1} + \int \frac{1}{\cancel{س+1}} \times \underbrace{\text{هـ}^{س}}_{\text{عامل مشترك}}\,\cancel{(س+1)}\,\text{د}س = \frac{-س\,\text{هـ}^{س}}{س+1} + \text{هـ}^{س} + جـ$$

$$\text{(٨)}\ ^{*}\text{ملغز}\quad \int \underbrace{\text{هـ}^{س}}_{\text{دهـ}}\,\underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\,س}_{ع}\,\text{د}س$$

$$ع = \text{لو}_{\text{هـ}}\,س \qquad \text{د}ع = \frac{1}{س}\,\text{د}س \qquad \text{دهـ} = \text{هـ}^{س}\,\text{د}س \qquad \text{هـ} = \text{هـ}^{س}$$

$$I = \text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س - \int \underbrace{\text{هـ}^{س}}_{ع} \times \underbrace{\frac{1}{س}\,\text{د}س}_{\text{دهـ}}$$

$$ع = \text{هـ}^{س} \qquad \text{د}ع = \text{هـ}^{س}\,\text{د}س \qquad \text{دهـ} = \frac{1}{س}\,\text{د}س \qquad \text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,س$$

$$I = \text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س - \left(\text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س - \int \text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س\,\text{د}س\right)$$

$$I = \cancel{\text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س} - \cancel{\text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س} + \int \text{هـ}^{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,س\,\text{د}س \quad (\text{لا يجوز})$$

سؤال: أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \text{هـ}^{\text{س}^3 + 2\,\text{لو س}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^3 + \text{لو س}^2}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{هـ}^{\text{لو س}^2}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^3 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{س}^2\,\text{دس} = \int \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}^3}\,\text{دس} = \int \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \frac{1}{3}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ث} = \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{ث}$

٢) $\int \text{س}\left(\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{لو س}}\right)\text{دس} = \int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{س}\,\text{دس} = \int \underbrace{\text{س}^2}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ع} = \text{س}^2 \quad \text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دع} = 2\text{س}\,\text{دس} \quad \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{I} = \text{س}^2 \times \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times 2\text{س}\,\text{دس} = \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \underbrace{2\text{س}}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$= \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}} - \left(2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times 2\,\text{دس}\right)$

$= \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

٣) $\int 2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا س جتا س}\,\text{دس} = \int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{جا٢س}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times -\frac{1}{2}\,\text{جتا٢س} - \int -\frac{1}{2}\,\text{جتا٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{2}\int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{جتا٢س}\,\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{2}\,\text{جا٢س} - \int \frac{1}{2}\,\text{جا٢س} \times \text{هـ}^{\text{س}}\right)\text{دس}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س} - \boxed{\frac{1}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\,\text{دس}}$ التكامل الأصلي

$\Leftarrow \frac{5}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\,\text{دس} = -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\,\text{دس} = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\right) + \text{ث}$

٤) $\int \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{جا هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{جا ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا ص}\,\text{دص} = \int \underbrace{\text{ص}}_{\text{ع}}\,\underbrace{\text{جا ص}\,\text{دص}}_{\text{دهـ}}$ ــ أجزاء ثم نكمل

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

مثال: إذا كان ميل المماس للمنحنى ص(س) عند أي نقطة (س، ص) يعطى بالعلاقة ٤س هـ$^{\text{س}^2}$ ، جد معادلة هذا المنحنى علماً أنه يمر ب (٠، ٣).

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2} \Leftarrow \text{دص} = ٤\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \int \text{دص} = \int ٤\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2}\,\text{دس}$ معادلة تفاضلية | ع = س^2 ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دع}}{٢\text{س}}$

$\Leftarrow \text{ص} = \int ٤\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\frac{\text{دع}}{٢\text{س}}$

$\Leftarrow \text{ص} = \int ٢\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{دع} \Leftarrow \text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{جـ}$ نعوض: يمر بالنقطة (٠، ٣)

$\Leftarrow ٣ = ٢\text{هـ}^{٠} + \text{جـ} \Leftarrow ٣ = ٢ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١}$

$\therefore \text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}^2} + ١$

مثال: يتناقص حجم الماء في بركة بمعدل $\frac{1}{10}$ حجمها سنوياً، فإذا كان حجم الماء الآن هو هـ^{٢٥} جد حجم الماء بعد مرور ٢٠ سنة.

الحل: $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{-1}{10}\,\text{ح} \Leftarrow \text{دح} = \frac{-1}{10}\,\text{ح}\,\text{دن} \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{ح}} = \frac{-1}{10}\,\text{دن}$

$\int \frac{\text{دح}}{\text{ح}} = \int \frac{-1}{10}\,\text{دن} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ح} = \frac{-1}{10}\,\text{ن} + \text{جـ}$ نعوض: ح = هـ^{٢٥} عندما $\boxed{\text{ن} = ٠}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٢٥} = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٢٥}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ح} = \frac{-1}{10}\,\text{ن} + ٢٥$ وعندما $\boxed{\text{ن} = ٢٠}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ح} = \frac{-1}{10}(٢٠) + ٢٥ = ٢٣$

$\therefore \text{ح} = \text{هـ}^{٢٣}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: تتكاثر نوع من الحشرات في مزرعة وفق المعادلة $\frac{d\text{ك}}{d\text{ن}} = \frac{1}{4}\text{ك}$ لكل ساعة حيث ك تدل على عدد الحشرات. اذا كانت ك = ٢٠٠ في البداية (ن = ٠)، ما عدد الحشرات بعد ٨ ساعات، (اعتبر $\text{هـ}^{2} = 7{,}4$).

الحل: $\frac{d\text{ك}}{d\text{ن}} = \frac{1}{4}\text{ك} \Leftarrow d\text{ك} = \frac{1}{4}\text{ك}\, d\text{ن} \Leftarrow \frac{d\text{ك}}{\text{ك}} = \frac{1}{4}\, d\text{ن}$

$\Leftarrow \int \frac{d\text{ك}}{\text{ك}} = \int \frac{1}{4}\, d\text{ن} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{1}{4}\text{ن} + \text{جـ}$ لكن: ك = ٢٠٠ عند $\boxed{\text{ن} = 0}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} 200 = 0 + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} 200$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{1}{4}\text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}} 200$ وعندما $\boxed{\text{ن} = 8}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{1}{4} \times 8 + \text{لو}_{\text{هـ}} 200 = 2 + \text{لو}_{\text{هـ}} 200$

$\therefore \text{ك} = \text{هـ}^{2 + \text{لو}_{\text{هـ}} 200} = \text{هـ}^{2} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} 200} = 7{,}4 \times 200 = 1480$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}^2 - 4} = \frac{\text{هـ}^{-2\text{ص}}(\text{س}+3)}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

الحل: $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{\text{هـ}^{-2\text{ص}}(\text{س}+3)(\text{س}^2-4)}{\text{س}^2 - 2\text{س}} \Leftarrow \frac{d\text{ص}}{\text{هـ}^{-2\text{ص}}} = \frac{(\text{س}+3)\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-2)}}\, d\text{س}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{2\text{ص}}\, d\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^2 + 5\text{س} + 6}{\text{س}}\right) d\text{س}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{2\text{ص}}\, d\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}} + \frac{5\text{س}}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}}\right) d\text{س} \Leftarrow \text{هـ}^{2\text{ص}} = \left(\text{س} + 5 + \frac{6}{\text{س}}\right) d\text{س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{2\text{ص}} = \int \left(\text{س} + 5 + \frac{6}{\text{س}}\right) d\text{س} \Leftarrow \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{ص}} = \frac{\text{س}^2}{2} + 5\text{س} + 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

مثال: تنمو البكتيريا بمعدل $\frac{d\text{ع}}{d\text{ن}} = \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}}$ في الساعة حيث ن الزمن، أوجد عدد البكتيريا بعد مرور ٤ ساعات علماً بأن العدد الأصلي هو ١٠٠٠.

الحل: $\frac{d\text{ع}}{d\text{ن}} = \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}} \Leftarrow d\text{ع} = \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}}\, d\text{ن}$

$\int d\text{ع} = \int \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}}\, d\text{ن} \Leftarrow \text{ع} = \frac{3000}{0{,}25}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + 0{,}25\text{ن}| + \text{جـ}$

$= 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + 0{,}25\text{ن}| + \text{جـ}$ لكن ع = ١٠٠٠ عندما ن = ٠

$\therefore 1000 = 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}}(1 + 0) + \text{جـ} \Leftarrow 1000 = 0 + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 1000}$

$\text{ع} = 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + 0{,}25\text{ن}| + 1000$ وعندما $\boxed{\text{ن} = 4}$ فإن $\text{ع} = 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}} 2 + 1000$

مثال: يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت بعد ن من الزمن يرتبط بسرعته ع بالعلاقة $ت\,ع = ٠٫٥$ ، حيث $ع > ٠$ ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٢٧ ثانية من بدء الحركة اذا علمت أن سرعته عند بدء الحركة ٣ م/ث وأن $ف = ١٨$ عند $ن = ٠$.

الحل: $ت\,ع = ٠٫٥ \Leftarrow ت = \frac{٠٫٥}{ع} \Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{٠٫٥}{ع} \Leftarrow ع\,دع = ٠٫٥\,دن$

$\Leftarrow \int ع\,دع = \int \frac{١}{٢}\,دن \Leftarrow \frac{ع^{٢}}{٢} = \frac{١}{٢}ن + جـ$

$\Leftarrow ع = ٣$ عند $ن = ٠ \Leftarrow \frac{٩}{٢} = ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = \frac{٩}{٢}}$

$\therefore \frac{ع^{٢}}{٢} = \frac{١}{٢}ن + \frac{٩}{٢} \Leftarrow ع^{٢} = ن + ٩ \Leftarrow ع = \sqrt{ن + ٩}$

$\Leftarrow ف = \int \sqrt{ن + ٩}\,دن = \frac{٢(ن+٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

$\Leftarrow ف = ١٨$ عند $ن = ٠ \Leftarrow ١٨ = \frac{٢}{٣}(٠ + ٩)^{\frac{٣}{٢}} + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٠}$

$\therefore ف = \frac{٢}{٣}(ن + ٩)^{\frac{٣}{٢}}$ وعند $\boxed{ن = ٢٧} \Leftarrow ف = \frac{٢}{٣}(٢٧ + ٩)^{\frac{٣}{٢}} = ١٤٤$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{دص}{دس} - ٢ص = ٠$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٢ص \Leftarrow دص = ٢ص\,دس \Leftarrow \int \frac{دص}{ص} = \int ٢\,دس$

$لو_{هـ} ص = ٢س + جـ \Leftarrow ص = هـ^{٢س + جـ} \Leftarrow ص = هـ^{٢س} \times هـ^{جـ}$

$\therefore ص = جـ\,هـ^{٢س}$

مثال: $ص = هـ^{س^{٢}} + جتا\,لو_{هـ}س + \int \frac{س}{٣س + ٥}\,دس + \int_{ب}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{جا^{٢}س}{١ + ظا^{٢}س}\,دس$ جد $\frac{دص}{دس}$

تكامل محدود مشتقته صفر

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٢س\,هـ^{س^{٢}} - جا\,لو_{هـ}س \times \frac{١}{س} + \frac{س}{٣س + ٥} + صفر$

مثال: اذا كانت $ص = أ\,هـ^{٣س} + جا\,لو_{هـ}س$ وكانت $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = ٢هـ^{٢} + ١$ جد أ

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٣أ\,هـ^{٣س} + جتا\,لو_{هـ}س \times \frac{١}{س}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = ٣أ\,هـ^{٣} + جتا\,لو_{هـ}١ \times \frac{١}{١} = ٣أ\,هـ^{٣} + ١ = ٢هـ^{٢} + ١$

$\Leftarrow ٣أ\,هـ^{٣} = ٢هـ^{٢} \Leftarrow أ = \frac{٢هـ^{٢}}{٣هـ^{٣}} = \frac{٢}{٣هـ}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} \times \frac{1}{س^2-4} = \frac{هـ^{-2ص}(س+3)}{س^2-2س}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{-2ص}(س+3)(س^2-4)}{س^2-2س}$

$\Leftarrow \frac{دص}{هـ^{-2ص}} = \frac{(س+3)\cancel{(س-2)}(س+2)}{س\cancel{(س-2)}} دس$

$\Leftarrow هـ^{2ص} دص = \left(\frac{س^2+5س+6}{س}\right) دس$

$\Leftarrow هـ^{2ص} دص = \left(\frac{س^2}{س}+\frac{5س}{س}+\frac{6}{س}\right) دس$

$\Leftarrow هـ^{2ص} = \left(س+5+\frac{6}{س}\right) دس$

$\Leftarrow \int هـ^{2ص} دص = \int \left(س+5+\frac{6}{س}\right) دس$

$\Leftarrow \frac{1}{2} هـ^{2ص} = \frac{س^2}{2} + 5س + 6 لو_{هـ}|س| + جـ$

* التكامل بالكسور الجزئية:

وهو تقسيم الكسر الواحد إلى عدة كسور

نلجأ إلى التكامل بالكسور الجزئية إذا أردنا ايجاد التكامل لاقتران نسبي مقامه محللاً إلى عوامل أو قابلاً للتحليل

مثال: $\int \frac{2س+5}{س(2س-1)(3س+7)} دس$ $\qquad$ $\int \frac{9}{4س^2-25} دس$ (بالتحليل)

$\int \frac{س+7}{2س^2-7س+5} دس$ (بالتحليل)

مثال ٤ جد $\int \frac{6س - 5}{2س^3 - 5س^2 + 3س} \, دس = \int \frac{6س - 5}{س(2س^2 - 5س + 3)} \, دس$

$= \int \frac{6س - 5}{س(2س - 3)(س - 1)} \, دس$ فكرة الكسور الجزئية .

لنفرض :

$\frac{6س - 5}{س(2س - 3)(س - 1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{2س - 3} + \frac{جـ}{س - 1} \quad \times \boxed{س(2س - 3)(س - 1)}$

$\Leftarrow 6س - 5 = أ(2س - 3)(س - 1) + ب(س)(س - 1) + جـ(س)(2س - 3)$

بوضع $\boxed{س = 0}$

$\Leftarrow -5 = أ(-3)(-1) + صفر + صفر \Leftarrow \boxed{أ = \frac{-5}{3}}$

بوضع $2س - 3 = 0 \Leftarrow \boxed{س = \frac{3}{2}}$

$\Leftarrow 4 = صفر + ب\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + صفر \Leftarrow \boxed{ب = \frac{16}{3}}$

بوضع $س - 1 = 0 \Leftarrow \boxed{س = 1}$

$\Leftarrow 1 = صفر + صفر + جـ(1)(-1) \Leftarrow \boxed{جـ = -1}$

$\therefore I = \int \left(\frac{\frac{-5}{3}}{س} + \frac{\frac{16}{3}}{2س - 3} + \frac{-1}{س - 1} \right) دس$

$= \frac{-5}{3} لو_هـ |س| + \frac{16}{3} \times \frac{1}{2} لو_هـ |2س - 3| - لو_هـ |س - 1| + جـ$

مثال : $\int_3^4 \frac{6}{2س - س^2} \, دس \Leftarrow \frac{6}{2س - س^2} = \frac{6}{س(2 - س)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{2 - س}$

بالضرب في $س(2 - س) \Leftarrow 6 = أ(2 - س) + ب(س)$

بوضع $\boxed{س = 0} \Leftarrow 6 = 2أ - 0 + 0 \Leftarrow 6 = 2أ \Leftarrow \boxed{أ = 3}$

بوضع $2 - س = 0 \Leftarrow س = 2 \Leftarrow 6 = 2ب \Leftarrow \boxed{ب = 3}$

$\therefore \int_3^4 \frac{6}{2س - س^2} \, دس = \int_3^4 \left(\frac{3}{س} + \frac{3}{2 - س} \right) دس = 3 لو_هـ |س| - 3 لو_هـ |2 - س| \Big]_3^4$

$= (3 لو_هـ 4 - 3 لو_هـ 2) - (3 لو_هـ 3 - 3 لو_هـ 1)$

$= 3 لو_هـ 4 - 3 لو_هـ 2 - 3 لو_هـ 3 - 0$

سؤال ٤: $\int \frac{\text{٤س} - ٥}{\text{٢س}^٢ - \text{س} - ٣}\,\text{دس}$

* ملاحظة: إذا كانت درجة البسط $\geq$ درجة المقام يجب القسمة أولاً

مثال ٤: أوجد $\int \frac{\text{١٢س}^٢ - ٥}{(\text{٢س} - ٣)(\text{٣س} + ١)}\,\text{دس}$ (درجة البسط = درجة المقام)

$= \int \frac{\text{١٢س}^٢ - ٥}{\text{٦س}^٢ - \text{٧س} - ٣}\,\text{دس}$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline \text{١٢س}^٢ - ٥ & \text{٦س}^٢ - \text{٧س} - ٣ \\ \mp\text{١٢س}^٢ \pm \text{١٤س} \pm ٦ & \\ \hline \text{١٤س} + ١ \;\; \text{الباقي} & \end{array}$$

$\therefore I = \int \left(٢ + \frac{\text{١٤س} + ١}{(\text{٢س} - ٣)(\text{٣س} + ١)} \right) \text{دس} = \text{٢س} + \int \frac{\text{١٤س} + ١}{(\text{٢س} - ٣)(\text{٣س} + ١)}\,\text{دس}$

$\frac{\text{١٤س} + ١}{(\text{٢س} - ٣)(\text{٣س} - ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{٢س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{٣س} + ١} \quad \boxed{\times (\text{٢س} - ٣)(\text{٣س} + ١)}$

$\Leftarrow \text{١٤س} + ١ = \text{أ}(\text{٣س} + ١) + \text{ب}(\text{٢س} - ٣)$ بوضع $\text{٢س} - ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{٣}{٢}}$

$\Leftarrow ١٤\left(\frac{٣}{٢}\right) + ١ = \text{أ}\left(\frac{١١}{٢}\right) + \text{صفر}$

$\Leftarrow ٢٢ = \frac{١١}{٢}\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٤}$

بوضع $\text{٣س} + ١ = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = -\frac{١}{٣}}$

$\Leftarrow ١٤\left(-\frac{١}{٣}\right) + ١ = \text{صفر} - \frac{١١}{٣}\text{ب} \Leftarrow -\frac{١١}{٣} = -\frac{١١}{٣}\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ١}$

$\therefore I = \text{٢س} + \int \left(\frac{٤}{\text{٢س} - ٣} + \frac{١}{\text{٣س} + ١} \right) \text{دس}$

$I = \text{٢س} + ٤ \times \frac{١}{٢} \text{لوهـ}|\text{٢س} - ٣| + \frac{١}{٣} \text{لوهـ}|\text{٣س} + ١| + \text{ث}$

سؤال ٤(أ): $\int \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ٣}\,\text{دس}$ (درجة البسط > درجة المقام)

٤) $\int \frac{\text{س}^٣ + \text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١}\,\text{دس}$ (درجة البسط > درجة المقام)

سؤال: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{2س}{س^2-6س+9}\, دس = \int \frac{2س}{(س-3)^2}\, دس$ ← العوامل غير مختلفة (بالأجزاء)

$= \int \underbrace{2س}_{ع}\ \underbrace{(س-3)^{-2}\, دس}_{دهـ} = 2س \times \frac{1}{1} \times \frac{(س-3)^{-1}}{-1} - \int \frac{(س-3)^{-1}}{-1} \times 2\, دس$

$= \frac{-2س}{س-3} + \int \frac{2}{س-3}\, دس = \frac{-2س}{س-3} + 2\, لو_{هـ}|س-3| + جـ$

② $\int \frac{\sqrt{س^4+2س^2+1}}{س^2-س}\, دس = \int \frac{\sqrt{(س^2+1)^2}}{س^2-س}\, دس = \int \frac{|س^2+1|}{س^2-س}\, دس$

$= \int \frac{س^2+1}{س^2-س}\, دس$ درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline س^2-س & س^2+1 \\ & -س^2 \oplus س \\ \hline & س+1 \end{array}$$

$\Leftarrow \int 1 + \frac{س+1}{س^2-س}\, دس = س + \int \frac{س+1}{س(س-1)}\, دس$

$\Leftarrow \frac{س+1}{س(س-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} \quad \times \boxed{س(س-1)}$

$\Leftarrow س+1 = أ(س-1) + ب(س)$ بوضع $س-1=$ صفر $\Leftarrow \boxed{س=1}$

$\Leftarrow ب = 1+1 \Leftarrow \boxed{ب=2}$

بوضع س = صفر $\Leftarrow -أ = 0+1 = 1 \Leftarrow \boxed{أ=-1}$

$\therefore آ = س + \int \frac{-1}{س} + \frac{2}{س-1}\, دس = س - لو_{هـ}|س| + 2\, لو_{هـ}|س-1| + جـ$

③ $\int \frac{1}{س^{10}+س}\, دس = \int \frac{1}{س(س^9+1)}\, دس$ نفرض $ص = س^9$ ، $\frac{دص}{دس} = 9س^8$ ، $دس = \frac{دص}{9س^8}$

$= \int \frac{1}{س(ص+1)} \frac{دص}{9س^8} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{س^9(ص+1)}\, دص$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{ص(ص+1)}\, دص \Leftarrow \frac{1}{ص(ص+1)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+1} \quad \times \boxed{ص(ص+1)}$

$\Leftarrow 1 = أ(ص+1) + ب ص$ ...... ثم نكمل ونعيد الفرض

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

④ $\int \frac{س^3}{2س^4 + س^8}\, دس = \int \frac{س^3}{س^4(2+س^4)}\, دس$

$ص = س^4$ ، $\frac{دص}{دس} = 4س^3$ ، $دس = \frac{دص}{4س^3}$

$= \int \frac{س^3}{ص(ص+2)} \cdot \frac{دص}{4س^3} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{ص(2+ص)}\, دص$

ثم نكمل بالكسور الجزئية ونعيد الفرض ---

⑤ $\int \frac{1}{س^3 + س}\, دس = \int \frac{1}{س(س^2+1)}\, دس$

$ص = س^2$ ، $\frac{دص}{دس} = 2س$ ، $دس = \frac{دص}{2س}$

$= \int \frac{1}{س(1+ص)} \cdot \frac{دص}{2س} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{س^2(1+ص)}\, دص$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{ص(1+ص)}\, دص$ ثم نكمل كسور جزئية ونعيد الفرض

⑥ $\int \frac{س+3}{س^3 - س}\, دس \Leftarrow \int \frac{س+3}{س(س^2-1)}\, دس = \int \frac{س+3}{س(س-1)(س+1)}\, دس$

$\Leftarrow \frac{س+3}{س(س-1)(س+1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} + \frac{جـ}{س+1}$ ثم نكمل ---

⑦ $\int \underline{لو_هـ(س^2+2س)}\, \underline{دس} = لو_هـ(س^2+2س) \times س - \int س \times \frac{2س+2}{س^2+2س}\, دس$

درجة البسط = درجة المقام

$= س\, لو_هـ(س^2+2س) - \int \frac{\cancel{س}(2س+2)}{\cancel{س}(س+2)}\, دس$

$\begin{array}{r} 2 \\ س+2 \,\big)\, \overline{2س+2} \\ \underline{-2س \mp 4} \\ -2 \end{array} \Leftarrow = س\, لو_هـ(س^2+2س) - \int \left(2 - \frac{2}{س+2}\right) دس$

$= س\, لو_هـ(س^2+2س) - (2س - 2\, لو_هـ|س+2|) + جـ$

⑧ $\int \frac{1}{س((لو_هـ س)^2 + لو_هـ س)}\, دس$ نفرض $ص = لو_هـ س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} \Leftarrow دس = س\, دص$

$= \int \frac{1}{\cancel{س}(ص^2+ص)} \times \cancel{س}\, دص \Leftarrow \frac{1}{ص(1+ص)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{1+ص}$ ثم نكمل

بالكسور الجزئية -----

⑨ $\int \frac{4\,لو_{هـ}\, س}{(س-1)^2}\, دس = \int \underbrace{4\,لو_{هـ}\, س}_{ع}\, \underbrace{(س-1)^{-2}\, دس}_{د هـ}$ أجزاء

$= 4\,لو_{هـ}\, س \times \frac{(س-1)^{-1}}{-1} - \int \frac{(س-1)^{-1}}{-1} \times 4 \times \frac{1}{س}\, دس$

$= \frac{-4\,لو_{هـ}\, س}{س-1} + \int \frac{4}{(س-1)(س)}\, دس \Leftarrow \frac{4}{(س-1)(س)} = \frac{أ}{س-1} + \frac{ب}{س}$

ثم نكمل بالكسور الجزئية ——— $\boxed{أ=4}$ $\boxed{ب=-4}$

⑩ $\int \frac{ظاس}{9-(لو_{هـ}\, جتاس)^2}\, دس$ ، نوجد ص $= لو_{هـ}\, جتاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-جاس}{جتاس}$

$\frac{دص}{دس} = -ظاس$

$دس = \frac{دص}{-ظاس}$

$= \int \frac{\cancel{ظاس}}{9-ص^2} \cdot \frac{دص}{-\cancel{ظاس}} = \int \frac{1}{ص^2-9}\, دص$

$= \int \frac{1}{(ص-3)(ص+3)}\, دص$

$\frac{1}{(ص-3)(ص+3)} = \frac{أ}{ص-3} + \frac{ب}{ص+3}$ ثم نكمل ——— $\boxed{أ=\frac{1}{6}}$ $\boxed{ب=-\frac{1}{6}}$

⑪ $\int \frac{\sqrt{س}}{س-9}\, دس = \int \frac{ص}{ص^2-9} \times 2ص\, دص$

ص $= \sqrt{س}$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$ ، $دس = 2ص\, دص$

$= \int \frac{2ص^2}{ص^2-9}\, دص$ (درجة البسط = درجة المقام) نقسم

$= \int 2 + \frac{18}{ص^2-9}\, دص = 2س + \int \frac{18}{(ص-3)(ص+3)}\, دص$ ثم نكمل كسور جزئية ونعيد التعويض

⑫ $\int \frac{1}{س-\sqrt{س}-6}\, دس = \int \frac{1}{ص^2-ص-6} \times 2ص\, دص$

ص $= \sqrt{س}$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$ ، $دس = 2ص\, دص$

$= \int \frac{2ص}{ص^2-ص-6}\, دص = \int \frac{2ص}{(ص-3)(ص+2)}\, دص$

$\Leftarrow \frac{2ص}{ص^2-ص-6} = \frac{2ص}{(ص-3)(ص+3)} = \frac{أ}{ص-3} + \frac{ب}{ص+3}$ ثم نكمل ونعيد التعويض

$\boxed{أ=\frac{6}{5}}$ $\boxed{ب=\frac{4}{5}}$

(١٣)

$\int \frac{\sqrt{٤س+٢٠}-٣}{\sqrt{س+٥}+٣}\,دس = \int \frac{٢\sqrt{س+٥}-٣}{\sqrt{س+٥}+٣}\,دس$

$ص = \sqrt{س+٥}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س+٥}} = \frac{١}{٢ص}$

$دس = ٢ص\,دص$

$= \int \frac{٢ص-٣}{ص+٣} \times ٢ص\,دص = \int \frac{٤ص^٢-٦ص}{ص+٣}\,دص$

درجة البسط > درجة المقام نقسم

$= \int ٤ص - ١٨ + \frac{٥٤}{ص+٣}\,دص$

$= ٢ص^٢ - ١٨ص + ٥٤\,لو_{هـ}|ص+٣| + ث$

$= ٢(س+٥) - ١٨\sqrt{س+٥} + ٥٤\,لو_{هـ}|\sqrt{س+٥}+٣| + ث$

(١٤)

$\int \frac{١}{س(\sqrt[٣]{س}-١)}\,دس = \int \frac{١}{ص^٣(ص-١)} \times ٣ص^٢\,دص$

$ص = \sqrt[٣]{س}$

$ص^٣ = س$

$٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ١$

$دس = ٣ص^٢\,دص$

$= \int \frac{٣}{ص(ص-١)}\,دص$ ثم نكمل كسور جزئية ——

$\boxed{أ = -٣}$ $\boxed{ب = ٣}$

(١٥)

$\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٢}\,دس = \int \frac{ص^٣}{ص^٢-ص-٢}\,\frac{دص}{ص}$

$ص = هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

$دس = \frac{دص}{هـ^{س}} = \frac{دص}{ص}$

$= \int \frac{ص^٢}{ص^٢-ص-٢}\,دص$ (درجة البسط = درجة المقام نقسم)

$= \int ١ + \frac{ص+٢}{ص^٢-ص-٢}\,دص$

$= ص + \int \frac{ص+٢}{(ص+١)(ص-٢)}\,دص \Leftarrow \frac{ص+٢}{(ص+١)(ص-٢)} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+١}$

ثم نكمل كسور جزئية —— $\boxed{أ = \frac{٤}{٣}}$ $\boxed{ب = -\frac{١}{٣}}$

(١٦)

$\int \sqrt{١ - هـ^{-س}}\,دس = \int ص \times \frac{٢ص}{١-ص^٢}\,دص$

$ص = \sqrt{١ - هـ^{-س}}$

$ص^٢ = ١ - هـ^{-س}$

$٢ص \frac{دص}{دس} = هـ^{-س}$

$٢ص \frac{دص}{دس} = ١ - ص^٢$

$دس = \frac{٢ص}{١-ص^٢}\,دص$

$= \int \frac{٢ص^٢}{١-ص^٢}\,دص$ (درجة البسط = درجة المقام نقسم)

$= \int -٢ + \frac{٢}{١-ص^٢}\,دص = -٢ص + \int \frac{٢}{(١-ص)(١+ص)}\,دص$

ثم نكمل كسور جزئية —— $\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = ١}$

(17) $\int \frac{قا^2 س}{ظا^2 س - ظا س - 6}\, دس$

$ص = ظا س$

$\frac{دص}{دس} = قا^2 س$

$دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int \frac{\cancel{قا^2 س}}{ص^2 - ص - 6} \cdot \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}} = \int \frac{1}{ص^2 - ص - 6}\, دص$

$= \int \frac{1}{(ص - 3)(ص + 2)}\, دص$

$\Leftarrow \frac{1}{(ص-3)(ص+2)} = \frac{أ}{ص - 3} + \frac{ب}{ص + 2}$ ثم نكمل كسور جزئية —— $\boxed{أ = \frac{1}{5}}$ $\boxed{ب = \frac{-1}{5}}$

(18) $\int \frac{جتا س}{3 + جتا^2 س}\, دس = \int \frac{جتا س}{3 + (1 - جا^2 س)}\, دس = \int \frac{جتا س}{4 - جا^2 س}\, دس$

نفرض $ص = جا س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = جتا س \Leftarrow دس = \frac{دص}{جتا س}$

$= \int \frac{\cancel{جتا س}}{4 - ص^2} \cdot \frac{دص}{\cancel{جتا س}} = \int \frac{1}{4 - ص^2}\, دص = \int \frac{1}{(2 - ص)(2 + ص)}\, دص$

$\Leftarrow \frac{1}{(2-ص)(2+ص)} = \frac{أ}{2 - ص} + \frac{ب}{2 + ص}$ ثم نكمل —— $\boxed{أ = \frac{1}{4}}$ $\boxed{ب = \frac{1}{4}}$

(19) $\int \frac{جتا^3 س}{جا^2 س - 3 جا س + 2}\, دس$

$ص = جا س$

$\frac{دص}{دس} = جتا س$

$دس = \frac{دص}{جتا س}$

$= \int \frac{جتا^3 س}{ص^2 - 3ص + 2} \cdot \frac{دص}{جتا س} = \int \frac{جتا^2 س}{ص^2 - 3ص + 2}\, دص = \int \frac{1 - جا^2 س}{ص^2 - 3ص + 2}\, دص$

$= \int \frac{1 - ص^2}{ص^2 - 3ص + 2}\, دص = \int \frac{\overset{-1}{(1 + ص)}\cancel{(1 - ص)}}{\cancel{(ص - 1)}(ص - 2)}\, دص = \int \frac{-1 - ص}{ص - 2}\, دص$

(درجة البسط = درجة المقام) $\Leftarrow$ نقسم

$\Leftarrow \int \left(-1 + \frac{-3}{ص - 2}\right) دص = - ص - 3 \, لو_هـ |ص - 2| + جـ$

$= - جا س - 3 \, لو_هـ |جا س - 2| + جـ$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

② $\int \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{س}}}\,\text{دس} = \int \frac{1}{\text{ص}\times(\text{ص}^2-1)} \times 2\text{ص}\,\text{دص} = \int \frac{2}{(\text{ص}^2-1)}\,\text{دص} = \int \frac{2}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)}\,\text{دص}$

$\text{ص} = \sqrt{1+\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\text{س}}} = \frac{1}{2\text{ص}}$

$\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{س} = \text{ص}^2 - 1$

$\Leftarrow \frac{2}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}$

ثم نكمل كسور جزئية ——— $\boxed{\text{أ}=1}$ $\boxed{\text{ب}=-1}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2-\text{س}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{دس}}{\text{س}^2-\text{س}} \Leftarrow \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^2} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}^2-\text{س}}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{-2}\,\text{دص} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{س}-1)} \Leftarrow \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{س}-1)}$

$\frac{1}{\text{س}(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1} \quad \times \boxed{\text{س}(\text{س}-1)}$

$\Leftarrow 1 = \text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب}(\text{س})$ بوضع $\text{س}-1=0 \Leftarrow \text{س}=1$

$\boxed{\text{ب}=1}$ بوضع $\text{س}=0 \Leftarrow 1 = -\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ}=-1}$

$\therefore \frac{-1}{\text{ص}} = \int \frac{-1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}-1}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \frac{-1}{\text{ص}} = -\text{لو}|\text{س}| + \text{لو}|\text{س}-1| + \text{جـ}$

مثال ٤ اذا كانت $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}^2\text{هـ}^{-\text{س}}$ وكانت $\text{ص}=2$ عند $\text{س}=0$، أثبت أن $\text{ص} = \frac{2\text{هـ}^{\text{س}}}{2-\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}^2\text{هـ}^{-\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}^2} = \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{دس} \Leftarrow \int \text{ص}^{-2}\,\text{دص} = \int \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{دس}$

$\frac{-1}{\text{ص}} = -\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ} \Leftarrow \frac{-1}{\text{ص}} = \frac{-1}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{جـ}$ لكن: $\text{ص}=2$ عند $\text{س}=0$:

$\Leftarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1} + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ}=\frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{-1}{\text{ص}} = \frac{-1}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{1}{2}$ بالضرب في (-1)

$\Leftarrow \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{\text{ص}} = \frac{2-\text{هـ}^{\text{س}}}{2\text{هـ}^{\text{س}}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{2\text{هـ}^{\text{س}}}{2-\text{هـ}^{\text{س}}}$