مكثف المنير

في الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

توجيهي أدبي – فندقي وسياحي

منهاج جديد

٢٠١٨

الأستاذ منير أبو بكر - ٠٧٧٥٤٥٧٩٢٥

التكامل غير المحدود

تعريف التكامل بالرموز : $\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$ حيث جـ ثابت التكامل

يسمى التكامل غير محدود لأن هناك قيم غير محدودة يمكن أن يأخذها الثابت جـ

مشتقة (التكامل غير المحدود للاقتران ق(س)) = ق(س) ومعناها بالرموز :

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}\right) = \text{ق}(\text{س})$ أو

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س})$

سؤال : إذا كان ص= $\int \frac{\text{٤س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\,\text{ءس}$ فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = −١

باشتقاق الطرفين : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \frac{\text{٤س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\,\text{ءس}\right) = \frac{\text{٤س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$

عندما س = −١ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٤}(-\text{١}) - \text{١}}{(-\text{١})^{\text{٢}} + \text{١}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٢}}$

سؤال : إذا كان ص = $\int (\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س})\,\text{ءس}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يساوي :

أ) $\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}}$ ب) ٦س−٢ ج) $\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}$ د) صفر

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}$

سؤال : $\int \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$ يساوي :

أ) $\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}$ +جـ ب) $\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}$ + جـ ب) ظاس + جـ د) $\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}$ + جـ

الحل : ظاس + جـ

سؤال : $\int \sqrt{\text{س}^{\text{٣}}}\,\text{ءس}$ يساوي :

أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\sqrt{\text{س}^{\text{٥}}}$ + جـ ب) $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}\sqrt{\text{س}^{\text{٥}}}$ + جـ ب) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}\sqrt{\text{س}^{\text{٣}}}$ +جـ د) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٥}}$ + جـ

الحل : $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}\sqrt{\text{س}^{\text{٥}}}$ + جـ

سؤال : جد قيمة التكامل : $\int (\text{١٠س}^{\text{٢}} - \sqrt[\text{٦}]{\text{س}} + \text{٣قا}^{\text{٢}}\text{س})\,\text{ءس}$

= $\int$ (١٠س^{٢} − س$^{\frac{١}{٦}}$ + ٣قا^{٢}س) ءس

= $\frac{١٠}{٣}$ س^{٣} − $\frac{٦}{٧}$ س$^{\frac{٧}{٦}}$ + ٣ظاس + جـ

سؤال : إذا كان ق اقترانا متصلا ، وكان $\int$ قَ(س) ءس = س$^{-٥}$ فإن قَ(س) تساوي :

أ) −٥س$^{-٦}$ ب) س$^{-٥}$ ج) $\frac{س^{-٦}}{٦}$ د) ٤س$^{-٥}$

الحل : قَ(س) = −٥س$^{-٦}$

سؤال : جد قيمة التكامل : $\int \frac{-٢}{س^{-٥}}$ ءس = $\int$ −٢س^{٥} ءس = − $\frac{٢}{٦}$ س^{٦} + جـ = − $\frac{١}{٣}$ س^{٦} + جـ

سؤال : جد قيمة التكامل : $\int$ ٣ظاس جتاس ءس

= $\int$ ٣ $\frac{جاس}{\cancel{جتاس}}$ × $\cancel{جتاس}$ءس = $\int$ ٣جاسءس = − ٣جتاس + جـ

سؤال : إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٦س − ٨ س^{٣} + ٥ ، وكان ق(−١) = ٢ ،

فجد قاعدة الاقتران ق

$\int$ قَ(س) ءس = $\int$ (٦س − ٨س^{٣} + ٥) ءس

ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س^{٤} + ٥س + جـ

ق(−١) = ٣(−١)^{٢} − ٢(−١)^{٤} + ٥(−١) + جـ

٢ = ٣ − ٢ − ٥ + جـ ومنه جـ = ٦ وبالتالي قاعدة الاقتران هي :

ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س^{٤} + ٥س + ٦

سؤال : إذا كان $\int$ قَ(س) ءس = ٦س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦س − ٥ فجد قَ(١) نشتق الطرفين

$\frac{ء}{ءس}$ ($\int$ قَ(س) ءس) = $\frac{ء}{ءس}$ (٦س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦س − ٥)

قَ(س) = ١٨س^{٢} − ٦س + ٦ ومنه قَ(١) = ١٨(١)^{٢} − ٦(١) + ٦ = ١٨

التكامل المحدود وخصائصه

التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [أ ، ب] هو :

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ءس = ع(س)$\Big]_{أ}^{ب}$ = ع(ب) – ع(أ) ، حيث :

أ : الحد السفلي للتكامل المحدود

ب : الحد العلوي للتكامل المحدود

حيث يرمز للمقدار العددي : ع(ب) – ع(أ) بالرمز ع(س)$\Big]_{أ}^{ب}$

سؤال : إذا كان : $\int_{١}^{ب}$ ٦س ءس = ٩ فإن قيمة الثابت ب يساوي :

أ) ٢ ب) –٢ ج) ٢ ، –٢ د) ١ ، –١

= ٣س$^{٢}\Big]_{١}^{ب}$ = ٣ب^{٢} – ٣(١)^{٢} = ٩ ومنه ٣ب^{٢} – ٣ = ٩ ومنه ٣ب^{٢} = ١٢

ب^{٢} = ٤ ومنه ب = ٢ ، ب = –٢

سؤال : إذا كان $\int_{٥}^{٢}$ قَ(س) ءس = ١٣ ، وكان ق(٥) = –١٧ ، فجد قيمة ق(٢)

ق(س) = ١٣

ق(٢) – ق(٥) = ١٣ ومنه ق(٢) – (–١٧) = ١٣ ومنه ق(٢) + ١٧ = ١٣

ق(٢) = ١٣ –١٧ = – ٤

ملاحظة هامة :

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة

سؤال : إذا كان ص = $\int_{-١}^{٢}$ (٢س^{٢} –٣) ءس أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة مشتقته صفر

سؤال : إذا علمت أن ق(١) = ١٠ ، ق(٣) = ٦ ، فجد $\int_{١}^{٣}$ قَ(س) ءس

$\int_{١}^{٣}$ قَ(س) ءس = ق(س) = ق(٣) – ق(١) = ٦ – ١٠ = –٤

سؤال : إذا كان $\int_{٥}^{٢}$ قَ(س) ءس = ١٣ ، وكان ق(٥) = −١٧ ، فجد قيمة ق(٢)

ق(س) $\Big]_{٥}^{٢}$ = ١٣

ق(٢) − ق(٥) = ١٣ ومنه ق(٢) − (−١٧) = ١٣ ومنه ق(٢) + ١٧ = ١٣

ق(٢) = ١٣ −١٧ = − ٤

سؤال : إذا كان $\int_{٣}^{١}$ ق(س) ءس =٦ ، $\int_{-١}^{١}$ ق(س) ءس = −٢ ، فجد $\int_{-١}^{٣}$ (ق(س) +٥) ءس

$\int_{-١}^{٣}$ (ق(س) +٥) ءس = $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) ءس + $\int_{-١}^{٣}$ ٥ ءس = $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) ءس + ٥س $\Big]_{-١}^{٣}$

= $\int_{-١}^{١}$ ق(س) ءس + $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس + ٥(٣) − ٥(−١) = ٦+٢ +١٥+٥ = ٢٨

سؤال : إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ٢ق(س) ءس = ١٢ فإن : $\int_{٤}^{١}$ ق(س) ءس يساوي :

أ) ٦ ب) ١٢ ج) −٦ د) −١٢

$\int_{١}^{٤}$ ٢ق(س) ءس = ١٢ نقسم الطرفين على ٢ :

$\int_{١}^{٤}$ ق(س) ءس = ٦ ومنه $\int_{٤}^{١}$ ق(س) ءس = −٦

سؤال : إذا كان $\int_{٠}^{ل}$ (٢س − ١) ءس = ٦ ، فجد قيمة الثابت ل

(س^{٢} − س) $\Big]_{٠}^{ل}$ = ٦ ومنه ((ل)^{٢} − ل)−((٠)^{٢} − ٠) = ٦

ل^{٢} − ل =٦ ومن ل^{٢} − ل −٦ =٠ ومنه (ل−٣)(ل+٢) =٠ أي إما ل= ٣ أو ل = −٢

سؤال : إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{ل(س)}{٢}$ ءس = ٣ ، $\int_{٢}^{-١}$ هـ(س) ءس = ٨ ، فجد قيمة ما يلي :

$\int_{-١}^{٢}$ (٣هـ(س)−٢س+٣ل(س)) ءس

الحل :

= ٣$\int_{-١}^{٢}$ هـ(س)ءس −٢$\int_{-١}^{٢}$ س ءس +٣$\int_{-١}^{٢}$ ل(س)ءس

ولكن $\int_{-١}^{٢}$ ل(س)ءس = ٦ من الفرض

= ٣×−٨ − س^{٢} $\Big]_{-١}^{٢}$ + ٣×٦ = ٥ ومنه −٢٤ −((٢)^{٢} − (−١)^{٢}) + ١٨ = ٥

$-٦ - (٤ - ١) = -٦ - ٣ = -٩$

سؤال : إذا كان $\int_{أ-١}^{٥أ+٧} ق(س)\, ءس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت أ

بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفرا وقاعدة الاقتران غير معلومة فإن :

$٥أ + ٧ = أ - ١$ ومنه $٥أ - أ = -١ - ٧$ ومنه $٤أ = -٨$ ومنه $أ = -٢$

سؤال : إذا كان $\int_{٣}^{م} (٢ - ٤س)\, ءس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت م

$\left[(٢س - ٢س^{٢})\right]_{٣}^{م} = ٠$ بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفرا وقاعدة الاقتران معلومة فإن :

$(٢م - ٢(م)^{٢}) - (٢(٣) - ٢(٣)^{٢}) = ٠$

$٢م - ٢م^{٢} - ٦ + ١٨ = ٠$ ومنه $٢م - ٢م^{٢} + ١٢ = ٠$ نقسم على -٢

$م^{٢} - م - ٦ = ٠$ ومنه $(م - ٣)(م + ٢) = ٠$ إما $م = ٣$ أو $م = -٢$

التكامل بالتعويض

تستخدم هذه الطريقة عند وجود عملية ضرب داخل التكامل يصعب تبسيطها ، وهي تقوم على عملية التعويض أي كتابة التكامل بدلالة متغير آخر وبشكل يسهل إجراء عملية التكامل لها

سؤال : جد قيمة التكامل الآتي : $٣س(س^{٢}+١)^{-٥}\, ءس$

نفرض $ص = س^{٢} + ١$ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٢س}$ نعوض

$$\int ٣س(س^{٢}+١)^{-٥}\, ءس = \int ٣\cancel{س}\, ص^{-٥}\, \frac{ءص}{٢\cancel{س}}$$

$$= \int \frac{٣}{٢} ص^{-٥}\, ءص = \frac{٣}{٢} \cdot \frac{ص^{-٤}}{-٤} = -\frac{٣}{٨} ص^{-٤} + جـ$$

$$\int ٣س(س^{٢}+١)^{-٥}\, ءس = -\frac{٣}{٨}(س^{٢} + ١)^{-٤} + جـ$$

سؤال : جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}}\, ءس = \int ٦س^{٢}(٢س^{٣} - ٢)^{\frac{٢}{٥}}\, ءس$$

نفرض $ص = ٢س^{٣} - ٢$ فيكون $\frac{ءص}{ءس} = ٦س^{٢}$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٦س^{٢}}$ نعوض

$$\int \text{٦س}^{٢}\sqrt[\text{٥}]{(\text{٢س}^{٣} - \text{٢})^{٢}}\ \text{ءس} = \int \cancel{\text{٦س}^{٢}}\ \text{ص}^{\frac{٢}{٥}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٦س}^{٢}}}$$

$$\int \text{ص}^{\frac{٢}{٥}}\ \text{ءص} = \frac{٥}{٧}\ \text{ص}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{٦س}^{٢}\sqrt[\text{٥}]{(\text{٢س}^{٣} - \text{٢})^{٢}}\ \text{ءس} = \frac{٥}{٧}\ (\text{٢س}^{٣} - \text{٢})^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٥}{٧}\ \sqrt[\text{٥}]{(\text{٢س}^{٣} - \text{٢})^{٧}} + \text{جـ}$$

سؤال : $\int \frac{\text{٣س} - \text{٩}}{(\text{س}^{٢} - \text{٦س})^{٢}}\ \text{ءس} = \int (\text{٣س} - \text{٩})(\text{س}^{٢} - \text{٦س})^{-٢}\ \text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} - \text{٦س}$ فيكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} - \text{٦}$ ومنه $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢س} - \text{٦}} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢}(\text{س} - \text{٣})}$

$$\int \frac{\text{٣س} - \text{٩}}{(\text{س}^{٢} - \text{٦س})^{٢}}\ \text{ءس} = \int \text{٣}\cancel{(\text{س} - \text{٣})}\ \text{ص}^{-٢}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{(\text{س} - \text{٣})}}$$

$$\int \frac{٣}{٢}\ \text{ص}^{-٢}\ \text{ءص} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{-١}\ \text{ص}^{-١} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{٣}{٢}\ (\text{س}^{٢} - \text{٦س})^{-١} + \text{جـ} = \frac{-٣}{\text{٢}(\text{س}^{٢} - \text{٦س})} + \text{جـ}$$

سؤال : $\int \text{٢س}^{٣}\text{جا}(\text{س}^{٤} + ١)\ \text{ءس}$　　نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ١$ ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{٣}$

ومنه $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٤س}^{٣}}$　　نعوض

$$\int \text{٢س}^{٣}\text{جا}(\text{س}^{٤} + ١)\ \text{ءس} = \int \cancel{\text{٢س}^{٣}}\ \text{جاص}\ \frac{\text{ءص}}{\underset{٢}{\cancel{\text{٤س}^{٣}}}}$$

$$\int \frac{١}{٢}\ \text{جاص ءص} = \frac{١}{٢}\ (-\ \text{جتاص}) + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{٢}\ \text{جتا}(\text{س}^{٤} + ١) + \text{جـ}$$

سؤال : إذا علمت أن $\text{ق}(-٨) = ٥$ ، $\text{ق}(٢٧) = -٦$ ، فجد قيمة التكامل الآتي :

$$\int_{-٢}^{٣} \text{٣س}^{٢}\ \text{قَ}(\text{س}^{٣})\ \text{ءس}$$

الحل :

$\int ٣س^{٢} ق'(س^{٣})\, ءس$ نفرض ص= $س^{٣}$ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}}$

$$\int ٣س^{٢} ق'(س^{٣})\, ءس = \int \cancel{٣س^{٢}}\, ق'(ص)\, \frac{ءص}{\cancel{٣س^{٢}}}$$

$$\int ق'(ص)\, ءص = ق(ص) + جـ$$

$$\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢} ق'(س^{٣})\, ءس = ق(س^{٣}) \Big]_{-٢}^{٣} = ق((٣)^{٣}) - ق((-٢)^{٣}) = ق(٢٧) - ق(-٨)$$

$$= -٦ - ٥ = -١١$$

تطبيقات هندسية وفيزيائية

بما ان التكامل عملية عكسية للتفاضل ، فإنه يمكننا إيجاد قاعدة الاقتران ق بمعرفة ميله $ق'(س)$ عند أي نقطة على منحناه (س ، ص) وإحداثيي إحدى النقط على منحناه

سؤال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

$ق'(س) = ٢س(٤ - ٣س)$ ، فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

الحل :

$ق'(س) = ٢س(٤ - ٣س)$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$$\int ق'(س)\, ءس = \int ٢س(٤ - ٣س)\, ءس = \int (٨س - ٦س^{٢})\, ءس$$

$ق(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + جـ$ ولكن $ق(٠) = ٣$

$$ق(٠) = ٢(٠)^{٢} - (٠)^{٣} + جـ$$

$٣ = جـ$ ومنه قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$

سؤال : جد قيمة ق(١) ، علما بأن ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $٢٥(٥س + ٤)^{٤}$ ، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (−١ ، ٧)

الحل :

$\int ق'(س)\, ءس = \int ٢٥(٥س + ٤)^{٤}\, ءس$ بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين ينتج :

$$ق(س) = ٢٥ \int (٥س+٤)^{٤}\, ءس = ٢٥ \times \frac{(٥س+٤)^{٥}}{٥\times٥} + جـ = (٥س+٤)^{٥} + جـ$$

$ق(-١) = ٧$ ومنه $ق(-١) = (٥\times-١ + ٤)^{٥} + جـ$

$٧ = -١ + جـ$ ومنه $جـ = ٨$

قاعدة الاقتران هي : ق(س) = (٥س+٤)° + ٨

ق(١) = (٥×١+٤)° + ٨ ومنه ق(١) = (٩)° + ٨ = ٥٩٠٥٧

إذا كانت ع(ن) = فَ(ن)= $\frac{ءف}{ءن}$ وأن التسارع هو ت(ن)= عَ(ن) = $\frac{ءع}{ءن}$

فإنه يمكننا معرفة المسافة بمعرفة مقدار السرعة ، أو السرعة والتسارع ، ويمكن أيضا معرفة السرعة بمعرفة مقدار التسارع

سؤال : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة :

ع(ن)= (١٢ جتا(٢ن – ١)) م/ث ، جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة

الحل :

ع(ن)= ١٢ جتا(٢ن – ١)

$\frac{ءف}{ءن}$ = ١٢ جتا(٢ن – ١)

∫ ءف = ∫١٢جتا(٢ن – ١)ءن

ف(ن) = ١٢×$\frac{١}{٢}$ جا(٢ن – ١) + جـ = ٦جا(٢ن – ١) + جـ

سؤال : يتحرك جسيم على خط مستقيم ، وتعطى سرعته بالعلاقة : ع(ن) = (٢ن – ٥) م/ث ، حيث ن : الزمن بالثواني ، جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م

الحل

ع(ن) = (٢ن – ٥) ولكن ع(ن) = $\frac{ءف}{ءن}$

$\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ن – ٥

∫ ءف = ∫ (٢ن – ٥) ءن

ف = ن^{٢} – ٥ن + جـ ولكن ف(٠) = ٣

ف(٠) = (٠)^{٢} – ٥(٠) + جـ

٣ = جـ

ف(ن) = ن^{٢} – ٥ن + ٣

ف(٢)= (٢)^{٢} – ٥(٢) + ٣ = ٤ –١٠ + ٣ = –٣ م

موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة = –٣ م

سؤال : يتحرك جسيم على خط مستقيم ، وبتسارع ثابت مقداره ت(ن) = – ١٢ م /ث^{٢} ، إذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م ، فجد :

سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوان من بدء الحركة

الحل :

ت(ن) = –١٢

$\frac{دع}{دن}$ = –١٢ ومنه

دع = –١٢دن

$\int$ دع = $\int$ –١٢دن

ع = –١٢ن + جـ$_{١}$ ولكن ع(٠) = ٥

ع(٠) = –١٢ (٠) + جـ$_{١}$

٥ = جـ$_{١}$ ومنه ع(ن) = –١٢ن + ٥

ع(٤) = –١٢(٤) + ٥ = –٤٨ + ٥ = – ٤٣ م/ث

أي أن سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثواني من انطلاقها هي –٤٣ م/ث

المساحة

مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات على الفترة [أ ، ب] تعطى بالقاعدة :

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ |ق(س)| دس

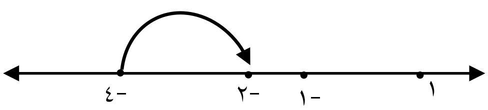
سؤال : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – ٣

والمستقيمين ، س= –٢ ، س = –٤

الحل :

ق(س) = صفر   ومنه ٣س^{٢} –٣ = ٠   ومنه ٣س^{٢}=٣ ومنه س^{٢} = ١ ، ومنه س= –١ ، س = ١

نلاحظ أن س = –١ ، س = ١ لا تقع ضمن الفترة [–٤ ، –٢]



نجري التكامل المحدد للاقتران في الفترة [−٤ ، −٢]

$$\int_{-٤}^{-٢} (\text{٣س}^{٢} - ٣)\,\text{ءس} = \Big[\text{س}^{٣} - \text{٣س}\Big]_{-٤}^{-٢} = \big((-٢)^{٣} - ٣(-٢)\big) - \big((-٤)^{٣} - ٣(-٤)\big)$$

$$= -٨ + ٦ + ٦٤ - ١٢ = ٥٠ \quad \text{،} \quad \text{المساحة المطلوبة} = \int_{-٤}^{-٢} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = ٥٠ \ \text{وحدة مربعة}$$

سؤال : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) $= \text{س}^{٢} - ٤$ ،

على الفترة [−١ ، ١]

ق(س) = صفر ومنه $\text{س}^{٢} - ٤ = ٠$ ومنه $\text{س}^{٢} = ٤$ ومنه س= −٢ ، س = ٢

نلاحظ أن س = −٢ ، ٢ لاتقع ضمن الفترة [−١ ، ١]

نجري تكامل الاقتران خلال الفترة [−١ ، ١]

$$\int_{-١}^{١} (\text{س}^{٢} - ٤)\,\text{ءس} = \Big[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{٤س}\Big]_{-١}^{١} = \Big(\frac{(١)^{٣}}{٣} - ٤(١)\Big) - \Big(\frac{(-١)^{٣}}{٣} - ٤(-١)\Big)$$

$$= \frac{١}{٣} - ٤ + \frac{١}{٣} - ٤ = \frac{٢}{٣} - ٨ = -\frac{٢٢}{٣}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_{-١}^{١} |\text{ق(س)}|\,\text{ءس} = \Big|-\frac{٢٢}{٣}\Big| = \frac{٢٢}{٣} \ \text{وحدة مربعه}$$

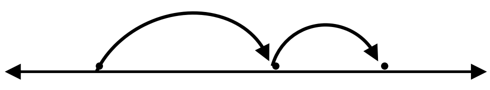
سؤال : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٦−٢س ، ومحور السينات

على الفترة [١ ، ٤]

ق(س) = ٦ − ٢س

ق(س) = صفر ومنه ٦ − ٢س = ٠ ومنه ٢س = ٦ ومنه س = ٣

نلاحظ أن س = ٣ تقع ضمن الفترة [١ ، ٤]



لذلك نوجد التكامل على الفترة [١ ، ٣]

ثم نوجدها على الفترة [٣ ، ٤]

$$\int_{١}^{٣} (٦ - \text{٢س})\,\text{ءس} = \Big[\text{٦س} - \text{س}^{٢}\Big]_{١}^{٣}$$

$$= (٦(٣) - (٣)^{٢}) - (٦(١) - (١)^{٢}) = ١٨ - ٩ - ٦ + ١ = ٤$$

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٢\text{س})\, \text{ءس} = \Big[(٦\text{س} - \text{س}^{٢})\Big]_{٣}^{٤} = \big((٦)(٤) - (٤)^{٢}\big) - \big((٦)(٣) - (٣)^{٢}\big)$$

$$= ٢٤ - ١٦ - ١٨ + ٩ = -١$$

المساحة المطلوبة = $\int_{١}^{٤} |\text{ق(س)}|\, \text{ءس} = \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس} - \int_{٣}^{٤} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٤ + ١ = ٥$ وحدة مربعة

حساب المساحة أو التكامل اعتمادا على الرسم :

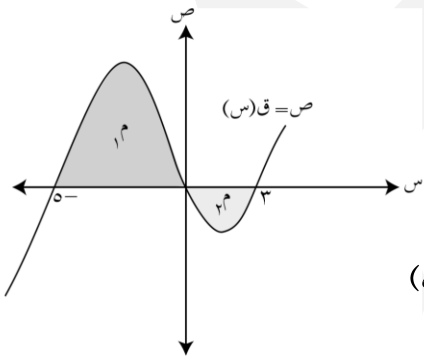
في بعض المسائل يعطى رسم للمنطقة المغلقة ويطلب حساب المساحة ضمن فترة معينة وهنا يجب أن ننتبه إذا كان الطلب حساب المساحة فإن المساحة لا يمكن أن تكون سالبة لذلك نأخذ القيمة المطلقة للمساحة ،

أما إذا كان الطلب حساب التكامل فإن التكامل يمكن أن يكون سالبا أو موجبا حسب وضعه بالنسبة لمحور السينات فإن كان فوق محور السينات فهو موجب وإن كان تحت محور السينات فهو سالب

سؤال : يمثل الشكل منحنى الاقتران ص = ق(س)

فإذا كانت المساحة $م_{١} = ١٣$ وحدة مربعة ، والمساحة $م_{٢} = ٣$ وحدة مربعة

فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$



الحل :

$$\int_{-٥}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = \int_{-٥}^{٠} \text{ق(س)}\, \text{ءس} + \int_{٠}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$$

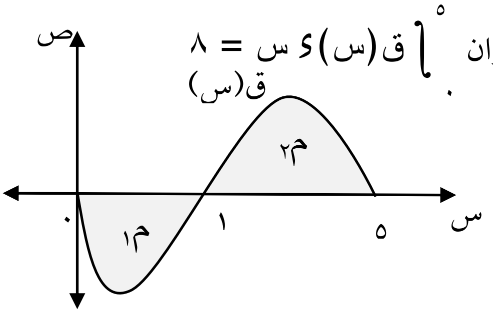
ولكن $\int_{-٥}^{٠} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ١٣$ لأن ق(س) $\geqslant$ صفر (فوق محور السينات)

وكذلك $\int_{٠}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = -٣$ لأن ق(س) $\leq$ صفر (تحت محور السينات)

$$\int_{-٥}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ١٣ - ٣ = ١٠$$

سؤال : اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات

في الفترة [٠ ، ٥] علمت إذا أن مساحة المنطقة $م_{١}$ تساوي (٤) وحدة مربعة وان $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٨$



فجد مساحة $م_{٢}$

الحل : $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\, \text{ءس} + \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

$٨ = -٤ + \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$ ومنه $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ١٢$ ومنه $م_{٢} = ١٢$

الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي : يرمز له بالرمز : (لــوهـس)

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي :

إذا كان ق(س) = لــوهـس فإن قَ(س) = $\frac{١}{س}$

وإذا كان ق(س) = لــوهـ م(س) فإن قَ(س) = $\frac{مَ(س)}{م(س)}$ حيث م(س) اقتران قابل للاشتقاق

سؤال : إذا كان ص = لــو (س^{٢} + ١٠) جد $\frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{س^{٢} + ١٠}$

سؤال : إذا كان ق(س) = لــوهـ جتاس جد قَ(س)

قَ(س) = $\frac{- جاس}{جتاس}$ = ـ ظاس

سؤال : إذا كان ق(س) = لــوهـ (أس + ٣) ، حيث أ ثابت ، وكان قَ(ـ٢)= ١ ، فجد قيمة الثابت أ

قَ(س) = $\frac{أ}{أ س + ٣}$ ولكن قَ(ـ٢) = ١

١ = $\frac{أ}{أ×ـ٢ + ٣}$ ومنه أ = ـ٢أ + ٣ ومنه ٣أ = ٣ ومنه أ = ١

سؤال : إذا كان ص = جاس لــوس

$\frac{ءص}{ءس}$ = جاس × $\frac{١}{س}$ + لــوهـس × جتاس

نظرية هامة :

∫ س$^{-١}$ ء س = ∫ $\frac{١}{س}$ ء س = لــوهـ |س| + جـ ، س ≠ ٠

سؤال : جد قيمة التكامل التالي ∫ $\frac{-٣}{س}$ ءس ، س ≠ ٠

$\int \frac{-٣}{\text{س}}\,\text{ؤس} = \int -٣\,\text{س}^{-١}\,\text{ؤس} = -٣\,(\text{لـو}\,|\text{س}|) + \text{جـ}$

سؤال : جد قيمة التكامل التالي $\int \frac{٨\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}\,\text{ؤس}$

$\int \frac{٨\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}\,\text{ؤس} = \int ٨\text{س}(\text{س}^{٢} + ٤)^{-١}\,\text{ؤس}$

نفرض ص = $\text{س}^{٢} + ٤$ فيكون $\frac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = ٢\text{س}$ ومنه $\text{ؤس} = \frac{\text{ؤص}}{٢\text{س}}$ نعوض

$\int ٨\text{س}(\text{س}^{٢} + ٤)^{-١}\,\text{ؤس} = \int \overset{٤}{\cancel{٨}}\cancel{\text{س}}\,\text{ص}^{-١}\,\frac{\text{ؤص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$= \int ٤\,\text{ص}^{-١}\,\text{ؤص} = ٤\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= ٤\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} + ٤| + \text{جـ}$

سؤال : جد قيمة التكامل التالي $\int (٣\,\text{قا}^{٢}\text{س} + \frac{٥}{\text{س}} - \text{جاس})\,\text{ؤ س}$

$\int (٣\,\text{قا}^{٢}\text{س} + \frac{٥}{\text{س}} - \text{جاس})\,\text{ؤ س} = ٣\,\text{ظاس} + ٥\,\text{لـو}\,|\text{س}| + \text{جتاس} + \text{جـ}$

سؤال : جد قيمة التكامل التالي $\int \frac{١٢\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤} + ٣}\,\text{ؤس}$

$\int \frac{١٢\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤} + ٣}\,\text{ؤس} = \int ١٢\text{س}^{٣}(\text{س}^{٤}+٣)^{-١}$

نفرض ص = $\text{س}^{٤} + ٣$ ومنه $\frac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = ٤\text{س}^{٣}$

ومنه $\text{ؤس} = \frac{\text{ؤص}}{٤\text{س}^{٣}}$ نعوض

$\int ١٢\text{س}^{٣}(\text{س}^{٤}+٣)^{-١} = \int \overset{٣}{\cancel{١٢}}\cancel{\text{س}^{٣}}\,\text{ص}^{-١} \times \frac{\text{ؤص}}{\cancel{٤\text{س}^{٣}}} = \int \frac{٣}{\text{ص}}\,\text{ؤص} = ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٤} + ٣| + \text{جـ}$

الاقتران الأسي الطبيعي يرمز له بالرمز : ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ حيث هـ العدد النيبيري

حيث ص= $\text{هـ}^{\text{س}}$ تكافيء $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}$

المشتقة الأولى للاقتران الأسي الطبيعي :

إذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ فإن قَ(س) = $هـ^{س}$ حيث هـ العدد النيبيري ويساوي ٢,٧ تقريبا

إذا كان ق(س) = $هـ^{ل(س)}$ ، فإن قَ(س) = لَ(س) $هـ^{ل(س)}$ حيث ل(س) اقتران قابل للاشتقاق

سؤال : إذا كان ص = $هـ^{٣-س^٢}$ جد صَ

صَ = -٢س $هـ^{٣-س^٢}$

سؤال : إذا كان ص= $هـ^{جتا٢س}$ جد صَ

صَ =-٢جا٢س $هـ^{جتا٢س}$

سؤال : إذا كان ص= $\frac{هـ^{٣س}}{س^٢ + ١}$ جد صَ

صَ = $\frac{(س^٢+١) \times ٣هـ^{٣س} - هـ^{٣س} \times ٢س}{(س^٢ + ١)^٢}$

سؤال : إذا كان ص= ($هـ^{س}$)(لــوس) جد صَ

صَ= $هـ^{س}$ × $\frac{١}{س}$ + لــوس × $هـ^{س}$

سؤال : إذا كان ق(س) = $هـ^{٢س^٢-١}$ ، فجد قً(س)

قَ(س) = ٤س $هـ^{٢س^٢-١}$ ومنه قً(س) = ٤س ×٤س $هـ^{٢س^٢-١}$ + ٤$هـ^{٢س^٢-١}$ = ١٦$س^٢$ $هـ^{٢س^٢-١}$ +٤$هـ^{٢س^٢-١}$

سؤال : إذا كان ق(س)= $\frac{١}{س}$ + لــوس +٧$هـ^{٢س}$+ ٦ جد قَ(س)

قَ(س) = - $\frac{١}{س^٢}$ + $\frac{١}{س}$ + ١٤$هـ^{٢س}$

سؤال : إذا كان ق(س)= $هـ^{جاس}$ - ٢ لــو(جتاس) جد قَ(س)

قَ(س) = جتاس $هـ^{جاس}$ - ٢× $\frac{-جاس}{جتاس}$ = جتاس $هـ^{جاس}$ + ٢ ظاس

نظرية هامة في تكامل الاقتران الأسي :

١) $\int$ $هـ^{س}$ ءس = $هـ^{س}$ + جـ حيث هـ العدد النيبيري

٢) $\int$ $هـ^{أس+ب}$ ءس = $\frac{هـ^{أس+ب}}{أ}$ ، حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، أ ≠ ٠

سؤال : جد قيمة التكامل التالي $\int \frac{١}{٣} هـ^{١-٦س} ءس$

$$\int \frac{١}{٣} هـ^{١-٦س} ءس = \frac{١}{٣} \times \frac{هـ^{١-٦س}}{-٦} + جـ = -\frac{١}{١٨} هـ^{١-٦س} + جـ$$

سؤال : جد قيمة التكامل التالي $\int (٢+٣س^{٢}) هـ^{س^{٣}+٢س-١} ءس$

نفرض $ص = س^{٣}+٢س-١$

ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}+٢}$ نعوض

$$\int (٢+٣س^{٢}) هـ^{س^{٣}+٢س-١} = \int \cancel{(٢+٣س^{٢})} \times هـ^{ص} \frac{ءص}{\cancel{٣س^{٢}+٢}} = \int هـ^{ص} ءص$$

$$= هـ^{ص} + جـ = هـ^{س^{٣}+٢س-١} + جـ$$

سؤال : جد قيمة ما يلي : $\int (س+١) هـ^{س^{٢}+٢س} ءس$

نفرض $ص = س^{٢} + ٢س$ ومنه $\frac{ءص}{ءس} = ٢س + ٢$ ومنه $ءس = \frac{ءص}{٢(س+١)}$ نعوض

$$\int (س+١) هـ^{س^{٢}+٢س} ءس = \int \cancel{(س+١)} \times هـ^{ص} \times \frac{ءص}{٢\cancel{(س+١)}} = \int \frac{١}{٢} هـ^{ص} ءص$$

$$= \frac{١}{٢} هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}+٢س} + جـ$$

سؤال : إذا كانت $قَ(س) = ٦ هـ^{٢س} - \frac{١}{س + هـ}$ فجد قاعدة الاقتران ق علما بأن النقطة $(٠ ، ١)$ تقع على منحنى الاقتران

الحل :

$قَ(س) = ٦ هـ^{٢س} - \frac{١}{س + هـ}$ بإجراء التكامل ينتج

$$\int قَ(س) ء س = \int \left(٦ هـ^{٢س} - \frac{١}{س + هـ} \right) ء س$$

$$ق(س) = ٦ \times \frac{هـ^{٢س}}{٢} - لو_{هـ} |س+هـ| + جـ = ٣ هـ^{٢س} - لو_{هـ} |س+هـ| + جـ$$

ولكن $ق(٠) = ١$

ق(٠) = ٣ هـ$^{٢×٠}$ ـ لـو$_{هـ}$ |٠ + هـ| + جـ　حيث لـو$_{هـ}$ هـ =١

١ = ٣ ـ ١ + جـ　ومنه جـ = ـ١

ق(س) = ٣ هـ^{٢س} ـ لـو$_{هـ}$ |س+هـ| ـ١

سؤال : تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة :

ع(ن) = هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$ ، وإن ن > ٠ ، فجد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها .

الحل :

ع(ن) = هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$

$\frac{دف}{دن}$ = هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$　ومنه دف = (هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$)دن　بإجراء التكامل ينتج

∫ د ف = ∫ (هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$)دن

ف (ن) = $\frac{هـ^{ن+١}}{١}$ + ٨ لـو$_{هـ}$ ن + جـ = هـ$^{ن+١}$+٨ لـو$_{هـ}$ ن + جـ

النمو والاضمحلال

معادلة النمو والاضمحلال :

ص = ع(ن) = ع. × هـ^{أن} ،　حيث : ص　قيمة الظاهرة المدروسة : مثلاً عدد السكان – جملة المبلغ

ع(ن) اقتران النمو أو الاضمحلال

ع. = ع (٠) = القيمة الابتدائية

هـ = العدد النيبيري ≈ ٢,٧

ن = الزمن

أ = ثابتا عدديا يمثل ثابت التناسب

ملاحظات على المعادلة :

١ – تكون المعادلة ص = ع(ن) معادلة النمو إذا كانت تزداد مع الزمن (ن) ويكون أ > ٠ ويسمى معامل النمو

٢–تكون المعادلة ص = ع(ن) معادلة الاضمحلال إذا كانت تنقص مع الزمن (ن) ويكون أ < ٠

ويسمى معامل الاضمحلال

سؤال : يتزايد ثمن تحفة بمرور الزمن ، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو ، بنسبة ٢,٥ ٪ سنويا ،

فإذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عاما

ثمن التحفة = ع(ن) = ع. × هـ^أن

ع(٨٠) = ٣٠٠٠ × (٢,٧)^٠,٠٢٥×٨٠ = ٢١٨٧٠ دينار

سؤال : يتناقص سعر سيارة بمعدل منتظم يبلغ ٤٪ سنويا ويخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال

فإذا اشترى هاشم سيارة

بمبلغ (٨٠٠٠) دينار أوجد سعر السيارة بعد مرور (٢٥)سنة

سعر السيارة = ع(ن)= ع. × هـ^أن

ع. = ٨٠٠٠ دينار ، أ = –٠,٠٤ ، ن = ٢٥ سنة

ع(٢٥) = ٨٠٠٠ × (٢,٧)^–٠,٠٤×٢٥ = ٨٠٠٠ × (٢,٧)^–١ = $\frac{٨٠٠٠}{٢,٧}$ = ٢٩٦٢,٩ دينار

سؤال : يتزايد سعر قطعة أرض وفق قانون النمو بمرور الزمن ، وبصورة مستمرة منتظمة ، فإذا ازداد سعرها

من ٤٠٠ ألف دينار

إلى ٨٠٠ ألف دينار خلال ١٠ سنوات ، فجد سعرها بعد مرور ٣٠ سنة

سعر قطعة الأرض = ع(ن) = ع. × هـ^أن

حيث ع. = ع(٠)= ٤٠٠٠٠٠ دينار

ع(١٠) = ٨٠٠٠٠٠ دينار

ع(١٠) = ٤٠٠٠٠٠ × (هـ)^أ×١٠

٨٠٠٠٠٠= ٤٠٠٠٠٠ × (هـ)^١٠أ ومنه نقسم الطرفين على ٤٠٠٠٠٠ فيكون $\boxed{٢ = (هـ)^{١٠أ}}$

عندما ن = ٣٠ سنة فإن : ع(٣٠) = ٤٠٠٠٠٠ هـ^٣٠أ = ٤٠٠٠٠٠(هـ^١٠أ)^٣

= ٤٠٠٠٠٠ $(٢)^{٣}$ = ٤٠٠٠٠٠×٨ = ٣٢٠٠٠٠٠ دينار يصبح ثمنها بعد ٣٠ سنة

مبدأ العد ومضروب العدد

١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

سؤال : حل المعادلة التالية (ن!) = ١٢٠

ومنه ١٢٠ = ٥×٤×٣×٢×١ = ٥! ومنه ن! = ٥! ومنه ن = ٥

٢٤	٢
١٢	٣
٤	٤
١	

سؤال : إذا كان ٣ × ن! = ٧٢ أوجد قيمة ن

نقسم الطرفين على ٣ فيكون ن! = ٢٤ ومنه ن! = ٤! ومنه ن = ٤

سؤال : حل المعادلة التالية (٢ن + ١)! = ١٢٠

(٢ن + ١)! = ٥! ومنه ٢ن + ١ = ٥ ومنه ٢ن = ٤ ومنه ن = ٢

سؤال : $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن} - ٢)!} = ١٢$ ومنه $\frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)\cancel{(\text{ن} - ٢)!}}{\cancel{(\text{ن} - ٢)!}} = ١٢$

ن(ن-١) = ١٢ ومنه $\text{ن}^{٢}$ - ن - ١٢ =٠

(ن - ٤)(ن +٣) = ٠ ومنه إما ن = ٤ أو ن = -٣ مرفوض

سؤال : كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } إذا سمح بتكرار الأرقام ؟

أ) ٤×٤ ب) ل(٤ ، ٢) ج) $\binom{٤}{٢}$ د) ٤×٣×٢

الحل : ٤ × ٤

سؤال : كم طريقة يمكن أن يجلس ٦ طلاب على ٦ مقاعد موضوعة بطريقة مستقيمة ؟

أ) ل(٦ ، ١) ب) ٦! ج) $\binom{٦}{١}$ د) ٣٦

الحل : ٦! ملاحظة حل آخر ل(٦ ، ٦)

التباديل

نرمز للتباديل بالرمز : **ل (ن ، ر)** حيث(ن) عدد طبيعي ويعبر عن عدد عناصر المجموعة

أما (ر) فهي عدد طبيعي يعبر عن عدد العناصر التي تم اختيارها

ويكون ل(ن ، ر) = $\frac{ن!}{(ن-ر)!}$

حيث ل(ن ، ر) = ن×(ن-١)×(ن-٢)×(ن-٣)...×(ن-ر+١)

ملاحظة هامة : نستخدم التباديل عندما يكون الترتيب مهم مثل : تكوين عدد بعدة منازل أو تكوين لجنة

فيها مناصب محددة أو توزيع أشياء على صف واحد أو تكوين كلمات من أحرف

سؤال : ما عدد تباديل مجموعة مكونة من ٩ عناصر مأخوذة ٥ في كل مرة ؟

ل(٩ ، ٥) = ٩×٨×٧×٦×٥ = ١٥١٢٠

سؤال : ما عدد تباديل مجموعة عدد عناصرها (٥) مأخوذة (٣) من العناصر في كل مرة ؟

أ) $\frac{٥!}{٢!}$ ب) $\frac{٥!}{٣!٢!}$ ج) $\frac{٥!}{٣!}$ د) ٥×٣

سؤال : جد قيمة مايلي : $\frac{ل(٨ ، ٣)}{٣!}$ = $\frac{٨×٧×٦}{٣×٢}$ = ٥٦

سؤال : جد قيمة مايلي : ٣ل(٦ ، ر) = ٩٠ ، فما قيمة ر ؟

نقسم الطرفين على ٣

ل(٦ ، ر) = ٣٠ ومنه ل(٦ ، ر) = ٦×٥

ل(٦ ، ر) = ل(٦ ، ٢) ومنه ر = ٢

سؤال : جد قيمة (ر) في مايلي ٨٠ - ٣ل(٤ ، ر) = ٠! + ٧

٨٠ - ٣ل(٤ ، ر) = ١+ ٧ ومنه ٨٠ - ٣ل(٤ ، ر) = ٨

-٣ل(٤ ، ر) = -٧٢ نقسم على -٣

ل(٤ ، ر) = ٢٤ ومنه ل(٤ ، ر) = ٤ × ٣ × ٢ ومنه ل(٤، ر) = ل(٤ ، ٣) ومنه ر = ٣

سؤال : ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة ، ونائب له ، ومدير مالي من بين ٢٠ موظفا في الشركة ، علماً بان الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة ؟

الحل : بما أن الترتيب مهم نستخدم التباديل :

ل(٢٠ ، ٣) = ٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠

سؤال : جد قيمة (ر) في مايلي ل(٨ ، ر) = ١٦٨٠

١٦٨٠	٨
٢١٠	٧
٣٠	٦
٥	٥
١	

ل(٨ ، ر) = ٨×٧×٦×٥

ل(٨ ، ر) = ل(٨ ، ٤) ومنه ر= ٤

سؤال : بكم طريقة يمكن اختيار رئيس قسم ، ومساعد له ، وامين عهدة من بين ٩ أعضاء في القسم شريطة أن لا يشغل أحدهم وظيفتين معا ؟

ل(٩ ، ٣) = ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤

سؤال : كم كلمة مكونة من ٣ أحرف مختلفة يمكن تكوينها من مجموعة الاحرف { أ ، ن ، ق ، غ ، م } ، علما بأنه ليس شرطا أن يكون للكلمة معنى ؟

الحل: ل(٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

التوافيق

ونرمز للتوافيق بالرمز : وتقرأ : (ن فوق ر) حيث :

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-١)!} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$$

ملاحظة هامة : نستخدم التوافيق عندما يكون الترتيب غير مهم مثل اختيار لجنة أو مجموعة او فريق دون تحديد مناصب معينة وكذلك عندما يطلب الإجابة على عدد من الأسئلة من مجموعة من الأسئلة وكذلك عند تحديد عدد مباريات التصفيات التي تجمع عدد من الفرق أو اللاعبين

سؤال : جد قيمة مايلي $\binom{٥}{٢} = \frac{ل(٥ ، ٢)}{٢!} = \frac{٥×٤}{٢×١} = ١٠$

سؤال : في أحد المستشفيات يراد اختيار فريق طبي خماسي لتمثيل المستشفى في مؤتمر صحي ، من بين ٥ أطباء ، و ٦ ممرضين ، بكم طريقة يمكن تكوين فريق مكون من طبيبين وثلاثة ممرضين

عدد طرائق اختيار االفريق = $\binom{٥}{٢} \times \binom{٦}{٣} = \frac{\text{ل}(٥ ، ٢)}{٢!} \times \frac{\text{ل}(٦ ، ٣)}{٣!} = ١٠ \times ٢٠ = ٢٠٠$

سؤال : عدد طرائق اختيار قلمين من علبة تحوي ١٠ أقلام يساوي :

أ) ل(١٠ ، ٢)　　ب) ١٠!　　ج) $\binom{١٠}{٢}$　　د) ١٠×٢

سؤال : حل المعادلة التالية : $\binom{٦}{٤} = \binom{٦}{س+١}$

$\binom{٦}{٤} = \binom{٦}{س+١}$ ومنه س+١ = ٤ ومنه س = ٣

أو س+١ = ٦ − ٤ ومنه س+١ = ٢ ومنه س = ٢−١ = ١

سؤال : حل المعادلة التالية :

$\binom{س}{٥} = \binom{س}{٧} \Longleftrightarrow \binom{س}{٥} = \binom{س}{س-٧}$ ومنه س − ٧ = ٥ ومنه

س = ٥ + ٧ = ١٢

سؤال : جد قيمة $\binom{٦}{٢}$ تساوي :

أ) $\frac{\text{ل}(٦ ، ٢)}{٦!}$　　ب) $\frac{٦!}{٤!}$　　ج) $\frac{\text{ل}(٦ ، ٢)}{٢!}$　　د) $\frac{٦!}{٢!}$

سؤال : جد قيمة (ن) إذا علمت أن : ن! = ل(٥ ، ٢) + $\binom{٤}{١}$

ن! = ٥×٤ + $\frac{\text{ل}(٤ ، ١)}{١!}$ = ٥×٤ + ٤ = ٢٤

ن! = ٤×٣×٢×١ = ٤! ومنه ن = ٤

المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

سؤال : إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير س معطى كما في الجدول الآتي ، فما قيمة الثابت أ ؟

س	٠	١	٢
ل(سر)	٠,٣	٠,١	أ

$\sum$ ل(سر) = ٠,٣ + ٠,١ + أ = ١ ومنه ٠,٤ + أ = ١ ومنه أ = ٠,٦

سؤال : إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى في المجموعة :

{(٠ ، ٠,٢) ، (١ ، ٠,٣) ، (٢ ، ٠,١) ، (٣، ٣ب)} ، فما قيمة الثابت ب ؟

$\sum$ ل(سر) = ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,١ + ٣ب = ١ ومنه

٠,٦ + ٣ب = ١ ومنه ٣ب = ٠,٤ ومنه ب = $\frac{٠,٤}{٣} = \frac{٤}{٣٠}$

سؤال : في تجربة رمي قطعة نقد مرتين إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة :

١) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة

٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

الحل :

١) Ω = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ،(ك ، ك) }

٢) س= { ٠ ، ١ ، ٢ }

ل(س=٠)= (ك ، ك) = $\frac{١}{٤}$

ل(س = ١) = (ص ، ك) ، (ك ، ص) = $\frac{٢}{٤}$

ل(س = ٢)= (ص ، ص) = $\frac{١}{٤}$

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

سؤال : إذا كان س متغيرا عشوائيا ذا حدين ، ومعاملاه : ن= ٦ ، أ = ٠,٧ ، فجد كلا مما يأتي :

١) ل (س = ٥)

٢) ل(س $\leqslant$ ٤)

٣) ل (س $\geqslant$ ٢)

الحل :

١- ل(س= ٥) = $\binom{٦}{٥}$(٠,٧)^{٥}(١ – ٠,٧)$^{٦-٥}$ = ٦×٠,١٦٨٠٧×٠,٣$\approx$ ٠,٣٠

٢- ل(س ⩽ ٤) = ل(س = ٤) + ل(س= ٥) + ل (س = ٦)

$$= \binom{٦}{٤}(٠,٧)^{٤}(١ - ٠,٧)^{٦-٤} + \binom{٦}{٥}(٠,٧)^{٥}(١ - ٠,٧)^{٦-٥} + \binom{٦}{٦}(٠,٧)^{٦}(١ - ٠,٧)^{٦-٦}$$

= ١٥×٠,٢٤٠١×٠,٠٩ + ٦×٠,١٦٨٠٧×٠,٣+١×٠,١١٧٦٤×١ =

= ٠,٣٢٤١+٠,٣٢٥٢٦+ ٠,١١٧٦٤ = ٠,٧٦٧

٣- ل (س ⩽ ٢) = ل(س = ٢) + ل(س= ١) + ل(س =٠)

$$= \binom{٦}{٢}(٠,٧)^{٢}(١ - ٠,٧)^{٦-٢} + \binom{٦}{١}(٠,٧)^{١}(١ - ٠,٧)^{٦-١} + \binom{٦}{٠}(٠,٧)^{٠}(١ - ٠,٧)^{٦-٠}$$

= ١٥×٠,٤٩×٠,٠٠٨١+٦×٠,٧×٠,٠٠٢٤٣+ ١×١×٠,٠٠٠٧٢٩ =

= ٠,٠٥٩٥٣٥ + ٠,٠١٠٢٠٦+ ٠,٠٠٠٧٢٩ = ٠,٠٧٠٤٧

سؤال : غرس مزارع ٧ شتلات ، وكانت نسبة احتمال نجاح غرس الشتلة الواحدة هي ٦٠٪ ما احتمال نجاح غرس ٢شتلات على الأقل

الحل :

ن = ٧ ، أ = ٠,٦٠ ، ر= ٣ ، قيم س = {٠،١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

المطلوب ل(س⩽ ٢)

ل(س⩽ ٢) = ل(س=٢)+ ل(س=٣) + ل(س=٤) + ل(س=٥) + ل (س=٦) + ل(س=٧)

ولكن $\sum$ ل($س_ر$) = ١

ل(س⩽ ٢) = ١ - (ل (س=٠) + ل(س=١))

$$=١- \binom{٧}{٠}(٠,٦)^{٠}(١ - ٠,٦)^{٧} - \binom{٧}{١}(٠,٦)^{١}(١ - ٠,٦)^{٦}$$

= ١ - ١×١×٠,٠٠١٦٣٨٤-٧×٠,٦×٠,٠٠٤٠٩٦

= ١ - ٠,٠٠١٦٣٨٤ - ٠,٠١٧٢٠٣٢ = ٠,٩٨١١

سؤال : إذا كان (س) متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن= ٣ ، أ = ٠,٣ ،

فجد ل(س > ٢)

الحل :

$$ل(س = ر) = \binom{ن}{ر}(أ)^{ر}(١ - أ)^{ن-ر}$$

ل(س $<$ ٢) = ل(س=١) + ل(س=٠)

$$= \binom{٣}{١}(٠,٣)^{١}(١ - ٠,٣)^{٢} + \binom{٣}{٠}(٠,٣)^{٠}(١ - ٠,٣)^{٣}$$

= ٣×٠,٣ ×٠,٤٩ + ١ × ١ ×٠,٣٤٣ = ٠,٤٤١ + ٠,٣٤٣ = ٠,٧٨٤

سؤال : صندوق يحتوي على (٣) كرات بيضاء و(٧) كرات حمراء ، سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع ، إذا دل المتغير العشوائي س على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، كون جدول التوزيع الاحتمالي للكتغير العشوائي س

س = {٠ ، ١ ، ٢ } فكرة مع الإرجاع أنني أسحب الكرة الأولى ثم أرجعها ثم أسحب الكرة الثانية ثم أرجعها وهكذ

ن = ٢ ، أ = $\frac{٧}{١٠}$ =٠,٧ ، حيث : ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$(أ)^{ر}(١ ـ أ)$^{ن - ر}$

ل(س = ٠)= $\binom{٢}{٠}$(٠,٧)^{٠}(١ـ ٠,٧)$^{٢-٠}$ = ١ ×١× ٠,٠٩ = ٠,٠٩

ل(س = ١)= $\binom{٢}{١}$(٠,٧)^{١}(١ـ ٠,٧)$^{٢-١}$= ٢ ×٠,٧× ٠,٣ = ٠,٤٢

ل(س = ١)= $\binom{٢}{٢}$(٠,٧)^{٢}(١ـ ٠,٧)$^{٢-٢}$= ١ ×٠,٤٩× ١ = ٠,٤٩

العلامة المعيارية

ما هي العلامة المعيارية(زس): تتعلق العلامة المعيارية بثلاثة عناصر أساسية هي :

س : وتسمى المشاهدة أو العلامة الأصلية أو العلامة الخام أو الكتلة او الطول وغيرها

$\overline{س}$: المتوسط الحسابي وهو مجموع قيم المشاهدة أو العلامات الأصلية على عددها

ع : وهو الانحراف المعياري

قانون العلامة المعيارية (زس)هو زس = $\frac{س - \overline{س}}{ع}$ حيث ع ≠ صفرا

سؤال : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) ، فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨)تساوي :

أ) ٢ ب) ٠,٤ ج) ـ ٠,٤ د) ـ٢

الحل : $ز_س = \frac{س - \overline{س}}{ع}$ ومنه $ز_{٥٨} = \frac{٥٨ - ٦٠}{٥} = -٠,٤$

سؤال : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٥) والانحراف المعياري لها (٦) ،

فجد العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معياريين

الحل :

$\overline{س} = ٦٥$ ، ع = ٦ ، معنى تنحرف فوق الوسط انحرافين معياريين $ز_س = ٢$

$ز_س = \frac{س - \overline{س}}{ع}$ ومنه $٢ = \frac{س - ٦٥}{٦}$ ومنه ١٢ = س − ٦٥

ومنه س = ٧٧

سؤال : إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص ٤٢ سنة والانحراف المعياري لها (٤) ، فإن العمر

الذي ينحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي هو :

أ) ٣٤ ب) ٥٠ ج) ٤٠ د) ٣٨

$ز_س = \frac{س - \overline{س}}{ع}$ ومنه $-٢ = \frac{س - ٤٢}{٤}$ ومنه −٨= س − ٤٢ ومنه س = ٣٤

ملاحظة : معنى ينحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي $ز_س = -٢$

سؤال : اعتمادا على الجدول الآتي ، أجب عن السؤالين الآتيين :

في أي المبحثين كان تحصيل صفاء أفضل ؟

	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	علامة صفاء
التاريخ	٦٠	٤	٦٨
الجغرافيا	٧٨	٥	٧٣

الحل :

نحسب ($ز_س$) للطالبة صفاء في مبحثي التاريخ والجغرافيا

$ز_س = \frac{س - \overline{س}}{ع}$

$ز_{٦٨} = \frac{٦٨ - ٦٠}{٤} = ٢$ أي علامة التاريخ تنحرف ٣ إنحرافات معيارية فوق المتوسط الحسابي

$ز_{٧٣} = \frac{٧٣ - ٧٨}{٥} = -١$ أي علامة الجغرافيا تنحرف علامة واحدة تحت المتوسط الحسابي

∴ تحصيل صفاء في مبحث التاريخ أفضل

سؤال : إذا كانت العلامتان ٣٢ ، ١٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ٣ ، -٣ على الترتيب فجد قيمة المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري

الحل :

$ز_{س} = \frac{س - \overline{س}}{ع}$

$٣ = \frac{٣٢ - \overline{س}}{ع}$ ومنه $٣ع = ٣٢ - \overline{س}$ .... (١)

$-٣ = \frac{١٢ - \overline{س}}{ع}$ ومنه $-٣ع = ١٢ - \overline{س}$ .... (٢)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) :

$٦ع = ٢٠$ نقسم على ٢ ومنه $ع = \frac{١٠}{٣}$ نعوض في المعادلة (١) :

$٣ \times \frac{١٠}{٣} = ٣٢ - \overline{س}$ ومنه $١٠ = ٣٢ - \overline{س}$

ومنه $\overline{س} = ٣٢ - ١٠ = ٢٢$

التوزيع الطبيعي

سؤال : إذا كان (س) متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٨٠ ، وانحرافه المعياري ٥ ، فجد :

أ) $ل(س \leqslant ٧٦)$

ب) $ل(س \leqslant ٨٨)$

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	صفر	٠,٥	٠,٨	١,٦	٢
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٧٨٨١	٠,٩٤٥٢	٠,٩٧٧٢

الحل : $\mu = ٨٠$ ، $\sigma = ٥$ ، $ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$

أ) $ل(س \leqslant ٧٦) = ل(ز \leqslant \frac{٧٦ - ٨٠}{٥}) = ل(ز \leqslant -٠,٨)$

= ل (ز ≥ ٠,٨) = ١ – ل (ز ≤ ٠,٨)

= ١ – ٠,٧٨٨١ = ٠,٢١١٩

ب)ل(س ≥ ٨٨) = ل (ز ≥ $\frac{٨٨ - ٨٠}{٥}$) = ل (ز ≥ ١,٦)

= ١ – ل (ز ≤ ١,٦) = ١ – ٠,٩٤٥٢ = ٠,٠٥٤٨

سؤال : إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي (٣,٢)كغم وانحرافه المعياري (٠,٤)كغم ، اختير أحد الاطفال عشوائيا عند الولادة ما احتمال ان يكون وزنه أكثر من (٤) كغم ؟

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل : μ = ٣,٢ ، σ = ٠,٤ ، ز = $\frac{س - \mu}{\sigma}$

ل(س ≥ ٤) = ل (ز ≥ $\frac{٤ - ٣,٢}{٤}$)

= ل (ز ≥ ٢) = (١ – ل (ز ≤ ٢)

= ١ – ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

سؤال : تتخذ أعمار ١٠٠٠٠ شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٢) سنة وانحراف معياري (٨) سنوات ، ما عدد الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن ٦٠ سنة ؟

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	٠,٨	٠,٩	١,٠	١,١	١,٢	١,٣
ل(ز)	٠,٧٨٨١	٠,٨١٥٩	٠,٨٤١٣	٠,٨٦٤٣	٠,٨٨٤٩	٠,٩٠٣٢

الحل : μ = ٥٢ ، σ = ٨ ، ز = $\frac{س - \mu}{\sigma}$

ل(س≥ ٦٠) = ل (ز ≥ $\frac{٦٠ - ٥٢}{٨}$)

= ل(ز≥ ١) = (١ – ل (ز≤ ١) = (١ – ٠,٨٤١٣) = ٠,١٥٨٧

عدد الأشخاص = ٠,١٥٨٧ × ١٠٠٠٠ = ١٥٨٧ شخص

سؤال : إذا كانت علامات امتحان عام تتبع توزيعا طبيعياً متوسطه الحسابي ٧٠ ، وانحرافه المعياري ١٠ ،

فما نسبة العلامات التي تقل عن ٦٥ ؟

يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

ز	صفر	٠,٥	١
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣

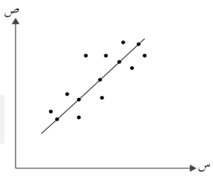
الحل : ل (س ⩽ ٦٥) = ل(ز ⩽ $\frac{٦٥ - ٧٠}{١٠}$) = ل (ز ⩽ -٠,٥)

= ل (ز ⩾ ٠,٥) = ١ - ل (ز ⩽ ٠,٥)

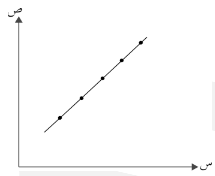
= ١ - ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥

الارتباط والانحدار

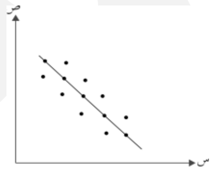
تحديد أنواع الارتباط من شكل الانتشار :



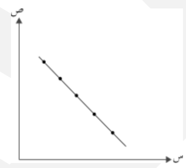
العلاقة طردية (موجبة)



العلاقة طردية تامة (موجبة)



العلاقة عكسية (سالبة)

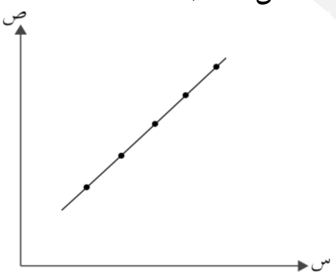


العلاقة عكسية تامة (سالبة)

لا توجد علاقة ارتباط خطي

سؤال : معتمدا شكل الانتشار المجاور الذي يبين العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، ما قيمة معامل الارتباط (ر)

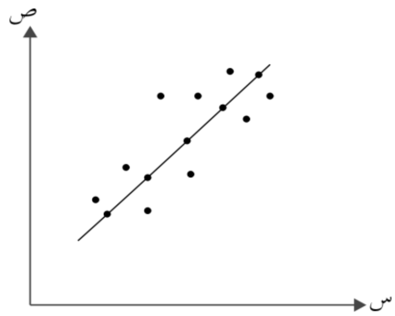
بين المتغيرين س ، ص ؟



أ) تامة ب) طردية ج) عكسية د) لا توجد علاقة

سؤال : يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص فإنه يمكن الحكم على نوع العلاقة بين

المتغيرين س ، ص على أنها :



أ) تامة ب) طردية

ج) عكسية د) لا توجد علاقة

سؤال : إذا كان س ، ص متغيرين ، وعدد قيم كل منهما (٧) ، $\sum_{\text{ك}=1}^{7}(\text{س}_{\text{ك}}-\overline{\text{س}})^{2}=4$ ،

$\sum_{\text{ك}=1}^{7}(\text{ص}_{\text{ك}}-\overline{\text{ص}})^{2}=9$ ، $\sum_{\text{ك}=1}^{7}(\text{س}_{\text{ك}}-\overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}}-\overline{\text{ص}})=2$ ،

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين ، محددا نوع العلاقة بينهما

الحل :

$$\text{ر}=\frac{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ك}}-\overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}}-\overline{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ك}}-\overline{\text{س}})^{2}\ \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{ص}_{\text{ك}}-\overline{\text{ص}})^{2}}}$$

$\text{ر}=\frac{2}{\sqrt{4\times 9}}=\frac{2}{2\times 3}=\frac{1}{3}=0{,}33$ العلاقة طردية موجبة

إذا كان س ، ص متغيرين ، وعدد قيم كل منهما (٨) ، $\sum_{\text{ك}=1}^{8}(\text{س}_{\text{ر}}-\overline{\text{س}})^{2}=200$ ،

$\sum_{\text{ك}=1}^{8}(\text{ص}_{\text{ر}}-\overline{\text{ص}})^{2}=128$ ، $\sum_{\text{ك}=1}^{8}(\text{س}_{\text{ر}}-\overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ر}}-\overline{\text{ص}})=120$ ،

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين ، محددا نوع العلاقة بينهما

$$\text{ر}=\frac{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ك}}-\overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}}-\overline{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ك}}-\overline{\text{س}})^{2}\ \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{ص}_{\text{ك}}-\overline{\text{ص}})^{2}}}$$

$\text{ر}=\frac{120}{\sqrt{200\times 128}}=\frac{120}{160}=0{,}75$ العلاقة طردية قوية

سؤال : إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص يساوي ٠,٨ ، عدلت قيم كل من المتغيرين س ، ص

حسب العلاقة $\text{س}^{*}=2\text{س}-1$ ، $\text{ص}^{*}=1-4\text{ص}$ ، فإن معامل ارتباط بيرسون بين س^{*} ، ص^{*} يساوي :

أ) ـ٠,٢		ب) ٠,٢		ج) ٠,٨		د) ـ٠,٨

الحل : نلاحظ أن معامل س هو (٢) موجب ، ومعامل ص هو (ـ٤) سالب

∴ المعاملان ليس لهما نفس الإشارة ، لذا فإن ر = ـ٠,٨

سؤال : إذا كان معامل الارتباط بين س ، ص يساوي ٠,٤ ، فجد قيمة معامل الارتباط بين س* ، ص*

حيث س* = ٥ + س　　،　　ص* = ٢ص

الحل :

نلاحظ أن معامل س هو (١) موجب ، ومعامل ص هو (٢) موجب

∴ المعاملان لهما نفس الإشارة ، لذا فإن ر = ٠,٤

سؤال : إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال(س) والأرباح السنوية لشركة

بالألف دينار (ص) هي : صَ = ٠,٣ س + ١٠ ، فجد الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها ٦٠ ألف دينار ،

وأرباحها السنوية ٢٧,٤ ألف دينار

الحل : س = ٦٠　　،　　ص ر = ٢٧,٤

صَ = ٠,٣ × ٦٠ + ١٠ = ١٨ + ١٠ = ٢٨

الخطأ في التنبؤ = ص ر − صَ = ٢٧,٤ − ٢٨ = −٠,٦

سؤال : إذا كان س ، ص متغيرين ، وعدد قيم كل منهما ٨ ، $\sum_{ك=١}^{٨}$(س ك − $\overline{س}$)٢ = ٢٠ ،

$\sum_{ك=١}^{٨}$(س ك − $\overline{س}$)(ص ك − $\overline{ص}$) = ٤٠ ، $\overline{س}$ = ١٥ ، $\overline{ص}$ = ٤٥ فجد معادلة خط الانحدار

للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س

الحل :

$$أ = \frac{\sum_{ك=١}^{ن}(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sum_{ك=١}^{ن}(س_ك - \overline{س})^٢} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$$

ب = $\overline{ص}$ − أ $\overline{س}$ = ٤٥ − ٢ × ١٥ = ١٥

معادلة خط الانحدار صَ = أس + ب هي : صَ = ٢ س + ١٥

سؤال : إذا كانت معادلة الانحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومية (س)

والمعدل التحصيلي (ص) هي :

صٌ = ٥س + ٥٧ ، فأجب عن كل مما يأتي :

١) قدر معدل طالب يدرس (٦) ساعات يوميا

٢) إذا كان معدل طالب درس (٣)ساعات يوميا (٧٠) فجد الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصل عليه

الحل :

١) عندما س = ٦ فإن صٌ = ٥ × ٦ + ٥٧ = ٣٠ + ٥٧ = ٨٧

٢) عندما س =٣ ، صر = ٧٠ فإن :

صٌر = ٥×٣ + ٥٧ = ١٥ + ٥٧ = ٧٢

الخطأ في التنبؤ = صر – صٌر = ٧٠ – ٧٢ = –٢