مكثف المنير

في الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

توجيهي أدبي – فندقي وسياحي

منهاج جديد

٢٠١٨

الأستاذ منير أبو بكر - ٠٧٧٥٤٥٧٩٢٥

النهايات

- إذا لم يحدد السؤال إيجاد النهاية من اليمين أو اليسار فإننا نوجدها من الجهتين
- تكون النهاية موجودة إذا كانت : $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س)
- إذا كانت : $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) عندها تكون النهاية غير موجودة .
- الدائرة الفارغة تعني أن الاقتران عندها غير معرف .
- الدائرة المغلقة تعني أن الاقتران معرف عند هذه النقطة .
- نأخذ بالاعتبار الدوائر المغلقة والمفتوحة فقط عند إيجاد الصورة .

سؤال : بالاعتماد على الجدول أوجد $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

اليسار ← ٣ → اليمين

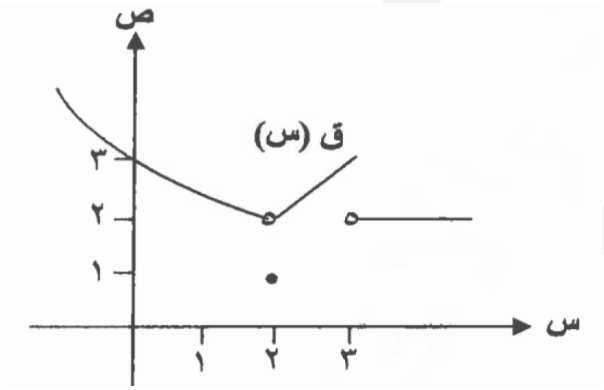
س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٥,٩٩	٥,٩٨	٥,٩٠

الحل : $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٤

سؤال : اعتماداً على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)



الحل :

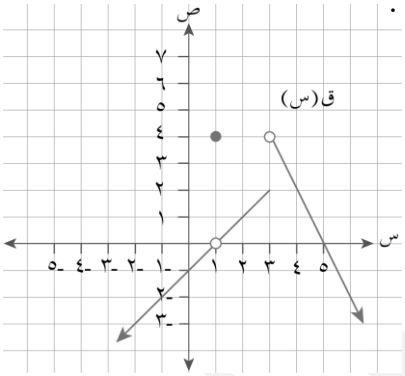
$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٢

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٣

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ٣

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) ← $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ٣

سؤال : اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد كلا مما يأتي :



١) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

٢) قيمة الثابت أ ، حيث $\lim_{س \to أ} ق(س) = ٠$

٣) قيمة الثابت ب ، حيث $\lim_{س \to ب} ق(س)$ غير موجودة

الحل :

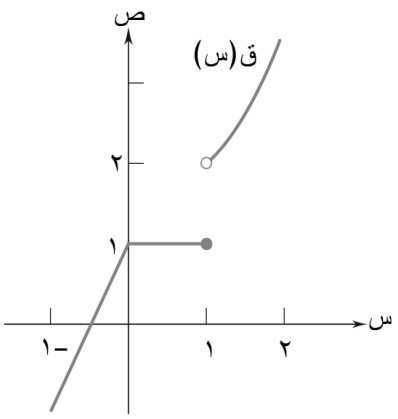
١) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١$

٢) $\lim_{س \to أ} ق(س) = -١$

نلاحظ من الشكل عندما ق(س) ⟵ ٠ فإن س ⟵ ١ وكذلك س ⟵ ٥ أي أن أ = ١ و أ = ٥

٣) نلاحظ من الشكل أن $\lim_{س \to ب} ق(س)$ غير موجودة عندما س ⟵ ٣ أي ب = ٣

سؤال: اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س)



أوجد ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ١} ق(س)$

ب) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$

ج) ق(١)

الحل :

أ) $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٢$

بما أن : $\lim_{س \to ١^-} ق(س) \neq \lim_{س \to ١^+} ق(س)$ فإن $\lim_{س \to ١} ق(س)$ غير موجودة

ب) $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} ق(س)$ فإن $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ١$

ج) ق(١) = ١

سؤال : إذا كانت $\lim_{س \to -١} [ق(س) + س^٣ - ٣] = ٥$ ، فجد قيمة $\lim_{س \to -١} ٣(ق(س))^٢$

الحل :

$\lim_{س \to -١} [ق(س) + س^٣ - ٣] = \lim_{س \to -١} ق(س) + \lim_{س \to -١} س^٣ - \lim_{س \to -١} ٣ = ٥$

$\lim_{س \to -١} ق(س) + (\lim_{س \to -١} س)^٣ - \lim_{س \to -١} ٣ = ٥$

نهـــــــا ق(س) + (-١)^{٣} -٣ = نهـــــــا ق(س) - ١-٣ = نهـــــــا ق(س) -٤= ٥
س ← -١ س ← -١ س ← -١

نهـــــــا ق(س) = ٥ + ٤ = ٩
س ← -١

نهـــــــا ٣ (ق(س))^{٢} =٣ (نهـــــــا ق(س))^{٢} = ٣ (٩)^{٢} = ٣×٨١ = ٢٤٣
س ←-١ س ←-١

سؤال :

إذا كان : ق(س) = { س^{٥} - أ ، س< ١ ; ب س^{٢} + ٧ ، س≥ ١ }

وكانت نهـــــاق(س) = ١٦ ، نهـــــاق(س) موجودة ، فما قيمة كل الثابتين : أ ، ب ؟
س←٣ س←١

الحل :

نهـــــاق(س) = ١٦ ومنه نهـــــا(ب س^{٢} + ٧) = ١٦
س←٣ س←٣

ب(٣)^{٢} + ٧ = ١٦ ومنه ٩ب = ١٦ - ٧ ومنه ٩ب = ٩ ومنه ب= ١

بما أن نهـــــاق(س) موجودة فإن نهـــــاق(س) = نهـــــاق(س)
س←١ س←١$^{-}$ س←١$^{+}$

نهـــــا(٥س - أ) = نهـــــأ(ب س^{٢} + ٧) بالتعويض
س←١$^{-}$ س←١$^{+}$

٥×١ - أ = ١(١)^{٢} + ٧ ومنه ٥- أ = ٨ ومنه أ = ٥ - ٨ = -٣

سؤال : إذا كانت نهـــــاق(س) = -٨ ، نهـــــاهـ(س) = ٤ ، فجد :
س← ٣ س← ٣

نهـــــا (ق(س) / هـ(س)) - (هـ(س))^{٢} + ٥س)
س← ٣

الحل :

(نهـــــاق(س) / نهـــــاهـ(س)) - (نهـــــاهـ(س))^{٢} + ٥نهـــــاس)
س← ٣ س← ٣ س← ٣

= -٨/٤ - (٤)^{٢} +٥×٣ = -٢ -١٦ +١٥ = -٣

سؤال : إذا كانت نهـــــــا (ل س^{٢} + ٣) = ٧ فأوجد قيمة الثابت ل
س← -١

نهـــــا (ل س^{٢} + ٣) = نهـــــا ل س^{٢} + نهـــــا ٣ = ٧
س← -١ س← -١ س← -١

$$\text{نهـــا}_{س \to -١} \; س^{٢} + \text{نهـــا}_{س \to -١} \; ٣ = ل \left(\text{نهـــا}_{س \to -١} \; (س) \right)^{٢} + \text{نهـــا}_{س \to -١} \; ٣ = ٧$$

$$ل \; (-١)^{٢} + ٣ = ٧$$

$$ل = ٧ - ٣ = ٤$$

عند دراسة نهاية الاقتران الكسري نميز أربع نواتج :

الناتج الأول : $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ وهو ناتج مقبول

الناتج الثاني : $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ وهو ناتج مقبول ويساوي الصفر

الناتج الثالث : $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ وهو ناتج غير مقبول والنهاية غير موجودة

الناتج الرابع : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهو ناتج غير مقبول ولذلك نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة بإحدى الطرق التالية :

التحليل إلى العوامل

الضرب في مرافق الجذر التربيعي

توحيد المقامات

□

سؤال : $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} = \text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{(٣س - ١٥)(\sqrt{س + ٢٠} + ٥)}{س + ٢٠ - ٢٥} = \text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{٣(س - ٥)(\sqrt{س + ٢٠} + ٥)}{س - ٥}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٥} \; ٣(\sqrt{س + ٢٠} + ٥) = ٣(\sqrt{٥ + ٢٠} + ٥) = ٣ \times ١٠ = ٣٠$$

سؤال : جد $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ الناتج غير مقبول لذلك نوحد المقامات

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٣ - (س + ١)}{٣(س + ١)(س - ٢)} = \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{٣(س + ١)(س - ٢)}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{٣(س + ١)(س - ٢)} = \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{-١}{٣(س + ١)} = \frac{-١}{٣(٢ + ١)} = \frac{-١}{٩}$$

سؤال : جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + س - ٢}{س^٢ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ غير مقبول لذلك نحلل

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س + ٢)(س - ١)}{(س+١)(س-١)} = \lim_{س \to ١} \frac{(س + ٢)}{(س+١)} = \frac{(١ + ٢)}{(١+١)} = \frac{٣}{٢}$$

سؤال : جد قيمة ما يلي : $\lim_{س \to -٥} (\frac{٢س + ١٠}{س^٢ + ٢٥} + س)$

$$\lim_{س \to -٥} (\frac{٢س + ١٠}{س^٢ + ٢٥} + س) = (\frac{٢(-٥) + ١٠}{(-٥)^٢ + ٢٥} + (-٥)) = \frac{صفر}{٥٠} - ٥ = صفر - ٥ = -٥$$

سؤال : جد قيمة النهاية في كل مما يأتي :

١) $\lim_{س \to ٥} (\frac{\sqrt[٣]{٣س + ١} + ٢س}{س - ٧} + \frac{٣}{س - ٢})$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٣(٥) + ١} + ٢(٥)}{٥ - ٧} + \frac{٣}{٥ - ٢}) = \frac{\sqrt[٣]{١٦} + ١٠}{-٢} = \frac{١٤}{-٢} = -٧$$

سؤال : $\lim_{س \to -٥} (\sqrt[٣]{٣ - س} + \frac{س+٥}{س^٢ - س})$

الحل :

$$\lim_{س \to -٥} \sqrt[٣]{٣ - س} + \lim_{س \to -٥} (\frac{س+٥}{س^٢ - س}) \quad \lim_{س \to -٥} (\sqrt[٣]{٣ - س} + \frac{س+٥}{س^٢ - س})$$

$$= \sqrt[٣]{٣ - (-٥)} + \frac{-٥+٥}{(-٥)^٢ - (-٥)} = \sqrt[٣]{٨} + \frac{صفر}{٢٥+٥} = ٢ + صفر = ٢$$

الاتصال

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند نقطة س = أ إذا تحققت ثلاثة شروط :

الشرط الأول : ق(أ) = أ

الشرط الثاني : $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) وبالتالي $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

الشرط الثالث : $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

سؤال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س < ٢ \\ ٥س - ٥ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل

ق(س) اقتران متشعب عندما س = ٢

١) ق معرف عندما س= ٢ ومنه ق(٢) = ٥×٢ -٥ = ١٠ - ٥ = ٥

٢) $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (س^٢ + ١) = (٢)^٢ + ١ = ٥

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (٥س - ٥)= ٥×٢ -٥ = ١٠ - ٥ = ٥

∴ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٥

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ٥

بما أن الاقتران ق حقق شروط الاتصال جميعها عندما س = ٢ ، فإن الاقتران ق متصل عندما س= ٢

سؤال : إذا كان :

هـ(س) = $\begin{cases} س + ٣ & ، س \neq ١ \\ ٤ & ، س = -١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = -١

الحل :

١) هـ معرف عندما س = -١ ، هـ(-١) = ٤
٢) $\lim_{س \to -١}$ هـ (س) = $\lim_{س \to -١}$ (س + ٣) = -١ + ٣ = ٢
٣) $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) ≠ هـ (-١)
∴ الاقتران هـ غير متصل عندما س = -١

سؤال : إذا كان : ق (س) = { أ س +٧ ، س ≥ ٣ ؛ س + ١ ، س < ٣ }

وكان ق متصلا عندما س = ٣ ، فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل : بما أن ق متصلا عندما س= ٣ (وهي القيمة التي يتشعب عندها ق) فإن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة

$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٣^-}$ (أس + ٧) = $\lim_{س \to ٣^+}$ (س + ١)

٣أ + ٧ = ٣ + ١ ومنه ٣أ + ٧ = ٤

٣أ= ٤ - ٧ ومنه ٣أ = -٣ ومنه أ = -١

سؤال : إذا كان ق متصلا عندما س = ٢ ، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س =٦

فما قيمة ق(٢) ؟

$\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) +س =٦ ← $\lim_{س \to ٢}$ ٢ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ س = ٦

٢ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) +٢ =٦

٢ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ ← $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢ ، وبما أن الاقتران ق متصلا عند س = ٢

ق(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢

سؤال :
إذا كان هـ (س) = س^٢ + ٦ ، ل (س) = { ٣س^٢ - س ، س ≤ ٢ ؛ س + ٨ ، س > ٢ }

وكان ق(س) = هـ(س) - ل (س) فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢

الحل :

هـ(س) متصل عند س = ٢ لأنه اقتران كثير حدود

ل(٢) = ٣(٢)^{٢} - (٢) = ١٢ - ٢ = ١٠

نهـــــا ل(س) = نهـــــا (٣س^{٢} - س) = ٣(٢)^{٢} - (٢) = ١٢ - ٢ = ١٠
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

نهـــــا ل(س) = نهـــــا (س + ٨) = ٢ + ٨ = ١٠
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

نهـــــال(س) = نهـــــا ل(س) ومنه نهـــــا ل(س) = ١٠
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{+}$ س ← ٢

بما أن نهـــــا ل(س) = ل(٢) فإن ل(س) متصل عندما س = ٢
س ← ٢

ومنه ق(س) متصل لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين

سؤال : إذا كان ق(س) = $\frac{٦ - ٣س}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$ جد قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل

الحل :

القيم التي تجعل ق(س) غير متصل هي أصفار المقام :

س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠ ومنه (س + ٥)(س - ٢) = ٠

ومنه قيم س هي : س = -٥ ، س = ٢

سؤال : إذا كان ق(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٤س + ٤}$ فإن قيمة س التي تجعل ق(س) غير متصل هي :

أ) -٤ ب) ٣ ج) -٢ د) ٢

الحل :

س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠

(س - ٢)^{٢} = ٠ ومنه س -٢ = ٠ ومنه س = ٢

سؤال : إذا كان ق(س) = $\frac{س}{(س + ١)(س - ٢)}$ فإن قيم س التي تجعل ق(س) غير متصل هي :

أ) -١ ، ٢ ب) ٠ ، -١ ، ٢ ج) ١ ، -٢ د) ٠

الحل : قيم س = -١ ، ٢

سؤال : إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ فإن قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلا هي :

أ) {٠،٥} ب) {-٥،٠} جـ) {٢،١} د) {-١،-٢}

الحل :

نوجد أصفار المقام س^{٢}-٣س+٢ = ٠ ومنه (س-١)(س-٢) = ٠ ومنه س= ١ ، س = ٢

معدل التغير

بداية يجب أن نميز بين ثلاثة مفاهيم :

الأول : مقدار التغير في س ويرمز له بـــ Δ س وتقرأ (دلتا س) حيث : $\Delta س = س_{٢} - س_{١}$

الثاني : مقدار التغير في الاقتران ويرمز له بـ Δ ص أو Δ ق(س) حيث :

$$\Delta ق(س) = ق(س_{٢}) - ق(س_{١})$$

الثالث : معدل تغير الاقتران ص= ق(س) عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{٢}$ هو :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} \quad أو \quad \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

سؤال : إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ عندما تتغير س من ٨١ إلى ٣٦ ، فإن معدل التغير للاقتران ق(س) يساوي :

أ) $\frac{١}{٥١}$ ب) -٣ ج) $\frac{١}{١٢}$ د) -٦

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٣٦) - ق(٨١)}{٣٦ - ٨١} = \frac{\sqrt{٣٦} - \sqrt{٨١}}{٣٦ - ٨١} = \frac{٦ - ٩}{-٤٥} = \frac{-٣}{-٤٥} = \frac{١}{٥١}$$

سؤال : إذا علمت أن ق(س) = ٤ $-$ ٣س وتغيرت س من ٣ إلى ٥ ، فإن قيمة Δ س هي :

أ) -٦ ب) -٢ ج) ٢ د) ٣

الحل :

$\Delta س = س_{٢} - س_{١} = ٥ - ٣ = ٢$

سؤال : إذا كان ق(س) = ٨ $س^{٢}$ ، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين : (٠ ، ق(٠)) ، (٣ ، ق(٣))

الحل :

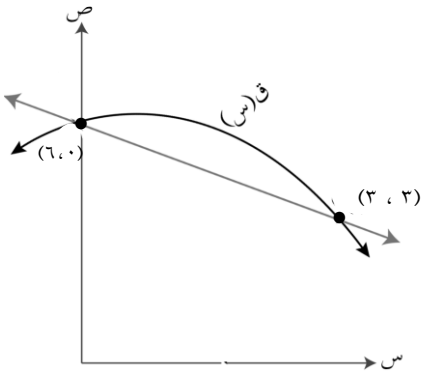
$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٨(٣)^{٢} - ٨(٠)^{٢}}{٣ - ٠} = \frac{٧٢ - ٠}{٣} = ٢٤$$

سؤال : إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين : أ(٣ ، ٧) ، ب(-١، ل) ، وكان ميل القاطع أب يساوي (-٣) فجد قيمة ل

الحل :

ميل القاطع = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ومنه $\frac{ل - ٧}{-١ - ٣} = -٣$ ومنه ١٢ = ل − ٧ ومنه ل = ١٩

سؤال : معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، ما ميل القاطع المار بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (٠ ، ٦) ؟



ميل القاطع = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٦}{٠ - ٣} = \frac{-٣}{٣} = -١$

سؤال : مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١)سم إلى (٣) سم جد مقدار التغير في الحجم

بفرض ح هو حجم المكعب نكتب : ح = $س^٣$

$\Delta ح = ح(س_٢) - ح(س_١) = ح(٣) - ح(١) = (٣)^٣ - (١)^٣ = ٢٧ - ١ = ٢٦$ $سم^٣$

إذا طلب في المسألة إيجاد معدل التغير في الحجم نكتب : معدل التغير = $\frac{\Delta ح}{\Delta س} = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$

سؤال : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران ف(ن) = $ن^٢ + ٧$ ، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥]

الحل :

$\overline{ع} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{(٥)^٢ + ٧ - ((٢)^٢ + ٧)}{٣}$

$= \frac{٣٢ - ١١}{٣} = \frac{٢١}{٣} = ٧$

المشتقة الأولى

إذا كان لدينا اقتران ص = ق(س) معرف على الفترة [أ ، ب] فإن المشتقة الأولى للاقتران باستخدام التعريف العام هي :

$$ق`(س) = \text{نهـ}_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

بوضع ع = س + هـ نعبر عن المشتقة الأولى بالعلاقة :

$$ق`(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

سؤال : إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ ، فجد ق`(س) باستخدام التعريف

$$ق`(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} (ع + س) = س + س = ٢س$$

سؤال : باستخدام التعريف العام للمشتقة ، جد المشتقة الاولى للاقتران : ق(س) = $\sqrt{٢س+١}$ ، س ≥ -١

$$ق`(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق`(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع + ١} - \sqrt{٢س + ١}}{ع - س}$$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$ق`(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع + ١} - \sqrt{٢س + ١}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع + ١} + \sqrt{٢س + ١}}{\sqrt{٢ع + ١} + \sqrt{٢س + ١}}$$

$$= ق`(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ع + ١ - س - ١}{(ع - س)(\sqrt{٢ع + ١} + \sqrt{٢س + ١})}$$

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{٢ع + ١} + \sqrt{٢س + ١})} = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{٢ع + ١} + \sqrt{٢س + ١}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢س + ١} + \sqrt{٢س + ١}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢س + ١}}$$

سؤال : إذا كان ق(س) = $\frac{١}{١-٣س}$ ، س ≠ $\frac{١}{٣}$ فجد قَ(س) باستخدام التعريف ،ثم جد قَ($\frac{١}{٢}$)

$$قَ(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\frac{١}{١-٣ع} - \frac{١}{١-٣س}}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(١-٣س)-(١-٣ع)}{هـ(١-٣ع)(١-٣س)} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{١-٣س-١+٣ع}{هـ(١-٣ع)(١-٣س)}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{-٣س+٣ع}{(ع - س)(١-٣ع)(١-٣س)} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٣(ع - س)}{(ع - س)(١-٣ع)(١-٣س)}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٣}{(١-٣ع)(١-٣س)} = \frac{٣}{(١-٣س)(١-٣س)} = \frac{٣}{(١-٣س)^{٢}}$$

$$قَ(\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{(١-٣\times\frac{١}{٢})^{٢}} = \frac{٣}{(١-٣\times\frac{١}{٢})^{٢}} = \frac{٣}{\frac{١}{٤}} = ١٢$$

سؤال : إذا علمت أن ق(س) اقتران كثير حدود فإن $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$ تساوي :

أ) ق(٠) ب) قَ(٠) ج) ق(١) د) قَ(١)

الحل : قَ(١)

سؤال : إذا كان ص = ق(س) ، وكان مقدار تغير الاقتران ق(س) هو $س^{٢}هـ - ٢س هـ^{٢}$ فجد قَ(س)

مقدار تغير الاقتران هو Δ ص = Δ ق(س) = $س^{٢}هـ - ٢س هـ^{٢}$

$$قَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ق(س)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{س^{٢}هـ - ٢س هـ^{٢}}{هـ}$$

$$قَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ(س^{٢} - ٢س هـ)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} (س^{٢} - ٢ س هـ)$$

$$= س^{٢} - ٢س \times ٠ = س^{٢}$$

قواعد الاشتقاق

قاعدة الاشتقاق الأولى

♦ مشتقة العدد الثابت أي:

إذا كان ق(س) = جـ فإن قَ(س) = صفر حيث جـ عدد ثابت

مثال : إذا كان ق(س) = ٣ فإن قَ(س) = صفر

♦ مشتقة اقتران ذو أس نوني أي :

إذا كان ق(س) = س^{ن} فإن قَ(س) = ن س$^{ن-١}$ حيث ن ∈ ح

مثال : ق(س) = س^{٣} فإن قَ(س) = ٣س$^{٣-١}$ = ٣س^{٢}

♦ مشتقة جداء عدد ثابت باقتران قابل للاشتقاق أي :

إذا كان ق(س) = ﺃ هـ(س) فإن قَ(س) = ﺃ هـَ(س) حيث ﺃ عدد ثابت

مثال : إذا كان ق(س) = ٤س^{٥} فإن قَ(س) = ٤ × ٥س$^{٥-١}$ = ٢٠س^{٤}

قاعدة الاشتقاق الثانية

♦ مشتقة مجموع اقترانين :

ل(س) = ق(س) + هـ(س) ⟵ لَ(س) = قَ(س) + هـَ(س)

♦ مشتقة فرق اقترانين:

ل(س) = ق(س) − هـ(س) ⟵ لَ(س) = قَ(س) − هـَ(س)

قاعدة الاشتقاق الثالثة

مشتقة حاصل جداء اقترانين :

إذا كان ص = ق(س) × هـ(س) فإن :

$\frac{د ص}{د س}$ = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س) أي :

مشتقة جداء اقترانين = الأول بمشتقة الثاني + الثاني بمشتقة الأول

قاعدة الاشتقاق الرابعة

مشتقة خارج قسمة اقترانين : إذا كان ص = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠ فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{هـ(س) \times قَ(س) - ق(س) \times هـَ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$$ أي أن :

مشتقة قسمة اقترانين = $\frac{\text{المقام بمشتقة البسط - البسط بمشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

نتيجة هامة

إذا كان لدينا اقتران كسري ق(س) = $\frac{جـ}{هـ(س)}$ بسطه عدد ثابت وليكن جـ فإن :

$$قَ(س) = \frac{- جـ \times هـَ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$$

سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

ص = $(٣س^{٢} + ٧)(س^{-٥} + ٣)$

$\frac{د ص}{د س} = (٣س^{٢} + ٧) \times (-٥س^{-٦}) + (س^{-٥} + ٣) \times (٦س)$

إذا كانت ص = $\frac{س^{٣} - ١}{٢س + ٦}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{\text{المقام بمشتقة البسط - البسط بمشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{(٢س+٦)(٣س^{٢}) - (س^{٣} - ١)(٢)}{(٢س+٦)^{٢}} = \frac{٦س^{٣} + ١٨س^{٢} - ٢س^{٣} + ٢}{(٢س+٦)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٣} + ١٨س^{٢} + ٢}{(٢س+٦)^{٢}}$

سؤال : إذا علمت أن ق(س) = س^{٢} + ١ فجد قيمة نهـــــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(٩+هـ) - ق(٩)}{هـ}$

هذه المشتقة الأولى لـــق(س) عندما س=٩

قَ(س) = ٢س ⟵ قَ(٩) = ٢×٩=١٨

سؤال : إذا كان ص= $\frac{٥}{س^٢ + ١}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند س= ٢

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٥ \times ٢س}{(س^٢ + ١)^٢} = \frac{-١٠س}{(س^٢ + ١)^٢}$$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٢} = \frac{-١٠ \times ٢}{(٢)^٢ + ١)^٢} = \frac{-٢٠}{٢٥} = -\frac{٤}{٥}$$

سؤال : إذا كان ص= $\frac{س}{س + ١} + \sqrt{٤س^٢ + ٣}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{(س + ١)(١) - (س)(١)}{(س + ١)^٢} + \frac{٨س^٢}{٢\sqrt{٤س^٢ + ٣}}$$

$$= \frac{١}{(س + ١)^٢} + \frac{٤س^٢}{\sqrt{٤س^٢ + ٣}}$$

سؤال : إذا علمت أن ق(س) = $\sqrt[٦]{س}$ فجد قيمة نهـــــا $\frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$ (هـ ← ٠)

نلاحظ أن هذا هو قانون المشتقة الأولى عند النقطة س = ١

لذلك نشتق ق(س) ثم نعوض س=١ بالمشتقة

ق(س) = $\sqrt[٦]{س} = س^{\frac{١}{٦}} \longleftarrow$ قَ(س) = $\frac{١}{٦} س^{\frac{١}{٦} - ١} = \frac{١}{٦} س^{-\frac{٥}{٦}} = \frac{١}{٦} \times \frac{١}{\sqrt[٦]{س^٥}}$

قَ(١) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{\sqrt[٦]{س^٥}} = \frac{١}{٦} \times \frac{١}{\sqrt[٦]{(١)^٥}} = \frac{١}{٦}$

سؤال : إذا كان : ص=٤ع −ع^٢ ، ع = ٨−٢س ، جد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د ع} = ٤ - ٢ع$ ، $\frac{د ع}{د س} = -٢$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = (٤ - ٢ع)(-٢) = -٨ + ٤ع$$

$$\frac{د ص}{د س} = -٨ + ٤(٨ - ٢س) = -٨ + ٣٢ - ٨س = ٢٤ - ٨س$$

سؤال : إذا كان ص = $(٢س^{٢} - ٣)^{\frac{٣}{٢}}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{٢}(٢س^{٢} - ٣)^{\frac{١}{٢}} \times ٤س = \frac{١٢}{٢}$ س$(٢س^{٢} - ٣)^{\frac{١}{٢}} = ٦س\sqrt{٢س^{٢} - ٣}$

سؤال : إذا كان : ص = $\sqrt[٦]{٣س^{٢} + ١}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

نجهز الجذر : ص = $(٣س^{٢} + ١)^{\frac{١}{٦}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٦}(٣س^{٢} + ١)^{-\frac{٥}{٦}} \times (٦س) =$ س$(٣س^{٢} + ١)^{-\frac{٥}{٦}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{س}{\sqrt[٦]{(٣س^{٢} + ١)^{٥}}}$

سؤال : إذا كان ص = $\sqrt{س^{٢} - س + ٣}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢س - ١}{٢\sqrt{س^{٢} - س + ٣}}$

سؤال : إذا كان ص = $\sqrt[٣]{٢ - س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

ص = $\sqrt[٣]{٢ - س} = (٢ - س)^{\frac{١}{٣}} \longleftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٣}(٢ - س)^{-\frac{٢}{٣}} \times -١$

$\frac{د ص}{د س} = -\frac{١}{٣}(٢ - س)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{-١}{٣\sqrt[٣]{(٢-س)^{٢}}}$

إذا كان ص = س^{٢}جاس + ظاس ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} =$ س^{٢}جتاس + ٢س جاس + قا^{٢}س

سؤال : إذا كان ص = جا^{٥}س فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٥$ جتا^{٥}س

سؤال : إذا كان ص = جا$(٥س^{٢} + ١)$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٠$س جتا$(٥س^{٢} + ١)$

سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لما يأتي :

ص = ظا^{٣}س

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣ظا^{٢}س قا^{٢}س

سؤال : ص = س^{٢} جا٥س فجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = س^{٢}×٥جتا٥س + جا٥س × ٢س

= ٥س^{٢}جتا٥س + ٢س جا٥س

سؤال : إذا كان ق(س) = ٢جتا٣س ، فإن قَ(س) تساوي :

أ) −٢جا٣س ب) ٢جا٣س ج) ٦جا٣س د) −٦ جا٣س

الحل : قَ(س) = ٢×٣ × − جا٣س = −٦ جا٣س

سؤال : ص = (جتا٢س)^{٦}

$\frac{د ص}{د س}$ = ٦(جتا٢س)^{٥} × − جا٢س × ٢ = −١٢جا٢س(جتا٢س)^{٥}

سؤال : إذا كان ق(س) = أ^{٢}س^{٣} − ١٢ س^{٢} فجد قيمة (قيم)الثابت أ التي تجعل قً(١)= صفراً

قَ(س) = أ^{٢}×٣س^{٢}− ١٢×٢ س = ٣ أ^{٢} س^{٢} − ٢٤س

قً(س) = ٣ أ^{٢}×٢س − ٢٤ = ٦ أ^{٢}س − ٢٤ ⟵ قً(١) = ٦أ^{٢}(١) − ٢٤ = صفر

ومنه ٦أ^{٢} = ٢٤ ⟵ أ^{٢} = ٤ ⟵ أ = ± ٢

سؤال : إذا كان ص= جتا٤س ، فإن قً(س) تساوي :

أ) −٤جا٤س ب) ١٦ جتا٤س ج) −١٦جتا٤س د) −١٦جا٤س

قَ(س) = −٤جا٤س

قً(س) = −١٦ جتا٤س

سؤال : إذا كان ق(س) = ٣أ س^{٣} − ٢ب س + ١ وكان قَ(٠)= ٤ ، قً(١)=٣٦ فجد قيم أ ، ب

قَ(س) =٣أ×٣س^{٢} −٢ب = ٩أ س^{٢} − ٢ب

قَ(٠) = ٩أ(٠)^{٢} − ٢ب = ٤ ⟵ ب = − $\frac{٤}{٢}$ = −٢

قً(س) = ٩أ×٢س = ١٨أ س

قً(١) = ١٨أ(١) = ٣٦ ⟵ أ = $\frac{٣٦}{١٨}$ = ٢

سؤال : إذا كان ق(س) = جتا٢س ، فجد قً(س) + ٦ق(س)

قَ(س) = -٢جا٢س ⟵ قً(س) = -٤جتا٢س

قً(س) + ٦ق(س) = -٤جتا٢س +٦جتا٢س = ٢جتا٢س

سؤال : إذا كان ق(س) = س٢جاس ، فجد قً(س)

قَ(س) = س٢ × جتاس + جاس × ٢س = س٢جتاس + ٢س جاس

قً(س) = س٢ ×- جاس + جتاس × ٢س + ٢س× جتاس + جاس ×٢

= - س٢جاس +٢س جتاس +٢جاس + ٢جاس = - س٢جاس + ٤س جتاس + ٢جاس

سؤال : إذا كان ق(س) = جا٣س ، فإن $\text{نهـ}_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$ تساوي :

أ) -جتا٣س (ب) ٣جتا٣س جـ) ٣جا٣س د) جتا٣س

ب)

الحل : $\text{نهـ}_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$ = قَ(س) = ٣جتا٣س

التفسير الهندسي و الفيزيائي للمشتقة

ميل المماس = نهـــــــا $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = قَ(س)
$\Delta س \leftarrow ٠$

أي أن ميل المماس لمنحنى الاقتران هو المشتقة الأولى للاقتران

يطلب في بعض المسائل إيجاد معادلة المماس المار بالنقطة (س١ ، ص١) :

ص – ص١ = م(س – س١)

سؤال : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢س - ١}$ عندما س = صفر

الحل :

قَ(س) = $\frac{٢ \times ١-}{(٢س - ١)^{٢}}$

قَ(٠) = $\frac{٢ \times ١-}{(٢ \times ٠ - ١)^{٢}}$ = ٢-

ص = ق(٠) = $\frac{١}{٢ \times ٠ - ١}$ = ١- نقطة التماس (٠ ، ١-)

معادلة المماس : ص – ص١ = م(س – س١)

ص – ١- = ٢-(س – ٠) ومنه ص+١ = ٢-س

سؤال : إذا كان ق(س) = س + $\sqrt{٢س}$ فإن ميل المماس لمنحنى الاقتران عندما س = ١ يساوي :

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{١}{٣}$- جـ) $\frac{١}{٩}$ - د) ١

ميل المماس = قَ(١)

قَ(س) = ١ + $\frac{١}{\sqrt{٢س}}$

قَ(١) = ١ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

سؤال : إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة :

ف(ن) = ٣ن^{٢} – ٣ن + ٢ ، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

الحل :

المسافة ف(ن)= ٣ن^{٢} – ٣ن + ٢

السرعة ع(ن)= فَ(ن)= ٦ن – ٣

السرعة بعد مرور ثانيتين = ع(٢)= ٦(٢) – ٣ = ١٢ – ٣ = ٩

سؤال : تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة : ف(ن) = ن^{٢} + ٤ ، متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن ٤ ثوان ؟

ع(ن)= فَ(ن) = ٢ن ⟵ عندما ن = ٤ ⟵ ع(٤)=٢(٤) = ٨

$$\overline{ع} = \frac{ف(ن) - ف(٠)}{ن - ٠}$$

$$٨ = \frac{ن^{٢}+٤ - ٤}{ن - ٠}$$ ⟵ ن^{٢}= ٨ن ⟵ ن^{٢}– ٨ن =٠ ومنه ن(ن – ٨) = ٠

ن = ٠ مرفوض ، ن = ٨ ث

سؤال : يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢} – ن+٥ ، حيث ن الزمن بالثواني ،ف المسافة بالأمتار فإن تسارع هذا الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة يساوي :

أ) ٢م/ث^{٢} ب) ٤م/ث^{٢} ج) ٥ م/ث^{٢} د) ٦ م/ث^{٢}

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٢ن – ١

ت(ن) = عَ(ن) = ٢ ومنه ت(٣) = ٢ م/ث^{٢}

سؤال : إذا كانت ف (ن) = ن^{٣} – ٩ن^{٢} + ١٥ن هي المسافة التي يقطعها جسيم ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته

الحل :

المسافة ف (ن) = ن^{٣} – ٩ن^{٢} + ١٥ن

السرعة = ع(ن) = فَ (ن) = ٣ن^{٢} – ١٨ن + ١٥

عندما تنعدم السرعة فإن : ع(ن) = ٠

٣ن^{٢} – ١٨ن + ١٥ = ٠ نقسم المعادلة على ٣ فيكون :

ن^{٢} – ٦ن + ٥ = ٠ ومنه (ن –٥)(ن –١) = ٠ ومنه ن = ٥ ، ن =١

التسارع ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن ـ ١٨ ، عندما ن= ٥ فإن :

ت(٥) = ٦(٥) ـ ١٨ = ٣٠ ـ ١٨ = ١٢ م/ث^{٢}

وعندما ن = ١ فإن : ت(١) = ٦(١) ـ١٨ = ٦ ـ١٨ = ـ١٢ م/ث^{٢}

التزايد والتناقص والقيم القصوى

لإيجاد التزايد والتناقص للاقتران ق نقوم بالخطوات التالية :

١- نشتق الاقتران ق(س)
٢- نجعل المشتقة مساوية للصفر أي قَ(س) = صفر ثم نوجد قيم س
٣- ندرس إشارة المشتقة الأولى حول أصفار هذه المشتقة
٤- عندما قَ(س) > صفر (أي المشتقة موجبة) يكون الاقتران متزايد ضمن هذه الفترة
وعندما قَ(س) < صفر (أي المشتقة سالبة) يكون الاقتران متناقص ضمن هذه الفترة
وعندما قَ(س) = صفر (أي المشتقة منعدمة) يكون الاقتران ثابت ضمن هذه الفترة

سؤال : إذا كان ق(س) = (٢س ـ ٤)^{٢} فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

قَ(س) = ٢(٢س ـ ٤)×٢ = ٨س ـ ١٦

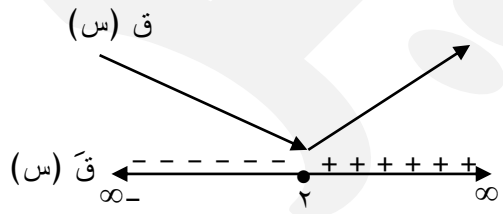
قَ(س) = ٠ ومنه ٨س ـ١٦ = ٠ ومنه ٨س = ١٦ ومنه س = ٢

نأخذ قيمة س <٢ ولتكن س = ١

قَ(١) = ٨×١ ـ ١٦ = ـ٨ < ٠

نأخذ قيمة س > ٢ ولتكن س = ٣

قَ(٣) = ٨×٣ ـ ١٦ = ٨ > ٠

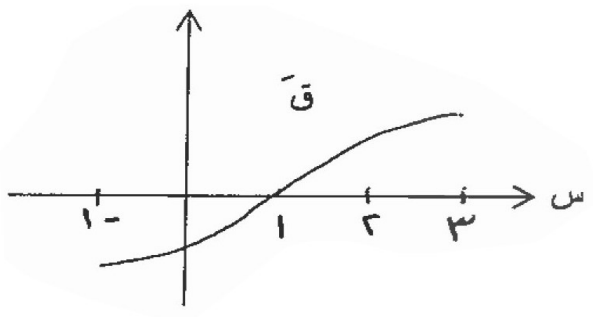


يكون الاقتران متناقص على الفترة (ـ∞ ، ٢] ويكون متزايد على الفترة [٢ ، ∞)

سؤال : اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س) في الفترة [ـ١ ، ٣]

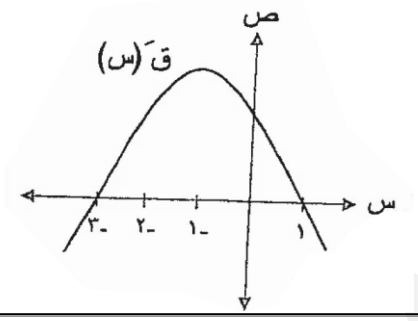
يكون الاقتران ق(س) متزايداً في الفترة :

أ) [ـ١ ، ٣] ب) [١ ، ٣]
ج) [ـ١ ، ١] د)[٠ ، ٣]



الحل : فترات التزايد هي : [١ ، ٣]

سؤال : معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س)



جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

فترات التزايد : [-٣ ، ١]

فترات التناقص (-∞ ، -٣] ، [١ ، ∞)

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى :

لإيجاد القيم القصوى للاقتران ص = ق(س) حسب اختبار المشتقة الأولى نقوم بما يلي :

١- نشتق الاقتران ق(س)

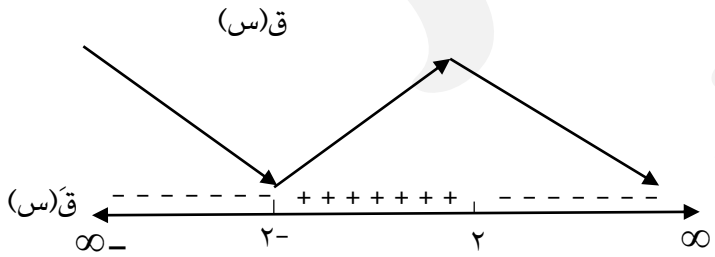
٢- نجعل المشتقة مساوية للصفر أي قَ(س) = صفر ثم نحل المعادلة ونوجد قيم س

٣- ندرس إشارة المشتقة الأولى حول أصفار هذه المشتقة

٤- إذا تغيرت إشارة المشتقة الأولى عند نقطة معينة من موجبة إلى سالبة فإن هذه النقطة تمثل قيمة عظمى محلية للاقتران ق

٥- إذا تغيرت إشارة المشتقة الأولى عند نقطة معينة من سالبة إلى موجبة فإن هذه النقطة تمثل قيمة صغرى محلية للاقتران ق

سؤال : إذا كان ق(س) = ٢س(١٢ - س^{٢}) فجد كلاً مما يأتي :



١) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق

٢) قيم س الحرجة للاقتران ق

٣) القيم القصوى للاقتران ق ، محدداً نوعها

الحل:

١) ق(س) = ٢٤س -٢س^{٣}
قَ(س) = ٢٤ - ٦س^{٢}

قَ(س) = ٠ ومنه ٢٤ - ٦س^{٢} = ٠ ومنه ٦س^{٢} = ٢٤ ومنه س^{٢} = ٤

س = -٢ ، س = ٢ وهي الأعداد الحرجة

نلاحظ من خط الأعداد أن الاقتران متناقص على الفترتين : $(-\infty ، -٢]$ ، $[٢ ، \infty]$

ويكون الاقتران متزايد على الفترة $[-٢ ، ٢]$

٢) قيم س الحرجة هي : س = $\{-٢ ، ٢\}$

٣) توجد قيمة صغرى محلية عندما س = -٢ قيمتها :

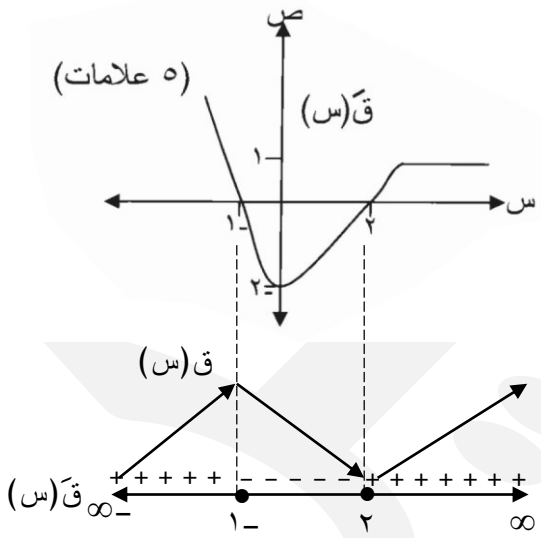
ق(-٢) = $٢٤(-٢) - ٢(-٢)^{٣}$ = $-٤٨ + ١٦ = -٣٢$ وبالتالي النقطة الحرجة هي $(-٢، -٣٢)$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٢ قيمتها :

ق(٢) = $٢٤(٢) - ٢(٢)^{٣}$ = $٤٨ - ١٦ = ٣٢$ وبالتالي النقطة الحرجة هي $(٢ ، ٣٢)$

سؤال : اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س)

المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية جد ما يلي :



أ) قيم س الحرجة للاقتران ق

ب) أنواع القيم القصوى (إن وجدت)

الحل :

أ) القيم س الحرجة هي : -١ ، ٢

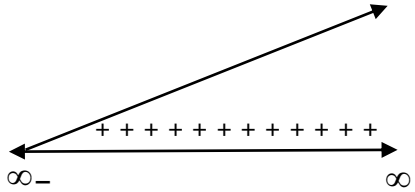
ب) توجد قيمة عظمى محلية عند س = -١

وتوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٢

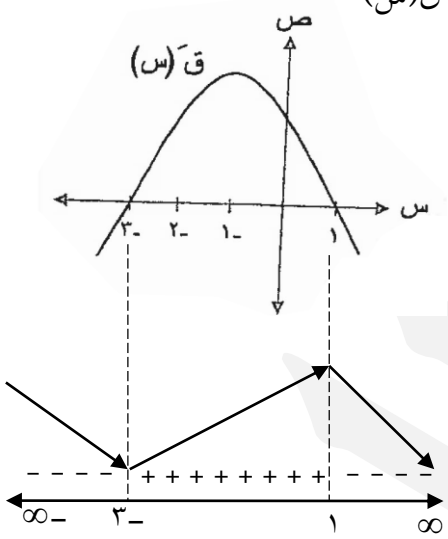
سؤال : بين أن الاقتران ق(س) = $س^{٥} + ٢س$ متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية

قَ(س) = $٥س^{٤} + ٢$ نلاحظ أن $٥س^{٤} + ٢ >$ صفر لجميع قيم س

ومنه الاقتران متزايد على الفترة $[-\infty ، \infty]$



سؤال : معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س)



المعرف على ح ، أجب عما يأتي :

ا) كم عدد القيم الحرجة للاقتران ق ؟

٢) اكتب قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى وبين نوعها

الحل :

١) قيم س الحرجة هي : -٣ ، ١

٢) توجد قيمة صغرى محلية عند س = -٣ وتوجد قيمة عظمى محلية عند س = ١

سؤال : إذا كان ق اقتراناً متصلاً ، وكان قَ(س) = (س+٣)(س-١) ، فإن مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق هي :

أ) {١ ، ٣} ب) { -٣ ، -١} ج) { -١ ، ٣} د) { -٣ ، ١}

قَ(س) = ٠

(س+٣)(س-١) = ٠ ومنه س = -٣ ، س = ١ قيم س الحرجة هي { -٣ ، ١}

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى :

عندما نلجأ لاختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى فلا داعي لرسم خط الأعداد أو جدول الإشارات للمشتقة الأولى

ويتلخص اختبار المشتقة الثانية كما يلي :

نقوم بإيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق ونجعلها قَ(س) = صفر وبالتالي إيجاد قيم س الحرجة بفرض س = جـ

ثم نقوم بإيجاد المشتقة الثانية وتعويض قيم س الحرجة بها

فإذا كانت قً(جـ) > صفر فإن ق(جـ) هي قيمة صغرى محلية للاقتران ق

وإن كانت قً(جـ) < صفر فإن ق(جـ) هي قيمة عظمى محلية للاقتران ق

وإن كانت قً(جـ) = صفر فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل ، ونعيد الحل باختبار المشتقة الأولى

سؤال : إذا كان ق(س) = ٦س – س^{٢} ، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عندما س تساوي :

أ) ٦ ب) صفر ج) –٣ د) ٣

الحل :

قَ(س) = ٦ – ٢س ومنه ٦ – ٢س = ٠ ومنه ٢س = ٦ ومنه س = ٣

قً(س) = –٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٣

سؤال : إذا كان للاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – أس +٤ قيمة حرجة عندما س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ

الحل :

قَ(س) = ٦س – أ

قَ(س) = صفر

٦س – أ = صفر ⟵ أ = ٦س بما أن قَ(٢) = صفر أ ي عندما س =٢ ⟵ أ = ٦ × ٢ = ١٢

سؤال : بالاعتماد على جدول الإشارات المجاور

س	∞–		٢–		٤		∞
قَ(س)	+ + + +		– – – –		+ + + +		
ق(س)		↗		↘		↗	

فإن للاقتران ق(س) قيمة عظمى عندما س تساوي :

أ) –٢ ب) صفر

ج) ١ د) ٤

الحل : من جدول الإشارات توجد قيمة عظمى عندما س = –٢

سؤال : جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لما يلي :

ق(س) = ٢س^{٣} – ٦س

قَ(س) = ٦س^{٢} – ٦

قَ(س) = ٠ ومنه ٦س^{٢} –٦ =٠ ومنه س٢ =١ ومنه : س =١ ، س =–١

قً(س) = ١٢س

قً(١) = ١٢ × ١ = ١٢ > ٠ توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ١ قيمتها :

ق(١) = ٢(١)^{٣} – ٦(١) = ٢ – ٦ = –٤ ومنه النقطة الحرجة هي (١ ، –٤)

قً(–١)= ١٢×–١ = –١٢ < ٠ توجد قيمة عظمى محلية عندما س = –١ قيمتها :

ق(–١) = ٢(–١)^{٣} – ٦(–١) = –٢ + ٦ = ٤ ومنه النقطة الحرجة هي (١ ، ٤

تطبيقات على القيم القصوى

في هذه المسائل يقسم السؤال إلى قسمين :

القسم الأول : هو قسم **المعطيات** الذي على أساسه نضع **الفرضيات**

مثلاً : ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما ٥٠ ⟵ هذه هي **المعطيات**

نضع الفرضيات : حيث نفرض العدد الأول س والعدد الثاني ص فيكون س + ص = ٥٠

ثم نوجد ص بدلالة س فيكون ص= ٥٠ – س

القسم الثاني : **الطلبات** والتي على أساسها نشكل **المعادلة**

تتمة للمثال السابق : وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ⟵ هذه هي الطلبات

نشكّل المعادلة : بفرض (ح) حاصل ضرب العددين تكون المعادلة : ح = س×(٥٠ – س)

إذا كان الطلب في المسألة هو(أكبر مايمكن) نبحث عن قيمة عظمى محلية

وإذا كان الطلب في المسألة (أصغر ما يمكن) نبحث عن قيمة صغرى محلية

سؤال : ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٢٠) ، ومجموع مربعهما أقل ما يمكن ؟

نفرض العدد الأول س والعدد الثاني ص

س + ص = ٢٠ ومنه ص = ٢٠ – س

إذا كان مجموع مربعيهما ح ، فإن :

ح = $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ نبحث عن قيمة صغرى محلية لأن المطلوب أقل مجموع لمربع العددين

ح(س) = $س^{٢}$ + $(٢٠ – س)^{٢}$

حَ(س) = ٢س +٢(٢٠– س) × –١ = ٢س –٤٠ + ٢س

حَ(س) = ٤س – ٤٠

حَ(س) = ٠ ومنه ٤س –٤٠=٠ ومنه ٤س = ٤٠ ومنه س = ١٠

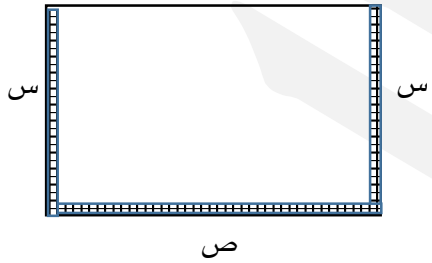
حً(س) = ٤ > ٠ توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ١٠

∴ العدد الأول س = ١٠ ، والثاني ص = ٢٠ ـ ١٠ = ١٠

سؤال : قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٢٠٠ م^{٢} ، يراد إحاطتها بسياج من ثلاث جهات ،

تكلفة المتر الواحد (٥) دنانير ، ما أبعاد الأرض لتكون تكلفة السياج أقل ما يمكن ؟

الحل :



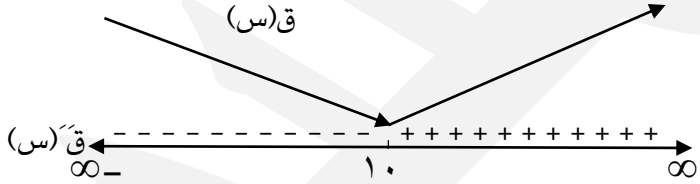
نفرض أبعاد الأرض س ، ص

مساحة الأرض = م = س ×ص = ٢٠٠

$ص = \frac{٢٠٠}{س}$

تكلفة السياج = ك = (س + ص + س) × ٥ = (٢س+ $\frac{٢٠٠}{س}$)×٥

ك = ١٠س + $\frac{١٠٠٠}{س}$



كَ(س) = ١٠ + $\frac{-١٠٠٠}{س^{٢}}$

كَ(س) = ٠ ومنه ١٠ ـ $\frac{١٠٠٠}{س^{٢}}$ = ٠ ومنه $\frac{١٠٠٠}{س^{٢}}$ = ١٠ ومنه

١٠س^{٢} =١٠٠٠ ومنه س^{٢} = ١٠٠ ومنه س = ـ١٠ مرفوض ، س = ١٠

من خط الأعداد نلاحظ وجود قيمة صغرى محلية عند س = ١٠

تكون تكلفة السياج أقل ما يمكن عند س = ١٠م ، ص = $\frac{٢٠٠}{١٠}$ = ٢٠ م

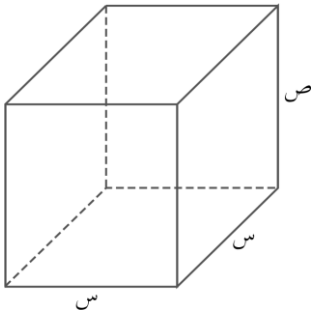
سؤال : صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، قاعدته مربعة الشكل ، ومجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم ،

جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن ؟

ملاحظة هامة : في إحدى مسائل الدورات الوزارية كان نص المسألة مجموع محيط قاعدته وأرتفاعه (٨٤) سم

بدل مجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم ، في هذه الحالة : ٤س + ص = ٨٤

الحل :



حجم الصندوق (ح) = الطول ×العرض × الارتفاع

نفرض أبعاد الصندوق : س ، س ، ص(الطول = العرض = س لأن القاعدة مربعة)

ح = س×س×ص = س^{٢}ص

ولكن حسب الفرض س + س+ ص = ١٢٠ ⟵ ٢س + ص= ١٢٠

ص = ١٢٠ – ٢س

ح (س) = س^{٢}(١٢٠–٢س)= ١٢٠س^{٢} – ٢س^{٣}

حَ(س) = ٢٤٠س – ٦س^{٢} عندما حَ(س) = صفر ⟵ ٢٤٠س – ٦س^{٢} =٠ ⟵ ٦س(٤٠ – س) =٠⟵

أما س= ٠ ، س = ٤٠ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

حً(س)= ٢٤٠ – ١٢س

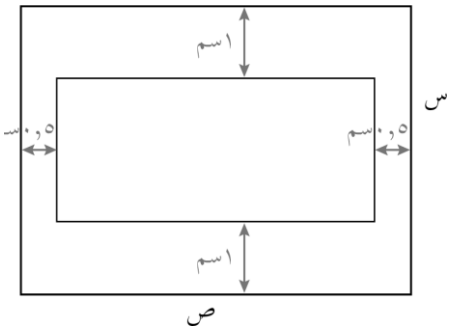
حً(٠) = ٢٤٠> صفر ، قيمة صغرى محلية مرفوض لأنه المطلوب أكبر ما يمكن وليس أقل ما يمكن

حً(٤٠) = ٢٤٠ – ١٢×٤٠ = –٢٤٠< صفر ، توجد قيمة عظمى محلية عندماس = ٤٠

الحجم أكبر ما يمكن عندما س = ٤٠سم ، ص = ١٢٠ – ٢×٤٠ = ٤٠سم

∴ أبعاد الصندوق : الطول = ٤٠سم ، العرض = ٤٠سم ، الارتفاع = ٤٠ سم

سؤال : صحيفة ورقية مستطيلة الشكل ، مساحتها ٥٠ سم^{٢} ، يراد طباعة إعلان عليها إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل جانب ٠,٥ سم ، فجد بعدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن



الحل :

نفرض بعدي الصحيفة الورقية س ، ص ، والمساحة المطبوعة م

فيكون بعدي منطقة الطباعة : س – ٢ ، ص – ١

مساحة منطقة الطباعة م = (س –٢) (ص – ١)

نوجد ص من مساحة الصحيفة الورقية ٥٠ = س × ص ⟵ ص = $\frac{٥٠}{س}$

م (س) = (س-٢)($\frac{٥٠}{س}$ - ١) = ٥٠ - س - $\frac{١٠٠}{س}$ +٢ = ٥٢ - س - $\frac{١٠٠}{س}$

مَ(س) = -١ + $\frac{١٠٠}{س^{٢}}$

مَ(س) = ٠ ⟵ -١ + $\frac{١٠٠}{س^{٢}}$ = ٠ ⟵ $\frac{١٠٠}{س^{٢}}$ = ١ ⟵ س^{٢} =١٠٠ ⟵

س = ١٠ ، س= -١٠ مرفوض لأنه طول ولايجوز ان يكون سالب

مً(س) = $\frac{-١٠٠ \times ٢س}{س^{٤}}$ = - $\frac{٢٠٠}{س^{٣}}$

مً(١٠)= - $\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ١٠سم

ص = $\frac{٥٠}{س}$ = $\frac{٥٠}{١٠}$ = ٥

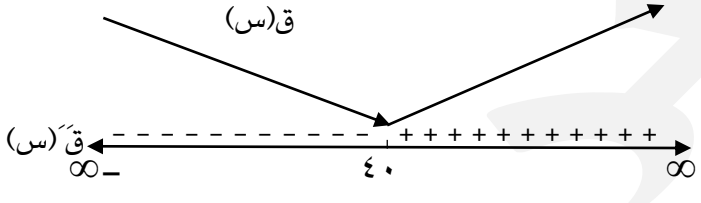
تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن عندما بعدا الورقة ١٠سم ، ٥ سم

سؤال : قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (١٦٠٠)م٢ يراد إحاطتها بسياج ، إذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج (٣) دنانير ، فجد بعدي قطعة الأرض اللذين يجعلان التكلفة أقل ما يمكن

الحل : نفرض بعدي الأرض س ، ص

مساحة الارض : م = س× ص = ١٦٠٠ ومنه ص = $\frac{١٦٠٠}{س}$

التكلفة = محيط الأرض × تكلفة المتر الواحد



ك = (٢س + ٢ص) × ٣ = ٦س + ٦ص

ك = ٦س + ٦× $\frac{١٦٠٠}{س}$ = ٦س + $\frac{٩٦٠٠}{س}$

كَ(س) = ٦ - $\frac{٩٦٠٠}{س^{٢}}$

كَ(س) = ٠ ومنه ٦ - $\frac{٩٦٠٠}{س^{٢}}$ = ٠ ومنه $\frac{٩٦٠٠}{س^{٢}}$ = ٦ ومنه ٦س^{٢} = ٩٦٠٠

س^{٢} = ١٦٠٠ ومنه س = ـ٤٠ مرفوض ، س = ٤٠

نلاحظ من خط الأعداد وجود قيمة صغرى محلية عند س = ٤٠

∴ تكون التكلفة أقل ما يمكن عندما س = ٤٠ م ، ص = $\frac{١٦٠٠}{٤٠}$ = ٤٠ م

سؤال : قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها (٤٠٠)م ، ما بعدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن ؟

الحل :

نفرض بعدا قطعة الأرض : س ، ص

محيط المستطيل = ٢× الطول + ٢ × العرض

٤٠٠ = ٢س + ٢ص ومنه ٢٠٠ = س + ص ومنه ص = ٢٠٠ ـ س

المساحة (م) = س × ص = س (٢٠٠ـ س) = ٢٠٠س ـ س^{٢}

مَ(س) = ٢٠٠ ـ ٢س

مَ(س) = ٠ ومنه ٢٠٠ ـ ٢س = ٠ ومنه ٢س = ٢٠٠ ومنه س = ١٠٠

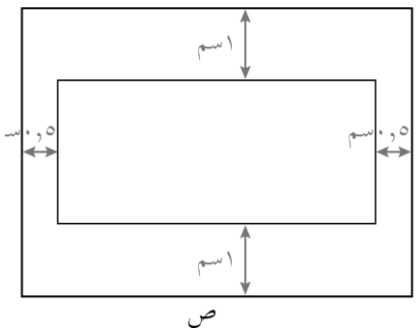
مً(س) = ـ٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ١٠٠

∴ تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما س = ١٠٠ م ، ص= ٢٠٠ـ ١٠٠ = ١٠٠م

سؤال : صحيفة ورقية مستطيلة الشكل ، مساحتها ٣٢ سم^{٢} ، يراد طباعة إعلان عليها

إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل جانب

٠,٥ سم ، فجد بعدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن



الحل :

نفرض بعدي الصحيفة الورقية س ، ص ، والمساحة المطبوعة م

فيكون بعدي منطقة الطباعة : س ـ ٢ ، ص ـ ١

مساحة منطقة الطباعة م = (س ـ٢) (ص ـ ١)

نوجد ص من مساحة الصحيفة الورقية ٣٢ = س × ص ⟵ ص = $\frac{٣٢}{س}$

م (س) = (س-٢)($\frac{٣٢}{س}$ - ١) = ٣٢ - س - $\frac{٦٤}{س}$ +٢ = ٣٤- س - $\frac{٦٤}{س}$

مَ(س) = -١ + $\frac{٦٤}{س^{٢}}$

مَ(س) = ٠ ⟵ -١ + $\frac{٦٤}{س^{٢}}$ = ٠ ⟵ $\frac{٦٤}{س^{٢}}$ = ١ ⟵ س^{٢} = ٦٤ ⟵

س = ٨ ، س= - ٨ مرفوض لأنه طول ولايجوز ان يكون سالب

مً(س) = $\frac{-٦٤ \times ٢س}{س^{٤}}$ = - $\frac{١٢٨}{س^{٣}}$

مً(١٠)= - $\frac{١٢٨}{٥١٢}$ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٨ سم

ص = $\frac{٣٢}{س}$ = $\frac{٣٢}{٨}$ = ٤

تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن عندما بعدا الورقة ٨ سم ، ٤ سم

سؤال : أراد إبراهيم أن يفتح نافذة مستطيلة في جدار إحدى غرف منزله ، بحيث يكون محيط النافذة ٦م ، جد بعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية ممكنة من الضوء بدخول الغرفة

الحل : نفرض بعدي النافذة س ، ص

محيط المستطيل = ٢×(الطول + العرض)

٦ = ٢(س + ص) ⟵ س + ص = ٣ ⟵ ص = ٣ - س

مساحة النافذة م = س × ص

م (س) = س (٣ - س)= ٣س - س^{٢}

مَ(س) = ٣ - ٢س

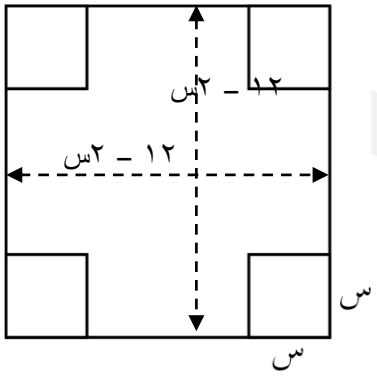
مَ (س) = ٠ ⟵ ٣ - ٢س = ٠ ⟵ ٢س = ٣ ⟵ س = $\frac{٣}{٢}$ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

مً(س) = -٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س= $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥ م

ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥ م

بعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية من الضوء بدخول الغرفة : ١,٥م ، ١,٥ م

سؤال : صندوق مربع ، طول ضلعه ١٢ سم ، إذا قص من جوانبه الأربعه (٤) مربعات متساوية طول ضلعها س ، ثم رفعت الجوانب ، وأصبح على صورة علبة مفتوحة من أعلى ، فجد قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن



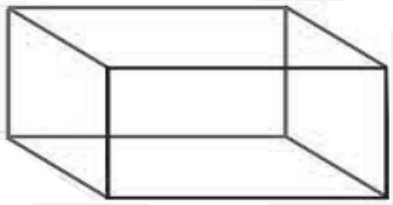
الحل :

حجم العلبة = الطول × العرض × الارتفاع

بفرض أبعاد العلبة ١٢ − ٢س ، ١٢ − ٢س ، س

ح (س) = (١٢−٢س)(١٢−٢س)×س

ح(س) = س(١٢ −٢س)^{٢}



حَ(س)= س×٢(١٢−٢س)×−٢ +(١٢ −٢س)^{٢} ×١

= −٤٨ س +٨س^{٢} +١٤٤ −٤٨س +٤س^{٢}

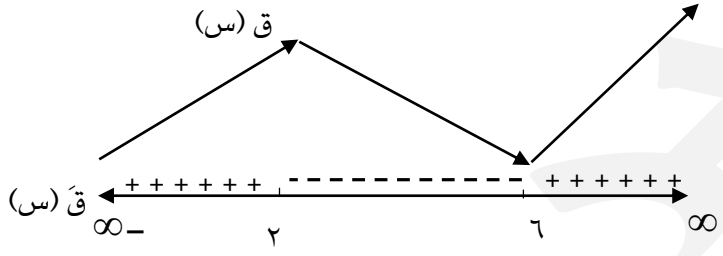
= ١٢س٢ − ٩٦س + ١٤٤ نقسم على ١٢

حَ(س) = س^{٢} − ٨س + ١٢

حَ(س) = صفر ⟵ س٢ −٨س +١٢ = صفر ⟵ (س−٦)(س−٢) = ٠ ومنه

س = ٦ ، س = ٢ من جدول الإشارات نلاحظ

س = ٦ مرفوض لأن عندها قيمة صغرى محلية



س = ٢ عندها قيمة عظمى محلية

قيمة س التي يكون حجم العلبة أكبر

ما يمكن هو س = ٢

تطبيقات اقتصادية على القيم القصوى

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

ر (س) = د (س) – ك (س)

لحفظ القانون : احفظ كلمة (ردّك) بعد الراء ضع (=) بعد الدال ضع (–) فيكون (ر = د – ك)

كَ(س) التكلفة الحدية : هي المشتقة الأولى للتكلفة الكلية (ك) (معدل التغير في التكلفة)

دَ (س) الإيراد الحدي : هو المشتقة الأولى للإيراد الكلي (د) (معدل التغير في الإيراد)

رَ(س) الربح الحدي : هو المشتقة الأولى للربح (ر) (معدل التغير في الربح)

رَ(س) = دَ(س) – كَ(س)

سؤال : كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو د(س) = ٥٠س + ٢س^{٢} دينار ، واقتران التكلفة الكلية :

ك(س) = ٣٠س + ٤س^{٢} + ٢٠٠ دينار، حيث س عدد الوحدات المبيعة ، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

الحل :

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

ر (س) = ٥٠س+٢س^{٢} – (٣٠س + ٤س^{٢} + ٢٠٠) = ٥٠س + ٢س^{٢} – ٣٠س –٤س^{٢} – ٢٠٠

ر (س) = ٢٠س – ٢س^{٢} –٢٠٠

رَ(س) = ٢٠ – ٤س نجعل رَ(س) = صفر

٢٠ – ٤س = ٠ ⟵ ٤س = ٢٠ ⟵ س = ٥ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

رً(س) = –٤ < صفر توجد قيمة عظمى عندما س = ٥

يكون الربح أكبر ما يمكن عندما س = ٥ وحدات مبيعة

سؤال : وجد مصنع لإنتاج أجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيا تعطى

بالاقتران : ك(س) = ٥٠س + ٣٠٠ ، إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ – س) دينار ،

فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن

الحل :

ر (س) = د(س) – ك(س)

حيث د(س) = (٢٠٠ – س)س

ر (س) = (٢٠٠ – س)س – (٥٠س +٣٠٠)= ٢٠٠س – س^{٢} –٥٠س –٣٠٠

ر (س)= – س^{٢} +١٥٠س –٣٠٠

رَ(س) = –٢س + ١٥٠ نجعل رَ(س) = صفر

–٢س + ١٥٠ = ٠ ⟵ ٢س = ١٥٠ ⟵ س = ٧٥ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

رً(س) = –٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س ٧٥ جهاز

∴ يكون الربح الاسبوعي أكبر ما يمكن عندما س = ٧٥ جهاز

سؤال : يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (٦٠) دينار ، فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من

من هذه السلعة تعطى بالعلاقة : ك(س) = ٠,٤ س^{٢} + ١٢س + ٥٠٠ ديناراً ، فجد الربح الحدي

الحل :

ر (س) = د(س) – ك(س)
ر (س) = ٦٠س – ٠,٤س^{٢} – ١٢س –٥٠٠
ر (س) = ٤٨س – ٠,٤س^{٢} – ٥٠٠
رَ(س) = ٤٨ – ٠,٨س

سؤال : إذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢} اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما ، فإنالتكلفة الحدية لإنتاج (٢٠) قطعة من السلعة نفسها هي :

أ) ٤٠ ب) ١٦٠ ج) ١٢٠ د) ٤٦

الحل :

كَ(س) = ٦س

كَ(٢٠) = ٦ × ٢٠ = ١٢٠

سؤال : إذا كان د(س) = ١٦ س – س^{٢}– ٢٠ دينار ،ك(س) = ٢س^{٢} – ٨س + ١٥ دينار ، هما إيراد (س) من وحدات سلعة معينة وتكلفتها ، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

الحل :

ر(س) = د(س) – ك (س)

ر(س) = ١٦س – س^{٢} –٢٠ – (٢س^{٢} –٨س + ١٥) = ١٦س – س^{٢} –٢٠– ٢س^{٢} +٨س – ١٥

ر(س) = –٣س^{٢} + ٢٤س –٣٥

رَ(س) = –٦س + ٢٤ نجعل رَ(س) = صفر

–٦س + ٢٤ = ٠ ⟵ ٦س = ٢٤ ⟵ س = ٤ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

رً(س) = –٦ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عند س = ٤

∴ يكون الربح أعظم ما يمكن عندما س = ٤ وحدة