الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة .

تمهيد - قواعد الاشتقاق .

ق(س) = جـ ⟸ ق′(س) = ٠

مشتقة الثابت تساوي صفر

ق(س) = أ س^{ن} ⟸ ق′(س) = أ ن س$^{ن-١}$

مشتقة لكثيرات الحدود واقترانات مرفوعة لقوى .

مشتقة الاقترانات الدائرية .

ق(س)	ق′(س)
جاس	جتاس
جتاس	-جاس
ظاس	قا^{٢}س
قاس	قاس ظاس
ظتاس	-قتا^{٢}س
قتاس	-قتاس ظتاس

مشتقة الضرب .

هـ(س) = ق(س) × ل(س)

هـ′(س) = ق′(س) × ل(س) + ل′(س) × ق(س)

* م.أول × ثاني + م.ثاني × أول *

مشتقة القسمة .

[١] اقتران / ثابت ⟵ مشتقة الاقتران / نفس الثابت

[٢] ثابت / اقتران ⟵ - البسط × م المقام / (المقام)^{٢}

[٣] اقتران / اقتران ⟵ (م البسط × المقام - م المقام × البسط) / (المقام)^{٢}

تركيب الاقترانات

[١] الجذر التربيعي .

ق(س) = √هـ(س) ⟵ ق′(س) = هـ′(س) / (٢ × √هـ(س))

* مشتقة ما داخل الجذر / ٢ × الجذر نفسه *

[٢] ق(س) = (هـ(س))^{ن}

ق′(س) = ن(هـ(س))$^{ن-١}$ × هـ′(س)

* الجذور بشكل عام تتحول الى أُسس نسبية . "تجهيز المسألة"

مثال . ∛((س+١)^{٢}) ⟵ (س+١)$^{٢/٣}$ ، داخل / خارج

ثم نشتق حسب القاعدة أعلاه

[٣] ق(س) = دائري (زاوية)^{ن}

ق′(س) = ن (دائري (زاوية))$^{ن-١}$ × م.دائري (زاوية) × م.(الزاوية)

مثال توضيحي . ق(س) = جا^{٣}(٢س^{٢}-٥)

ق′(س) = ٣ جا^{٢}(٢س^{٢}-٥) × جتا(٢س^{٢}-٥) × ٤س

الوحدة : التكامل وتطبيقاته الدرس : معكوس المشتقة.

مثال . جد المشتقة الاولى لكل مما يلي

١) ق(س) = ٦س^{٣} − ٥س^{٢} + س − ٧

الحل .

ق'(س) = ١٨س^{٢} − ١٠س + ١

٢) ل(س) = جاس ظاس

الحل .

ل'(س) = جتاس ظاس + قا^{٢}س جاس

⟸ ابسط المسألة .

٣) ك(س) = $\dfrac{\sqrt{٥س^{٢}+١}}{-٤}$

الحل

ك'(س) = $\dfrac{\dfrac{١٠س}{٢\sqrt{٥س^{٢}+١}}}{-٤}$

⟸ ابسط المسألة

٤) د(س) = $\dfrac{١-٢س}{جتاس}$

الحل .

د'(س) = $\dfrac{-٢\,جتاس - -جاس\,(١-٢س)}{(جتاس)^{٢}}$

د'(س) = $\dfrac{-٢\,جتاس + (١-٢س)\,جاس}{(جتاس)^{٢}}$

٥) ع(س) = $\dfrac{٣س}{\sqrt[٣]{٥س+١}}$

الحل .

٦) و(س) = قا^{٥} ($\frac{١}{س}$)

الحل .

و'(س) = ٥قا^{٤}($\frac{١}{س}$) قا($\frac{١}{س}$) ظا($\frac{١}{س}$) × $\frac{-١}{س^{٢}}$

٧) ل(س) = قتا^{٦} (جتاس)

الحل .

ل'(س) = ٦ قتا^{٥} (جتاس) −قتا (جتاس) ظتا(جتاس)
× −جاس

٨) ص(س) = قا^{٢}س + قاس ظاس

الحل .

ص'(س) = ٢قاس ظاس + قاس ظاس ظاس
+ قا^{٢}س قاس

= ٢قاس ظاس + قاس ظا^{٢}س + قا^{٣}س

٩) د(س) = ظاس + قاس

د'(س) = قا^{٢}س + قاس ظاس .

١٠) ك(س) = ٢ظاس × جتا^{٥}(٤س + ١)

الحل .

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : عكس المشتقة ...

تعريف .

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة [أ، ب] فان م(س) يسمى معكوساً للمشتقة للاقتران ق(س) اذا كان م′(س) = ق(س) لكل $س \in$ (أ، ب)

أي انه

م(س) معكوساً للمشتقة ق(س) تعني م′(س) = ق(س)

اشارة التكامل

يسمى اقتران معكوس المشتقة بالتكامل غير المحدود ويرمز له بالرمز

م(س) = $\int$ ق(س) دس

وتقرأ تكامل ق(س) دس

* على فرض أن م(س) هو معكوس مشتقة لـ ق(س) ، فعند ايجاده نطرح هذا السؤال .

ما هو الاقتران الذي مشتقته ق(س).

مثال ١ـ ما هو الاقتران الذي مشتقته ق(س) = ٢س ؟

الحل . * هناك اجابات عديدة مثل *

م(س) = $س^٢ + ٧$ أو

م(س) = $س^٢ - ٢$ ... الخ .

* نستطيع ايجاد عدد كبير من معكوس مشتقة ق(س) .

عددها لا نهائي .

وعلينا التعبير عنها بالصورة

م(س) = $س^٢$ + جـ ، جـ ثابت

مثال ١ بلغة أخرى .

$\boxed{١}$ ما هو معكوس المشتقة للاقتران ق(س) = ٢س .

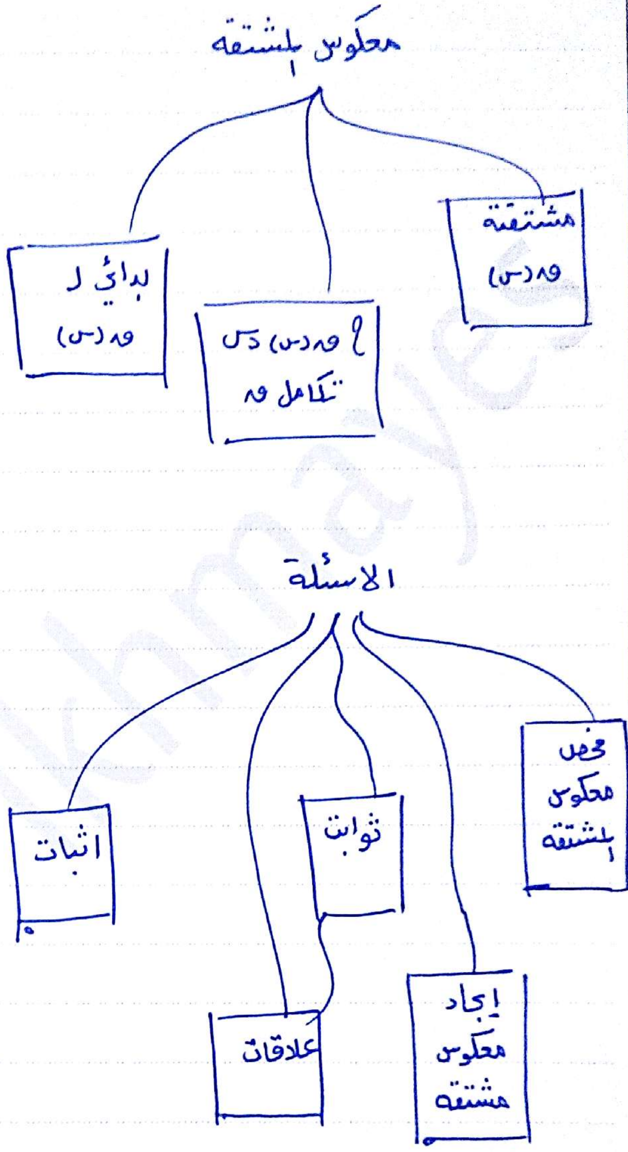
$\boxed{٢}$ جد $\int$ ق(س) دس .

$\boxed{٣}$ جد الاقتران البدائي لـ ق(س) .

وكلها لها نفس الاجابة وهي

م(س) = $س^٢$ + جـ

الوحدة : التكامل وتطبيقاته
الدرس : معكوس المشتقة



فحص معكوس المشتقة .

نستخدم التعريف الاصلي

م$'$(س) = ق(س) .

اشتقاق معكوس المشتقة م(س)

ينتج

ق(س) ⟸ نعم ، معكوس مشتقة

ليس ق(س) ⟸ لا ، ليس كذلك .

مثال . بين فيما اذا كان الاقتران م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران ق(س) فيما يلي .

$\boxed{أ}$ م(س) = س^{٣} + ٤س

ق(س) = ٣س^{٢} + ٤

الحل .

بما أن م$'$(س) = ٣س^{٢} + ٤

و م$'$(س) = ق(س) فان

م(س) هو معكوس المشتقة ق(س) .

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة .

د) $\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 + ٦\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س}^2 + ٦\text{س}}}$

الحل . بما أن

$\text{م}'(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} + ٦}{٢\sqrt{\text{س}^2 + ٦\text{س}}}$

حيث $\text{م}'(\text{س}) \neq \text{ق}(\text{س})$

فان م(س) لا يعد معكوساً للمشتقة ق(س)

هـ) $\text{م}(\text{س}) = \text{جا}^3 ٢\text{س} + \text{س}^2 - ١$

$\text{ق}(\text{س}) = (٣\,\text{جا}^2 ٢\text{س} \times \text{جتا}\,٢\text{س} \times ٢) + ٢\text{س}$

الحل :

د) $\text{م}(\text{س}) = \dfrac{٢\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = -٢\,\text{قتا}\,\text{س}\ \text{ظتا}\,\text{س}$.

الحل :

هـ) $\text{م}(\text{س}) = \text{هـ}^3(\text{س}) - ٥\text{س}^2 + \text{ظا}\,٢\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٣\,\text{هـ}^2(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س}) + ١٠\text{س} + \text{قا}^2 ٢\text{س}$

الحل .

و) $\text{م}(\text{س}) = \left(\dfrac{\text{س}+١}{\text{س}-١}\right)^{\text{ن}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{-٢\text{ن}\,(\text{س}+١)^{\text{ن}-١}}{(\text{س}-١)^{\text{ن}+١}}$

الحل .

الوحدة : التكامل وتطبيقاته

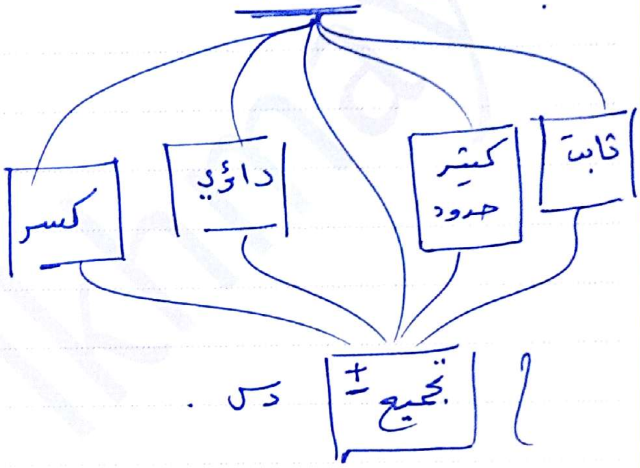
الدرس : معكوس المشتقة

ايجاد معكوس المشتقة

اوجد معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س)

اوجد الاقتران البدائي لـ ق(س)

اوجد $\int$ ق(س) دس



مثال ١ . جد معكوس مشتقة ق(س) = -٣

الحل .

م(س) = -٣ س + جـ

استنتج قاعدة الثابت ...

مثال ٢ جد $\int \frac{٣}{٤}\text{ط}^{\text{هـ}}$ دس .

الحل.

مثال ٣ . جد الاقتران البدائي لـ ق(س) = ٨ $\text{س}^{٧}$

الحل .

م(س) = $\text{س}^{٨}$ + جـ

استنتج قاعدة الاقتران في الصورة

ق(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

مثال ٤ . جد معكوساً لمشتقة د(س) = ١٦ $\text{س}^{١٥}$.

الحل .

مثال ٥ . جد $\int$ ٧ $\text{س}^{٣}$ دس .

الحل.

$\int$ ٧ $\text{س}^{٣}$ دس = $\frac{٧\text{س}^{٤}}{٤}$ + جـ

استنتج قاعدة كثير الحدود . في الصورة ق(س) = أ $\text{س}^{\text{م}}$

حيث أ ثابت ، م طبيعي .

الاستاذ احمد اخميس ٠٧٧٥٢٠٤٧١٩
صفحة الاستاذ احمد اخميس - رياضيات علمي و ادبي

مثال ٦ـ جد معكوساً لمشتقة
ك(س) = -٤ س^٥

الحل .

مثال ٧ـ جد معكوساً لمشتقة الاقترانات الآتية .

أ ـ ق(س) = جتاس
الحل . م(س) = جاس + ج

ب ـ ق(س) = - جاس
الحل . م(س) = جتاس + ج

جـ ـ ق(س) = قا^٢ س
الحل . م(س) = ظاس + ج

د ـ ق(س) = قاس ظاس
الحل .

هـ ـ ق(س) = - قتاس ظتاس
الحل .

و ـ ق(س) = قتا^٢ س .
الحل . م(س) = - ظتاس .

نشاط . اكمل الجدول الآتي

الاقتران ق(س)	البدائي م(س)
	- جتاس
جتاس	
	قا^٢ س
قاس ظاس	
قتاس ظتاس	
	- قتا^٢ س

مثال ٨ . جد معكوساً لمشتقة الاقتران
الحل . ق(س) = $\frac{-٢}{س^٢}$.

الحل . م(س) = $\frac{٢}{س}$

مثال ٩ . جد $\int \frac{١٥}{(س-٣)^٢}$ د س

الحل .

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة .

مثال ١٠. جد $\int \frac{\text{٣س}^{2}}{2\sqrt{\text{س}^{3}+1}}\, \text{دس}$

الحل. $\int \frac{\text{٣س}^{2}}{2\sqrt{\text{س}^{3}+1}}\, \text{دس} = \sqrt{\text{س}^{3}+1} + \text{ج}$

مثال ١١. جد معكوساً لمشتقة الاقتران $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{2}+1}}$.

الحل.

	أشكال ق(س)	معكوس المشتقة
١	$\text{أ س}^{\text{ن}}$	$\frac{\text{أ س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$
٢	$\frac{\boxed{}'}{2\sqrt{\boxed{}}}$	$\sqrt{\boxed{}}$
٣	$\frac{-\text{أ}\ \boxed{}}{(\boxed{})^{2}}$	$\frac{\text{أ}}{\boxed{}}$
٤	أ	أ س .

العلاقات

١- معكوسي مشتقة اقتران .

* هناك عدد لانهائي من الاقترانات البدائية للاقتران ق(س) تختلف في الحد الثابت .

* حاصل الطرح بين معكوسي مشتقة اقتران ما يساوي عدد ثابت .

بلغة أخرى .
اذا كان $\text{م}_1\text{(س)}$ $\text{م}_2\text{(س)}$ معكوسي مشتقة لاقتران ق(س) فان

$\text{م}_1\text{(س)} - \text{م}_2\text{(س)} = \text{ثابت}$

مثال ١٢ . اذا كان م_1 ، م_2 معكوسي مشتقة للاقتران ق(س) المتصل على ح . وكان $\text{هـ(س)} = \text{م}_1 - \text{م}_2$ جد $\text{هـ}'\text{(س)}$ ؟

الحل . $\text{هـ} = \text{م}_1 - \text{م}_2 = \text{ثابت}$

$\text{هـ}' = \text{صفر}$ " مشتقة الثابت "

مثال ٢- (وزارة ٢٠١١)
اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانان بدائيان للاقتران المتصل ق(س) فأوجد (٢م - هـ)'(س) .

الحل . (٢م - هـ)'(س) تساوي

٢م'(س) - هـ'(س) ولكن

م'(س) = هـ'(س) = ق(س)
لانها اقترانات بدائيه لـ ق(س)

⇐ نعوض ق(س) مكان م'(س) و هـ'(س) . لتصبح المسألة

٢ ق(س) - ق(س) = ق(س) ✳

مثال ٣. اذا كان م(س) ، ل(س) معكوسين للمشتقة للاقتران المتصل ق(س) وكان هـ(س) = ٤م(س) - ل(س) فجد هـ'(س) بدلالة ق(س) .

الحل .

مثال ٤- اذا كان $م_1$(س) $م_2$(س) معكوسين للمشتقة للاقتران ق وكان $م_1$(س) = جتاس + ٧ ، $م_2(\frac{\pi}{٣}) = \frac{٣}{٢}$ فجد قاعدة $م_2$(س) .

مثال ٥- اذا علمت أن م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) = جتاس أثبت أن .
م(س) ق'(س) + جتا²س = جتا٢س

الحل .
م(س) = جاس ق'(س) = -جاس

م(س) ق'(س) + جتا²س =
= جاس × -جاس + جتا²س
= -جا²س + جتا²س = جتا²س - جا²س
= جتا٢س .
" جتا ضعف الزاوية "

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة

٢- الاقتران و معكوس المشتقة .

من التعريف . م′(س) = ق(س)

* م(س) = ∫ ق(س) دس

* تحقق !!

[1] $\frac{د}{دس}$ ∫ ق(س) دس = ق(س)

[2] ∫ ق′(س) دس = ق(س) + جـ

فسر ذلك !!

* جد ما يلي .

١- ∫ ق″(س) دس

٢- $\frac{د}{دس}$ ∫ ع″(س) دس

٣- م بدائي لـ ق اوجد ق″ بدلالة م .

٤- اكتب بالرموز :. مشتقة م بدائي لـ ع .

جدول العلاقة بين ق(س) و م(س)

∫ ق(س) دس	م(س)
ق(س)	م′(س)
ق′(س)	م″(س)
ق″(س)	م‴(س)

أسئلة اشتقاق الطرفين

في هذه الاسئلة نقوم بأخذ المشتقة لطرفي المسألة حتى الوصول الى المطلوب المراد ايجاده

* ملاحظة .
عند الاشتقاق لا يظهر ثوابت
بعد التكامل يظهر الثابت جـ ،

* لايجاد الثابت جـ بعد التكامل يلزم وجود معلومة

صورة	نقطة
ق(أ) = ن	(أ ، ن)
م(أ) = ن	تمر بالمنحنى

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة

مثال ١ . اذا كان $\int ق(س)\,دس = س^{٤} + ٥س + ٣$ ، وكان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) ، وكان م(١) = ٧ أوجد م(س) ، م'(س) ، م'(٢) .

الحل . $\int ق(س)\,دس = س^{٤} + ٥س + ٣$

$م(س) + جـ = س^{٤} + ٥س + ٣$

جـ المعلومة من م(١) = ٧ ⇐ نعوض

$م(١) + جـ = ١^{٤} + ٥ \times ١ + ٣$

$م(١) + جـ = ٩$

$٧ + جـ = ٩$

⇐ جـ = ٢

نكتب قاعدة الاقتران م(س)

$م(س) + ٢ = س^{٤} + ٥س + ٣$

$م(س) = س^{٤} + ٥س + ١$ ١

نشتق لايجاد م'(س)

$م'(س) = ٤س^{٣} + ٥$ ٢

نعوض مباشرة ٢ لايجاد م'(٢)

$م'(٢) = ٤(٢)^{٣} + ٥ = ٣٧$ ٣

مثال ٢ . اذا كان $\int ق(س)\,دس = س^{٤} + س + ٤$

أوجد ق(١) ، ق'(١)

الحل . $\int ق(س)\,دس = س^{٤} + س + ٤$

نشتق الطرفين

$\frac{د}{دس}\left(\int ق(س)\,دس\right) = \frac{د}{دس}\left(س^{٤} + س + ٤\right)$

$ق(س) = ٤س^{٣} + ١$

نعوض العدد ١ لايجاد ق(١)

$ق(١) = ٤(١)^{٣} + ١ = ٥$ ١

نشتق ق(س) لايجاد ق'(س)

$ق(س) = ٤س^{٣} + ١$

$ق'(س) = ١٢س^{٢}$

نعوض العدد ١ لايجاد ق'(١)

$ق'(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢$.

مثال ٣. اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث أن ق′(س) = ٣ س^{٢} − ٢ وكانت النقطة (١ ، ٠) تقع على منحناه جد قاعدة الاقتران ق.

الحل.

أسئلة إيجاد الثوابت

- عن طريق الاشتقاق ← معلومة واحدة لنفس الثابت المطلوب
- أولوية للاشتقاق
- عن طريق التكامل ← معلومتان واحدة للثابت المطلوب وواحدة لثابت التكامل ..... " مهم "

مثال ١. اذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = س^{٢} + أ س^{٣} − ٢ وكان ق′(٢) يساوي ٥ جد الثابت أ.

الحل. " معلومة واحدة للثابت أ "

م(س) = س^{٢} + أ س^{٣} − ٢

م′(س) = ق(س) = ٢ س + ٣ أ س^{٢}

م″(س) = ق′(س) = ٢ + ٦ أ س

نعوض المعلومة ← ق′(٢) = ٥

ق′(٢) = ٢ + ٦ أ × ٢ = ٥

$\frac{١٢ أ}{١٢} = \frac{٣}{١٢}$

$\boxed{أ = \frac{١}{٤}}$

٢- اذا كان $\int$ (ق'(س) + ٢س) دس = س^{٣} + ن س^{٢} + ١
وكان ق'(١) = ٥ ق(٢) = ٧ ، أوجد
قيمة ن ، ق(٠) ، ق'(٤).

الحل : $\int$ (ق'(س) + ٢س) دس = س^{٣} + ن س + ١

نشتق الطرفين

ق'(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ن

نعوض ق'(١) = ٥ معلومة اشتقاق

ق'(١) + ٢×١ = ٣×١^{٢} + ن

٥ + ٢ = ٣ + ن

$\boxed{\text{ن} = ٤}$ ①

ق'(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٤

$\int$ (ق'(س) + ٢س) دس = س^{٣} + ٤س + ١

نجري التكامل

ق(س) + س^{٢} + جـ = س^{٣} + ٤س + ١

نعوض ق(٢) = ٧ معلومة تكامل

ق(٢) + ٢^{٢} + جـ = ٢^{٣} + ٤×٢ + ١

ق(٢) + ٤ + جـ = ٨ + ٨ + ١

٧ + ٤ + جـ = ١٧

١١ + جـ = ١٧

جـ = ٦

ق(س) = س^{٣} − س^{٢} + ٤س − ٥

ق(٠) = −٥ ②

ق'(٤) = ٣×١٦ − ٢×٤ + ٤ = ٤٤ ③

٣- اذا كان م(س) معكوساً للمشتقة
ق(س) = ٢س + أ ، حيث أن
المقطع السيني والصادي لـ م(س)
هما (٤،٠) (٠،٤) على الترتيب
اكتب قاعدة م(س).

الحل :

معكوس المشتقة

- التعريفات
  - الاصلي
    - م′(س) = ق(س)
  - طرق التعبير عنه
    - الاقتران الذي مشتقته ق(س)
    - معكوس مشتقة ق(س)
    - الاقتران البدائي لـ ق(س)
    - ∫ ق(س) دس
- أفكار الاسئلة
  - نص معكوس المشتقة
    - نشتق
  - علاقة بين بدائيان
    - م₁(س) − م₂(س) = جـ ثابت
    - او حسب التعريف الاصلي م′₁(س) = م′₂(س) = ق(س)
  - إيجاد معكوس المشتقة
    - الاشكال مألوف
    - التحليل العام غير مألوف
  - العلاقات
    - المعلومات
      - معلومة واحدة ⇓ ∫ ▨ دس = ▨ + جـ
      - معلومتان
        - بدائيان
        - مشتقة ثم بدائي
        - مشتقتان
    - إيجاد ثوابت
    - إيجاد صور
      - ∫ ▨′ دس = ▨ + جـ
      - د/دس ∫ ▨ دس = ▨
    - الاثبات
      - حسب مطلوب السؤال

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة

حل اسئلة الكتاب .

تدريب ١ / ٢٢٣ .

بين أن الاقتران م(س) = س^٤ - جاس - ½ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ٤س^٣ - جتاس .

الحل. سؤال مخفي / نشتق م(س)

م(س) = س^٤ - جاس - ½

م َ(س) = ٤س^٣ - جتاس = ق(س)

بما أن م َ(س) = ق(س) فان م(س) هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) .

تدريب ٢ / ٢٢٤ " معدل "

اذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، وكان ل(س) = ٣م(س) - ٥هـ(س) فجد ل َ(س) بدلالة ق(س).

الحل. علاقة بين بدائيان / حسب التعريف الاصلي .

م َ(س) = هـ َ(س) = ق(س)

نشتق ل(س) .

ل(س) = ٣م(س) - ٥هـ(س)

ل َ(س) = ٣م َ(س) - ٥هـ َ(س)

نعوض ... م َ(س) = هـ َ(س) = ق(س)

ل َ(س) = ٣ ق(س) - ٥ق(س)

ل َ(س) = -٢ ق(س) .

ل َ(س) بدلالة ق(س) .

تدريب ٣ / ٢٢٦

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان
∫ ق(س) جا $\frac{\pi}{2}$ دس = ١ + س^٣
فجد ق(س) .

الحل. علاقات / اشتقاق طرفين لايجاد ق(س) ← سؤال صور .

∫ ق(س) جا $\frac{\pi}{2}$ دس = ١ + س^٣

تجهيز المسألة .

∫ ق(س) × ١ دس = ١ + س^٣

الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : معكوس المشتقة .

نشتقه الطرفين

$$\frac{د}{دس} \int -ق(س)\, دس = \frac{د}{دس}\left(١ + س^{٣}\right)$$

$$-ق(س) = ٣س^{٢}$$

قسمه على -١

$$ق(س) = -٣س^{٢}$$

تدريب ٤ / ٢٢٦

اذا كان $\int ق(س)\, دس = جا^{٢}س - أ\, جتا س + ١$

$قَ\left(\frac{\pi}{٤}\right) =$ صفراً ، جد قيمة الثابت أ .

الحل: ثوابت /

* ملاحظة : المعلومة المعطاه ترتبط المسألة بـ قَ(س) ⇐ فاننا نلجأ لاشتقاق الطرفين للحصول على قَ(س)

$$\int ق(س)\, دس = جا^{٢}س - أ\, جتا س + ١$$

$$\frac{د}{دس} \int قَ(س)\, دس = \frac{د}{دس}\left(جا^{٢}س - أ\, جتا س + ١\right)$$

$$قَ(س) = \underbrace{٢\, جا س\, جتا س}_{متطابقه} + أ\, جا س$$

$$قَ(س) = جا ٢س + أ\, جا س$$

نعوض المعلومة .

$$قَ\left(\frac{\pi}{٤}\right) = جا \frac{\pi}{٢} + أ\, جتا \frac{\pi}{٤}$$

$$٠ = ١ + أ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\frac{أ}{\sqrt{٢}} = -١ \Leftarrow \boxed{أ = -\sqrt{٢}}$$

حل تمارين ومسائل / ٢٢٧

١) بين أن الاقتران $م(س) = \frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س) = (س+١)^{-٢}$ ، $س \neq -١$.

الحل :

الاستاذ احمد اخميس ٠٧٧٥٢٠٤٧١٩
صفحة الاستاذ احمد اخميس - رياضيات علمي و ادبي

الدرس : معكوس المشتقة .

٢) بين أن الاقتران م(س) = جا²س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = جا٢س .

الحل / نفحص / عن طريق الاشتقاق

م(س) = جا²س

نشتقه

م′(س) = ٢جاس جتاس

متطابقة

م′(س) = جا٢س

نظرية

م′(س) = ق(س) = جا٢س

نتيجة

م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س)

٣) اذا كان م(س) = س³ + ٥س² − ٣س + جـ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) نجد ق(٢) .

الحل . علاقات / صور . اشتقاق : م(س) ← ق(س)

م′(س) = ق(س) = ٣س² + ١٠س − ٣

ق(٢) = ٣(٢)² + ١٠(٢) − ٣

= ١٢ + ٢٠ − ٣ = ٢٩

٤) اذا كان م(س) = ٢س⁴ + √(س² + ٣) معكوساً لمشتقة الاقتران ق ، نجد ق(١) .

الحل .

٥) اذا كان ق(س) = ٣س² نجد م معكوساً لمشتقة الاقتران ق علماً بأن م(٢) = ٥ .

الحل : علاقات / صور

إيجاد بدائي : ق(س) ← م(س)

مع معلومة لإيجاد جـ

ق(س) = ٣س² تكامل للطرفين

∫ ق(س) دس = ∫ ٣س² دس

م(س) = س³ + جـ

م(٢) = ٢³ + جـ

٥ = ٨ + جـ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = -٣}$

ملاحظة هامة : اذا أجرينا التكامل للطرفين فان الثابت جـ يوضع على طرف واحد فقط .

① $\int \square \, \text{دس} = \bigcirc$ — الحالة الأولى

$= \square + \text{جـ} = \bigcirc$

② $\int \square \, \text{دس} = \int \bigcirc \, \text{دس}$ — الحالة الثانية

$= \square = \bigcirc + \underbrace{\text{جـ}}_{}$

على جهة واحدة

٦) اذا كان م١(س) ، م٢(س) معكوسين لمشتقه الاقتران ه وكان م١(س) = ٣س² - ٢س + ٥ ، م٢(٠) = ٤ جد قاعدة م٢(س) .

الحل .

٧) اذا كان $\text{ص} = \int \sqrt[5]{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12}\ \text{دس}$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-2}$.

الحل . علاقات / صور .

اشتقاقه للطرفين .

$$\text{ص} = \int \sqrt[5]{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12}\ \text{دس}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ص}) = \frac{\text{د}}{\text{دس}} \int \sqrt[5]{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12}\ \text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt[5]{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 12}$$

نعوض -٢ مكان س .

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-2} = \sqrt[5]{3 \times 2^2 - 4 \times -2 + 12}$$

$$= \sqrt[5]{12 + 8 + 12}$$

$$= \sqrt[5]{32} = \boxed{2}$$

٨) اذا كان

$\int$ ق(س) دس = س^٣ - س^٢ + ٢س + ١ فجد

ق'(-٣)

الحل / علاقات / صور

$\int$ ق(س) دس ← اشتقاقه مرتين د ← ق(س) ← ق'(س)

$\int$ ق(س) دس = س^٣ - س^٢ + ٢س + ١

اشتقاقه

$\frac{د}{دس} \int$ ق(س) دس = $\frac{د}{دس}$ (س^٣ - س^٢ + ٢س + ١)

ق(س) = ٣س^٢ - ٢س + ٢

اشتقاقه

ق'(س) = ٦س - ٢

تعويض -٣

ق'(-٣) = ٦ × -٣ - ٢

= -١٨ - ٢ = $\boxed{-٢٠}$

٩) اذا كان

$\int$ ق(س) دس = جاس - جتاس + ٣

فاثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) - ق'($\frac{\pi}{٢}$) = ٣

الاثبات ، باستخدام العلاقات / ايجاد الصور

١ ايجاد ق($\frac{\pi}{٢}$)

٢ ايجاد ق'($\frac{\pi}{٢}$)

٣ التعويض في الطرف الاول لايجاد الطرف الثاني

$\frac{د}{دس} \int$ ق(س) دس = $\frac{د}{دس}$ (جاس - جتاس + ٣)

ق(س) = جتاس + جاس

ق($\frac{\pi}{٢}$) = جتا$\frac{\pi}{٢}$ + جا$\frac{\pi}{٢}$ = ١+

ق'(س) = - جاس + جتاس

ق'($\frac{\pi}{٢}$) = - جا$\frac{\pi}{٢}$ + جتا$\frac{\pi}{٢}$

= -١ + ٠ = -١

ق($\frac{\pi}{٢}$) - ق'($\frac{\pi}{٢}$) = ١ - -١ = ٢

#

١٠) جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الاتية .

أ) ق(س) = $\frac{-١}{س^٢}$.

الحل . بالشكل العام $\frac{-أ (\square)'}{(\square)^٢}$

م(س) = $\frac{١}{س}$ + جـ

ب) ق(س) = قاس جتاس

الحل .

هـ) $ق(س) = \frac{1}{٢\sqrt{س}}$

الحل .

د) $ق(س) = ٥ + ٥ ظا^{٢} س$.

الحل . الاشكال غير مألوفة .

⇐ نقوم بتبسيط المسألة لشكل مألوف .

$ق(س) = \underbrace{٥ (١ + ظا^{٢} س)}_{متطابقة}$

$ق(س) = ٥ قا^{٢} س$.

مألوف

$م(س) = ٥ ظا س + جـ$

١١) اذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) حيث $ق(س) = ظا^{٢} س + ١$ جد $م''(\frac{\pi}{٤})$.

الحل .