بسم الله الرحمن الرحيم

ورقة العمل المقترحة في مادة الرياضيات للفرع العلمي / م٣

المستوى الثالث : النهايات والإتصال والتفاضل وتطبيقاته

إعداد الأستاذ : عمر المصري

تطلب من مركز الرومي الثقافي / المنصورة ٠٧٩٩٣٣٣٠٨٨

السؤال الأول : ١) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢ص$ ، أثبت أن $ص'' = \frac{١}{(١-ص)^{٣}}$ ؟

$٢س + ٢ص \cdot ص' = ٢ص'$

$٢س = ٢ص' - ٢ص \cdot ص'$

$س = ص'(١ - ص)$

$ص' = \frac{س}{١-ص}$

$ص'' = \frac{(١-ص) + س \times ص'}{(١-ص)^{٢}}$

$ص'' = \left[\frac{س \times س}{١-ص} + (١-ص)\right] \times \frac{١}{(١-ص)^{٢}}$

$ص'' = \frac{(١-ص)^{٢} + ٢ص - ص^{٢}}{(١-ص)^{٣}}$

$ص'' = \frac{١ - ٢ص + ص^{٢} + ٢ص - ص^{٢}}{(١-ص)^{٣}}$

$ص'' = \frac{١}{(١-ص)^{٣}}$ ✓

٢) إذا كان $٢س = ظتا٢ص$ ، أثبت أن $٢ص'' = ص'(قتا^{٢}٢ص - قا^{٢}ص)$ ؟

$٢ = -٢ جا٢ص \cdot ص'$

$١ = -جا٢ص \cdot ص'$

$٠ = -جا٢ص \cdot ص'' + ٢ص' \times -ظتا٢ص \times ص'$

$٠ = -جا٢ص \cdot ص'' - ٢(ص')^{٢} جتا٢ص$

$جا٢ص \cdot ص'' = -٢(ص')^{٢} جتا٢ص$

$ص'' = -٢ص' \times ص' \times \frac{جتا٢ص}{جا٢ص}$

$ص'' = -٢(ص')^{٢} \times \frac{-١}{جا^{٢}٢ص} \times \frac{جتا٢ص}{جا٢ص}$

$ص'' = ٢ص' \times ص' \times \frac{جتا٢ص}{جا^{٢}٢ص}$

$ص'' = ٢ص' \times ص' \times \frac{جتا^{٢}ص}{٤ جاص جتاص}$

$٢ص'' = ص' \times \left[\frac{جتا^{٢}ص}{جاص جتاص} - \frac{جا^{٢}ص}{جاص جتا^{٢}ص}\right]$

$٢ص'' = ص' (ظتاص - ظاص)$ ✓

٣) إذا كان $(ق \circ هـ)_{(س)} = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٣س$ ، وكان $هـ(س) = \sqrt{س+٣}$ ، وكان $ق'(١) = ٥٤$ ، جد قيمة الثابت (أ) ؟

$ق'(هـ(س)) \times هـ'(س) = س + ٣$

$ق'(\sqrt{س+٣}) \times \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}} = س + ٣$

$ق'(أ) = ٣أ^{٢} \times ٢$

$٥٤ = ٣أ^{٢} \times ٢$

$٢٧ = أ^{٣}$

$أ = ٣$

$\sqrt{س+٣} = أ$

$ق'(أ) \neq \frac{١}{٢أ} \times (أ)^{٢}$ ✗

٤) إذا كان $ق(س) = ٥س$ ، وكان $هـ(س) = ٨ \sqrt{س+١}$ ، فإذا علمت أن $(هـ \circ ق)'(١) = ١$ ، جد قيمة ما يلي: أ) $(هـ \circ ق)'(١)$ ؟ ب) قيمة الثابت $(أ)$ ؟

$هـ'(ق(أ)) \times ق'(أ)$

$= ١ \times ٥$

$= ٥$

$هـ'(س) = \frac{٨}{٢\sqrt{س+١}}$

$= \frac{٤}{\sqrt{س+١}}$

$(هـ \circ ق)'(أ) = ٥$

$هـ'(ق(أ)) \times ق'(أ) = ٥$

$\frac{٤}{\sqrt{ق(أ)+١}} \times ٥ = ٥$

$\frac{٤}{\sqrt{ق(أ)+١}} = ١$

$\sqrt{ق(أ)+١} = ٤$

$ق(أ)+١ = ١٦$

$ق(أ) = ١٥$

$أ٥ = ١٥$

$أ = ٣$ ✻

---

٥) إذا كان ق(س) متصلاً عند $س = ٢$ ، وكانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٢س + ١}{\sqrt{س^٣ + ١} - ٣} = ٢٤$ ، جد $ق'(٢)$ ؟

بما أن النهاية موجودة والبسط = ٠

$\therefore ق(٢) - ٤ + ١ = ٠ \Leftarrow ق(٢) = ٣$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٢س + ١}{\sqrt{س^٣ + ١} - ٣} \times \frac{\sqrt{س^٣ + ١} + ٣}{\sqrt{س^٣ + ١} + ٣} = ٢٤$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٢س + ١}{س^٣ - ٨} \times ٦ = ٢٤$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٢س + ١}{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)} = ٤$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٢س + ١}{(س-٢) \times ١٢} = ٤$

نطرح ونضيف $ق(٢)$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{ق(٢) - ٢س + ١}{س - ٢} = ٤٨$

$= ق'(٢) + \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - ٢س}{س - ٢} = ٤٨$

$= ق'(٢) + \lim_{س \to ٢} \frac{٢(٢-س)}{٢-س} = ٤٨$

$= ق'(٢) - ٢ = ٤٨$

$= ق'(٢) = ٥٠$

---

٦) إذا كانت $ق(٢) = \frac{١}{٤}$ ، $ق'(٢) = -٢$ ، فما قيمة $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{ق(٢+هـ)} - \sqrt{ق(٢)}}{هـ}$ ؟

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{ق(٢+هـ)} - \sqrt{ق(٢)}}{هـ} \times \frac{\sqrt{ق(٢+هـ)} + \sqrt{ق(٢)}}{\sqrt{ق(٢+هـ)} + \sqrt{ق(٢)}}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} \times \frac{١}{\sqrt{\frac{١}{٤}} + \sqrt{\frac{١}{٤}}}$

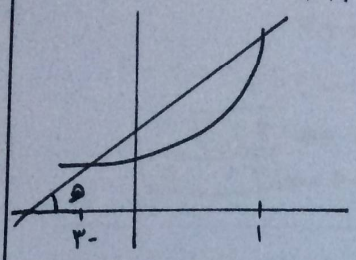
$= ق'(٢) \times \frac{١}{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}}$

$= ق'(٢) \times ١$

$= -٢ \times ١ = -٢$ ✻

السؤال الثاني : ١) إذا كان القاطع المار بالنقطتين $(-٣، ق(-٣))$ ، $(١، ق(١))$ ، على منحنى الإقتران

$ق(س) = أس^{٢} - ١$ يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $جا\theta = \frac{٤}{\sqrt{١٧}}$ جد قيمة الثابت (أ)



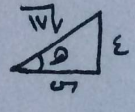
$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١) - ق(-٣)}{١ + ٣} = ظا\theta$

$= \frac{(أ - ١) - (٩أ - ١)}{٤} = ٤$

$\frac{-٨أ}{٤} = ٤$

$-٨أ = ١٦$

$أ = -٢$



$س^{٢} + ١٦ = ١٧$

$س^{٢} = ١$

$س = ١$

---

٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(١، ق(١))$ ، $(٣، ٥)$ يصنع زاوية قدرها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ للإقتران $هـ(س) = \frac{٢}{ق(س)}$ على الفترة $[٣، ١]$ ؟

$\frac{ق(١) - ٥}{١ - ٣} = ظا١٣٥$

$\frac{ق(١) - ٥}{-٢} = -١$

$ق(١) = ٢ + ٥$

$ق(١) = ٧$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ لـ $هـ(س) = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{١}{٢} \times \left(\frac{٢}{ق(٣)} - \frac{٢}{ق(١)}\right)$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢ق(١) - ٢ق(٣)}{ق(٣) \times ق(١)}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١٤ - ١٠}{٧ \times ٥}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣٥}$

$= \frac{٢}{٣٥}$.

---

٣) إذا كانت معادلة العمودي على المماس عند $(٢، ٥)$ ، هي $ص = ٣س - ١$ فجد $نهـا_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ٥}{٦هـ}$ ؟

ميل العمودي $= +٣$

ميل المماس $= \frac{-١}{\text{ميل عمودي}} = \frac{-١}{٣}$

ميل المماس $= ق'(٢) = \frac{-١}{٣}$

$نهـا_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{٦هـ}$

$= \frac{١}{٦} \times نهـا_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \frac{١}{٦} \times ق'(٢) = \frac{-١}{٣} \times \frac{١}{٦} = \frac{-١}{١٨}$

---

٤) إذا كان $ق(س) = \frac{ل(س) + ٨س}{هـ(س)}$ ، وكان لمنحنى $ل(س)$ ، $هـ(س)$ مماسا "أفقيا" عند النقطة $(١، ٤)$

فجد قيمة $ق'(١)$ ؟

مماساً أفقياً عند $(١، ٤)$

$\therefore ل'(١) = ٠$

$هـ'(١) = ٠$

$ل(١) = ٤ \ ، \ هـ(١) = ٤$

$ق'(س) = \frac{هـ(س)[ل'(س) + ٨] - (ل(س) + ٨س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$ ..... أكمل

٥) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١، أ) ، (٠، -١) مماسا" لمنحنى ق(س) = ٢س^{٢} - ٥س + ٧ ، جد أ ؟

ميل المستقيم = $\frac{أ+١}{١}$ = أ + ١

مشتقة ق = ٤س - ٥

ميل المستقيم = ٤س - ٥

معادلة المستقيم ص + ١ = (أ + ١)(س - ٠)

ص = (أ + ١)س - ١

(أ + ١)س - ١ = ٢س^{٢} - ٥س + ٧

(٤س - ٥)س - ١ = ٢س^{٢} - ٥س + ٧

٤س^{٢} - ٥س - ١ = ٢س^{٢} - ٥س + ٧

٢س^{٢} = ٨ ، س^{٢} = ٤ ، س = ٢ ، س = -٢

عندما س = ٢ ← أ + ١ = ٨ - ٥ ← أ = ٢

عندما س = -٢ ← أ + ١ = -٨ - ٥ ← أ = -١٤

---

٦) يتحرك جسم وفق العلاقة ف^{٢} = $\frac{١}{٣}$(ع^{٣} + ٧^{٢} - ٩) ، جد تسارعه بعد ثانيتين علما" بأن المسافة المقطوعة عندئذ تساوي ١ ؟

٢ف . فا = $\frac{١}{٣}$(٣ع^{٢} . ع + ٢ن)

٢ف × ع = $\frac{١}{٣}$(٣ع^{٢} × ت + ٢ن)

٢ × ١ × ٢ = $\frac{١}{٣}$ × (٣ × ٤ × ت + ٤)

!! أكمل

لايجاد ع منذ الأصل

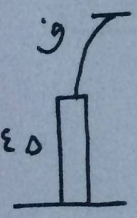
١ = $\frac{١}{٣}$(ع^{٣} + ٤ - ٩)

٣ = ع^{٣} - ٥ ← ٨ = ع^{٣}

ع = ٢

---

٧) قذف جسم رأسيا" لأعلى من برج ارتفاعه ٤٥ م ، وفق العلاقة ف = ٦٠ن - ٦ن^{٢} ، جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٩٩ م من سطح الأرض ؟



ف + ٤٥ = ٩٩ من الأرض

٦٠ن - ٦ن^{٢} + ٤٥ = ٩٩

٦ن^{٢} - ٦٠ن + ٥٤ = ٠

ن^{٢} - ١٠ن + ٩ = ٠

(ن - ١)(ن - ٩) = ٠

ن = ١ ، ن = ٩

صاعد ، نازل

ع(ن) = ٦٠ - ١٢ن ... أكمل

---

٨) يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢}(١٨ - ن) ، وكانت أكبر سرعة له عندما ن = ٣ث ، جد المسافة عندما تنعدم السرعة ؟

أكبر سرعة (عظمى) ← مشتقة ع = ٠

∴ ت = ٠

ف(ن) = ١٨ن^{٢} - ن^{٣}

ع = ٣٦ن - ٣ن^{٢}

ت = ٣٦ - ٦ن عظمى عند ن = ٣

∴ ت(٣) = ٠ ← ٣٦ - ٦أ = ٠

أ = ٩

تنعدم السرعة ع = ٠

١٨ن - ٣ن^{٢} = ٠

٣ن(٦ - ن) = ٠ ، ن = ٠ ، ن = ٦

ف(ن) = ن^{٢}(٩ - ن)

ف(٦) = ٣٦ × (٩ - ٦)

= ١٠٨ م

٩) إذا كان $ق(س) = س - \sqrt{س}$ ، جد قيم س الحرجة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية ؟

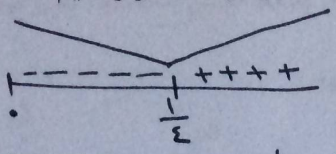
المجال $[0 ، \infty)$

$ق'(س) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$ق'(س) = \frac{2\sqrt{س} - 1}{2\sqrt{س}}$

$ق'(س) = 0 \leftarrow 2\sqrt{س} = 1 ، س = \frac{1}{4}$

$ق'(س)$ غ م $\leftarrow 2\sqrt{س} = 0 ، س = 0$



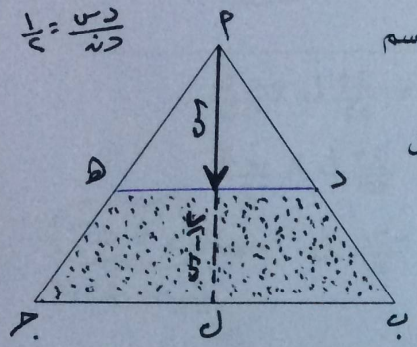
تناقص $[0 ، \frac{1}{4}]$ ، تزايد $[\frac{1}{4} ، \infty)$

صغرى محلية عند $س = \frac{1}{4}$ وتساوي $ق(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$

السؤال الثالث : ١) في الشكل المجاور أب = أجـ = ١٣ سم ، بجـ = ١٠ سم

إذا تحرك الضلع $\overline{ده}$ لأسفل موازيا" لنفسه بمعدل $\frac{1}{2}$ سم /ث ، جد معدل

التغير في مساحة الشكل ده جـ عندما يكون طول $\overline{ده} = \frac{1}{2}$ بجـ ؟



$\frac{دس}{دن} = \frac{1}{2}$

$\frac{دع}{دن} \downarrow$ $دهـ = ٥$ سم

$م = \frac{1}{2}[10 + \frac{3س10}{12}] \times (12 - س)$

$\frac{دم}{دن} \downarrow$ $د$ أعلى

$\frac{دهـ}{دع} = \frac{3س10}{12} = ٥$

$3س10 = 60$

$س = 6$ سم

$\frac{س}{دهـ} = \frac{12}{10}$

$دهـ = \frac{3س10}{12}$

$أل^2 + ل ب^2 = أب^2$

$25 + ل ب^2 = 169$

$ل ب^2 = 144$

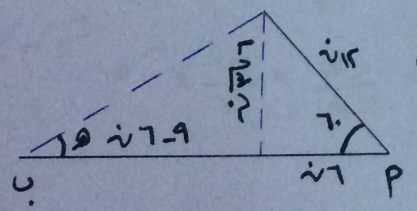
$ل ب = 12$ سم

---

٢) أ، ب نقطتان على أرض أفقية المسافة بينهما ٩٦ م ، أطلقت رصاصة من النقطة أ وبسرعة ٢١٢ م/ث

في خط يصنع زاوية ٦٠° كما في الشكل ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع ب

بعد نصف ثانية من الحركة ؟



$\frac{دهـ}{دن} \downarrow$ $ن = \frac{1}{2}$

$ظا هـ = \frac{6\sqrt{3}ن}{96 - 9ن}$

$\frac{مجاور}{12ن} = \frac{1}{2}$

مجاور $= 6ن$

$\frac{مقابل}{12ن} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مقابل $= 6\sqrt{3}ن$

$\frac{مقابل}{وتر} = ظا ٦٠$

$\frac{مجاور}{12ن} = \frac{مجاور}{وتر}$

$ظا هـ . \frac{دهـ}{دن} = \frac{(96 - 9ن)(6\sqrt{3}) - (6\sqrt{3}ن)(-6)}{(96 - 9ن)^2}$

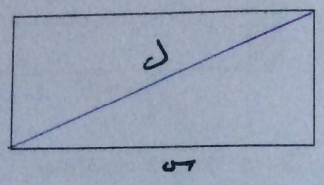
$ظا هـ = \frac{6\sqrt{3}ن}{96 - 9ن}$ ، $ن = \frac{1}{2}$

$= \frac{\frac{1}{2} \times 6\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \times 96 - 9} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$ظا هـ = ظا هـ + 1 \leftarrow$ تقويض

$هـ = 4$

٣) صفيحة مستطيلة الشكل طولها $\frac{٤}{٥}$ طول قطرها ، تتناقص بحيث تبقى محافظة على شكلها ، فإذا كان طول قطرها يتناقص بمعدل ٢,٥ سم /ث ، وتتناقص مساحتها بمعدل ٦٠ سم^{٢} /ث ، جد مساحتها عند تلك اللحظة ؟



$س = \frac{٤}{٥} ل$ ، $\frac{دل}{دن} = -٢,٥$ سم/ث ، $\frac{دم}{دن} = -٦٠$ سم^{٢}/ث

$م = س \times ص$ ---- (١)

$م = \frac{٤}{٥} ل \times \frac{٣}{٥} ل$

$م = \frac{١٢}{٢٥} ل^{٢}$ ---- (٢)

$م = \frac{١٢}{٢٥} \times (٢٥)^{٢}$ سم^{٢} .

$س^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢} \Leftarrow \frac{١٦}{٢٥} ل^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢}$

$ص^{٢} = \frac{٩}{٢٥} ل^{٢} \Leftarrow ص = \frac{٣}{٥} ل$ --- في (١)

لمرونة (ل) $\Leftarrow \frac{دم}{دن} = \frac{٢٤}{٢٥} ل \times \frac{دل}{دن}$

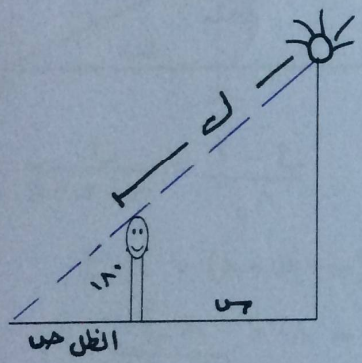
$-٦٠ = \frac{٢٤}{٢٥} ل \times \frac{-٥}{٢}$

$-٦٠ = \frac{-١٢}{٥} ل \Leftarrow ل = ٢٥$

تعوض في (٢)

٤) رجل طولة ١٨٠ سم ، يسير بسرعة ١٥٠ سم /ث نحو قاعدة مصباح ارتفاعه ٤٨٠ سم ، جد معدل التغير في ١) طول ظل الرجل على الأرض ؟

٢) في بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون على بعد ٣٠٠ سم من قاعدة العمود ؟



$\frac{دس}{دن} = -١٥٠$ سم/ث المطلوب $\frac{دص}{دن}$

١) $\frac{٤٨٠}{ص} = \frac{١٨٠}{س + ص} \Leftarrow ٤٨٠ ص = ١٨٠ س + ١٨٠ ص$

$٣٠٠ ص = ١٨٠ س \Leftarrow ص = \frac{١٨}{٣٠} س$

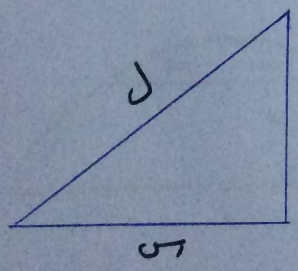
$\frac{دص}{دن} = \frac{١٨}{٣٠} \times \frac{دس}{دن} \Leftarrow \frac{دص}{دن} = \frac{١٨}{٣٠} \times -١٥٠$ سم/ث

ب) $ل^{٢} = س^{٢} + (٣٠٠)^{٢}$

$ل = \sqrt{س^{٢} + (٣٠٠)^{٢}}$

$\frac{دل}{دن} = \frac{٢س \cdot \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{س^{٢} + (٣٠٠)^{٢}}}$

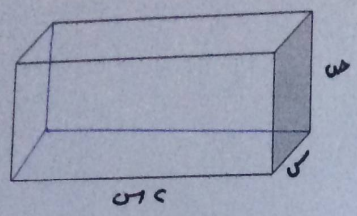
$= \frac{٣٠٠ \times -١٥٠}{\sqrt{(٣٠٠)^{٢} + (٣٠٠)^{٢}}}$ سم/ث .



$\frac{دل}{دن} \downarrow$ سم/ث ٣٠٠

٦) متوازي مستطيلات حجمه ٥٧٦ سم^{٣} ، النسبة بين طولي ضلعي قاعدته

كنسبة ٢ : ١ ، جد أبعاده حتى تكون مساحته الجانبية أقل ما يمكن ؟



م = ٢س ص + ٤س^{٢} + ٤س ص

ح = ٢س × س × ص

٥٧٦ = ٢س^{٢} ص

ص = $\frac{٥٧٦}{٢س^{٢}}$

م = ٦س ص + ٤س^{٢}

م = $\frac{٦س \times ٥٧٦}{٢س^{٢}}$ + ٤س^{٢}

م = $\frac{١٧٢٨}{س}$ + ٤س^{٢}

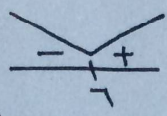
م$'$ = $\frac{-١٧٢٨}{س^{٢}}$ + ٨س

م$'$ = ٠

٨س = $\frac{١٧٢٨}{س^{٢}}$

س^{٣} = $\frac{١٧٢٨}{٨}$ = ٢١٦

س = ٦

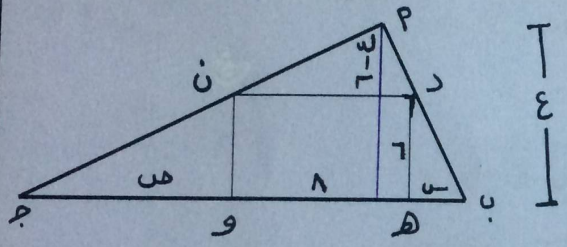


طول = ١٢ سم ، عرض = ٦ سم ، ارتفاع ص = $\frac{٥٧٦}{٧٢}$ = ٨ سم

---

٧) معتمدا" على الشكل المجاور جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ ب جـ ، والذي يقع بداخله المستطيل الذي فيه

هـ و = ٨ سم ، هـ د = ٦ سم ؟



م = $\frac{١}{٢}$ (س + ص + ٨) × ع

م = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٨ع^{٢}}{ع - ٦}$

م = ٤ × $\frac{ع^{٢}}{ع - ٦}$

م$'$ = ٤ $\frac{(ع - ٦) \times ٢ع - ع^{٢}}{(ع - ٦)^{٢}}$

م$'$ = ٠ ⟵ ٢ع^{٢} − ١٢ع − ع^{٢} = ٠

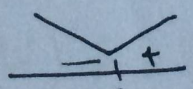
ع^{٢} − ١٢ع = ٠

ع (ع − ١٢) = ٠ ، ع = ٠ ، ع = ١٢

تشابه $\frac{ع - ٦}{٨} = \frac{ع}{س + ص + ٨}$

ع٨ = (ع − ٦)(س + ص + ٨)

$\frac{ع٨}{ع - ٦}$ = س + ص + ٨

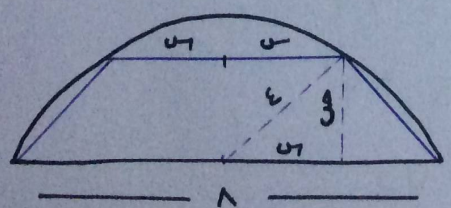


ع = ١٢ أقل ما يمكن

م (١٢) = ----- = ؟

---

٨) جد مساحة أكبر شبه يمكن رسمه داخل نصف دائرة قطرها ٨ سم ، بحيث يقع رأسان من رؤوسة على محيطها والرأسان الأخران على نهايتا قطرها ؟



م = $\frac{١}{٢}$ [٨ + ٢س] × ص

م = $\frac{١}{٢}$ [٨ + ٢س] × $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ..... أكمل

١٦ = س^{٢} + ص^{٢}

ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$