بسم الله الرحمن الرحيم

أحبائي الطلبة جيل ٢٠٠٠ :

بعد أن كَثُرت عليّ الأسئلة من طلبة التوجيهي جيل ٢٠٠٠ حول كورس المنير في الرياضيات للأدبي بخصوص حذف موضوعات المطالعة الذاتية ، وبسبب رغبة هؤلاء الطلاب في اقتناء الكورس والدراسة عليه ، فقد قمت بتجهيز هذا الملف الذي يتضمن الدروس والأسئلة (موضوعات المطالعة الذاتية) التي تم حذفها من كورس المنير ، لتكتمل بذلك المادة حسب منهاج جيل ٢٠٠٠ ،

راجياً الله عز وجل أن ينتفع به طلبتنا الأحبّاء .

كما يوجد شرح لهذه الدروس بالفيديو على القرص DVD المرفق مع الكورس ضمن

ملف خاص لجيل ٢٠٠٠ .

الوحدة الأولى
النهايات والاتصال

رابعاً　نهاية اقتران الجذر النوني

نظرية : نهاية الجذر النوني لاقتران $\sqrt[ن]{ق(س)}$ عند عدد ما (أ) تساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران عند هذا العدد ونعبر عن ذلك بالرموز : إذا كان $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل فإن

$$\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$$

ونميز حالتين لـ (ن) :

الحالة الأولى : ن فردي : وفي هذه الحالة نعوض بالنقطة التي تقترب منها س والتعويض مقبول

مثال : إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ فأوجد $\lim_{س \to -١١}$ ق(س)

الحل : $\lim_{س \to -١١} \sqrt[٣]{س + ٣} = \sqrt[٣]{-١١ + ٣} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

الحالة الثانية : ن زوجي : وهنا نميز ثلاث نواتج :

الناتج الاول: موجب وهو مقبول والنهاية موجودة وتساوي ناتج التعويض

مثال : إذا كان ق(س) = $\sqrt{س + ٤}$ فأوجد $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

الحل : $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س + ٤} = \sqrt{٥ + ٤} = \sqrt{٩} = ٣$

الناتج الثاني : سالب وهو مرفوض والنهاية غير موجودة

مثال : إذا كان ق(س) = $\sqrt{س - ٧}$ فأوجد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

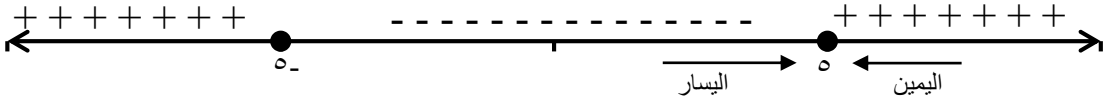
الحل : $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٧} = \sqrt{٣ - ٧} = \sqrt{-٤}$ النهاية غير موجودة لعدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب

الناتج الثالث: صفر وهنا ندرس الإشارة فإذا كان الاقتران(ق(س) > ٠) أي موجب من اليمين واليسار عند نقطة الاقتراب كانت النهاية موجودة وتساوي الصفر وإذا كان (ق(س) < ٠) كانت النهاية غير موجودة

مثال : أوجد قيمة ما يلي $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

الحل : $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥} = \sqrt{(٥)^٢ - ٢٥}$ = صفر　ندرس إشارة ق(س)

$س^٢ - ٢٥ = ٠ \longleftarrow س^٢ = ٢٥ \longleftarrow س = \pm ٥$



$\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ غير موجودة　بما أن $\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{س^٢ - ٢٥} \neq \lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

$\lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ = صفر　إذن : $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ غير موجودة

مثال الكتاب ١ صفحة ٤١

إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س+3}$ ، هـ(س) = $\sqrt{س + 3}$ فما قيمة كل مما يأتي :

١) $\lim_{س \to 5}$ ق(س) = $\lim_{س \to 5}$ $\sqrt[3]{س+3}$ = $\sqrt[3]{5+3}$ = $\sqrt[3]{8}$ = ٢

٢) $\lim_{س \to -11}$ ق(س) = $\lim_{س \to -11}$ $\sqrt[3]{س+3}$ = $\sqrt[3]{-11+3}$ = $\sqrt[3]{-8}$ = -٢

٣) $\lim_{س \to 1}$ هـ(س) = $\lim_{س \to 1}$ $\sqrt{س + 3}$ = $\sqrt{1 + 3}$ = $\sqrt{4}$ = ٢

٤) $\lim_{س \to -8}$ هـ(س) = $\lim_{س \to -8}$ $\sqrt{س + 3}$ = $\sqrt{-5}$ غير موجودة وذلك لعدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب

مثال الكتاب ٢ صفحة ٤٢

إذا كانت $\lim_{س \to 3}$ ق(س) = ٦٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\lim_{س \to 3}$ $\sqrt{ق(س)}$ = $\sqrt{\lim_{س \to 3} ق(س)}$ = $\sqrt{64}$ = ٨

٢) $\lim_{س \to 3}$ $\sqrt[3]{ق(س)}$ = $\sqrt[3]{\lim_{س \to 3} ق(س)}$ = $\sqrt[3]{64}$ = ٤

تدريب الكتاب ١ صفحة ٤٢

إذا كانت $\lim_{س \to 3}$ ق(س) = ٢٤ ، $\lim_{س \to 3}$ هـ (س) = ٨ فجد قيمة ما يأتي (إن وجدت) :

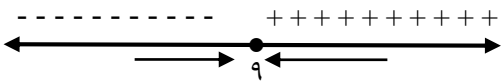
$\lim_{س \to 3}$ ($\sqrt{ق(س)}$ - هـ(س)) + س هـ(س)) =

$\sqrt{\lim_{س \to 3} ق(س)}$ - $\lim_{س \to 3}$ هـ(س) + $\lim_{س \to 3}$ س × $\lim_{س \to 3}$ هـ(س)

= $\sqrt{24 - 8}$ + ٣ × ٨ = ٤ + ٢٤ = ٢٨

مثال الكتاب ٣ صفحة ٤٣

جد قيمة كل نهاية من النهايات الآتية (إن وجدت)



١) $\lim_{س \to 9^+}$ $\sqrt{س - 9}$

من خط الأعداد نلاحظ أنه عندما س ← ٩$^+$ فإن س- ٩ > ٠ ومنه $\lim_{س \to 9^+}$ $\sqrt{س - 9}$ = ٠

٢) $\lim_{س \to 9^-}$ $\sqrt{س - 9}$

من خط الأعداد نلاحظ أنه عندما س ← ٩$^-$ فإن س- ٩ < ٠ ومنه $\lim_{س \to 9^-}$ $\sqrt{س - 9}$ غير موجودة

٣) $\lim_{س \to 9}$ $\sqrt{س - 9}$

بما أن $\underset{\text{س} \leftarrow -٩}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - ٩}$ غير موجودة ، فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٩}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - ٩}$ غير موجودة

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٩}{\text{نها}} \sqrt[٤]{(\text{س} - ٩)^{٢}}$ نلاحظ أن $(\text{س} - ٩)^{٢} > ٠$ دائما مهما كانت قيمة س

ومنه $\underset{\text{س} \leftarrow ٩}{\text{نها}} \sqrt[٤]{(\text{س} - ٩)^{٢}} = ٠$

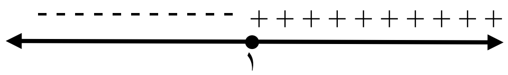
تدريب الكتاب ٢ صفحة ٤٤

جد نهاية كل اقتران من الاقترانات الآتية (إن وجدت) :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} \sqrt{٢\text{س} + ١} = \sqrt{٢ \times ٤ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

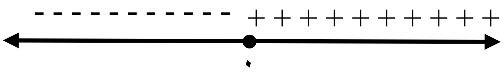
٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}^{٢}} = \sqrt{(-١)^{٢}} = ١$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نها}} \sqrt[٤]{\text{س} - ١}$ غير موجودة



٤) $\underset{\text{س} \leftarrow +١}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - ١} = ٠$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \sqrt[٤]{\text{س} - ١}$ غير موجودة لأن $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نها}} \sqrt[٤]{\text{س} - ١}$ غير موجودة



٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{٢\text{س}}$

بما أن $\underset{\text{س} \leftarrow -٠}{\text{نها}} \sqrt{٢\text{س}}$ غير موجودة فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \sqrt{٢\text{س}}$ غير موجودة

سؤال إضافي

جد قيمة ما يلي : $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}+٩}{\text{س}} + \sqrt{٦ - \text{س}} \right)$

الحل :

$$\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}+٩}{\text{س}} + \sqrt{٦ - \text{س}} \right) = \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}+٩}{\text{س}} \right) + \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \left(\sqrt{٦ - \text{س}} \right)$$

$$= \frac{-٣+٩}{-٣} + \sqrt{٦ - (-٣)} = -٢ + \sqrt{٩} = -٢+٣ = ١$$

سؤال إضافي

جد قيمة ما يلي :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \left(\sqrt[٣]{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right)$$

الحل :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \left(\sqrt[٣]{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \sqrt[٣]{٣ - \text{س}} + \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right)$$

$$= \sqrt[3]{-3 - (-5)} + \frac{-5+5}{(-5)^2 - (-5)} = \sqrt[3]{8} + \frac{\text{صفر}}{5 + 5^2} = 2 + \text{صفر} = 2$$

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = $\sqrt{س - 2}$ ، فإن $\lim_{س \to -2}$ ق(س) تساوي :

أ) صفر ب) ٢ ج) ٤ د) غير موجودة

$$\lim_{س \to -2} \text{ق}(س) = \lim_{س \to -2} \sqrt{س - 2} = \sqrt{-2 - 2} = \sqrt{4} = 2$$

سؤال إضافي

$\lim_{س \to -1}$ $\sqrt[3]{4س - 4}$ تساوي :

أ) -2 ب) صفر ج) ٢ د) غير موجودة

الحل :

$$\lim_{س \to -1} \sqrt[3]{4س - 4} = \sqrt[3]{4(-1) - 4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

حل الأسئلة

١) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = -٦٤$ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

أ) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{ق(س)} = \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٣} ق(س)} = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

ب) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{ق(س)} = \sqrt{\lim_{س \to ٣} ق(س)} = \sqrt{-٦٤}$ غير موجودة لأن السالب ليس له جذر

ج) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt[٣]{ق(س)} + س^٢ + ٥س - ٣) = \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٣} ق(س)} + \lim_{س \to ٣} س^٢ + ٥ \lim_{س \to ٣} س - ٣$

$= \sqrt[٣]{-٤٦} + (٣)^٢ + ٥(٣) - ٣ = -٤ + ٩ + ١٥ - ٣ = ١٧$

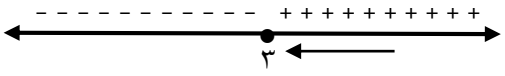
د) $\lim_{س \to ٣} (\sqrt[٥]{\frac{ق(س)}{٢}} + س - ٥) = \sqrt[٥]{\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س)}{٢}} + \lim_{س \to ٣} س - ٥$

$= \sqrt[٥]{\frac{-٦٤}{٢}} + ٣ - ٥ = \sqrt[٥]{-٣٢} - ٢ = -٢ - ٢ = -٤$

---

٢) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

أ) $\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س - ٣}$



من خط الأعداد نلاحظ أنه عندما $س \to ٣^+$ فإن $س - ٣ > ٠$ ومنه $\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س - ٣} = ٠$

ب) $\lim_{س \to -٥} (\sqrt[٣]{٣ - س} + س^٢ - ٤) = \lim_{س \to -٥} \sqrt[٣]{٣ - س} + \lim_{س \to -٥} س^٢ - ٤$

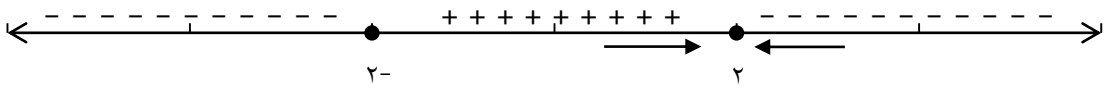
$= \sqrt[٣]{٣ - (-٥)} + (-٥)^٢ - ٤ = \sqrt[٣]{٨} + ٢٥ - ٤ = ٢٣$

جـ) $\lim_{س \to -٢} \sqrt[٣]{٤ - س^٢} = \sqrt[٣]{٤ - (-٢)^٢} =$ صفر

د) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$

$\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^٢} =$ صفر لذلك ندرس إشارة الاقتران

$٤ - س^٢ = ٠ \longrightarrow س^٢ = ٤ \longrightarrow س = \pm ٢$



نلاحظ أن $\lim_{س \to ٢^+} \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٢^-} \sqrt[٤]{٤ - س^٢} =$ صفر $\longrightarrow$ $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^٢}$ غير موجودة

الوحدة الثانية
التفاضل

المشتقة الأولى

الأمثلة والأسئلة من الوحدة الثانية والمطلوبة من جيل ٢٠٠٠

مثال الكتاب ٤ صفحة ٨٣

إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف

الحل :

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع} + \sqrt{س}}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}}$$

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع} + \sqrt{س})}$$

$$= \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}} = \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

طريقة ثانية لحل التدريب :

نحلل ع – س كما يلي : ع – س = $(\sqrt{ع} + \sqrt{س})(\sqrt{ع} - \sqrt{س})$

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س} = \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{(\sqrt{ع} - \sqrt{س})(\sqrt{ع} + \sqrt{س})}$$

$$= \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}} = \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

سؤال إضافي

باستخدام التعريف العام للمشتقة ، جد المشتقة الاولى للاقتران : ق(س) = $\sqrt{س+١}$ ، س ≥ -١

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع + ١} - \sqrt{س + ١}}{ع - س}$$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع + ١} - \sqrt{س + ١}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع + ١} + \sqrt{س + ١}}{\sqrt{ع + ١} + \sqrt{س + ١}}$$

$$قَ(س) = \text{نهـــا}_{ع \to س} \frac{ع + ١ - س - ١}{(ع - س)(\sqrt{ع + ١} + \sqrt{س + ١})}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع} - \text{س}}{(\text{ع} - \text{س})(\sqrt{\text{ع}+1} + \sqrt{\text{س}+1})} = \text{نهـ}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{1}{\sqrt{\text{ع}+1} + \sqrt{\text{س}+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1} + \sqrt{\text{س}+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}$$

طريقة ثانية لحل التدريب باستخدام (هـ)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} - \sqrt{\text{س}+1}}{\text{هـ}}$$ نضرب بالمرافق

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} - \sqrt{\text{س}+1}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} + \sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} + \sqrt{\text{س}+1}}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{س}+\text{هـ}+1-\text{س}-1}{\text{هـ}(\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} + \sqrt{\text{س}+1})}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}(\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} + \sqrt{\text{س}+1})}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{1}{(\sqrt{(\text{س}+\text{هـ})+1} + \sqrt{\text{س}+1})} = \frac{1}{\sqrt{(\text{س}+0)+1} + \sqrt{\text{س}+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}$$

مثال الكتاب ٥ صفحة ٨٤

إذا كان ق(س) = $\sqrt{2\text{س} - 3}$ ، فجد قَ(٤) باستخدام تعريف المشتقة

$$\text{ق}'(\text{س}_1) = \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(4) = \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(4+\text{هـ}) - \text{ق}(4)}{\text{هـ}} = \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{2(4+\text{هـ})-3} - \sqrt{2\times4-3}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{5+2\text{هـ}} - \sqrt{5}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{5+2\text{هـ}} + \sqrt{5}}{\sqrt{5+2\text{هـ}} + \sqrt{5}}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{5+2\text{هـ}-5}{\text{هـ}(\sqrt{5+2\text{هـ}} + \sqrt{5})}$$

$$= \text{نهـ}_{\text{هـ} \to 0} \frac{2\text{هـ}}{\text{هـ}(\sqrt{5+2\text{هـ}} + \sqrt{5})} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

تدريب الكتاب ٤ صفحة ٨٥

إذا كان ق(س) = $\sqrt{2\text{س}}$ ، س > ٠ ، فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة ، ثم جد قَ(٨)

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نهـ}_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$ق'(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{\sqrt[٣]{ع^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٢}}}{ع - س}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$ق'(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{\sqrt[٣]{ع^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٢}}}{ع - س} \times \dfrac{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

$= \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{ع^{٢} - س^{٢}}{(ع - س)(\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{س^{٢}})}$

$= \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{(ع + س)(ع - س)}{(ع - س)(\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{س^{٢}})} = \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{٢}{(\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{س^{٢}})}$

$= \dfrac{٢}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س^{٢}})} = \dfrac{٢}{٢\sqrt[٣]{س^{٢}}} = \dfrac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

$ق'(٨) = \dfrac{١}{\sqrt[٣]{٢ \times ٨}} = \dfrac{١}{\sqrt[٣]{١٦}} = \dfrac{١}{٤}$

سؤال إضافي

إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س - ٣}$ ، فجد $ق'(٤)$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة

$ق'(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$ق'(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{\sqrt[٣]{ع - ٣} - \sqrt[٣]{س - ٣}}{ع - س}$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$= \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{\sqrt[٣]{ع - ٣} - \sqrt[٣]{س - ٣}}{ع - س} \times \dfrac{\sqrt[٣]{ع - ٣} + \sqrt[٣]{س - ٣}}{\sqrt[٣]{ع - ٣} + \sqrt[٣]{س - ٣}}$

$= \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{ع - ٣ - س + ٣}{(ع - س)(\sqrt[٣]{ع - ٣} + \sqrt[٣]{س - ٣})}$

$= \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt[٣]{ع - ٣} + \sqrt[٣]{س - ٣})}$

$= \text{نهـ}_{ع \to س} \dfrac{١}{(\sqrt[٣]{ع - ٣} + \sqrt[٣]{س - ٣})} = \dfrac{١}{٢\sqrt[٣]{س - ٣}}$

$ق'(٤) = \dfrac{١}{٢\sqrt[٣]{٤ - ٣}} = \dfrac{١}{٢}$

صفحة ٨٦

حل الأسئلة

٣)

د) ق(س) = $\sqrt{٤س + ٣}$

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٤ع + ٣} - \sqrt{٤س + ٣}}{ع - س}$$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٤ع + ٣} - \sqrt{٤س + ٣}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٤ع + ٣} + \sqrt{٤س + ٣}}{\sqrt{٤ع + ٣} + \sqrt{٤س + ٣}}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٤ع + ٣ - (٤س + ٣)}{(ع - س)\sqrt{٤ع + ٣} + \sqrt{٤س + ٣}}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٤ع + ٣ - ٤س - ٣}{(ع - س)(\sqrt{٤ع + ٣} + \sqrt{٤س + ٣})}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{(ع - س)(\sqrt{٤ع + ٣} + \sqrt{٤س + ٣})}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٤}{(\sqrt{٤ع + ٣} + \sqrt{٤س + ٣})} = \frac{٤}{(\sqrt{٤س + ٣} + \sqrt{٤س + ٣})}$$

$$= \frac{٤}{٢\sqrt{٤س + ٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٤س + ٣}}$$

.....

٤)

د) ص = $\sqrt{٢ - ٣س}$ ، س = -٢

$$ق'(-٢) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(-٢+هـ) - ق(-٢)}{هـ}$$

$$ق'(-٢) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{٢ - ٣(-٢+هـ)} - \sqrt{٢ - ٣\times-٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{٢ + ٦ - ٣هـ} - \sqrt{٢ + ٦}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{٨ - ٣هـ} - \sqrt{٨}}{هـ} \times \frac{\sqrt{٨ - ٣هـ} + \sqrt{٨}}{\sqrt{٨ - ٣هـ} + \sqrt{٨}}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ٣هـ - ٨}{هـ(\sqrt{٨ - ٣هـ} + \sqrt{٨})}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٣\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}(\sqrt{٨} - ٣\text{هـ} + \sqrt{٨})} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٣}{\sqrt{٨} - ٣\text{هـ} + \sqrt{٨}}$$

$$= \frac{-٣}{\sqrt{٨} - ٣ \times ٠ + \sqrt{٨}} = \frac{-٣}{\sqrt{٨} + \sqrt{٨}} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٨}}$$

المشتقات العليا

إذا كان ص = ق(س) فإن :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صَ} = \text{قَ}(\text{س})$ وتسمى المشتقة الأولى

وكذلك $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء}^٢\text{س}} = \text{صً} = \text{قً}(\text{س})$ وتسمى المشتقة الثانية

وكذلك $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ء}^٣\text{س}} = \text{صٌ} = \text{قٌ}(\text{س})$ وتسمى المشتقة الثانية

وهكذا حتى المشتقة النونية $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}^{\text{ن}}\text{س}}$

ما يهمنا في هذا البحث هو **المشتقة الثانية** فقط

مثال الكتاب ١ صفحة ١٠٨

إذا كان ق(س) = ٣ – س + ٥س^٢ – ٧س^٣ ، فجد قً(س)

قَ(س) = -١ + ١٠س -٢١س^٢

قً(س) = ١٠ – ٤٢س

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = س^٣ +٥س^٢-٣س +٢ فجد قً(س)

نوجد أولاً المشتقة الأولى ثم نشتقها للحصول على المشتقة الثانية :

قَ (س) = ٣س^٢ +٥س – ٣

قً(س) = ٦س + ٥

مثال الكتاب ٢ صفحة ١٠٨

جد المشتقة الثانية لكل مما يأتي :

١) ق(س) = ٦س^٤ -٢س + ١ عندما س = -٢

قَ(س) = ٢٤س^٣ – ٢

قً(س) = ٧٢س^٢

قً(–٢) = ٧٢ (-٢)^٢ = ٧٢ × ٤ = ٢٨٨

٢) ص = س جاس + ٢جتاس
ص َ = (س×جتاس + جاس) +(-٢جاس)
= س جتاس + جاس – ٢ جاس = س جتاس – جاس
ص ً = (س × - جاس + جتاس) – جتاس
= - س جاس + جتاس – جتاس = - س جاس

تدريب الكتاب ١ صفحة ١٠٩

جد $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$ لكل مما يأتي :

١) ص = س^{٢} + جتاس
ص َ = ٢س – جاس ⟵ ص ً = ٢ – جتاس

٢) ص = س حيث س > ٠
ص َ = ١
ص ً = صفر

٣) ص = $\frac{٥}{س}$ عندما س = -٥
ص َ = $\frac{-٥}{س^{٢}}$ ⟵ ص ً = $\frac{-(-٥\times ٢س)}{(س^{٢})^{٢}}$
ص ً = $\frac{١٠س}{س^{٤}} = \frac{١٠}{س^{٣}}$ ⟵ ص ً $\Big|_{س=-٥} = \frac{١٠}{(-٥)^{٣}} = -\frac{١٠}{١٢٥} = -\frac{٢}{٢٥}$

مثال الكتاب ٣ صفحة ١٠٩

إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢}$ -٢س + ٧ فجد :

١) أصفار المشتقة الأولى
ق َ(س) = س^{٢} + س – ٢
ق َ(س) = ٠ ومنه س^{٢} + س – ٢ = ٠ ومنه
(س + ٢)(س – ١) = ٠ ومنه س = -٢ ، س = ١
∴ أصفار المشتقة الأولى { -٢ ، ١ }

٢) أصفار المشتقة الثانية
ق ً(س) = ٢س + ١
ق ً(س) = ٠ ومنه : ٢س + ١ = ٠ ومنه س = - $\frac{١}{٢}$
∴ أصفار المشتقة الثانية { - $\frac{١}{٢}$ }

مثال الكتاب ٤ صفحة ١١٠

إذا كان ق(س) = أ س^{٢} – ب س^{٣} +٣ وكان ق َ(١) = ٧ ، ق ً(٠) = ١٠ ، فجد قيم الثابتين : أ ، ب

الحل :

ق َ(س) = ٢أس – ٣ب س^{٢}

قَ(١) = ٧

٢أ – ٣ب = ٧ ..... (١)

قً(س) = ٢أ – ٦ ب س

قً(٠) = ١٠

٢أ = ١٠ ، ومنه أ = ٥

من المعادلة (١) :

٢×٥ -٣ب = ٧ ومنه ١٠ – ٣ب = ٧ ومنه -٣ب = -٣ ومنه ب = ١

تدريب الكتاب ٢ صفحة ١١٠

إذا كان ق(س) = أ^{٢}س^{٣} – ١٢ س^{٢} فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل قً(١) = صفراً

قَ(س) = أ^{٢}×٣س^{٢}– ١٢×٢ س = ٣ أ^{٢} س^{٢} – ٢٤س

قً(س) = ٣ أ^{٢}×٢س – ٢٤ = ٦ أ^{٢} س – ٢٤ ⟵ قً(١) = ٦أ^{٢}(١) – ٢٤ = صفر

ومنه ٦أ^{٢} = ٢٤ ⟵ أ^{٢} = ٤ ⟵ أ = ± ٢

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = جاس – جتاس فجد قً(س)

قَ (س) = جتاس – (- جاس) = جتاس + جاس

قً(س) = - جاس + جتاس

سؤال إضافي

إذا كان ص= جاس ، فإن صً تساوي :

أ) جتاس ب) – جتاس ج) جاس د) – جاس

صَ = جتاس

صً = - جاس

سؤال إضافي

إذا كان ص= جتا٤س ، فإن قً(س) تساوي :

أ) -٤جا٤س ب) ١٦ جتا٤س ج) -١٦جتا٤س د) -١٦جا٤س

قَ(س) = -٤جا٤س

قً(س) = -١٦ جتا٤س

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = س^{٤} – أ س^{٢} + س فجد قيمة الثابت أ التي تجعل قً(–١) = صفر

ق َ(س) = ٤س^{٣} -٢أس + ١

ق ً(س) = ١٢س^{٢} -٢أ ولكن ق ً(-١) = صفر

ق ً(-١) = ١٢(-١)^{٢} – ٢ أ

٠ = ١٢ – ٢أ ومن ٢أ = ١٢ ومنه أ = ٦

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = (٢س – ١)^{٤} فجد ق ً(٠)

ق َ(س) = ٤(٢س -١)^{٣} × ٢ = ٨(٢س -١)^{٣}

ق ً(س) = ٨×٣(٢س – ١)^{٢} × ٢ = ٤٨(٢س -١)^{٢}

ق ً(٠) = ٤٨(٢×٠ – ١)^{٢} = ٤٨

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = ٣أ^{٢}س^{٤} – ٨س^{٣} ما قيمة الثابت أ التي تجعل ق ً(١) = -١٢ ؟

ق َ(س) = ١٢أ^{٢}س^{٣} -٢٤ س^{٢}

ق ً(س) = ٣٦أ^{٢}س^{٢} – ٤٨س ولكن ق ً(١) = -١٢

ق ً(١) = ٣٦أ^{٢}(١)^{٢} – ٤٨ × ١

-١٢ = ٣٦أ^{٢} – ٤٨ ومنه ٣٦أ = ٣٦ ومنه أ^{٢} = ١ ومنه أ = ± ١

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = جـ س^{٣}– ٨س^{٢} ما قيمة الثابت جـ التي تجعل ق ً(٢) = ٣٢ ؟

ق َ(س) = ٣جـ س^{٢} – ١٦ س

ق ً(س) =٦ جـ س – ١٦ ولكن ق ً(٢) = ٣٢

ق ً(٢) = ٦جـ ×٢ – ١٦

٣٢ = ١٢ جـ - ١٦

٣٢ + ١٦ = ١٢ جـ ومنه ٤٨ = ١٢ جـ نقسم الطرفين على ١٢ : جـ = ٤

سؤال إضافي

إذا كان : ق(س) = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س + ١ جد ق ً(٢)

ق َ(س) = ٣س^{٢} -١٢س +٩

ق ً(س) = ٦س – ١٢

ق ً(٢) = ٦× ٢ – ١٢ = صفر

سؤال وزاري ٢٠١٨ شتوية

إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٦ ، وكان قَ(٢) = ١٢ ، قً(٠) = ٢٤ ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

قَ(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س ولكن قَ(٢) = ١٢

قَ(٢) = ٣أ(٢)^{٢} + ٢ب(٢)

١٢ = ١٢ أ + ٤ب نقسم على ٤ فيكون ٣ = ٣ أ + ب .....(١)

قً(س) = ٦ أ س + ٢ب ولكن قً(٠) = ٢٤

قً(٠) = ٦أ (٠) + ٢ب

٢٤ = ٢ب ومنه ب = ١٢ نعوض في (١) فيكون

٣ = ٣أ + ١٢ ومنه ٣أ = ٣ – ١٢

٣أ = -٩ ومنه أ = -٣

حل الأسئلة

صفحة ١١١

١) جد المشتقة الثانية للاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = (٢س^{٤} – ٥)(٨ – ٥س)

قَ(س) = (٢س^{٤} – ٥)(-٥) + (٨ – ٥س)(٨س^{٣})

= -١٠س^{٤} + ٢٥ + ٦٤س^{٣} – ٤٠ س^{٤} = -٥٠س^{٤} + ٦٤س^{٣} + ٢٥

قً(س) = -٥٠×٤س^{٣} + ٦٤×٣ س^{٢} = -٢٠٠س^{٣} + ١٩٢س^{٢}

.....

ب) ص = س^{٣}(١ – ٢س) ، عندما س = ١

ص = س^{٣} – ٢س^{٤}

صَ = ٣س^{٢} – ٨س^{٣}

صً= ٦س – ٢٤س^{٢}

صً $\Big|_{س=١}$ = ٦×١ – ٢٤(١)^{٢} = ٦ – ٢٤ = -١٨

.....

ج) هـ (س) = ٢ جتاس

هـَ (س) = -٢جاس

هـً(س) = -٢جتاس

.....

د) ق(س) = س^{٢}(س – ١) ، عندما س = -٢

ق(س) = س^{٣} – س^{٢}

قَ(س) = ٣س^{٢} -٢س

قً(س) = ٦س – ٢

قً(–٢) = ٦×-٢ – ٢ = -١٢ -٢ = -١٤

.....

ه) ق(س) = جا٢س جتاس

قَ(س) = جا٢س × - جاس + جتاس ×٢جتا٢س

= - جا٢س جاس + ٢جتا٢س جتاس

ق َ(س) = -(جا٢س×جتاس +جاس×٢جتا٢س) +٢(جتا٢س×- جاس + جتاس ×٢×- جا٢س)

= - جا٢س جتاس - ٢جتا٢س جاس - ٢جتا٢س جاس -٤ جا٢س جتاس

= -٥جا٢س جتاس – ٤جتا٢س جاس

.....

و) ق(س) = $\frac{٢}{١ - ٤س}$ ، عندما س = ٠

ق َ(س) = $\frac{-٢\times-٤}{(١ - ٤س)^{٢}} = \frac{٨}{(١ - ٤س)^{٢}}$

ق ً(س) = $\frac{-٨\times٢(١ - ٤س)\times-٤}{(١ - ٤س)^{٤}} = \frac{٦٤(١ - ٤س)}{(١ - ٤س)^{٤}} = \frac{٦٤}{(١ - ٤س)^{٣}}$

ق ً(٠) = $\frac{٦٤}{(١ - ٤\times٠)^{٣}} = ٦٤$

.....

ز) ق (س) = جا(س^{٢} – س)

ق َ(س) = (٢س -١) جتا(س^{٢} – س)

ق ً(س) = (٢س-١)×- جا(س^{٢} – س) × (٢س -١) + جتا(س^{٢} – س)×٢

= - (٢س -١)^{٢} جا(س^{٢} – س)+ ٢ جتا(س^{٢} – س)

---

٢) إذا كان ق(س) = ٣أ س^{٣} – ٢ب س + ١ وكان ق َ(٠) = ٤ ، ق ً(١) =٣٦ فجد قيم أ ، ب

ق َ(س) = ٣أ×٣س^{٢} -٢ب = ٩أ س^{٢} – ٢ب

ق َ(٠) = ٩أ(٠)^{٢} – ٢ب

٤ = -٢ب ⟵ ب = - $\frac{٤}{-٢}$ = -٢

ق ً(س) = ٩أ×٢س = ١٨أ س

ق ً(١) = ١٨أ(١)

٣٦ = ١٨أ ⟵ أ = $\frac{٣٦}{١٨}$ = ٢

---

٣) إذا كان ق(س) = أ س^{٣} – ب س^{٢} - ٣ وكان ق َ(١) = ٢١ ، ق ً(٢) = ١٠٢ فجد قيم أ ، ب .

ق َ(س) = أ×٣س^{٢} -٢ب س = ٣أ س^{٢} – ٢ب س

ق َ(١) = ٣أ(١)^{٢} – ٢ب ×١ = ٢١ ⟵ ٣أ – ٢ب = ٢١ .....(١)

ق ً(س) = ٣أ×٢س – ٢ب = ٦أ س – ٢ب

ق ً(٢) = ٦أ(٢) – ٢ب = ١٠٢ ⟵ ١٢أ – ٢ب = ١٠٢ .....(٢)

بطرح المعادلة (١) من (٢) :

١٢أ – ٢ب = ١٠٢

-٣أ + ٢ب = -٢١

٩أ = ٨١ نقسم الطرفين على ٩ ينتج : أ = ٩ نعوض في (١) :

٣× ٩ – ٢ب = ٢١ ومنه ٢٧ – ٢ب = ٢١ ومنه :

-٢ب = ٢١ – ٢٧ = -٦ نقسم الطرفين على -٢ ينتج ب = ٣

---

٤) إذا كان ق(س) = جتا٢س ، فجد قً(س) + ٦ق(س)

قَ(س) = -٢جا٢س ⟵ قً(س) = -٤جتا٢س

قً(س) + ٦ق(س) = -٤جتا٢س +٦جتا٢س = ٢جتا٢س

٥) إذا كان ق(س) = س٢جاس ، فجد قً(س)

قَ(س) = س٢ × جتاس + جاس × ٢س = س٢جتاس + ٢س جاس

قً(س) = س٢ ×- جاس + جتاس × ٢س + ٢س× جتاس + جاس ×٢

= - س٢جاس +٢س جتاس +٢جاس + ٢س جتاس = - س٢جاس + ٤س جتاس + ٢جاس

اختبر نفسك

١) إذا كان ق(س) = جا٢س – جتاس جدقً(س)

٢) إذا كان : هـ (س) = ١ + س٢ – ٢س جتاس جد هـً(س)

٣) إذا كان ق(س) = س٢(س – ١) ، فإن قً(١) تساوي :

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٦

٤) قيمة س التي تجعل قً(س) = ٠ للاقتران ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ -٢س + ٧ ، هي :

أ) ٢ ب) صفر جـ) ١ د) - $\frac{١}{٢}$

٥) إذا كان ق(س) = ٥أ س٣ – ب س + ٦ وكان قَ(١)= ١٠ ، قً(٢)= ٦٠ فجد قيم أ ، ب

٦)إذا كان ق(س) = جا٤س ، فجد قً(س) + ٢٠ ق(س)

صفحة ١١٢

حل أسئلة الوحدة

٦)

د) م(س) = $\sqrt{٢س + ٤}$　　حيث س ≥ -٢

ق`(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

ق`(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع + ٤} - \sqrt{٢س + ٤}}{ع - س}$　نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع + ٤} - \sqrt{٢س + ٤}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}{\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع + ٤ - ٢س - ٤}{(ع-س)\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع - ٢س}{(ع-س)\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع -س)}{(ع-س)\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢}{\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢س + ٤}}$

إعادة حل السؤال باستخدام (هـ)

ق`(س) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

ق`(س) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} - \sqrt{٢س + ٤}}{هـ}$　نضرب بمرافق البسط

ق`(س) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} - \sqrt{٢س + ٤}}{هـ} \times \frac{\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}{\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢س+٢هـ + ٤ - ٢س - ٤}{هـ(\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} + \sqrt{٢س + ٤})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ}{هـ(\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} + \sqrt{٢س + ٤})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢}{(\sqrt{٢(س+هـ) + ٤} + \sqrt{٢س + ٤})}$

$= \frac{٢}{(\sqrt{٢(س+٠) + ٤} + \sqrt{٢س + ٤})} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢س + ٤}}$

.....

و) ق(س) = $\sqrt{٢س - ٣}$　حيث س ≥ $\frac{٣}{٢}$　، عندما س = ٢

$$ق'(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$ق'(س) = \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}}{ع - س}$$ نضرب بمرافق الجذر التربيعي

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}{\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$$

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{٢ع - ٣ - ٢س + ٣}{(ع - س)\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$$

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{٢ع - ٢س}{(ع - س)\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$$

$$= \text{نهـ}_{ع \to س} \frac{٢}{\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢س - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س - ٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢س - ٣}}$$

$$ق'(٢) = \frac{١}{\sqrt{٣ - (٢)٢}} = ١$$

---

٨) جد ق$'$(س) لكل مما يأتي :

أ) ق(س) = (س^{٢}+٢)(٣ – ٤س)

ق$'$(س) = (س^{٢}+٢)×-٤ + (٣ – ٤س)×٢س = -٤س^{٢} -٨ +٦س-٨س^{٢}

= -١٢س^{٢} + ٦س – ٨

ق$'$(س) = -٢٤س +٦

.....

ب) ق(س) = (٢س -١)^{٥}

ق$'$(س) = ٥(٢س – ١)^{٤}×٢ = ١٠(٢س – ١)^{٤}

ق$''$(س) = ١٠×٤(٢س – ١)^{٣} ×٢=٨٠(٢س – ١)^{٣}

.....

ج) ق(س) = س^{٢}جتاس + س$^{-٣}$ – ٥

ق$'$(س) = س^{٢} × - جاس + جتاس× ٢س -٣س$^{-٤}$

= - س^{٢} جاس +٢س جتاس -٣س$^{-٤}$

ق$''$(س) = - س^{٢} × جتاس + جاس ×-٢س +٢س×-جاس + جتاس ×٢ +١٢س$^{-٥}$

= - س^{٢} جتاس- ٢س جاس – ٢س جاس + ٢ جتاس + ١٢س$^{-٥}$

= - س^{٢} جتاس – ٤ س جاس + ٢ جتاس + ١٢س$^{-٥}$

---

١٠) إذا كان ق(س) = س^{٤}-أ س^{٢}+ س ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل ق$'$(-١) = صفراً

ق$'$(س) = ٤س^{٣} -٢أس +١ ⟵ ق$''$(س) = ١٢س^{٢} – ٢أ

ق$''$(-١) = ١٢(-١)^{٢} – ٢أ = صفر ⟵ ٠ = ١٢ – ٢أ ⟵ ٢أ = ١٢ ⟵ أ = ٦

---

١١) إذا كان ق(س) = (أس – ١)^{٤} ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل قً(٠) = ٤٨

قَ(س)= ٤(أس – ١)^{٣}×أ = ٤أ(أس – ١)^{٣}

قً(س)= ٤أ×٣(أس – ١)^{٢}×أ = ١٢أ^{٢}(أس – ١)^{٢}

قً(٠) = ١٢أ^{٢}(أ×٠ – ١)^{٢} = ١٢أ^{٢} ⟵ ٤٨ = ١٢أ^{٢} ⟵ أ^{٢}= $\frac{٨٤}{٢١}$ = ٤ ⟵أ = ± ٢

---

١٢) إذا كان ق(س) =(٢س-١)^{٣} ، وكان قً(س١)= ٤ ، فجد قيمة س١

الحل :

قَ(س)= ٣(٢س-١)^{٢} ×٢ = ٦(٢س-١)^{٢}

قً(س)= ٦×٢(٢س-١)×٢ = ٢٤(٢س-١) عندما قً(س١)= ٤ ⟵

٤ =٢٤(٢ س١ - ١) نقسم الطرفين على ٤ ⟵١=٦(٢س١-١) ⟵ $\frac{١}{٦}$ = ٢س١ – ١

$\frac{١}{٦}$ + ١ = ٢س١ ومنه ٢س١ = $\frac{٧}{٦}$ ومنه س١ = $\frac{٧}{١٢}$

الوحدة الثالثة
تطبيقات التفاضل

القيم القصوى

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى :

عندما نلجأ لاختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى فلا داعي لرسم خط الأعداد أو جدول الإشارات للمشتقة الأولى

ويتلخص اختبار المشتقة الثانية كما يلي :

نقوم بإيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق ونجعلها قَ(س) = صفر وبالتالي إيجاد قيم س الحرجة بفرض س = جـ

ثم نقوم بإيجاد المشتقة الثانية وتعويض قيم س الحرجة بها

فإذا كانت قً(جـ) > صفر فإن ق(جـ) هي قيمة صغرى محلية للاقتران ق

وإن كانت قً(جـ) < صفر فإن ق(جـ) هي قيمة عظمى محلية للاقتران ق

وإن كانت قً(جـ) = صفر فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل ، ونعيد الحل باختبار المشتقة الأولى

أعد حل (المثال ١) صفحة ١٣٧ باستخدام اختبار المشتقة الثانية :

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = ٢س^{٣} -٣س^{٢} – ١٢س +٥

الحل :

قَ(س) = ٦س^{٢} -٦س -١٢

قَ(س) = ٠ ومنه ٦س^{٢} -٦س -١٢ =٠ نقسم على ٦ فيكون

س^{٢} – س -٢ = ٠ ومنه (س – ٢)(س +١) = ٠

ومنه الأعداد الحرجة : س =٢ ، س = -١

قً(س) = ١٢س – ٦

قً(٢) = ١٢ ×٢ – ٦ = ٢٤ – ٦ = ١٨ > ٠

توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ٢ ، هي ق(٢) = ١٥

قً(-١) = ١٢(-١) – ٦ = -١٢ – ٦ = -١٨ < ٠

توجد قيمة عظمى محلية عندما س = -١ ، هي ق(-١) = ١٢

مثال الكتاب ٣ صفحة ١٣٩

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق :

حيث : ق(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} – ٢٤ س + ٢

الحل :

قَ(س) = ٣س^{٢} – ٦س -٢٤

قَ(س) = ٠ ومنه ٣س^{٢} – ٦س -٢٤ = ٠ نقسم المعادلة على ٣

س^{٢} – ٢س – ٨ = ٠ ومنه (س – ٤) (س + ٢) = ٠ ومنه :

س = ٤ ، س = -٢ وهي الأعداد الحرجة

قً(س) = ٦س – ٦ نقوم باختبار المشتقة الثانية :

قً(٤) = ٦×٤ – ٦ = ٢٤ – ٦ = ١٨ > ٠

توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ٤ قيمتها :

ق(٤) = (٤)^{٣} – ٣(٤)^{٢} – ٢٤ (٤) + ٢ = ٦٤ – ٤٨ -٩٦ + ٢ = -٧٨

قً(-٢) = ٦ × -٢ – ٦ = -١٢ -٦ = -١٨ < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية عندما س = -٢ قيمتها :

ق(-٢) = (-٢)^{٣} – ٣(-٢)^{٢} – ٢٤ (-٢) + ٢ = -٨ – ١٢ +٤٨+ ٢ = ٣٠

تدريب الكتاب ٣ صفحة ١٤٠

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران :

ق(س) = س^{٣} -٣س +٢

الحل :

قَ(س) = ٣س^{٢} – ٣

قَ(س) = صفر ⟵ ٣س^{٢} – ٣ = صفر ⟵ ٣س^{٢} = ٣ ⟵ س^{٢} = ١ ⟵ س = ± ١

قً(س) = ٦س ⟵ قً(-١) = ٦×-١ = -٦ < صفر توجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق قيمتها :

ق(-١) = (-١)^{٣} -٣(-١) +٢ = -١ + ٣ + ٢ = ٤ وتكون النقطة الحرجة (-١ ، ٤)

كذلك قً(١) =٦×١ = ٦ < صفر توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما س = ١

هي ق(١) = (١)^{٣}- ٣(١) + ٢ = ١ -٣ +٢ = صفر وتكون النقطة الحرجة (١ ، ٠)

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = ١٢س – س^{٣} ، فجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) للاقتران ق

الحل :

قَ(س) = ١٢ – ٣س^{٢}

قَ(س) = صفر ⟵ ١٢ – ٣س^{٢} = صفر ⟵ س^{٢} = ٤ ⟵ س = ± ٢

قً(س) = - ٦س ⟵ قً(-٢) = -٦ × -٢ = ١٢ < صفر توجد قيمة صغرى محلية عندما س = -٢

هي ق(-٢) = ١٢×-٢ – (-٢)^{٣} = -٢٤ +٨ = -١٦

قً(٢) = -٦×٢ = -١٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٢

هي ق(٢) = ١٢×٢ – (٢)^{٣} = ٢٤ -٨ = ١٦

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = -٢س^{٣} + ٦س + ٤ ، فجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) للاقتران ق

قَ(س) = -٦س^{٢} + ٦

قَ(س) = ٠ ومنه -٦س^{٢} + ٦=٠ ومنه ٦س^{٢} = ٦ ومنه

س^{٢} = ١ ومنه س = -١ ، س = ١ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

قً(س) = -١٢س

قً(–١) = -١٢ × -١ = ١٢ > صفر توجد قيمة صغرى محلية عند س = -١ قيمتها :

ق(-١) = -٢(-١)^{٣} + ٦(-١) + ٤ = ٢ -٦ + ٤ = صفر

قً(١) = -١٢× ١ = -١٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عند س = ١ قيمتها :

ق(١) = -٢(١) + ٦(١) + ٤ = -٢ + ٦ + ٤ = ٨

سؤال إضافي

إذا كان ق(س) = ٦س – س^{٢} ، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عندما س تساوي :

أ) ٦ ب) صفر ج) -٣ د) ٣

الحل :

قَ(س) = ٦ – ٢س ومنه ٦ – ٢س = ٠ ومنه ٢س = ٦ ومنه س = ٣

قً(س) = -٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٣

صفحة ١٤١

حل الأسئلة

٢) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي باستخدام اختبار المشتقة الثانية :

أ) ق(س) = ٨ – س^{٢}

الحل :

قَ(س) = -٢س ومنه قَ(س) = ٠ ومنه -٢س = ٠ ومنه س = ٠

قً(س) = -٢ < ٠ توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٠ قيمتها :

ق(٠) = ٨ – (٠)^{٢} = ٨ ومنه النقطة الحرجة هي (٠ ، ٨)

.....

ب) ق(س) = س^{٢} + ٤

الحل :

قَ(س) = ٢س ومنه قَ(س) = ٠ ومنه ٢س =٠ ومنه س = ٠

قً(س) = ٢ > ٠ توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ٠ قيمتها :

ق(٠) = (٠)^{٢} + ٤ = ٤ ومنه النقطة الحرجة هي (٠ ، ٤)

.....

ج) ق(س) = ٢س^{٣} – ٦س

الحل :

قَ(س) = ٦س^{٢} – ٦

قَ(س) = ٠ ومنه ٦س^{٢} -٦ =٠ ومنه س^{٢} =١ ومنه : س =١ ، س = -١

قً(س) = ١٢س

قً(١) = ١٢ × ١ = ١٢ > ٠ توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ١ قيمتها :

ق(١) = ٢(١)^{٣} – ٦(١) = ٢ – ٦ = -٤ ومنه النقطة الحرجة هي (١ ، -٤)

قً(–١) = ١٢×-١ = -١٢ < ٠ توجد قيمة عظمى محلية عندما س = -١ قيمتها :

ق(-١) = ٢(-١)^{٣} – ٦(-١) = -٢ + ٦ = ٤ ومنه النقطة الحرجة هي (١ ، ٤)

تطبيقات

تطبيقات على القيم القصوى

معلومات عامة تفيد في حل المسائل :

مساحة المربع = الضلع × الضلع

محيط المربع = الضلع × ٤

مساحة المستطيل = الطول × العرض

محيط المستطيل = (الطول + العرض) ×٢

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ (القاعدة × الارتفاع)

محيط المثلث = مجموع أضلاعه

مساحة الدائرة = π نق^{2} حيث نق نصف قطر الدائرة

محيط الدائرة = ٢ π نق

حجم المكعب = الطول × العرض × الارتفاع

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

ملاحظة هامة في حل المسائل :

في هذه المسائل يقسم السؤال إلى قسمين :

القسم الأول : هو قسم **المعطيات** الذي على أساسه نضع **الفرضيات**

مثلاً: ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما ٥٠ ← هذه هي **المعطيات**

نضع الفرضيات : حيث نفرض العدد الأول س والعدد الثاني ص فيكون س + ص = ٥٠

ثم نوجد ص بدلالة س فيكون ص= ٥٠ – س

القسم الثاني : **الطلبات** والتي على أساسها نشكل **المعادلة**

تتمة للمثال السابق : وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ← هذه هي الطلبات

نشكّل المعادلة : بفرض (ح) حاصل ضرب العددين تكون المعادلة : ح = س×(٥٠ – س)

إذا كان الطلب في المسألة هو(أكبر مايمكن) نبحث عن قيمة عظمى محلية

وإذا كان الطلب في المسألة (أصغر ما يمكن) نبحث عن قيمة صغرى محلية

مثال الكتاب ١ صفحة ١٤٢

ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما ٦٤ ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

الحل :

بفرض العدد الأول س ، والثاني ص وبما أن س + ص = ٦٤ فيكون ص= ٦٤ – س

بفرض ح هو حاصل ضرب العددان فإن :

ح = س × ص نبحث عن قيمة عظمى محلية لأن المطلوب أكبر قيمة لحاصل الضرب

ح (س) = س (٦٤ – س) ⟵ ح(س) = ٦٤س – س^{٢}

حَ(س) = ٦٤ – ٢س ⟵ حَ(س) = صفر ⟵ ٦٤ – ٢س = ٠ ⟵ س = ٣٢ نختبر المشتقة الثانية

حً(س) = -٢ < صفر ومنه حً(٣٢) = -٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٣٢

∴ العدد الاول س = ٣٢ والعدد الثاني ص = ٦٤ – ٣٢ = ٣٢

تدريب الكتاب ١ صفحة ١٤٣

ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٢٠) ، ومجموع مربعهما أقل ما يمكن ؟

نفرض العدد الأول س والعدد الثاني ص

س + ص = ٢٠ ومنه ص = ٢٠ – س

إذا كان مجموع مربعيهما ح ، فإن :

ح = س^{٢} + ص^{٢} نبحث عن قيمة صغرى محلية لأن المطلوب أقل مجموع لمربع العددين

ح(س) = س^{٢} + (٢٠ – س)^{٢}

حَ(س) = ٢س +٢(٢٠- س) × -١ = ٢س -٤٠ + ٢س

حَ(س) = ٤س – ٤٠

حَ(س) = ٠ ومنه ٤س -٤٠=٠ ومنه ٤س = ٤٠ ومنه س = ١٠

حً(س) = ٤ > ٠ ومنه حً(١٠) = ٤ > ٠ توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ١٠

∴ العدد الأول س = ١٠ ، والثاني ص = ٢٠ – ١٠ = ١٠

مثال الكتاب ٢ صفحة ١٤٤

قطعة أرض مستطيلة الشكل ، محيطها ٦٠٠ م ، ما بعدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن ؟

بفرض أبعاد المستطيل س ، ص

مساحة المستطيل (م) = الطول × العرض

محيط المستطيل = ٢×(الطول + العرض)

ص

٦٠٠ = ٢(س+ ص) نقسم الطرفين على ٢ ⟵ ٣٠٠ = س + ص ⟵ ص = ٣٠٠ – س

المساحة : م = س (٣٠٠ – س) = ٣٠٠س – س^{٢}

مَ = ٣٠٠ – ٢س عندما مَ = صفر ⟵ ٣٠٠ – ٢س =٠ ⟵ س = ١٥٠ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

م ً(س) = -٢ < صفر ومنه م ً(١٥٠) = -٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ١٥٠

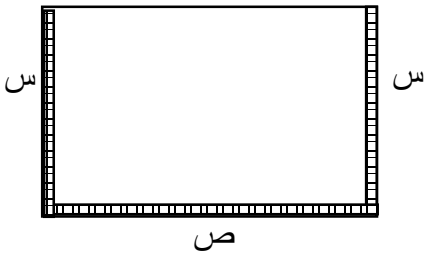
∴ المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ١٥٠ م

ص = ٣٠٠ – س = ٣٠٠ -١٥٠ = ١٥٠ م

تدريب الكتاب ٢ صفحة ١٤٥

يملك مزارع قطعة أرض تقع على ضفة نهر مستقيم ، فإذا اشترى المزارع ٣٠٠ متر من الأسلاك الشائكة ، فما أبعاد أكبر جزء مستطيل من قطعة الأرض يمكن تسييجه بها من دون تسييج البعد الواقع على ضفة النهر ؟

بفرض أبعاد المستطيل هي س ، ص



المحيط = مجموع أطوال الأضلاع المسيجة

٣٠٠ = س + ص + س = ٢س + ص ومنه

ص = ٣٠٠ -٢س

المساحة = الطول × العرض

م = س (٣٠٠ -٢س) = ٣٠٠س – ٢س^{٢}

مَ = ٣٠٠ – ٤س ⟵ مَ =٠ ⟵ ٣٠٠ – ٤س =٠ ⟵ س = ٧٥ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

م ً(س) = -٤ < صفر ومنه م ً(٧٥) = -٤ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٧٥

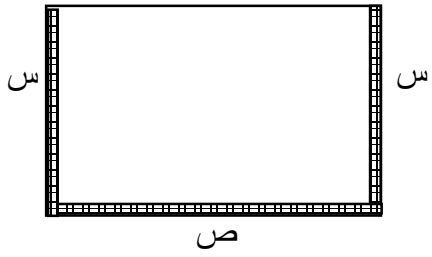
∴ المساحة أكبر ما يمكن عندما س = ٧٥ م

ص = ٣٠٠ -٢(٧٥) = ١٥٠ م

سؤال إضافي

قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٢٠٠ م^{٢} ، يراد إحاطتها بسياج من ثلاث جهات ، تكلفة المتر الواحد (٥) دنانير ، ما أبعاد الأرض لتكون تكلفة السياج أقل ما يمكن ؟

الحل :



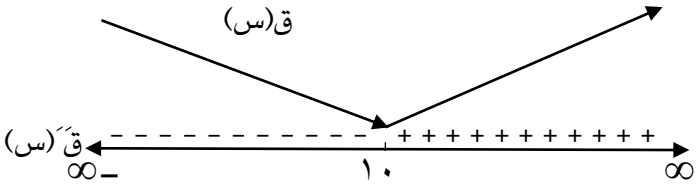
نفرض أبعاد الأرض س ، ص

مساحة الأرض = م = س ×ص = ٢٠٠

$$ص = \frac{٢٠٠}{س}$$

تكلفة السياج = ك = (س + ص + س)× ٥ = (٢س+ $\frac{٢٠٠}{س}$)×٥

ك = ١٠س + $\frac{١٠٠٠}{س}$



كَ(س) = ١٠ + $\frac{-١٠٠٠}{س^{٢}}$

كَ(س) = ٠ ومنه ١٠ - $\frac{١٠٠٠}{س^{٢}}$ = ٠ ومنه $\frac{١٠٠٠}{س^{٢}}$ = ١٠ ومنه

١٠س^{٢} =١٠٠٠ ومنه س^{٢} = ١٠٠ ومنه س = -١٠ مرفوض ، س = ١٠

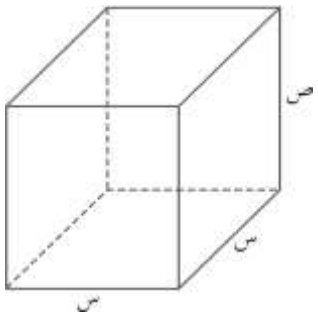
من خط الأعداد نلاحظ وجود قيمة صغرى محلية عند س = ١٠

تكون تكلفة السياج أقل ما يمكن عند س = ١٠م ، ص = $\frac{٢٠٠}{١٠}$ = ٢٠ م

مثال الكتاب ٣ صفحة ١٤٥

صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، قاعدته مربعة الشكل ، ومجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم ،

جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن



ملاحظة هامة : في إحدى مسائل الدورات الوزارية كان نص المسألة مجموع محيط قاعدته وأرتفاعه (٨٤) سم بدل مجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم

في هذه الحالة : ٤س + ص = ٨٤

الحل :

حجم الصندوق (ح) = الطول ×العرض × الارتفاع

نفرض أبعاد الصندوق : س ، س ، ص(الطول = العرض = س لأن القاعدة مربعة)

ح = س×س×ص = س^{٢}ص

ولكن حسب الفرض س + س+ ص = ١٢٠ ⟵ ٢س + ص= ١٢٠

ص = ١٢٠ – ٢س

ح (س) = س^{٢}(١٢٠-٢س)= ١٢٠س^{٢} – ٢س^{٣}

حَ(س) = ٢٤٠س – ٦س^{٢} عندما حَ(س) = صفر ⟵ ٢٤٠س – ٦س^{٢} =٠ ⟵ ٦س(٤٠ – س) =٠⟵

إما س= ٠ ، س = ٤٠ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

حً(س) = ٢٤٠ – ١٢س

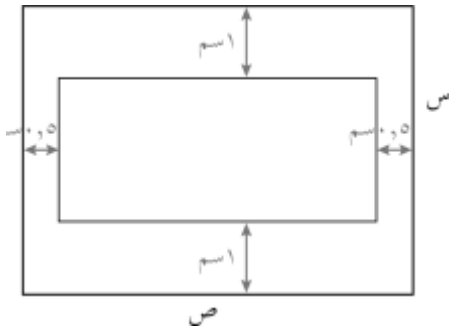
حً(٠) = ٢٤٠> صفر ، قيمة صغرى محلية مرفوض لأنه المطلوب أكبر ما يمكن وليس أقل ما يمكن

حً(٤٠) = ٢٤٠ – ١٢×٤٠ = -٢٤٠< صفر ، توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٤٠

الحجم أكبر ما يمكن عندما س = ٤٠سم ، ص = ١٢٠ – ٢×٤٠ = ٤٠سم

∴ أبعاد الصندوق : الطول = ٤٠سم ، العرض = ٤٠سم ، الارتفاع = ٤٠ سم

مثال الكتاب ٤ صفحة ١٤٦



صحيفة ورقية مستطيلة الشكل ، مساحتها ٥٠ سم^{٢} ، يراد طباعة إعلان عليها إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل جانب ٠,٥ سم ، فجد بعدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن

الحل :

نفرض بعدي الصحيفة الورقية س ، ص ، والمساحة المطبوعة م

فيكون بعدي منطقة الطباعة : س – ٢ ، ص – ١

مساحة منطقة الطباعة م = (س -٢)(ص – ١)

نوجد ص من مساحة الصحيفة الورقية ٥٠ = س × ص ⟵ ص = $\frac{٥٠}{س}$

م (س) = (س-٢)($\frac{٥٠}{س}$ - ١) = ٥٠ – س - $\frac{١٠٠}{س}$ +٢ = ٥٢ – س - $\frac{١٠٠}{س}$

مَ(س) = -١ + $\frac{١٠٠}{س^{٢}}$

مَ(س) = ٠ ⟵ -١ + $\frac{١٠٠}{س^{٢}}$ = ٠ ⟵ $\frac{١٠٠}{س^{٢}}$ = ١ ⟵ س^{٢} =١٠٠ ⟵

س = ١٠ ، س= -١٠ مرفوض لأنه طول ولايجوز ان يكون سالب

مً(س) = $\frac{-١٠٠ \times ٢س}{س^{٤}}$ = - $\frac{٢٠٠}{س^{٣}}$

مً(١٠) = - $\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ١٠سم

ص = $\frac{٥٠}{س}$ = $\frac{٥٠}{١٠}$ = ٥

تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن عندما بعدا الورقة ١٠سم ، ٥ سم

سؤال إضافي

يريد مزارع تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل ، إذا كانت تكلفة المتر الواحد من جانبين متوازيين (٤) دنانير ومن الجانبين الآخرين دينارين ، فجد مساحة أكبر قطعة مستطيلة يمكن تسييجها بمبلغ (٨٠٠) دينار

الحل :

بفرض أبعاد الأرض س ، ص

٤×٢س + ٢× ٢ص = ٨٠٠ ومنه ٨س + ٤ص = ٨٠٠ نقسم الطرفين على ٤ فيكون :

٢س + ص = ٢٠٠ ومنه ص = ٢٠٠ – ٢س

مساحة الأرض = م = س × ص = س (٢٠٠ – ٢س) ومنه

م = ٢٠٠س – ٢س^{٢}

مَ(س) = ٢٠٠ -٤س

مَ(س) = ٠ ومنه ٢٠٠ – ٤س = ٠ ومنه ٤س =٢٠٠ ومنه س = ٥٠

مً(س) = -٤ < صفر ومنه مً(٥٠) = -٤ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عند س = ٥٠

∴ أكبر مساحة ممكنة هي م = ٢٠٠×٥٠ – ٢(٥٠)^{٢} = ١٠٠٠٠ – ٥٠٠٠ = ٥٠٠٠ م^{٢}

سؤال إضافي

قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (١٦٠٠) م^{٢} يراد إحاطتها بسياج ، إذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج (٣) دنانير ، فجد بعدي قطعة الأرض اللذين يجعلان التكلفة أقل ما يمكن

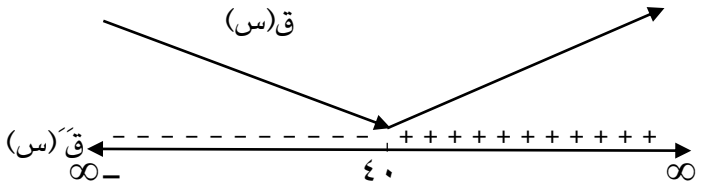
الحل : نفرض بعدي الأرض س ، ص

مساحة الارض : م = س× ص = ١٦٠٠ ومنه ص = $\frac{١٦٠٠}{س}$

التكلفة = محيط الأرض × تكلفة المتر الواحد

ك = (٢س + ٢ص) × ٣ = ٦س + ٦ص

ك = ٦س + ٦× $\frac{١٦٠٠}{س}$ = ٦س + $\frac{٩٦٠٠}{س}$



كَ(س) = ٦ - $\frac{٩٦٠٠}{س^{٢}}$

كَ(س) = ٠ ومنه ٦ - $\frac{٩٦٠٠}{س^{٢}}$ = ٠ ومنه $\frac{٩٦٠٠}{س^{٢}}$ = ٦ ومنه ٦س^{٢} = ٩٦٠٠

س^{٢} = ١٦٠٠ ومنه س = -٤٠ مرفوض ، س = ٤٠

نلاحظ من خط الأعداد وجود قيمة صغرى محلية عند س = ٤٠

∴ تكون التكلفة أقل ما يمكن عندما س = ٤٠ م ، ص = $\frac{١٦٠٠}{٤٠}$ = ٤٠ م

سؤال إضافي

قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها (٤٠٠) م ، ما بعدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن ؟

الحل :

نفرض بعدا قطعة الأرض : س ، ص

محيط المستطيل = ٢× الطول + ٢ × العرض

٤٠٠ = ٢س + ٢ص ومنه ٢٠٠ = س + ص ومنه ص = ٢٠٠ – س

المساحة (م) = س × ص = س (٢٠٠- س) = ٢٠٠س – س^{٢}

مَ(س) = ٢٠٠ – ٢س

مَ(س) = ٠ ومنه ٢٠٠ – ٢س = ٠ ومنه ٢س = ٢٠٠ ومنه س = ١٠٠

مً(س) = -٢ < صفر ومنه مً(١٠٠) = -٢ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ١٠٠

∴ تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما س = ١٠٠ م ، ص= ٢٠٠- ١٠٠ = ١٠٠م

سؤال إضافي

لدى مزارع (٥٠٠) متر من الأسلاك الشائكة ، إذا أراد المزارع تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل ، ما بعدا قطعة الأرض المستطيلة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن ؟

نفرض بعدا قطعة الأرض س ، ص

محيط قطعة الأرض = ٢× الطول + ٢× العرض

٥٠٠ = ٢س + ٢ص ومنه ٢٥٠ = س + ص ومنه ص = ٢٥٠ – س

المساحة (م) = س × ص ومنه م = س (٢٥٠ – س) = ٢٥٠س – س^{٢}

مَ(س) = ٢٥٠ – ٢س

مَ(س) = ٠ ومنه ٢٥٠ – ٢س =٠ ومنه ٢س = ٢٥٠ ومنه س = ١٢٥

مً(س) = -٢< صفر ومنه مً(١٢٥) = -٢< صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ١٢٥

∴ تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ١٢٥ م ، ص = ٢٥٠ – ١٢٥ = ١٢٥ م

سؤال وزاري ٢٠١٨ شتوية

إذا كان مجموع ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي ٦٠ سم ، فجد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث

نفرض بعدي المثلث س ، ص

س + ص = ٦٠ ومنه ص = ٦٠ – س

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ (القاعدة × الارتفاع)

م = $\frac{١}{٢}$ س ×ص = $\frac{١}{٢}$ س (٦٠ – س)

م = ٣٠س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

مَ(س) = ٣٠ – س

مَ(س) = ٠ ومنه ٣٠ – س = ٠ ومنه س = ٣٠

مً(س) = - ١ < صفر ومنه مً(٣٠) = - ١ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٣٠

∴ أكبر مساحة ممكنة : م = ٣٠×٣٠ - $\frac{١}{٢}$ (٣٠)^{٢} = ٩٠٠ – ٤٥٠ = ٤٥٠ سم^{٢}

حل الأسئلة

صفحة ١٤٨

١) ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما ٦٠ ، وحاصل ضرب أحدهما في مربع الأخر أكبر ما يمكن

الحل :

نفرض العدد الأول س ، ونفرض العدد الثاني ص فيكون س + ص = ٦٠ ⟵ س = ٦٠ - ص

ح = س × ص^{٢} = (٦٠ - ص) ص^{٢}

بفرض م هو حاصل ضرب أحدهما بمربع الآخر

م(س) = (٦٠- ص) ص^{٢}⟵ م(ص) = ٦٠ص^{٢} – ص^{٣}

مَ(ص) = ١٢٠ص – ٣ص^{٢} ⟵ مَ(ص) = ٠ ⟵ ١٢٠ص – ٣ص^{٢}= ٠ ⟵ ص(١٢٠ -٣ص) = ٠

إما ص = ٠ مرفوض او ص = ٤٠ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

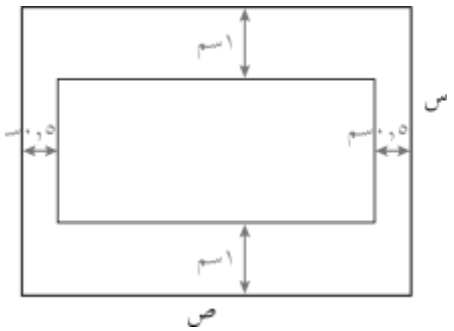
مً(ص) = ١٢٠-٦ص ⟵ مً(٤٠) = ١٢٠ -٦(٤٠) = ١٢٠- ٢٤٠ = -١٢٠< صفر

توجد قيمة عظمى محلية عند ص = ٤٠

∴ العدد الأول ص= ٤٠ والثاني س= ٦٠ – ٤٠ = ٢٠

---

٢) صحيفة ورقية مستطيلة الشكل ، مساحتها ٣٢ سم^{٢} ، يراد طباعة إعلان عليها إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل جانب ٠,٥ سم ، فجد بعدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن



الحل :

نفرض بعدي الصحيفة الورقية س ، ص ، والمساحة المطبوعة م

فيكون بعدي منطقة الطباعة : س – ٢ ، ص – ١

مساحة منطقة الطباعة م = (س -٢)(ص – ١)

نوجد ص من مساحة الصحيفة الورقية ٣٢ = س × ص ⟵ ص = $\frac{٣٢}{س}$

م (س) = (س-٢)($\frac{٣٢}{س}$ - ١) = ٣٢ – س - $\frac{٦٤}{س}$ +٢ = ٣٤– س - $\frac{٦٤}{س}$

مَ(س) = -١ + $\frac{٦٤}{س^{٢}}$

مَ(س) = ٠ ⟵ -١ + $\frac{٦٤}{س^{٢}}$ = ٠ ⟵ $\frac{٦٤}{س^{٢}}$ = ١ ⟵ س^{٢} = ٦٤ ⟵

س = ٨ ، س= - ٨ مرفوض لأنه طول ولايجوز ان يكون سالب

$م'(س) = \frac{-٤٦ \times ٢س}{س^{٤}} = -\frac{١٢٨}{س^{٣}}$

$م'(١٠) = -\frac{١٢٨}{٥١٢}$ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٨ سم

$ص = \frac{٣٢}{س} = \frac{٣٢}{٨} = ٤$

تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن عندما بعدا الورقة ٨ سم ، ٤ سم

---

٣) أراد إبراهيم أن يفتح نافذة مستطيلة في جدار إحدى غرف منزله ، بحيث يكون محيط النافذة ٦م ،
جد بعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية ممكنة من الضوء بدخول الغرفة

الحل : نفرض بعدي النافذة س ، ص

محيط المستطيل = ٢×(الطول + العرض)

٦ = ٢(س + ص) ⟵ س + ص = ٣ ⟵ ص = ٣ – س

مساحة النافذة م = س × ص

م (س) = س (٣ – س)= ٣س – $س^{٢}$

مَ(س) = ٣ – ٢س

مَ (س) = ٠ ⟵ ٣ – ٢س = ٠ ⟵ ٢س = ٣ ⟵ س = $\frac{٣}{٢}$ نستخدم اختبار المشتقة الثانية

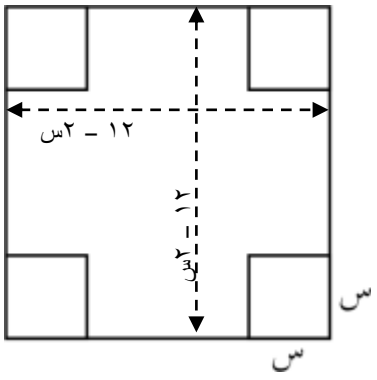
$م'(س) = -٢$ < صفر ومنه $م'(\frac{٣}{٢}) = -٢$ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س= $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥ م

ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥ م

بعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية من الضوء بدخول الغرفة : ١,٥م ، ١,٥ م

---

٤) صندوق مربع ، طول ضلعه ١٢ سم ، إذا قص من جوانبه الأربعه (٤)
مربعات متساوية طول ضلعها س ، ثم رفعت الجوانب ، وأصبح على صورة
علبة مفتوحة من أعلى ، فجد قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن



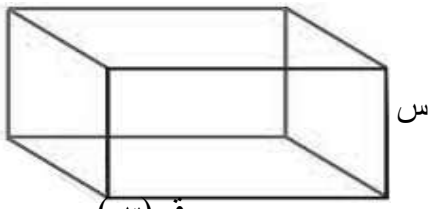
الحل :

حجم العلبة = الطول × العرض × الارتفاع

بفرض أبعاد العلبة ١٢ – ٢س ، ١٢ – ٢س ، س

ح (س) = (١٢-٢س)(١٢-٢س)×س

ح(س) = س(١٢ -٢س)^{٢}



حَ(س) = س×٢(١٢-٢س)×-٢ +(١٢ -٢س)^{٢} ×١

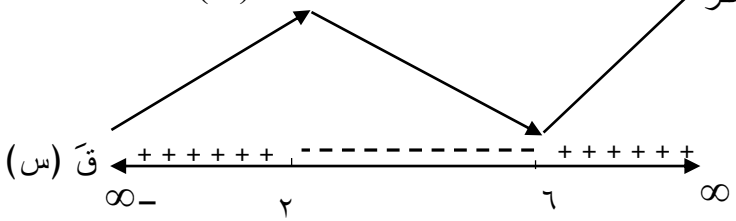
= (١٢ – ٢س)(-٤س + ١٢ -٢س)

حَ(س)= (١٢ – ٢س) (١٢ – ٦س)

حَ(س) = صفر ⟵ (١٢ – ٢س) (١٢ – ٦س) = صفر

ومنه ١٢ -٢س =٠ ومنه س = ٦ ،

١٢ – ٦س = ٠ ومنه س = ٢



من جدول الإشارات نلاحظ

س = ٦ مرفوض لأن عندها قيمة صغرى محلية

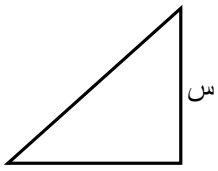
س = ٢ عندها قيمة عظمى محلية أي قيمة س التي يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن هو س = ٢

---

٥) إذا كان مجموع طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي ٤٠ سم ، فجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث

الحل : نفرض طول الضلع القائمة الأولى س وطول الضلع القائمة الثانية ص فيكون س + ص = ٤٠

ومنه : ص= ٤٠ – س



مساحة المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ (القاعدة × الارتفاع)

م (س) = $\frac{١}{٢}$ س(٤٠- س) = ٢٠س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

مَ (س) = ٢٠ – س ⟵ مَ (س) = صفر ⟵ ٢٠ – س = ٠ ⟵ س =٢٠ نختبر المشتقة الثانية

مً (س)= -١ < صفر ومنه مً (٢٠)= -١ < صفر توجد قيمة عظمى محلية عندما س = ٢٠

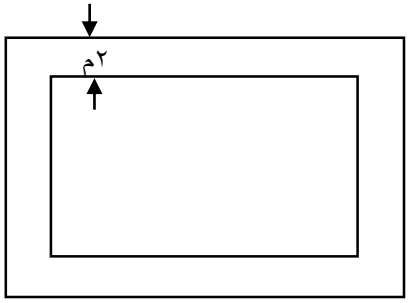
∴ طول ضلعي القائمة الاول = ٢٠ سم ، والثاني = ٤٠ – ٢٠ = ٢٠ سم

أكبر مساحة ممكنة للمثلث م = ٢٠(٢٠) - $\frac{١}{٢}$ (٢٠)^{٢} = ٤٠٠ – ٢٠٠ =٢٠٠ سم^{٢}

---

٦) يراد تصميم بركة قاعدتها مستطيلة الشكل ، ومساحتها ٣٦ م^{٢} ، تم إحاطتها بممر خارجي منتظم عرضه متران ، جد أبعاد البركة المراد تصميمها بحيث تكون المساحة الكلية للبركة والممر أقل ما يمكن

الحل :



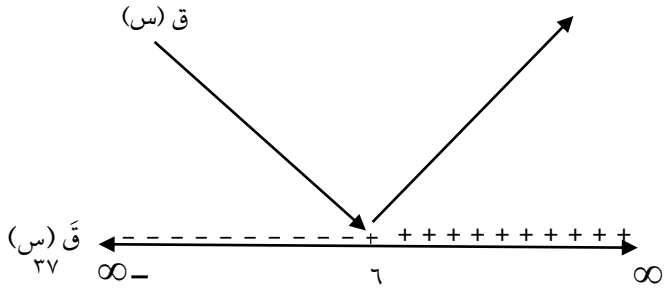
بفرض أبعاد البركة دون الممر س ، ص فتكون أبعاده مع الممر س+٤ ، ص+٤

من الفرض ٣٦ = س × ص ⟵ ص = $\frac{٦٣}{س}$

مساحة البركة مع الممر : م (س) = (س+٤)(ص+٤) = (س+٤)($\frac{٦٣}{س}$ +٤)

م (س) = ٣٦ + ٤س + $\frac{٤٤١}{س}$ + ١٦ = ٥٢ + ٤س + $\frac{٤٤١}{س}$

مَ(س) = ٤ - $\frac{٤٤١}{س^{٢}}$ عندما مَ(س) = صفر



$٤ - \frac{٤٤١}{س^{٢}} = ٠ \longleftarrow \frac{٤٤١}{س^{٢}} = ٤ \longleftarrow ٤س^{٢} = ١٤٤$

$س^{٢} = ٣٦ \longleftarrow$ س = ٦ ، س= -٦ مرفوض ومن جدول الإشارات نلاحظ وجود قيمة صغرى محلية عندما س = ٦

∴ أبعاد البركة المراد تصميمها والتي تكون عندها أصغرما يمكن هي : س= ٦ م ، ص = $\frac{٦٣}{٦}$ = ٦م