الوحدة الأولى :- النهايات والاتصال :-

① الدرس الأول : نهاية الاقتران عند نقطة :

* س تقترب من أ ← س ← أ ، أ أي رقم ثابت
* س تقترب من أ من اليمين ← س ← أ⁺
* س تقترب من أ من اليسار ← س ← أ⁻
* نهاية الاقتران ← نهـا
* نهـا (س ← أ⁺) = نهـا (س ← أ⁻) ← النهاية موجودة
* نهـا (س ← أ⁺) ≠ نهـا (س ← أ⁻) ← النهاية غير موجودة

مثال : ق(س) = ٣س - ١ ، أوجدي نهـا (س ← ١) ق(س)

الحل :- نهـا (س ← ١) ٣س - ١ = ٣(١) - ١
= ٣ - ١
= ٢

(يتم إيجاد النهاية عن طريق التعويض المباشر)

مثال :- أوجدي النهاية في كل مما يلي :

أ) نهـا (س ← ٢) س³ + ١   ب) نهـا (س ← -٢) ٤ - س²   جـ) نهـا (س ← ٥) س - س² + ١

الحل :-

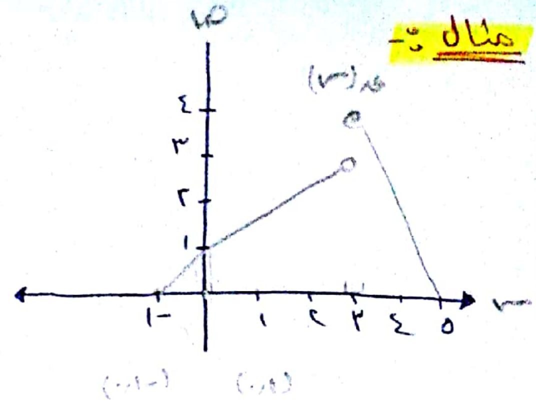
أ) نهـا (س ← ٢) س³ + ١ = (٢)³ + ١
= ٨ + ١
= ٩

ب) نهـا (س ← -٢) ٤ - س² = ٤ - (-٢)²
= ٤ + ٤
= ٨

جـ) نهـا (س ← ٥) س - س² + ١ = ٥ - ٥² + ١
= ٥ - ٢٥ + ١
= -٢٠ + ١
= -١٩

* ايجاد النهاية عن طريق الرسم :-

مثال :-



أوجدي :

١) $\lim_{س \to 0^+} ق(س) = 1$

٢) $\lim_{س \to 0^-} ق(س) = 1$

$\lim_{س \to 0} ق(س) = 1$ (موجودة)

٣) $\lim_{س \to 2} ق(س) = 2$

٤) $\lim_{س \to 3^-} ق(س) = 3$

٥) $\lim_{س \to 3^+} ق(س) = 4$

$\therefore \lim_{س \to 3} ق(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to 3^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 3^-} ق(س)$

٦) $\lim_{س \to -1} ق(س) = 0$

② نهاية الاقتران المتشعب :-

مثال : $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 4 , & س < 1 \\ 5س , & س > 1 \end{cases}$ ، **أوجدي** $\lim_{س \to 1} ق(س)$ ؟!

الحل : $\lim_{س \to 1^+} 5س = 5 \times 1 = 5$

$\lim_{س \to 1^-} س^2 + 4 = (1)^2 + 4 = 5$

$\therefore \lim_{س \to 1} ق(س) = 5$ (موجودة)

* الاشارة الاصغر من يعني النهاية من اليسار
* اشارة الاكبر من يعني النهاية من اليمين

مثال : $ق(س) = \begin{cases} س^2 , & س < 2 \\ 2س , & س \geq 2 \end{cases}$ ، **أوجدي** $\lim_{س \to 2} ق(س)$ ؟!

الحل :- $\lim_{س \to 2^-} س^2 = (2)^2 = 4$

$\lim_{س \to 2^+} 2س = 2 \times 2 = 4$

$\therefore \lim_{س \to 2^-} س^2 = \lim_{س \to 2^+} 2س = 4$

$\therefore \lim_{س \to 2} ق(س) = 4$ (موجودة)

$\text{ه(س)} = \begin{cases} \text{س}^3 + 2 , & \text{س} < -1 \\ \text{س}^2 + \text{س} , & \text{س} \geq -1 \end{cases}$ ، أوجدي $\boxed{\lim\limits_{\text{س} \to -1} \text{ه(س)}}$ ؟!

$\lim\limits_{\text{س} \to -1^-} \text{س}^3 + 2 = (-1)^3 + 2$

$= -1 + 2 = 1$

$\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{س}^2 + \text{س} = (1)^2 + 1$

$= 2$

$\lim\limits_{\text{س} \to -1^-} \text{س}^3 + 2 \neq \lim\limits_{\text{س} \to -1^+} \text{س}^2 + \text{س}$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \text{ه(س)}$ غير موجودة.

سؤال: أوجدي $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \text{ه(س)}$ إذا كان $\text{ه(س)} = \begin{cases} 3\text{س}^2 - 2\text{س} , & \text{س} < 4 & - \\ 2\text{س} + 3 , & \text{س} \geq 4 & + \end{cases}$

← **الحل:** $\lim\limits_{\text{س} \to 4^-} 3\text{س}^2 - 2\text{س} = 3 \times (4)^2 - 2 \times 4$

$= 3 \times 16 - 8$

$= 40$

$\lim\limits_{\text{س} \to 4^+} 2\text{س} + 3 = 2 \times 4 + 3$

$= 8 + 3$

$= 11$

$\lim\limits_{\text{س} \to 4^-} 3\text{س}^2 - 2\text{س} \neq \lim\limits_{\text{س} \to 4^+} 2\text{س} + 3$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)}$ غير موجودة.

مثال: إذا كان $\text{ه(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + 5 , & \text{س} < 3 \\ \text{م}\text{س} + 2 , & \text{س} \geq 3 \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{ه(س)}$ موجودة، فأوجدي م ؟!

الحل: بما أنه $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{ه(س)}$ موجودة ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 3^+} \text{ه(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to 3^-} \text{ه(س)}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3^-} \text{س}^2 + 5 = (3)^2 + 5 = 9 + 5 = 14$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3^+} \text{م}\text{س} + 2 = 3\text{م} + 2$

← $3\text{م} + \cancel{2} = 14$ ، $-2 \quad -2$ ← $\frac{3\text{م}}{3} = \frac{12}{3}$

$\boxed{\text{م} = 4}$ (٣)

سؤال :- ق(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ١ ، & س < -٢ \\ س + م ، & س \geq -٢ \end{cases}$ وكانت نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة م

← **الحل:** بما أن نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) موجودة ∴ نهـا$_{س \leftarrow -٢^+}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow -٢^-}$ ق(س) :

نهـا$_{س \leftarrow -٢^-}$ ٣س^٢+١ = ٣×(-٢)^٢+١ ، نهـا$_{س \leftarrow -٢^+}$ س+م = -٢+م = ١٣

= ١٢ + ١

= ١٣

← $\cancel{-٢}$ + م = ١٣
+٢ $\cancel{+٢}$

$\boxed{م = ١٥}$

سؤال :- ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٥ ، & س < ٣ \\ م س - ٢ ، & س \geq ٣ \end{cases}$ وكانت نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) موجودة، فما قيمة م ؟

← **الحل:** بما أن نهـا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) موجودة ∴ نهـا$_{س \leftarrow ٣^+}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ٣^-}$ ق(س)

نهـا$_{س \leftarrow ٣^-}$ س^٢ - ٥ = (٣)^٢ - ٥

= ٩ - ٥

= ٤

نهـا$_{س \leftarrow ٣^+}$ م س - ٢ = ٣م - ٢

= ٣م - $\cancel{٢}$ = ٤
$\cancel{+٢}$ +٢

= $\frac{\cancel{٣}م}{\cancel{٣}}$ = $\frac{٦}{٣}$

$\boxed{م = ٢}$

③ نهـاية خارج قسمة اقترانين :-

تقديم: الأصل في إيجاد النهاية هو $\boxed{\text{التعويض}}$ ولكن ينتج عند التعويض أربع حالات هي:

١) الناتج هو $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}}$ تكون النهاية موجودة ويكون الناتج هو $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}}$

٢) الناتج هو $\boxed{\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}}$ تكون النهاية موجودة ويكون الناتج هو $\boxed{\text{صفر}}$

٣) الناتج هو $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}}$ تكون النهاية غير موجودة ويكون الناتج $\boxed{\text{غير موجود}}$ (يتم دراستها لاحقاً)

٤) الناتج هو $\boxed{\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}}$ لا تقبل النتيجة هكذا إلا بعد $\boxed{\text{استخدام قاعدة}}$ (حلل - اختصر - عوض)

Scanned by CamScanner

$$\frac{س+2}{س+5} = \frac{2+2}{2+5} = \frac{4}{7}$$

$$\text{نهـا}_{ع \to 3} \frac{ع-3}{5ع-1} = \frac{3-3}{5\times3-1} = \frac{0}{14} = \text{صفر}$$

3) $$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^2-1}{3س-2} = \frac{(1)^2-1}{3\times1-2} = \frac{0}{1} = \text{صفر}$$

4) $$\text{نهـا}_{س \to -2} \frac{4+3س}{س-5} = \frac{4+3\times-2}{-2-5} = \frac{4-6}{-7} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

5) $$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س^2+5}{س} = \frac{(0)^2+5}{\text{صفر}} = \frac{5}{0}$$ ∴ النهاية غير موجودة

6) $$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س+2}{س^2-9} = \frac{3+2}{(3)^2-9} = \frac{5}{0}$$ ∴ النهاية غير موجودة

7) $$\text{نهـا}_{س \to 7} \frac{2س-10}{س^2-49} = \frac{2\times7-10}{(7)^2-49} = \frac{14-10}{49-49} = \frac{4}{0}$$ ∴ النهاية غير موجودة

* أمثلة على الحالة الرابعة: $\boxed{1}$ (التحليل باستخدام $\boxed{\text{إخراج عامل مشترك}}$)

1) $$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س^2+س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \leftarrow \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س^2+س}{س} = \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\cancel{س}(س+1)}{\cancel{س}} = \text{نهـا}_{س \to 0} (س+1) = 0+1 = 1$$

2) $$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{25س^2+5س}{5س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\leftarrow \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{25س^2+5س}{5س} = \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\cancel{5س}(5س+1)}{\cancel{5س}} = \text{نهـا}_{س \to 0} 5س+1 = 5(0)+1 = 1$$

3) $$\text{نهـا}_{ص \to 3} \frac{ص-3}{3ص^2-9ص} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{ص \to 3} \frac{ص-3}{3ص^2-9ص} = \text{نهـا}_{ص \to 3} \frac{\cancel{ص-3}}{3ص\,(\cancel{ص-3})} = \text{نهـا}_{ص \to 3} \frac{1}{3ص} = \frac{1}{9}$$

4) $$\text{نهـا}_{س \to 4} \frac{5س-20}{س-4} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 4} \frac{5س-20}{س-4} = \text{نهـا}_{س \to 4} \frac{5\,(\cancel{س-4})}{\cancel{س-4}} = \text{نهـا}_{س \to 4} \frac{5}{1} = 5$$

5) $$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{7س-21}{3-س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{7س-21}{3-س} = \text{نهـا}_{س \to 3} \frac{7\,(\cancel{س-3})^{-1}}{\cancel{3-س}} = \text{نهـا}_{س \to 3} \frac{-7}{1} = -7$$

Scanned by CamScanner

٢ التحليل باستخدام $\boxed{\text{فرق بين مربعين}}$:-

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٢-١}{\text{س}-١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٢-١}{\text{س}-١} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{\text{س}-١} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \text{س}+١ = ١+١ = ٢$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{٩-\text{س}^٢}{\text{س}-٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{٩-\text{س}^٢}{\text{س}-٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{٣^٢-\text{س}^٢}{\text{س}-٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(٣-\text{س})(٣+\text{س})}{\text{س}-٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} -(٣+\text{س}) = -(٣+٣) = -٦$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ١٠} \dfrac{\text{س}^٢-١٠٠}{\text{س}^٢-١٠\text{س}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ١٠} \dfrac{\text{س}^٢-١٠٠}{\text{س}^٢-١٠\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ١٠} \dfrac{\text{س}^٢-١٠^٢}{\text{س}(\text{س}-١٠)} = \lim\limits_{\text{س}\to ١٠} \dfrac{(\text{س}-١٠)(\text{س}+١٠)}{\text{س}(\text{س}-١٠)} = \lim\limits_{\text{س}\to ١٠} \dfrac{\text{س}+١٠}{\text{س}}$

$= \dfrac{١٠+١٠}{١٠} = \dfrac{٢٠}{١٠} = ٢$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\text{س}-٦}{\text{س}^٢-٣٦} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\text{س}-٦}{\text{س}^٢-٣٦} = \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{\text{س}-٦}{(\text{س}-٦)(\text{س}+٦)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \dfrac{١}{\text{س}+٦} = \dfrac{١}{٦+٦} = \dfrac{١}{١٢}$

٣ تحليل العبارة التربيعية التي على الصورة $(\text{س}^٢ + \text{ب س} + \text{جـ})$:-

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}{\text{س}-٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}{\text{س}-٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}{\text{س}-٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{س}-٣ = ٢-٣ = -١$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢+٥\text{س}+٦}{\text{س}+٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢+٥\text{س}+٦}{\text{س}+٣} = \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س}+٣)(\text{س}+٢)}{\text{س}+٣} = \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \text{س}+٢ = -٣+٢ = -١$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{س}^٢-٧\text{س}+١٢}{\text{س}-٤} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{س}^٢-٧\text{س}+١٢}{\text{س}-٤} = \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{(\text{س}-٤)(\text{س}-٣)}{\text{س}-٤} = \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \text{س}-٣ = ٤-٣ = ١$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^٢+\text{س}-١٢}{\text{س}^٢-٩} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^٢+\text{س}-١٢}{\text{س}^٢-٩} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٤)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}+٤}{\text{س}+٣} = \dfrac{٣+٤}{٣+٣} = \dfrac{٧}{٦}$

(٦)

$$\lim_{\text{س}\to 7} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} - 14}{\text{س} - 7} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 7} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} - 14}{\text{س} - 7} = \lim_{\text{س}\to 7} \frac{\cancel{(\text{س} - 7)}(\text{س} + 2)}{\cancel{\text{س} - 7}} = \lim_{\text{س}\to 7} (\text{س} + 2) = (7 + 2) = 9$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س} - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 3)}{\cancel{\text{س} - 2}} = \lim_{\text{س}\to 2} \text{س} + 3 = 2 + 3 = 5$$

تذكير:

$$(\text{س}^3 + \text{م}^3) = (\text{س} + \text{م})(\text{س}^2 - \text{س}\text{م} + \text{م}^2)$$

$$(\text{س}^3 - \text{م}^3) = (\text{س} - \text{م})(\text{س}^2 + \text{س}\text{م} + \text{م}^2)$$

٤ تحليل فرق و مجموع عددين مكعبين على صورة $(\text{س}^3 \pm \text{م}^3)$

١) $$\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س} + 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س} + 2} = \lim_{\text{س}\to -2} \frac{(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)\cancel{(\text{س} + 2)}}{\cancel{(\text{س} + 2)}} = \lim_{\text{س}\to -2} \text{س}^2 - 2\text{س} + 4$$

$$= (-2)^2 - 2 \times -2 + 4$$

$$= 4 + 4 + 4 = 12$$

٢) $$\lim_{\text{س}\to -3} \frac{\text{س}^3 + 27}{\text{س} + 3} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to -3} \frac{\text{س}^3 + 27}{\text{س} + 3} = \lim_{\text{س}\to -3} \frac{(\text{س}^2 - 3\text{س} + 9)\cancel{(\text{س} + 3)}}{\cancel{(\text{س} + 3)}} = \lim_{\text{س}\to -3} \text{س}^2 - 3\text{س} + 9$$

$$= (-3)^2 - 3 \times -3 + 9$$

$$= 9 + 9 + 9$$

$$= 27$$

٣) $$\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س}^2 + 3\text{س} + 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س}^2 + 3\text{س} + 2} = \lim_{\text{س}\to -2} \frac{(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)\cancel{(\text{س} + 2)}}{\cancel{(\text{س} + 2)}(\text{س} + 1)} = \lim_{\text{س}\to -2} \frac{(\text{س}^2 - 2\text{س} + 4)}{(\text{س} + 1)}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 2 \times -2 + 4}{-2 + 1}$$

$$= \frac{4 + 4 + 4}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$$

٥ الضرب بالمرافق (ما يميزه وجود $\sqrt{}$) :-

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-١}{\text{س}-١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (نضرب بالمرافق)

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-١}{\text{س}-١} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}}+١}{\sqrt{\text{س}}+١} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\cancel{\text{س}-١}}{(\cancel{\text{س}-١})(\sqrt{\text{س}}+١)} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}}+١} = \dfrac{١}{٢}$$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٢}-٢}{\text{س}-٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ [نضرب بالمرافق]

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٢}-٢}{\text{س}-٢} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+٢}+٢}{\sqrt{\text{س}+٢}+٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}+٢-٤}{(\sqrt{\text{س}+٢}+٢)(\text{س}-٢)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\cancel{\text{س}-٢}}{(\sqrt{\text{س}+٢}+٢)(\cancel{\text{س}-٢})}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}+٢}+٢} = \dfrac{١}{\sqrt{٢+٢}+٢}$$

$$= \dfrac{١}{\sqrt{٤}+٢}$$

$$= \dfrac{١}{٢+٢} = \dfrac{١}{٤}$$

سؤال :- أوجدي النهاية لكل مما يلي :-

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}-٣}{\sqrt{\text{س}+١}-٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}-٣}{\sqrt{\text{س}+١}-٢} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+١}+٢}{\sqrt{\text{س}+١}+٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\sqrt{\text{س}+١}+٢)(\text{س}-٣)}{\text{س}+١-٤}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\sqrt{\text{س}+١}+٢)(\cancel{\text{س}-٣})}{\cancel{\text{س}-٣}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \sqrt{\text{س}+١}+٢ = \sqrt{٣+١}+٢$$

$$= \sqrt{٤}+٢$$

$$= ٢+٢ = ٤$$

٥

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س+٤}-٣}{س-٥} \times \frac{\sqrt{س+٤}+٣}{\sqrt{س+٤}+٣} = \lim_{س \to ٥} \frac{س+٤-٩}{(س-٥)(\sqrt{س+٤}+٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{\cancel{س-٥}}{(\cancel{س-٥})(\sqrt{س+٤}+٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س+٤}+٣} = \frac{١}{\sqrt{٥+٤}+٣}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٩}+٣}$$

$$= \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢-س-٦}{\sqrt{س+١}-٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢-س-٦}{\sqrt{س+١}-٢} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٢)}{\sqrt{س+١}-٢} \times \frac{\sqrt{س+١}+٢}{\sqrt{س+١}+٢}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٢)(\sqrt{س+١}+٢)}{س+١-٤}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(\cancel{س-٣})(س+٢)(\sqrt{س+١}+٢)}{\cancel{س-٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} (س+٢)(\sqrt{س+١}+٢)$$

$$= (٣+٢)(\sqrt{٣+١}+٢)$$

$$= ٥ \times (٢+٢)$$

$$= ٥ \times ٤$$

$$= ٢٠$$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt{\text{س}+1} - 1}{\text{س}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt{\text{س}+1} - 1}{\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+1} + 1}{\sqrt{\text{س}+1} + 1} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س}+1-1}{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}+1} + 1\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}\left(1 + \sqrt{\text{س}+1}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{1}{1 + \sqrt{\text{س}+1}} = \dfrac{1}{2}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\sqrt{\text{س}-1} - 2}{\text{س} - 5} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\sqrt{\text{س}-1} - 2}{\text{س} - 5} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}-1} + 2}{\sqrt{\text{س}-1} + 2} = \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س} - 1 - 4}{\left(\sqrt{\text{س}-1} + 2\right)(\text{س} - 5)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\cancel{\text{س} - 5}}{\left(\sqrt{\text{س}-1} + 2\right)\cancel{(\text{س} - 5)}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}-1} + 2} = \dfrac{1}{\sqrt{5-1} + 2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{4} + 2}$

$= \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to 8} \dfrac{2\text{س} - 16}{\sqrt{\text{س}+1} - 3} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

عامل مشترك

$\lim\limits_{\text{س} \to 8} \dfrac{2\text{س} - 16}{\sqrt{\text{س}+1} - 3} = \lim\limits_{\text{س} \to 8} \dfrac{2(\text{س} - 8)}{\sqrt{\text{س}+1} - 3} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+1} + 3}{\sqrt{\text{س}+1} + 3}$

ضرب مرافق

$= \lim\limits_{\text{س} \to 8} \dfrac{2(\text{س} - 8)\left(\sqrt{\text{س}+1} + 3\right)}{\text{س} + 1 - 9}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 8} \dfrac{2\cancel{(\text{س} - 8)}\left(\sqrt{\text{س}+1} + 3\right)}{\cancel{\text{س} - 8}} = \lim\limits_{\text{س} \to 8} 2\left(\sqrt{\text{س}+1} + 3\right)$

$= 2\left(\sqrt{9} + 3\right) = 2(6)$

$= 12$

(١٠)

Scanned by CamScanner

إذا كان لدينا كسور في البسط أو المقام :-

$$\frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \pm \frac{\text{جـ}}{\text{د}}}{\text{هـ}} = \frac{\frac{\text{أ}\times\text{د} \pm \text{جـ}\times\text{ب}}{\text{ب د}}}{\text{هـ}} = \frac{\text{أ}\times\text{د} \pm \text{جـ}\times\text{ب}}{\text{هـ}(\text{ب د})}$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{2}}{\text{س}-2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{\text{س}-2}}{2\text{س}(\cancel{\text{س}-2})} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{1}{2\text{س}} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

2) $$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{3}}{\text{س}-3} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\cancel{3-\text{س}}}{3\text{س}(\cancel{\text{س}-3})} = \lim_{\text{س}\to 3} \frac{1}{3\text{س}} = \frac{1}{3\times 3} = \frac{1}{9}$$

3) $$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{\text{س}+1}}{\text{س}-2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{3-(\text{س}+1)}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{3-\text{س}-1}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{2-\text{س}}\ -1}{3(\text{س}+1)(\cancel{\text{س}-2})}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{-1}{3(\text{س}+1)}$$

$$= \frac{-1}{3(2+1)} = \frac{-1}{3\times 3} = \frac{-1}{9}$$

سؤال :- أوجدي نهاية كل مما يلي :-

1) $$\lim_{\text{س}\to 5} \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{\text{س}+2}}{\text{س}-5} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 5} \frac{7-(\text{س}+2)}{7(\text{س}+2)(\text{س}-5)} = \lim_{\text{س}\to 5} \frac{7-\text{س}-2}{7(\text{س}+2)(\text{س}-5)} = \lim_{\text{س}\to 5} \frac{\cancel{5-\text{س}}\ -1}{7(\text{س}+2)(\cancel{\text{س}-5})}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 5} \frac{-1}{7(\text{س}+2)}$$

$$= \frac{-1}{7(5+2)} = \frac{-1}{7\times 7} = \frac{-1}{49}$$

١

١

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\frac{٢}{س-٣} + \frac{٤}{س+٦}}{س} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢(س+٦) + ٤(س-٣)}{س(س-٣)(س+٦)} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢س + ١٢ + ٤س - ١٢}{س(س-٣)(س+٦)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢س + ٤س}{س(س-٣)(س+٦)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٦\cancel{س}}{\cancel{س}(س-٣)(س+٦)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٦}{(س-٣)(س+٦)} = \dfrac{٦}{-٣ \times ٦} = \dfrac{-١}{٣}$