أسئلة مراجعة

في

المستوى الرابع

الرياضيات

(العلمي)

الأستاذ

ماهر ضمرة

(٢٠١٨)

Scanned by CamScanner

أولاً : تواحد اشتقاقه

ق(س)	ق'(س)	ملاحظات
$\int_{أ}^{ب} ل(س)\,د س$	صفر	لتكامل لحدود ثابت
$\int ل(س)\,د س$	ل(س)	اشتقه تلغي لتكامل غير لمحدود
$لو_{هـ} ل(س)$	$\frac{ل'(س)}{ل(س)}$	المقام لا يؤثر في اشتقاق $(لو_{هـ} س)' = \frac{1}{س}$
$هـ^{ل(س)}$	$هـ^{ل(س)} \times ل'(س)$	هـ العدد النيبري ≈ 2,7
$م^{ل(س)}$	$م^{ل(س)} \times لو_{هـ} م \times ل'(س)$	اذا كان السؤال حل وليس دوائر لا تفضل حل خطوات «الغاء تقم الطرفين»
	م ثابت	

اختر الاجابة الصحيحة فيما يلي

1) ق(س) = $\frac{هـ^{س}+1}{هـ^{س}} + لو_{هـ}(س+1) - 2س + 1$

فإن ق'(0) =

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $-\frac{3}{2}$

2) اذا كان

ق(س) = $٤ \times ٣^{(س+1)} + هـ^{س} + لو_{هـ} ٣$ فإن

ق'(0) =

أ) $٧ لو_{هـ} ٢ + 1$ ب) $٤ لو_{هـ} ٢ + 1$ ج) $٢٠ لو_{هـ} ٢ + 1$

د) $١٢ لو_{هـ} ٢ + 1$

3) اذا علمت أن

$\int_{س}^{ص} ق(س)\,د س = \int_{س}^{ص} ق(س)\,د س + جا س$

فإن ق'(0) =

أ) -٢ ب) صفر ج) -٦ د) -١

4) $ص = هـ^{م س}$ ، $م \neq 0$ جد $\frac{د ص}{د س}$ حيث

$ص^{٣} + ص^{٢} - ٦ ص = 0$

أ) -٣ ب) -٢ ج) -٦ د) -١

5) اذا علمت أن

$\int_{س}^{ص} جا\frac{\pi}{٢} ق(س) + ظا س)\,د ص = ظا س + هـ^{(٢ لو_{هـ} س + 1)}$

فإن ق'(1) =

أ) $-٢ هـ$ ب) $٢ هـ$ ج) ٢ د) -٢

6) ق(س) = $لو_{هـ}(قا س + ظا س)$ فإن ق'(0)

أ) ١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

Scanned by CamScanner

الإجابة

أ) نبسط

$ق(س) = 1 + هـ^{س} + \frac{1}{2} لو_{هـ}(س+1)$

$ق'(س) = هـ^{س} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{س+1}$

$ق'(0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (ب)

ب) نبسط $ق(س) = (2)^{2} \times 2^{3س+2} + هـ^{س} + لو_{هـ}3$

$ق(س) = 4 \times 2^{3س+2} + هـ^{س} + لو_{هـ}3$

$ق'(س) = 4 \times 2^{3س+2} \times لو_{هـ}2 \times 3 + هـ^{س} + 0$

$ق'(0) = 4 \times لو_{هـ}2 \times 3 + 1 = 12 لو_{هـ}2 + 1$ (جـ)

ج) نشتق الطرفين

$س \, ق(س) = ق(س) + جتاس$

$ق(س)(س-1) = جتاس \Leftarrow ق(س) = \frac{جتاس}{س-1}$

$ق'(س) = \frac{(س-1) \times -جاس - جتاس}{(س-1)^{2}}$

$ق'(0) = \frac{0 - 1}{1} = -1$ (د)

د) $ص = هـ^{م س} \Leftarrow ص' = م هـ^{م س}$

$ص'' = م^{2} هـ^{م س}$ نعوض

$م^{2} هـ^{م س} + م هـ^{م س} - 6 هـ^{م س} = 0$

نقسم على $هـ^{م س}$ لأن $هـ^{م س} \neq 0$

$م^{2} + م - 6 = 0$

$(م + 3)(م - 2) = 0$

$م = -3 \quad ، \quad م = 2$ (ه)

و) $ق(-ق(س) + ظا^{2} س) س = ظا س + هـ$

$ق(-ق(س) + ظا^{2} س) س = ظا س + س^{2} هـ$

نشتق

$-ق(س) + ظا^{2} س = قا^{2} س + 2 هـ س$

$-ق(س) = قا^{2} س - ظا^{2} س + 2 هـ س$

$ق(س) = -1 - 2 هـ س$

$ق'(س) = -2 هـ$ (ز)

ح) $ق(س) = \frac{قا س ظا س + قا^{2} س}{قا س + ظا س}$

$ق'(0) = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1$ (جـ)

Scanned by CamScanner

١) متطابقات التربيع

ضعف الزاوية

$جا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ - جتا ٢س)$

$جتا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ + جتا ٢س)$

نفس الزاوية

$ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١$

$ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س - ١$

٢) متطابقات الضرب

جا أ جتا أ $= \frac{١}{٢}$ جا ٢ أ نفس الزاوية

جا أ جتا ب $= \frac{١}{٢}$ (جا (أ + ب) + جا (أ - ب))

جتا أ جتا ب $= \frac{١}{٢}$ (جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب))

جا أ جا ب $= \frac{١}{٢}$ (جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب))

٣) متطابقات ضعف الزاوية

جا٢س = ٢ جاس جتاس

* جا٤س = ٢ جا٢س جتا ٢س

جتا ٢س ←
- جتا^{٢}س - جا^{٢}س
- ١ - ٢جا^{٢}س
- ٢ جتا^{٢}س - ١

٤) متطابقات = ١

جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

قا^{٢}س - ظا^{٢}س = ١

قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س = ١

☺ تذكير

جاس = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)

جاس = جا (π - س)

جتاس = - جتا (π - س)

حالات الدائري

١) جا^{ن} س دس أو جتا^{ن} س دس

ن فردي

١) نفصل جاس (جتاس)

٢) نحوّل ما تبقى بدلالة التربيع

٣) نستخدم المتطابقتين: جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س

جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س

٤) ص = ما داخل التربيع بدون أس

ن زوجي

نستخدم المتطابقتين:

جا^{٢}س $= \frac{١}{٢}$ (١ - جتا ٢س)

جتا^{٢}س $= \frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)

الحل لايحتاج لتعويض

Scanned by CamScanner

٢) ∫ جا^{ن} س × جتا^{م} س دس

كلاهما فردي	أحدهما فردي	كلاهما زوجي
ص = ذو الأس الأكبر	والآخر زوجي	دمج أسس ثم متطابقات
	ص = ذو الأس الزوجي	

٣) ∫ قا^{ن} س دس ، ∫ ظا^{ن} س دس ، ∫ قا^{ن} س ظا^{م} س دس

الأولوية لأس القاطع

١) أس القاطع فردي والظل فردي
ص = قا س
٢) أس القاطع زوجي والأس أي شيء
ص = ظاس
٣) أس القاطع فردي والظل زوجي ← أجزاء

Scanned by CamScanner

ثانياً : تكاملات تحتاج متطابقات

١) $\int (1+ظا س)^2 \, دس$

الحل نفك التربيع

$= \int (1 + 2ظا س + ظا^2 س) \, دس$ (متطابقة)

$= \int (1 + 2\frac{جا س}{جتا س} + قا^2 س - 1) \, دس$

$= ظا س - 2 لو|جتا س| + ج$

٢) $\int \frac{1 - جتا^2 س}{1 + جتا س} \, دس$

الحل : $1 + جتا س = 2 جتا^2 \frac{س}{2}$

$1 - جتا^2 س = جا^2 س$

$= \int \frac{جا^2 س}{2 جتا^2 س} \, دس = \frac{1}{2} \int ظا^2 س \, دس$

$= \frac{1}{2} \int (قا^2 س - 1) \, دس$

$= \frac{1}{2} (ظا س - س) + ج$

٣) $\int جا 3س (جا س + جتا س)^2 \, دس$

الحل نفك التربيع

$= \int جا 3س (جا^2 س + 2 جا س جتا س + جتا^2 س) \, دس$

$= \int جا 3س (1 + جا 2س) \, دس$

$= \int جا 3س \, دس + \int جا 3س جا 2س \, دس$

$= -\frac{جتا 3س}{3} + \frac{1}{2} \int (جتا س - جتا 5س) \, دس$

$= -\frac{1}{3} جتا 3س + \frac{1}{2} جا س - \frac{1}{10} جا 5س + ج$

٤) $\int \frac{قا س + ظا س}{قا س - ظا س} \, دس$

الحل : نضرب بالمرافق

$\int \frac{قا س + ظا س}{قا س - ظا س} \times \frac{قا س + ظا س}{قا س + ظا س} \, دس$

$= \int \frac{(قا س + ظا س)^2}{قا^2 س - ظا^2 س} \, دس$ «لماذا = ١»

$= \int (قا^2 س + 2 قا س ظا س + ظا^2 س) \, دس$ (متطابقة)

$= \int (2 قا^2 س + 2 قا س ظا س - 1) \, دس$

$= 2 ظا س + 2 قا س - س + ج$

٥) $\int \frac{1 - جا س}{جتا س - جا س} \, دس$

الحل $\int \frac{جا^2 س + جتا^2 س - 2 جا س جتا س}{جتا س - جا س} \, دس$

$= \int \frac{(جتا س - جا س)^2}{جتا س - جا س} \, دس$

$= جتا س - جا س + ج$

Scanned by CamScanner

١) $\int \sqrt{1-\text{جا}^2 س}\ د س$

$0 < س < \frac{\pi}{4}$

الحل $\int \sqrt{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س - 2\text{جا}س\text{جتا}س}\ د س$

$= \int \sqrt{(\text{جا}س - \text{جتا}س)^2}\ د س$

$= \int |\text{جا}س - \text{جتا}س|\ د س$ ⊖ بتعويض $\frac{\pi}{4}$

$= \int (\text{جتا}س - \text{جا}س)\ د س = \text{جا}س + \text{جتا}س + ج$

٢) $\int (\text{جتا}^4 س - \text{جا}^4 س)\ د س$

٣) $\int \frac{1}{\text{ظتا}س - 1}\ د س$

٤) $\int \text{جتا}^3 س \text{قا}^2 س\ د س$

٥) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{1+\text{جا}س}}{\text{جا}س + \text{جتا}س}\ د س$

٦) $\int \frac{\text{جا}^3 س \text{جتا}س}{\text{جتا}^2 س}\ د س$

٧) $\int \frac{س \text{قا}^2 س \text{ظا}^2 س}{\sqrt[3]{س}}\ د س$

٨) $\int \frac{\text{ظا}س + 1}{1 - \text{ظا}س}\ د س$

٩) $\int \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جتا}^2 ٨}{\text{جا}٤س \text{جا}٣س}\ د س$

٧) $\int \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جتا}^2 ٢}{\text{جتا}س - \text{جتا}٢}\ د س$

الحل : $\text{جتا}٢س = ٢\text{جتا}^2 س - 1$

$\int \frac{٢\text{جتا}^2 س - ١ - (٢\text{جتا}^2 ٢ - ١)}{\text{جتا}س - \text{جتا}٢}\ د س$

$= ٢ \int \frac{(\text{جتا}س - \text{جتا}٢)(\text{جتا}س + \text{جتا}٢)}{\text{جتا}س - \text{جتا}٢}\ د س$ (ثابت)

$= ٢ \int (\text{جا}س + (\text{جتا}٢) س)\ د س + ج$

تدريبات (١) للطالب

١) $\int \text{جا}^4 س \text{جتا}^2 س\ د س$

Scanned by CamScanner

أولا: طرق التكامـــل

أ) تمييز الطرق

التعويض	الأجزاء	اللوغاريتم	الكسور الجزئية
• اذا لم تكن الزاوية خطية مثل جا(س^{2}) ، قا^{2} $\sqrt{س}$ (ص = الزاوية)	خطـــي × تربيـعي (كثيرحدود) *لوغاريتم *هـ(اسه خطي) * دائري(زاويته خطي) * (خطي)^{ن} كذلك تكامل اللوغاريتم لوحده	بســـط مقـــام مشتقة المقام في البسط يكون الجواب لوغاريتم|المقام| +جـ	بســـط مقـــام • البسط و المقام كلاهما كثيرحدود او يفرض و يحول لكثير حدود
• اقتران اسي (أسه ليس خطي) (ص = الأس)			• درجة البسط اقل من المقام
• اللوغاريتم مركب ، او في المقام (ص = لو)			• المقام يتحلل الى اقواس خطية مختلفة
• ضرب اقترانين احدهما مركب (ص = ماداخل المركب)			
• جذر ما داخله خطي (ص = الجذر كله)			
• هـ (أسه خطي) في المقام (ص = الاسي كله)			

Scanned by CamScanner

ب) حالات خاصة

- الاجزاء الدوري هـ(أس خطي)×جا(خطي)، هـ(أس خطي)×جتا(خطي)، جا(لوس) ، جتا(لوس)
- تكامل جذر تربيعي ماداخله مربع كامل يتحول الى مطلق
  مثلا تكامل $\sqrt{س^{٢}+٦ س +٩}$ = تكامل | س + ٣|
- تكامل $\sqrt{هـ^{س}+١}$ نفرض ص = الجذر كله ثم يتحول الى كسور جزئية

جـ) تكاملات تحتاج لتبسيط قبل الحل

- اقتران أسي من ضمن الأس (هـ^{س} ، لوس) نفصل ثم نبسط ثم فرض

مثال

هـ$^{(س + ٢لوس)}$ = هـ^{س} × هـ$^{لوس^{٢}}$ = س^{٢} × هـ^{س}

- اللوغاريتم المركب لو$_{م}$ س = $\frac{١}{٥}$ لوس ، لوظا^{٥} س = ٥لوظاس
- $\int \frac{(خطي)^{ن}}{س^{م}}$ نحول الاس الاكبر بقدر الاصغر و نفصل الباقي

مثال $\int \frac{(٢س + ١)^{٧}}{س^{٩}}$ = $\int \frac{(٢س+١)^{٧}}{س^{٧} \times س^{٢}}$ دس

(٢٠١٧) $\int_{١}^{٣} \frac{(س^{٢} - ٦س + ٩)^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}}$ دس

- هـ^{س} في المقام نضرب البسط والمقام هـ$^{-س}$

$\int \frac{١}{هـ^{س} + ١} \times \frac{هـ^{-س}}{هـ^{-س}}$

- عامل مشترك أكبر وأصغر

$\int \sqrt{س^{٢} + س^{٤}}$ دس = $\int س^{٢} \sqrt{(١+س^{٢})}$ دس س > ٠

$\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}$ دس = $\int \frac{س^{٤} \sqrt{(س^{-٢} - ١)}}{س^{٥}}$ دس س < ٠

- ادخال س داخل الجذر

$\int س^{٣} \sqrt{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}$ دس = $\int^{٣} \sqrt{٥ - س}$ دس

- ضرب بالمرافق

$\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}$ دس

Scanned by CamScanner

ثالثاً : طريقة التكامل :

١) $\int \frac{\text{قا}^2 س}{\log_هـ(\text{ظا}س + \text{قا}س)} \, د س$

الحل : $ص = \log_هـ(\text{ظا}س + \text{قا}س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{\text{قا}^2 س + \text{قا}س \text{ظا}س}{\text{ظا}س + \text{قا}س} = \frac{\text{قا}س(\text{قا}س + \text{ظا}س)}{\text{قا}س + \text{ظا}س}$

$د س = \frac{د ص}{\text{قا}س}$

$\int \frac{\text{قا}س}{ص} \cdot \frac{د ص}{\text{قا}س} = \log_هـ |ص| + ج$

$= \log_هـ |\log_هـ(\text{ظا}س + \text{قا}س)| + ج$

٢) $\int \frac{1}{س \log_هـ س + 4س (\log_هـ س)^2} \, د س$

الحل

نفرض أن $ص = \log_هـ س \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س}$

$د س = س \, د ص$

$\int \frac{1}{س \times س (ص + 2ص^2)} \times س \, د ص$

$= \int \frac{1}{ص(1 + 2ص)} \, د ص$

$\frac{1}{ص(1+2ص)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{1+2ص}$

$1 = أ(1+2ص) + 2ب ص$

$ص = 0 \leftarrow 1 = أ$

$ص = -\frac{1}{2} \leftarrow 1 = -ب \leftarrow ب = -1$

الجواب $= \log_هـ |ص| - \frac{1}{2} \log_هـ |1+2ص| + ج$

نرجع ص (بالعامة)

٣) $\int \text{جتا}(\log_هـ س) \, د س$

الحل $ص = \log_هـ س \leftarrow د س = س \, د ص$

$\int س \, \text{جتا}ص \, د ص$ لكن $س = هـ^ص$

$\int هـ^ص \, \text{جتا}ص \, د ص$ أجزاء دوري

$د ع = هـ^ص \longrightarrow ع = هـ^ص$

$د ل = \text{جتا}ص \, د ص \leftarrow ل = \text{جا}ص$

$ع د ل - \int ل \, د ع$

$= هـ^ص \text{جا}ص - \int هـ^ص \text{جا}ص \, د ص$

$ع = هـ^ص \longrightarrow د ع = هـ^ص د ص$

$د ل = \text{جا}ص \, د ص \leftarrow ل = -\text{جتا}ص$

$\int هـ^ص \text{جتا}ص \, د ص = هـ^ص \text{جا}ص - (-هـ^ص \text{جتا}ص + \int هـ^ص \text{جتا}ص \, د ص)$

$2 \int هـ^ص \text{جتا}ص \, د ص = هـ^ص \text{جا}ص + هـ^ص \text{جتا}ص + ج$

$\int هـ^ص \text{جتا}ص \, د ص = \frac{هـ^ص \text{جا}ص + هـ^ص \text{جتا}ص + ج}{2}$

نرجع ص

Scanned by CamScanner

٤) $\int_{هـ}^{} (جاس + ٢ لو_{هـ} جتاس)$ ده س

الحل نفصل ونبسط

$= \int_{هـ}^{} جاس \times هـ^{لو_{هـ} جتاس}$ ده س

$= \int_{هـ}^{} جتا^{٣}س \; هـ^{جاس}$ ده س

ص = جاس ← ده س = $\frac{ده ص}{جتاس}$

$= \int_{هـ}^{} جتا^{٣}س \; هـ^{ص} \times \frac{ده ص}{جتاس}$

$= \int_{هـ}^{} (١ - جا^{٢}س) \; هـ^{ص}$ ده ص

$= \int_{هـ}^{} (١ - ص^{٢}) هـ^{ص}$ ده ص أجزاء مرتين

١	$هـ^{ص}$
$-٢ص$	$هـ^{ص}$
-٢	$هـ^{ص}$
٠	$هـ^{ص}$

$= (١ - ص^{٢}) هـ^{ص} + ٢ص هـ^{ص} - ٢ هـ^{ص} + جـ$

نرجع لـ ص

٥) $\int_{هـ}^{} ظا^{٤}س \; لو_{هـ}$ ظاس ده س

الحل نبسط

$= \int_{هـ}^{} ظا^{٤}س \; لو_{هـ}$ ظاس ده س

ص = ظاس ← ده س = $\frac{ده ص}{قا^{٢}س}$

$= \int_{هـ}^{} قا^{٤}س \; لو_{هـ} ص \; \frac{ده ص}{قا^{٢}س}$

$= \int_{هـ}^{} (١ + ظا^{٢}س) \; لو_{هـ} ص$ ده ص

$= \int_{هـ}^{} (١ + ص^{٢}) \; لو_{هـ} ص$ ده ص

هـ = لو ص ← ده هـ = $\frac{١}{ص}$ ده ص

ده = (١ + ص^٢) ده ص ← و = ص + $\frac{ص^{٣}}{٣}$

$= ٢ (ص + \frac{ص^{٣}}{٣}) \; لو_{هـ} ص - (ص + \frac{ص^{٣}}{٩}) + جـ$

٦) $\int_{هـ}^{} \frac{لو_{هـ} س}{س^{٢} + ٦س + ٩}$ ده س

الحل $\int_{هـ}^{} \frac{لو_{هـ} س}{(س+٣)^{٢}}$ ده س

هـ = لو س ← ده هـ = $\frac{١}{س}$ ده س

ده = $(س+٣)^{-٢}$ ده س ← و = $\frac{-١}{س+٣}$

$= \frac{-لو_{هـ} س}{س+٣} + \int_{هـ}^{} \frac{١}{س(س+٣)}$ ده س

$\frac{١}{س(س+٣)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+٣}$

Scanned by CamScanner

$1 = أ(س+3) + بس$

$س = 0 \leftarrow 1 = 3أ \leftarrow أ = \frac{1}{3}$

$س = -3 \leftarrow 1 = -3ب \leftarrow ب = -\frac{1}{3}$

$= \frac{-1}{3} \int \frac{س}{س+3}$ هـ $= \frac{1}{3}$ لو$_{هـ}$ $|س| - \frac{1}{3}$ لو$_{هـ}$ $|س+3| + ج$

---

٧) إذا علمت أن

$\int_{1}^{هـ} س^{ن}$ لو$_{هـ}$ س $د س = \frac{أ}{9} هـ^{ن-1} + 1$

جد بدلالة أ، $\int_{1}^{هـ} س^{ن}$ (لو$_{هـ}$ س)^{2} $د س$

الحل $ص = (لو_{هـ} س)^{2} \leftarrow د ص = 2 \frac{لو_{هـ} س}{س} د س$

$د هـ = س^{ن} د س \leftarrow هـ = \frac{س^{ن+1}}{ن+1}$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1} (لو_{هـ} س)^{2} \Big]_{1}^{هـ} - \int_{1}^{هـ} \frac{2}{ن+1} س^{ن} لو_{هـ} س د س$

$= \frac{هـ^{ن+1}}{ن+1} - \frac{2أ}{(ن+1)^{2}}$

---

٨) $\int$ ظتا س لو$_{هـ}$ جا س $د س$

الحل $ص = جا س \leftarrow د ص = \frac{د ص}{جتا س}$

$\int \frac{جتا س}{جا س} \times لو_{هـ} ص \times \frac{د ص}{جتا س}$

$= \int \frac{لو_{هـ} ص}{ص} د ص$

نفرض ع $= لو_{هـ} ص \leftarrow د ص = \frac{د ع}{\frac{1}{ص}} = ص \, د ع$

$\int \frac{ع}{ص} \times ص \, د ع = \frac{ع^{2}}{2} + ج$

$= \frac{(لو_{هـ} جا س)^{2}}{2} + ج$

---

٩) $\int$ هـ$^{(س^{3}+3س)}$ $س^{2} د س$

الحل نفصل $\leftarrow \int هـ^{س^{3}} \times هـ^{3س} \, د س$

$ص = هـ^{س^{3}} \leftarrow د ص = 3س^{2} هـ^{س^{3}} د س$

$\int ص \, هـ^{3س} \frac{د ص}{3س^{2}}$

$= \int ص^{2} هـ^{ص} د ص$ أجزاء مرتين

$= ص^{2} هـ^{ص} - 2ص هـ^{ص} + 2 هـ^{ص} + ج$

نرجع ص

---

١٠) $\int \frac{1}{1 + هـ^{-س}} د س$

الحل $\int \frac{1}{1 + هـ^{-س}} \times \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} د س$

$= \int \frac{هـ^{س}}{1 + هـ^{س}} د س = لو_{هـ} |1 + هـ^{س}| + ج$

Scanned by CamScanner

١١) $\int \frac{(٢+٢\ln(س+١))^{هـ}}{س^٣+٣س^٢+٣س+٩}\,دس$

الحل تفصل وتبسط

$= \int \frac{هـ^٢ \times هـ^{\ln(س+١)^٢}}{س^٣+٣س^٢+٣س+٩}\,دس$

$= هـ^٢ \int \frac{س^٢+٢س+١}{س^٣+٣س^٢+٣س+٩}\,دس$

$= \frac{هـ^٢}{٣}\ln|س^٣+٣س^٢+٣س+٩| + جـ$

١٢) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+٢+هـ^{-س}}\,دس$

الحل $ص = \sqrt{هـ^{س}+٢}$

$ص^٢ = هـ^{س}+٢ \Leftarrow ٢ص\,دص = هـ^{س}\,دس$

$دس = \frac{٢ص\,دص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{هـ^{س}}{ص+ص^٢-٢} \times \frac{٢ص\,دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{٢ص}{ص^٢+ص-٢}\,دص$

$\frac{٢ص}{(ص+٢)(ص-١)} = \frac{م}{ص+٢} + \frac{ب}{ص-١}$

$٢ص = م(ص-١)+ب(ص+٢)$

$ص=١ \Leftarrow ٢ = ٣ب \Leftarrow ب = \frac{٢}{٣}$

$ص=-٢ \Leftarrow -٤ = -٣م \Leftarrow م = \frac{٤}{٣}$

$= \frac{٤}{٣}\ln|ص-١| + \frac{٢}{٣}\ln|ص+٢| + جـ$

نرجع ص

١٣) $\int \frac{س\,هـ^{س}}{(س+١)^٢}\,دس$

الحل

$ع = س\,هـ^{س} \Leftarrow دع = س\,هـ^{س}+هـ^{س}(١)\,دس$

$دهـ = (س+١)^{-٢}\,دس \Leftarrow هـ = \frac{-١}{س+١}$

$= -\frac{س\,هـ^{س}}{س+١} + \int \frac{هـ^{س}}{س+١}\,دس$

$= -\frac{س\,هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + جـ$

١٤) $\int قاس^{ن} ظاس\,دس \quad ن \neq ٠$

الحل $ص = قاس \Leftarrow دس = \frac{دص}{قاس\,ظاس}$

$\int ص^{ن}\,ظاس \frac{دص}{قاس\,ظاس} = \int ص^{ن-١}\,دص$

$= \frac{ص^{ن}}{ن} + جـ = \frac{قاس^{ن}}{ن} + جـ$

Scanned by CamScanner

١٥) $\int جتا^{\frac{1}{2}} س \, د س$

الحل

$= \int جتا^{\frac{1}{2}} س (جتا^{\frac{1}{2}} س)^{2} \, د س$

$= \int جتا^{\frac{1}{2}} س (١ - جا^{\frac{1}{2}} س)^{2} \, د س$

$ص = جا^{\frac{1}{2}} س \Rightarrow د س = \frac{د ص}{\frac{1}{2} جتا^{\frac{1}{2}} س}$

$\int جتا^{\frac{1}{2}} س (١ - ص^{2})^{2} \times \frac{د ص}{\frac{1}{2} جتا^{\frac{1}{2}} س}$

$= ٢ \int (١ - ٢ ص^{2} + ص^{4}) \, د ص$

$= ٢ (ص - \frac{٢ ص^{3}}{٣} + \frac{ص^{5}}{٥}) + ج$

$= ٤ \int (ص^{2} - ٢ ص^{4} + ٣ ص^{6} - ص^{8}) \, د ص$

$= ٤ (\frac{ص^{3}}{٣} - \frac{٢ ص^{5}}{٥} + \frac{٣ ص^{7}}{٧} - \frac{ص^{9}}{٩}) + ج$

١٦) $\int جا^{٢} س \, جتا^{٥} س \, د س$

الحل

$= \int جا^{٢} س \, جتا^{٤} س \, جتا س \, د س$

$= \int جا^{٢} س \, (١ - جا^{٢} س)^{٢} \, جتا س \, د س$

$ص = جا س \Rightarrow د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$= \int ص^{٢} (١ - ص^{٢})^{٢} \, د ص$

$= \int ص^{٢} (١ - ٢ ص^{٢} + ص^{٤}) \, د ص$

$= \frac{ص^{3}}{٣} - \frac{٢ ص^{5}}{٥} + \frac{ص^{7}}{٧} + ج$

١٧) $\int قا^{٥} س \, ظا^{٣} س \, د س$

الحل

$ص = قا س \Rightarrow د س = \frac{د ص}{قا س ظا س}$

$\int ص^{٤} ظا^{٣} س \, \frac{د ص}{قا س ظا س}$

$= \int ص^{٤} (قا^{٢} س - ١) \, د ص$

$= \int ص^{٤} (ص^{٢} - ١) \, د ص = \frac{ص^{7}}{٧} - \frac{ص^{5}}{٥} + ج$

١٨) $\int قا س \, ظا^{٤} س \, د س$

الحل

$\int \frac{١}{جا س} \times \frac{جا^{٣} س}{جتا^{٤} س} \, د س$

$ص = جتا س \Rightarrow د س = \frac{د ص}{-جا س}$

$\int \frac{جا^{٢} س}{ص^{٤}} \frac{د ص}{-جا س} = - \int \frac{١ - جتا^{٢} س}{ص^{٤}} \, د ص$

$= \int \frac{ص^{٢} - ١}{ص^{٤}} \, د ص = \int (ص^{-٢} - ص^{-٤}) \, د ص$

$= \frac{ص^{-١}}{-١} + \frac{ص^{-٣}}{-٣} + ج$

ضمج ص

Scanned by CamScanner

١٩) $\int س \sqrt{س^2-1}\, د س$

الحل : $ص = \sqrt{س^2-1} \Leftarrow ص^2 = س^2 - 1$

$\times$ $ص \, د ص = س \, د س$

$د س = \frac{ص \, د ص}{س}$

$\int \frac{س \, ص \, د ص}{س}$

$= \int ص \, د ص = \frac{ص^3}{3} + ج$

نرجع ص

٢٠) $\int جا^4 س \, جتا^4 س \, د س$

الحل $\int جا^2 س \, جتا^2 س \, د س$

$= \int (\frac{1}{2} جا 2س)^2 \times \frac{1}{2}(1 + جتا 4س) \, د س$

$= \frac{1}{8} \int (جا^2 2س + جا^2 2س \, جتا 4س) \, د س$

$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - جتا 4س) \, د س + \frac{1}{8} \int جا^2 2س \, جتا 4س \, د س$

$ص = جا 2س$

$د س = \frac{د ص}{2 جتا 2س}$

$= \frac{1}{16} (س - \frac{جا 4س}{4}) + \frac{1}{8} \int ص^2 جتا^2 2س \times \frac{د ص}{2 جتا 2س}$

$= \frac{1}{16} (س - \frac{جا 4س}{4}) + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \frac{ص^3}{3} + ج$

نرجع ص

٢١) $\int جتا^4 س (جا س - جتا س)^5 \, د س$

الحل

نحل $\int (جتا^2 س - جا^2 س)(جا س - جتا س)^5 \, د س$

نجمع $\int (جتا س - جا س)(جتا س + جا س)(جا س - جتا س)^5 \, د س$

$= - \int (جتا س + جا س)(جا س - جتا س)^6 \, د س$

$ص = جا س - جتا س$

$\Leftarrow د س = \frac{د ص}{2 جتا 2س + جا 2س}$

$= - \int (جتا س + جا س) ص^6 \times \frac{د ص}{2(جا س + جتا س)}$

$= - \frac{ص^7}{14} + ج$ نرجع ص

٢٢) $\int \frac{جتا س}{-6 جا^2 س - 8 جتا^2 س} \, د س$

الحل نحل المقام بدلالة جا س

$\int \frac{جتا س}{-6 جا^2 س - 8(1 - جا^2 س)} \, د س$

$= \int \frac{جتا س}{2 جا^2 س - 8} \, د س$

$ص = جا س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{جتا س}$

$\int \frac{جتا س}{2 ص^2 - 8} \times \frac{د ص}{جتا س} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{ص^2 - 4} \, د ص$

Scanned by CamScanner

كسور جزئية

$= \frac{1}{8} \ln|س| - \frac{1}{8} \ln|س-2| + ج$

---

٢٣) $\int \frac{س + جاس جتاس + 1}{1 + جتاس} \, دس$

الحل نفصل ، بسط إلى تكاملين

$= \int \frac{س + 1}{1 + جتاس} \, دس + \int \frac{جاس جتاس}{1 + جتاس} \, دس$

$= \int \frac{س + 1}{2 جتا^2 \frac{س}{2}} \, دس + \int \frac{\frac{1}{2} جاس}{1 + جتاس} \, دس$

$= \int \frac{1}{2}(س+1) قا^2 \frac{س}{2} \, دس - \frac{1}{4} \ln|1 + جتاس| + ج$

أجزاء

$و = \frac{1}{2}(س+1) \longleftarrow دو = \frac{1}{2} دس$

$دهـ = قا^2 \frac{س}{2} دس \longleftarrow هـ = ظا \frac{س}{2}$

$= \frac{1}{2}(س+1) ظا \frac{س}{2} + \frac{1}{2} \ln|جتا \frac{س}{2}| - \frac{1}{4} \ln|1 + جتاس| + ج$

$= \frac{1}{2}(س+1) ظا \frac{س}{2} + \ln|جتا \frac{س}{2}| - \frac{1}{4} \ln|1 + جتاس| + ج$

---

٢٤) $\int \frac{1}{3 جا^2 س - 12 جتا^2 س} \, دس$

الحل $\int \frac{1}{3 جتا^2 س (ظا^2 س - 4)} \, دس$

$= \frac{1}{3} \int \frac{قا^2 س}{ظا^2 س - 4} \, دس$

$ص = ظا س \Rightarrow دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$\frac{1}{3} \int \frac{قا^2 س}{ص^2 - 4} \times \frac{دص}{قا^2 س}$ كسور جزئية

---

٢٥) $\int \frac{س^3 + 1}{س + 3س^2 - 2س^3} \, دس$

الحل

$ص = س - س^3 \longleftarrow ص^2 = س^2$

$3ص^2 دص = دس$

$\int \frac{ص + 1}{ص^3 + ص^2 - 2ص} \times 3ص^2 \, دص$

$= \int \frac{ص + 1}{ص(ص^2 + ص - 2)} \times 3ص^2 \, دص$

$= \int \frac{3ص^2 + 3ص}{ص^2 + ص - 2} \, دص$ قسمة طويلة

$= \int 3 \, دص + \int \frac{6}{ص^2 + ص - 2} \, دص$ كسور جزئية

$أ = -2 \ ، \ ب = 2$

$\Rightarrow 3ص - 2 \ln|ص + 2| + 2 \ln|ص - 1| + ج$

نرجع ص

---

٢٦) $\int \frac{\sqrt{س+3} - 3}{\sqrt{س^2 + 3س + 12} + 6} \, دس$

الحل $\int \frac{\sqrt{س+3} - 3}{\sqrt{(س+3) + 3}(س+3)} \, دس$

$ص = \sqrt{س+3} \Rightarrow ص^2 = س + 3$

$2ص \, دص = دس$

$\int \frac{ص - 3}{ص(ص^2 + 3)} \times 2ص \, دص$

$= \int \frac{2ص(ص-3)}{ص(ص^2+3)} \, دص$ قسمة ثم لوغارتيم

$= 2ص - 6 \ln|ص^2 + 3| + ج$ نرجع ص

Scanned by CamScanner

٢٧) $\int \frac{د س}{س^{٣} \times \sqrt{س^{٢}+١}}$ ، $س > ٠$

الحل عامل مشترك أكبر

$$\int \frac{د س}{س^{٣} \sqrt{س^{٢}(١+س^{-٢})}} = \int \frac{د س}{س^{٣} \times س \sqrt{١+س^{-٢}}}$$

$$ص = ١ + س^{-٢} \leftarrow د ص = \frac{-٢ د س}{س^{٣}}$$

$$\int \frac{١}{س^{٣} ص^{\frac{١}{٢}}} \times \frac{د ص}{-٢ س^{٣}}$$

$$= -\frac{١}{٢} \times ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + ج = -\sqrt{١+س^{-٢}} + ج$$

٢٨) $\int \frac{(س^{٢}-٤س+٤)^{\frac{٥}{٢}}}{س^{٧}}$ د س ، $س > ٢$

الحل $\int \frac{((س-٢)^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}{س^{٧}}$ د س

$$= \int \frac{|س-٢|^{٥}}{س^{٧}} \overset{(+)}{د س} \quad س > ٢$$

$$= \int \frac{(س-٢)^{٥}}{س^{٥} \times س^{٢}} د س = \int س^{-٧} (١-٢س^{-١})^{٥} د س$$

$$ص = ١ - ٢ س^{-١} \leftarrow د ص = \frac{٢ د س}{س^{٢}}$$

$$\int س^{-٢} ص^{٥} \times \frac{د ص}{٢ س^{-٢}} = \frac{ص^{٦}}{١٢} + ج$$

حيث ص

٢٩) اذا علمت أن

$ع_{ن} = \int ظتا^{ن} س$ د س اثبت

أن $ع_{ن} = \frac{-ظتا^{ن-١} س}{ن-١} - ع_{ن-٢} + ج$ ، $ن \neq ١$

الحل $ع_{ن} = \int ظتا^{ن-٢} س \cdot ظتا^{٢} س$ د س

$$= \int ظتا^{ن-٢} س (قتا^{٢} س - ١)$$ د س

$$= \int ظتا^{ن-٢} س \cdot قتا^{٢} س$$ د س $- \int ظتا^{ن-٢} س$ د س

$ص = ظتا س \leftarrow د ص = \frac{د س}{-قتا^{٢} س}$

$$\int قتا^{٢} س \cdot ص^{ن-٢} \frac{د ص}{-قتا^{٢} س} - ع_{ن-٢}$$

$$= -\frac{ص^{ن-١}}{(ن-١)} - ع_{ن-٢} + ج = \frac{-ظتا^{ن-١} س}{ن-١} - ع_{ن-٢} + ج$$

٣٠) $\int \frac{س}{س^{٤}+٣س^{٢}+٢}$ د س

الحل $ص = س^{٢} \leftarrow د ص = ٢ س د س$

$$\int \frac{س}{ص^{٢}+٣ص+٢} \times \frac{د ص}{٢ س}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{(ص+٢)(ص+١)}$$ د ص كسور جزئية

$$= \frac{١}{٢} لو|ص+٢| + \frac{١}{٢} لو|ص+١| + ج$$

Scanned by CamScanner

تدريبات (٢) للطالب

١) $\int \frac{د س}{س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥}$

٢) إذا علمت أن
$هـ(١) = ٤$ ، $هـ(٥) = ٢$ وكان
$\int_{١}^{٥} هـ(س)\, د س = ١$ أجد
$\int_{١}^{٥} ٥ هـ(س)\, د س$

٣) $\int هـ(س) \log_{٥} (س^{٢})\, د س$

$٣(س)$ معكوس مشتقه الاقتران $هـ(س)$

٤) $\int \frac{د س}{\sqrt[٣]{١ - ٨ س}}$ ، $س < ٠$

٥) $\int \frac{س \text{جا} س}{\text{قا} س}\, د س$

٦) $\int \text{قا}^{٤} س \log_{٥} (\text{ظا} س)\, د س$

٧) إذا علمت أن
$هـ(س) = \begin{cases} ٢ س & ، س \geq -١ \\ ٧ - س & ، س > -١ \end{cases}$

جد

٩) $\int_{-١}^{١} هـ(٣ س + ٢)\, د س$

١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢} س هـ(\text{جا} س)\, د س$

٨) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{قا}^{٢} س \text{جتا} س - \text{جتا} س}\, د س$

٩) $\int \sqrt{١٧ + هـ^{س}}\, د س$

١٠) $\int \text{جا} س \log_{هـ} (\text{جتا} س)\, د س$

١١) $\int (\text{متا} س + \text{ختا} س)^{٧} \text{متا} س\, د س$

١٢) اثبت أن
$\int_{٠}^{١} \frac{(س^{٢} - ٢ س + ١)^{ن+٢}}{س^{ن+٣}}\, د س = \frac{١}{ن+١}$
$ن \neq -١$

Scanned by CamScanner

رابعاً: المساحات

١) إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين ص = س² ، ص = س + ٢ ، ص = ٢ - س في الربع الأول

الحل نجد نقاط التقاطعات

١) $س^2 = س + 2 \Leftarrow س^2 - س - 2 = 0$

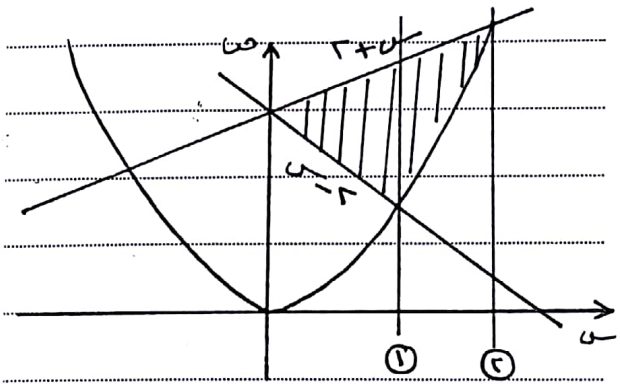
$(س - 2)(س + 1) = 0$

$س = 2 \quad ، \quad س = -1$ ✗ (الأول)

٢) $س^2 = 2 - س \Leftarrow س^2 + س - 2 = 0$

$(س + 2)(س - 1) = 0 \Leftarrow س = -2 \quad ، \quad س = 1$ ✗

٣) $س + 2 = 2 - س \Leftarrow س = 0$



$$م = \int_{0}^{1} (س + 2) - (2 - س)\, د س$$

$$\oplus \int_{1}^{2} (س + 2) - س^2\, د س$$

$$= \left[\frac{س^2}{2} + 2س \right]_{0}^{1} + \left[2س - \frac{س^3}{3} \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{9}{6} - \frac{7}{3} = \frac{13}{6}$$ وحدة مربعة

٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين $د(س) = -س$ ، $ه(س) = \sqrt{2 - س}$ ومحور السينات

الحل نجد نقاط التقاطعات

١) $د = ه \Leftarrow -س = \sqrt{2 - س}$ بتربيع الطرفين

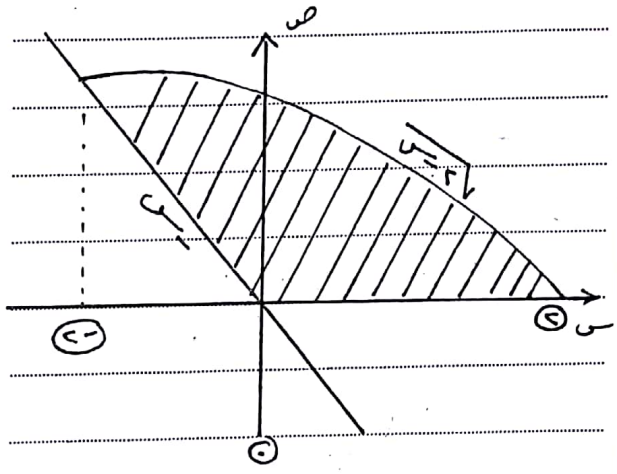
$س^2 = 2 - س \Leftarrow س^2 + س - 2 = 0$

$(س + 2)(س - 1) = 0$

$س = -2 \quad ، \quad س = 1$ ✗ لا تحقق المعادلة

٢) $د = 0 \Leftarrow -س = 0 \Leftarrow س = 0$

٣) $ه = 0 \Leftarrow \sqrt{2 - س} = 0 \Leftarrow س = 2$



$$م = \int_{-2}^{0} (2 - س) + س\, د س + \int_{0}^{2} (2 - س)^{\frac{1}{2}}\, د س$$

$$= \left[\frac{(2 - س)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + \frac{س^2}{2} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(2 - س)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} \right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - (8 - 2) + \frac{2}{3}(0 - (2)^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$ وحدة مربعة

Scanned by CamScanner

٣) المساحة المحصورة بين

$d(س) = س^2$ ، $هـ(س) = \sqrt{8س}$

$ل(س) = ٤$

الحل

١) $d(س) = هـ(س) \Leftarrow س^2 = \sqrt{8س}$ نربع

$س^4 - 8س = ٠ \Leftarrow س(س^3 - 8) = ٠$

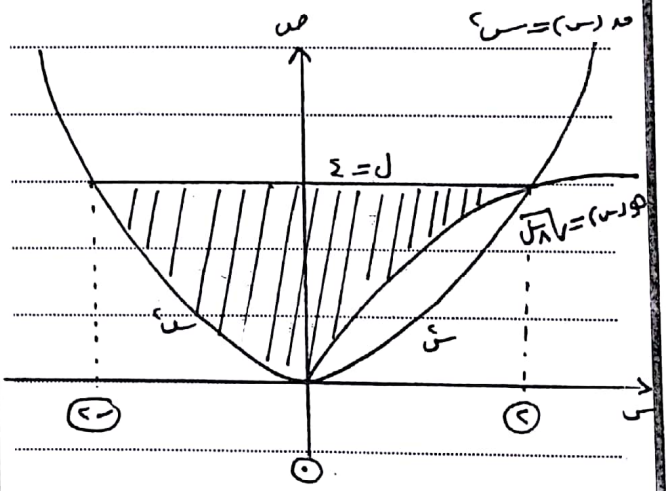
$س = ٠ \ ، \ س = ٢$

٢) $d(س) = ل(س) \Leftarrow س^2 = ٤$

$س = \pm ٢ \Leftarrow س = -٢$

٣) $هـ(س) = ل(س) \Leftarrow \sqrt{8س} = ٤$ نربع

$8س = ١٦ \Leftarrow س = ٢$



$م = \int_{-٢}^{٠} (٤ - س^2) \, د س + \int_{٠}^{٢} ٤ - \sqrt{8س} \, د س$

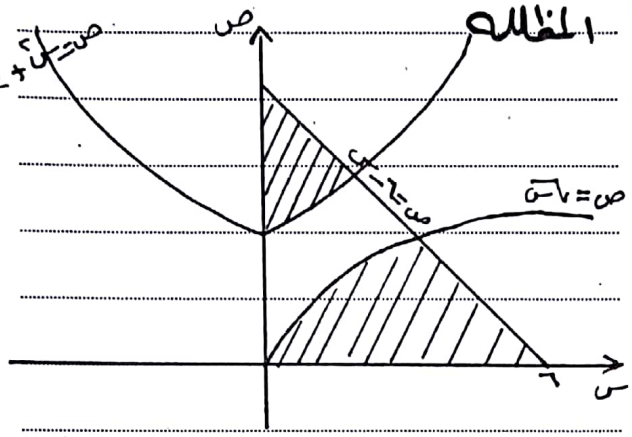
$= \left[٤س - \frac{س^3}{3} \right]_{-٢}^{٠} + \left[٤س - \frac{\frac{3}{2}(8س)}{\frac{3}{2} \times 8} \right]_{٠}^{٢}$

$= ٨ - \left(-٨ + \frac{٨}{3} \right) + ٨ - \frac{٦٤}{١٢}$

$= ١٦ - \frac{٨}{3} - ١٦ = \frac{٤٨ - ٤}{3} = \frac{١٦}{3}$

$= ٨$ وحدة مربعة

٤) احسب مساحة المنطقة المظللة



الحل نجد نقاط التقاطع ..

١) $س^2 + ٤ = ٦ - س \Leftarrow س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ١$ الأول

٢) $\sqrt{س} = ٦ - س$ نربع $\Leftarrow س = ٣٦ - ١٢س + س^2$

$س^2 - ١٣س + ٣٦ = ٠$

$(س - ٤)(س - ٩) = ٠ \Leftarrow س = ٤$

اقل من ٦

٣) $٦ - س = ٠ \Leftarrow س = ٦$

$م = \int_{١}^{٤} (٦ - س) - (س^2 + ٤) \, د س$

$+ \int_{٤}^{٦} (٦ - س) - (٠ \cdot ٥س) \, د س$

$= \left[٥س - \frac{س^3}{3} \right]_{١}^{٤} + \left[\frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} - \frac{س^2}{2} \right]_{٤}^{٦}$

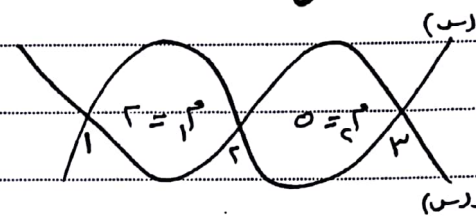
$= \left(٢٠ - \frac{٦٤}{3} \right) - \left(٥ - \frac{١}{3} \right) + \left(١٢ - ١٨ \right) - \left(٨ - ٨ \right)$

$= \frac{٥١}{٦}$ وحدة مربعة

$= \frac{١٧}{2}$ وحدة مربعة

Scanned by CamScanner

٥) من الشكل المجاور



جد $\int_{-٣}^{٣} (و(س) - ه(س))\, د س$

الحل

$م_١ = \int_{-٣}^{-١} (ه(س) - و(س))\, د س = ٣$

$م_٢ = \int_{-١}^{٢} (و(س) - ه(س))\, د س = ٥$

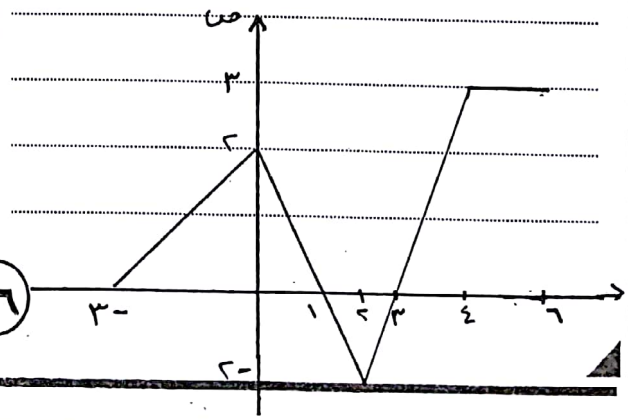
المطلوب $\int_{-٣}^{-١} (ه(س) - و(س))\, د س$

$\int_{-٣}^{-١} (ه(س) - و(س))\, د س = \int_{-١}^{٢} (ه(س) - و(س))\, د س$

$+ \int_{٢}^{٣} (ه(س) - و(س))\, د س$

$= ٣ - ٥ = -٢$

٦) من الشكل المجاور لمنحنى ه(س)



جد ١) $\int_{-٣}^{٦} ه(س)\, د س$

٢) $\int_{-٣}^{٦} |ه(س)|\, د س$

٣) نبرهن أن $\int_{-٣}^{م} ه(س)\, د س = ٣,٥$ حيث م

٤) $\int_{-٣}^{٣} (س^٣ ه(س^٤) - ٣)\, د س$

الحل بحساب مساحة الأشكال المتشكلة

$م_١ = \frac{١}{٢} \times (-١ - ٣)(٢) = ٤$

$م_٢ = \frac{١}{٢} \times (٣ - ١)(٢) = ٢$

$م_٣ = \frac{١}{٢} (٤ - ٣)(٣) = \frac{٣}{٢}$

$م_٤ = م_{□} = (٦ - ٤)(٣) = ٦$

١) $\int_{-٣}^{٦} ه(س)\, د س = ٤ - ٢ + \frac{٣}{٢} + ٦ = ٩,٥$

٢) $\int_{-٣}^{٦} |ه(س)|\, د س = ٤ + ٢ + \frac{٣}{٢} + ٦ = ١٣,٥$

٣) بالتجريب

$\int_{-٣}^{١} ه(س)\, د س + \int_{١}^{٣} ه(س)\, د س + \int_{٣}^{٤} ه(س)\, د س$

$= ٤ + -٢ + ١,٥ = ٣,٥ \Leftarrow م = ٤$

٤) نفرض ص = $س^٢ - ٣ \Leftarrow د ص = ٢ س\, د س$

٠	←	-٣
٣	←	٦

$\int_{-٣}^{٦} س^٣ ه(ص)\, \frac{د ص}{٢ س}$

Scanned by CamScanner

$= \int_{-3}^{6} \frac{1}{2}(ص+3)\, هـ(ص)\, د ص$

بالأجزاء

$هـ = \frac{1}{2}(ص+3) \leftarrow د هـ = \frac{1}{2} د ص$

$د هـ = هـ(ص) د ص \leftarrow هـ = هـ(ص)$

$\leftarrow \frac{1}{2}(ص+3) هـ(ص) \Big]_{-3}^{6} - \frac{1}{2} \int_{-3}^{6} هـ(ص) د ص$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 3 - 0 - \frac{1}{2} \times \frac{19}{2}$

$= \frac{27}{2} - \frac{19}{4} = \frac{35}{4}$

تدريبات (٣) للطالب

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين $هـ(س) = \frac{1}{س^2}$ ، $ك(س) = س^2$

$ل(س) = 4$

ب) في الربع الثاني

ج) في الأول ومحور الصادات

٢) المساحة بين $هـ(س) = س^3$

$ك(س) = س^2 + 4$ ، $ل(س) = -4س$

٣) $هـ(س) = س^2 - 1$ ، $ك(س) = س + 5$

$ل(س) = س + 1$ ومحور الصادات

في الربع الثاني

٤) $هـ(س) = س^2 - 4$ ، $ك(س) = 3س + 4$

والمحورين في الربع الأول

٥) $هـ(س) = 2س^2 - 4س$

$ك(س) = 2س^2 + 4س$

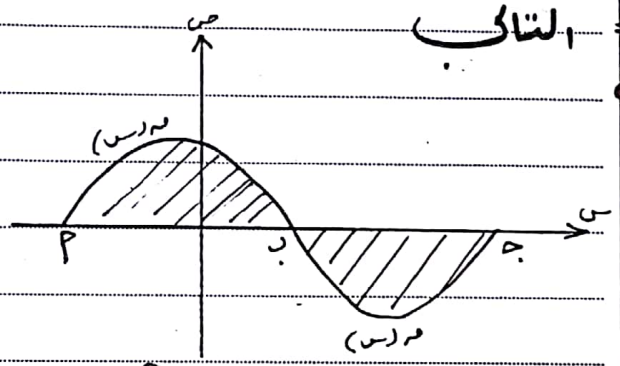
والمستقيم ص = -2

٦) المساحة بين $هـ(س) = جتاس$

$ك(س) = حتاس$

والمستقيم ص = 2 في الفترة $[0, \pi]$

٧) يعبر عن المساحة الموضحة بالشكل التالي



أ) $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د س$ ب) $\int_{أ}^{ب} |هـ(س)|\, د س$

جـ) $\int_{أ}^{جـ} |هـ(س)|\, د س$ د) $2\int_{أ}^{ب} |هـ(س)|\, د س$

Scanned by CamScanner

خامساً: المعادلات التفاضلية

١) يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة

$ت(ن) = \frac{1}{\sqrt{ن+3}}$ حيث ن المسافة المقطوعة بعد مرور ٨ ثوان علماً بأن الجسيم تحرك من السكون وأن ف(١) = $\frac{9}{10}$ م

الحل $\frac{دع}{دن} = \frac{1}{ن^{\frac{1}{3}}}$ ⇐ $دع = ن^{-\frac{1}{3}} دن$

$ع = \frac{3}{2} ن^{\frac{2}{3}} + ج$ ، ع(٠) = ٠ ⇐ ج = ٠

$دف = \frac{3}{2} ن^{\frac{2}{3}} دن$ نكامل ⇐

$ف = \frac{9}{10} ن^{\frac{5}{3}} + ج$ ، ف(١) = $\frac{9}{10}$

∴ ج = ٠ ⇐ ف(٨) = $\frac{144}{5}$ م

٢) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

$ع = \frac{1}{ن^2}$ ، ن > ٠

اذا كانت السرعة الابتدائية = ١ م/ث وأن الموقع الابتدائي = $\frac{2}{3}$ م جد ف(٣)

الحل $ن = \frac{1}{ع^2} \Leftarrow ع^2 ن = 1$

نكامل ⇐ $ع^2 = ن + ج$

ع(٠) = ١ ⇐ ١ = ج ⇐ $|ع| = (ن+1)^{\frac{1}{2}}$

ع > ٠ ⇐

$\frac{دف}{دن} = (ن+1)^{\frac{1}{2}}$ ⇐ $دف = (ن+1)^{\frac{1}{2}} دن$

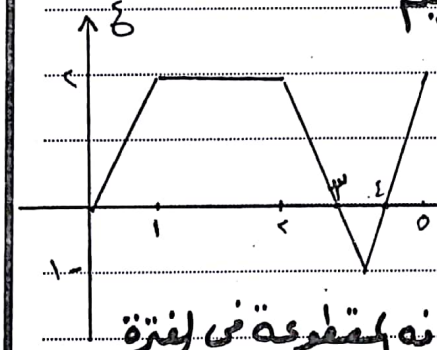
$ف = \frac{2}{3}(ن+1)^{\frac{3}{2}} + ج$ ، ف(٠) = $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} + ج = \frac{2}{3}$ ⇐ ج = ٠

$ف(ن) = \frac{2}{3}(ن+1)^{\frac{3}{2}}$

∴ ف(٣) = $\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$ م

٣) الشكل التالي يمثل العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم



أ) جد المسافة المقطوعة في الفترة [٥،٠]

ب) الازاحة في الفترة [٥،٠]

الحل $م_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$م_2 = (2-1)(2) = 2$

$م_3 = \frac{1}{2} \times (3-2)(2) = 1$

$م_4 = \frac{1}{2} \times (4-3)(1) = 0.5$

$م_5 = \frac{1}{2}(5-4)(2) = 1$

Scanned by CamScanner

م) إضافة داءاً موجبة
$= 1+2+1+0.5+1 = 0.5$

ن) الإزاحة $= 1+2+1-0.5+1 = 4.5$

٤) جد حل المعادلة التفاضلية
$(س - ص^2 س) د س = (ص - س^2 ص) د ص$

الحل عوامل مشتركة
$س(1 - ص^2) د س = ص(1 - س^2) د ص$
$\frac{س}{1-س^2} د س = \frac{ص}{1-ص^2} د ص$ تكامل
$-\frac{1}{2} لو_هـ |1-س^2| = -\frac{1}{2} لو_هـ |1-ص^2| + جـ$ ×(-2)
$لو_هـ |1-س^2| = لو_هـ |1-ص^2| + جـ$ هـ للأس
$|1-س^2| = |1-ص^2| \times هـ^{جـ}$ حيث $هـ^{جـ} = ج$
$1-س^2 = 1-ص^2 \times ج$

٥) جد حل المعادلة التفاضلية
$هـ^{س}$ ظا ص د س + $(1 - هـ^{س})$ قا^2 ص د ص = ٠

الحل
$\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}-1} د س = \frac{قا^2 ص}{ظا ص} د ص$ تكامل
$لو_هـ |هـ^{س} - 1| = لو_هـ |ظا ص| + جـ$

٦) تصب حنفية في خزان وضعه العلاقة $\frac{د ع}{د ن} = -٤ع$ حيث

ع : كمية الماء في الخزان بعد ن ساعة
ن : الزمن بالساعة
م : ثابت $\neq$ ٠

إذا زادت كمية الماء من ٤٠٠ لتر إلى ١٢٠٠ لتر خلال ساعتين جد كمية الماء في الخزان بعد مرور ٦ ساعات

الحل حل المعادلة التفاضلية

$\frac{د ع}{ع} = -٤ د ن \Leftarrow لو_هـ |ع| = -٤ن + جـ$ ⊕

$ع(٠) = ٤٠٠ \Leftarrow لو_هـ ٤٠٠ = جـ$

$ع = هـ^{(-٤ن + لو_هـ ٤٠٠)} = ٤٠٠ هـ^{-٤ن}$

$ع(٢) = ١٢٠٠ \Leftarrow ١٢٠٠ = ٤٠٠ هـ^{-٨}$

$هـ^{-٤} = ٣$

$\therefore ع(٦) = ٤٠٠ هـ^{-٢٤} = ٤٠٠ (هـ^{-٤})^3$

$= ٤٠٠ \times (٣)^3$

$= ٤٠٠ \times ٢٧ = ١٠٨٠٠$ لتر

Scanned by CamScanner

٧) يذوب الملح بالماء بمعدل يتناسب مع كمية الملح المتبقية وفق العلاقة

$\frac{د ك}{د ن} = -ك$

فإذا وضع ١٠ كغم من الملح فذاب نصفه بعد ربع ساعة جد كمية الملح المتبقية بعد $(\frac{٣}{٤})$ ساعة علماً بأن

ك : كمية الملح المتبقية (لم تذوب)

ن : الزمن بالساعة ، م : ثابت

الحل : نحل المعادلة لتصبح على الصورة

$\frac{د ك}{ك} = م د ن \Leftarrow \log_{هـ} ك = م ن + جـ$

$ك(٠) = ١٠ \Leftarrow \log_{هـ} ١٠ = جـ$

$\log_{هـ} ك = م ن + \log_{هـ} ١٠ \Leftarrow ك = ١٠ هـ^{م ن}$

$ك(\frac{١}{٤}) = ٥ \Leftarrow ٥ = ١٠ هـ^{\frac{١}{٤} م}$

$هـ^{\frac{١}{٤} م} = \frac{١}{٢}$

$ك(\frac{٣}{٤}) = ١٠ هـ^{\frac{٣}{٤} م} = ١٠ (هـ^{\frac{١}{٤} م})^{٣}$

$= ١٠ \times (\frac{١}{٢})^{٣} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ كغم

تدريبات (٤) للطالب

١) يتحرك جسيم في المستوى الديكارتي وفق العلاقة

$ت = \frac{١}{ع م}$ ، $ع > ٠$

حدد متى يبدأ الجسم بالتحرك من السكون مبتدأ من نقطة الأصل

وأن $ف(٢) = \frac{٨}{٣}$ وحدة

٢) يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة $ت = ع$ ، $ع > ٠$

فإذا كانت سرعته الابتدائية ٣م/ث وأنه $ف(\log_{٥} ٢) = ٥$ م

جد بالعلاقة المطلوبة بعد $\log_{٥} ٣$ ثانية

٣) إذا كان ميل المماس عند أي نقطة لمنحنى علاقته بعطى

بالعلاقة $\frac{١}{(س + ص - ١)^{٢}}$ جد قاعدة العلاقة

علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٠،١)

Scanned by CamScanner

سادساً : معكوس المشتقة (البدائي) وخصائص تكامل الدوال

تذكير :

١) م(س) معكوس المشتقة لاقتران متصل هـ(س) اذا كان
م'(س) = هـ(س) أي
م(س) = ∫ هـ(س) دس

٢) طرح معكوسا المشتقة لاقتران متصل هـ(س) لهم نفس المعامل = ثابت
م١ - م٢ = جـ
٢م١ - ٢م٢ = جـ

امثلة ١) م١، م٢، م٣ معكوسا المشتقة لاقتران المتصل هـ(س) وكان

∫ (م١ - م٢) دس = ١٢ جد
١

∫ (م٣ - م١) دس دس
٥

الحل م١ - م٢ = جـ ⇐ ∫ جـ دس = ١٢
١

جـ = ٤ ⇐ م١ - م٢

∫ ٤ دس = س دس = س^٤]
٥ ٥

= ٤٨ -

٢) اذا كان م(س) معكوس المشتقة لاقتران المتصل هـ(س) وكان

م(س)
هـ + ٢ س = م س^٢ جد م
حيث منحنى هـ(س) يمر بالنقطة (١، ٣)

الحل
م(س)
هـ = م س^٢ - ٢ س

م(س) = لو_هـ (م س^٢ - ٢ س) نشتق

هـ(س) = (٢م س - ٢) / (م س^٢ - ٢ س) لكن هـ(١) = ٣

٣ = (٢م - ٢) / (م - ٢) ⇐ ٣م - ٦ = ٢م - ٢

م = ٤

٣) اذا كان
م(س)، ه(س) معكوسا المشتقة لاقتران هـ(س) وكان
م(س) = جا س + ظتا س + ١
π
وأن ∫ (م(س) - ٥ه(س)) دس = ٤
π/٢

جد ه(س)

الحل ه(س) = جا س + ظتا س + جـ

∫ (- جا س - ظتا س + (١ - ٢جـ)) دس = ٤
π/٢

- ٢ - ٠ - (١ - ٢جـ) π = ٤

- ٦ = - (١ - ٢جـ) π ⇐ جـ = ١/٢ - ٣/π

Scanned by CamScanner

٤) اذا علمت أن

$\int_1^2 (2\,f(x)+1)\,dx = 3$

$\int_3^1 \left(\frac{f(x)}{2}-1\right)dx = 4$

جد $\int_1^3 (f(2x+1)+1)\,dx$

الحل نجزئ العطيات ...

$\int_1^2 f(x)\,dx = 2$

$\frac{1}{2}\int_3^2 f(x)\,dx + 1 = 4$

$\int_3^1 f(x)\,dx = 6$

المطلوب $\int_1^3 f(2x+1)\,dx + \int_1^3 1\,dx$

$u = 2x+1 \leftarrow du = 2\,dx \leftarrow dx = \frac{du}{2}$

$x = 0 \leftarrow u = 1$

$x = 1 \leftarrow u = 3$

$\int_1^3 f(u)\,\frac{du}{2} + 1$

$= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx\right) + 1$

$= \frac{1}{2}(2 + -6) + 1 = -1$

٥) اذا كان $-2 \le f(x) \le 1$

$x \in [1,5]$ جد

١) اكبر و أصغر قيمة

$\int_1^5 (2 - 3f(x))\,dx$

الحل $1 \le x \le 5 \Rightarrow -3 \le -3x \le -15$

$-1 \le 3f(x) \le 6 \Rightarrow -2 \le 2 - 3f(x) \le 8$

تكامل $\int_1^5 -2 \le \int_1^5 (2-3f(x))\,dx \le 8$

$-8 \le \int_1^5 (2-3f(x))\,dx \le 32$

اصغر قيمة $= -8$ ، اكبر قيمة $= 32$

٢) اكبر و أصغر قيمة $\int_1^5 (f(x)+1)\,dx$

الحل

$0 \le f(x) \le 4$

$1 \le f(x)+1 \le 5$

تكامل $4 \le \int_1^5 (f(x)+1)\,dx \le 20$

٣) اكبر و اصغر قيمة $\int_1^2 (f(x)+2)\,dx$

الحل $0 \le f(x) \le 2$

$2 \le f(x)+2 \le 4$ تكامل

$8 \le \int_1^2 (f(x)+2)\,dx \le 16$

Scanned by CamScanner

٦) جد اكبر و أصغر قيمة

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{2}{1-2\text{جتا}س} \, \text{د}س$$

دون اجراء عملية التكامل

الحل $-1 \le \text{جتا}س \le 0 \times -2$

$2 \ge -2\text{جتا}س \ge 0 + 1$

$3 \ge 1-2\text{جتا}س \ge 1$ نقلب

$\frac{1}{3} \le \frac{1}{1-2\text{جتا}س} \le 1 \times 2$

$\frac{2}{3} \le \frac{2}{1-2\text{جتا}س} \le 2$ تكامل

$\frac{\pi}{3} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{2}{1-2\text{جتا}س} \, \text{د}س \le \pi$

٧) جد اكبر و أصغر قيمة

$$\int_{0}^{2} (س^3 - 3س) \, \text{د}س$$

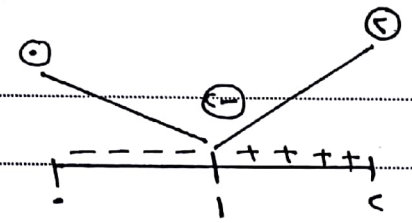
دون اجراء عملية التكامل

الحل

$\text{ق}(س) = س^3 - 3س$ $[0,2]$

$\text{ق}'(س) = 3س^2 - 3 = 0$

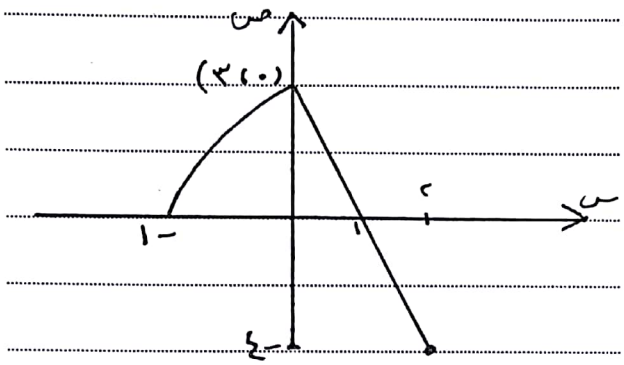
$س = 1, -1$



$-2 \le \text{ق}(س) \le 2$ تكامل

$-4 \le \int_{0}^{2} \text{ق}(س) \, \text{د}س \le 4$

٨) من الشكل التالي لمنحنى ق(س)



جد اكبر و أصغر قيمة

$\int_{-1}^{1} (\text{ق}(س) + 1) \, \text{د}س$

الحل $0 \le \text{ق}(س) \le 3$ $+1$

$1 \le \text{ق}(س) + 1 \le 4$ تكامل

$2 \le \int_{-1}^{1} (\text{ق}(س) + 1) \, \text{د}س \le 8$

$\int_{-1}^{1} (\text{ق}^2(س) + 3) \, \text{د}س$

الحل $-4 \le \text{ق}(س) \le 3$ تربيع

$0 \le \text{ق}^2(س) \le 16$ $+3$

$\int_{-1}^{1} 3 \le \int_{-1}^{1} \text{ق}^2(س) + 3 \le \int_{-1}^{1} 19$

٩ الاصغر ٥٧ الاكبر

٩) $ق(س) = \begin{cases} ٦ & ، \ ١ \le س < ٢ \\ ٣س & ، \ س = ٢ \\ ٢س & ، \ ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

$\int_{١}^{٤} ق(س)\,د س = ٧$ جد م

الحل $\int_{م}^{٢} ٦\,د س + \int_{٢}^{٤} ٢س\,د س = ٧$

$٦(٢ - م) + س^{٢}\Big]_{٢}^{٤} = ٧$

$١٢ - ٦م + ١٢ = ٧ \Leftarrow ٢٤ - ٦م = ٧$

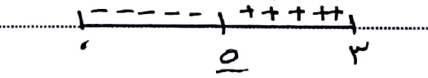
$م = \frac{١٧}{٦}$

---

١٠) $\int_{٠}^{٣} |هـ^{٢س - ٤} - هـ|\,د س$

الحل $ص = هـ^{٢س-٤}$

$٢س - ٤ = ١ \rightarrow س = \frac{٥}{٢}$



$= \int_{٠}^{٥/٢} (هـ^{٢س-٤} - هـ)\,د س + \int_{٥/٢}^{٣} (هـ - هـ^{٢س-٤})\,د س$

$= هـ^{٢س-٤}\Big]_{٠}^{٥/٢} - هـ س\Big]_{٠}^{٥/٢} + هـ س\Big]_{٥/٢}^{٣} - \frac{١}{٢} هـ^{٢س-٤}\Big]_{٥/٢}^{٣}$

$= هـ - \frac{١}{هـ^{٤}} - \frac{٥}{٢}هـ + هـ^{٦} - \frac{٥}{٢}هـ - \frac{١}{٢}هـ^{٢} + \frac{١}{٢}هـ$

$= هـ + \frac{١}{هـ^{٤}} + هـ^{٦} - \frac{١}{٢}هـ^{٢}$

Scanned by CamScanner

القطوع المخروطية

أولاً: العناصر

١) جد احداثيات الرأسية والبؤرتين ومعادلتي المحورين ثم جد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$٢٥س^٢ + ١٦ص^٢ - ١٠٠س - ٣٢ص = ٢٨٤$

الحل

نكمل المربع

$٢٥س^٢ - ١٠٠س + ١٦ص^٢ - ٣٢ص = ٢٨٤$

$٢٥(س^٢ - ٤س + ٤) + ١٦(ص^٢ - ٢ص + ١) = ٢٨٤ + ١٠٠ + ١٦$

$٢٥(س-٢)^٢ + ١٦(ص-١)^٢ = ٤٠٠$

$\frac{(س-٢)^٢}{١٦} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٥} = ١$

نقطع ناتج مساوي الواحد (٢، ١)

الرأسية $(٢ ، ١ \pm ٥)$ ← (٢، ٦) (٢، -٤)

$ج^٢ = ا^٢ - ب^٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩ \leftarrow ج = ٣$

البؤرتين $(٢ ، ١ \pm ٣)$ ← (٢، ٤) (٢، -٢)

معادلة المحور الأكبر $س = ٢$

الأصغر $ص = ١$

٢) جد احداثيات الرأسية والبؤرتين وطولي المحور الرائمة ومعادلتي القاطع الرائمة والاختلاف المركزي للقطع

$٧س^٢ - ٩ص^٢ - ١٤س - ٥٤ص - ١٣٧ = ٠$

الحل:

$٧س^٢ - ١٤س - ٩ص^٢ - ٥٤ص = ١٣٧$

$٧(س^٢ - ٢س + ١) - ٩(ص^٢ + ٦ص + ٩) = ١٣٧ + ٧ - ٨١$

$٧(س-١)^٢ - ٩(ص+٣)^٢ = ٦٣$ (÷ ٦٣)

$\frac{(س-١)^٢}{٩} - \frac{(ص+٣)^٢}{٧} = ١$

زائد سيني $م(١، -٣)$

$ا^٢ = ٩ \quad ب^٢ = ٧ \quad ج^٢ = ا^٢ + ب^٢ = ١٦$

الرأسية $(١ \pm ٣ ، -٣)$ ← (٤، -٣) (-٢، -٣)

البؤرتين $(١ \pm ٤ ، -٣)$ ← (٥، -٣) (-٣، -٣)

طولي الرائمة $(١، -٣ \pm \sqrt{٧})$

معادلة القاطع $ص = -٣$

الرائمة $س = ١$

الاختلاف المركزي $= \frac{ج}{ا} = \frac{٤}{٣} = ١٢$

الاختلاف المركزي $= \frac{ج}{ا} = \frac{٣}{٥} = ١٦$

Scanned by CamScanner

٣) جد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلتي محور التماثل والدليل للقطع الذي معادلته

$(٢س - ١)^{٢} = ٤(س + ص - ٢)$

الحل

نرتب المعادلة :

$٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٤س + ٤ص - ٨$

$٤س^{٢} - ٨س = ٤ص - ٩$

$٤(س^{٢} - ٢س + ١) = ٤ص - ٩ + ٤$

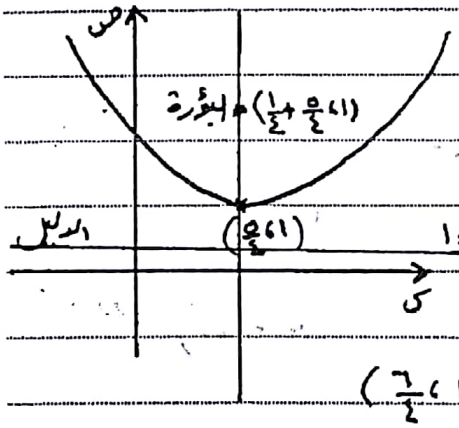
$٤(س - ١)^{٢} = ٤(ص - \frac{٥}{٤})$

$(س - ١)^{٢} = (ص - \frac{٥}{٤})$

$(س - ى)^{٢} = ٤جـ(ص - هـ)$

الرأس $(١ ، \frac{٥}{٤})$

$٤جـ = ١ \leftarrow جـ = \frac{١}{٤}$



البؤرة $(١ ، \frac{٦}{٤})$

معادلة محور التماثل $س = ١$

معادلة الدليل $ص = \frac{٥}{٤} - \frac{١}{٤} = ١$

٤) جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

$\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{٢}ص^{٢} + ٢س - ٤ص = -٨$

الحل

$\times ٢ \leftarrow س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٨ص + ١٦ = ٠$

المركز $(-\frac{١}{٢} \times ٤ ، -\frac{١}{٢} \times -٨) = (-٢ ، ٤)$

$ر = \sqrt{(-٢)^{٢} + (٤)^{٢} - ١٦} = ٢$

٥) في القطع المخروطي الذي معادلته

$(٤س - ٤)^{٢} + (\frac{١}{٢}ص + ١)^{٢} = ٤$

جد إحداثيات المركز ، البؤرتين ، الرأسين والاختلاف المركزي

الحل نقرج عوامل مشتركة

$١٦(س - ١)^{٢} + \frac{١}{٤}(ص + ٢)^{٢} = ٤$

نقسم على ٤ $\leftarrow$

$٤(س - ١)^{٢} + \frac{١}{١٦}(ص + ٢)^{٢} = ١$

$\therefore \frac{(س - ١)^{٢}}{\frac{١}{٤}} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{١٦} = ١$

المركز صادك $\leftarrow م(١ ، -٢)$

$ا^{٢} = ١٦ \leftarrow ا = ٤ ، ب^{٢} = \frac{١}{٤} \leftarrow ب = \frac{١}{٢}$

Scanned by CamScanner

$جـ^2 = م^2 - ب^2$

$جـ^2 = 16 - \frac{1}{4} = \frac{63}{4} \leftarrow جـ = \frac{\sqrt{63}}{2}$

المركز $(1، -2)$

الرأسيه $(1، -2 \pm 4) \leftarrow (1، 2)، (1، -6)$

البؤرتين $(1، -2 \pm \frac{\sqrt{63}}{2})$

الاختلاف المركزي $= \frac{\frac{\sqrt{63}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{63}}{8}$

ثانياً : ايجاد المعادلات

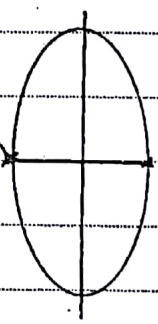
٦) جد معادلة القطع الذي نهايتي المحور الاصغر فيه هما $(1، 3)، (3، 3)$ ، الاختلاف المركزي $= \frac{1}{2}$

الحل :

هذا قطع ناقص صادر

المركز $(\frac{1+3}{2}، \frac{3+3}{2})$

$= (2، 3)$



$2ب = 2 \leftarrow ب = 1$

$\frac{جـ}{م} = \frac{1}{2} \leftarrow جـ = \frac{م}{2}$

$جـ^2 = م^2 - ب^2$

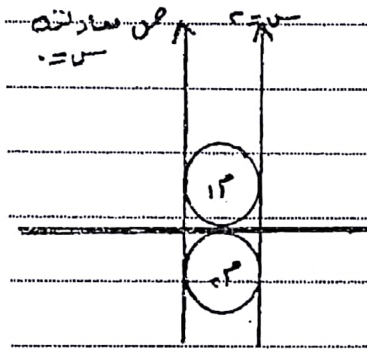
$\frac{م^2}{4} = م^2 - 1 \Leftarrow \frac{3}{4} م^2 = 1 \leftarrow م^2 = \frac{4}{3}$

$\frac{(س-2)^2}{ب^2} + \frac{(ص-3)^2}{م^2} = 1$

المعادلة $\frac{(س-2)^2}{1} + \frac{(ص-3)^2}{\frac{4}{3}} = 1$

٧) جد معادلة الدائرة التي تمس كلاً من محور الصادات والمستقيم $س = 2$ ، $ص = -1$

الحل



طول القطر $= 2 - 0 = 2 \leftarrow ر = 1$

م $(1، 0)$ المعادلة $(س-1)^2 + ص^2 = 1$

م $(1، -2)$ المعادلة $(س-1)^2 + (ص+2)^2 = 1$

٨) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم $ص = س + 1$ وتمر بالنقطتين $(1، 2)، (2، 3)$

الحل

المعادلة $س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + جـ = 0$

Scanned by CamScanner

مركز الدائرة (-ل، -ع) يقع على ص = س + ١

المركز (-ل، -ل + ١)

بما أن ع = -ل + ١ ---- (١)

تمر (١، ١) ← ١ + ع + ل + ع ل + جـ = ٠

ل + ع ل + جـ = -٥ ---- (٢)

تمر (٠، -٣) ← ٩ + ع + ٣ ل + ٣ ع + جـ = ٠

٣ ل + ٣ ع + جـ = -١٢ ---- (٣)

٢) × -١ ← -ل - ع ل - جـ = ٥

٣) ← ٣ ل + ٣ ع + جـ = -١٢

(٥) ÷ ٢ ل + ٢ ع = -٨

ل + ع = -٤ ---- (٥)

-ع + ل = ١ ---- (١)

٢ ل = -٣ ← ل = $\frac{-٣}{٢}$

∴ ل = $\frac{-٥}{٢}$

من (٢) ← $\frac{٢٥}{٤}$ - $\frac{١٥}{٢}$ + جـ = -٥

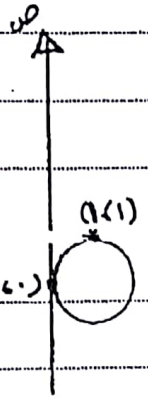
جـ = ٨

المعادلة

س^{٢} + ص^{٢} - ٣ س - ٥ ص + ٨ = ٠

٩) جد معادلة الدائرة التي تمس المحاور عند (٠، -٣) وتمر بالنقطة (١، ١)

الحل



المركز (ر، -ر) ← المعادلة

(س - ل)^{٢} + (ص + ر)^{٢} = ر^{٢} تمر (١، ١)

(١ - ل)^{٢} + ١٦ = ر^{٢} ←

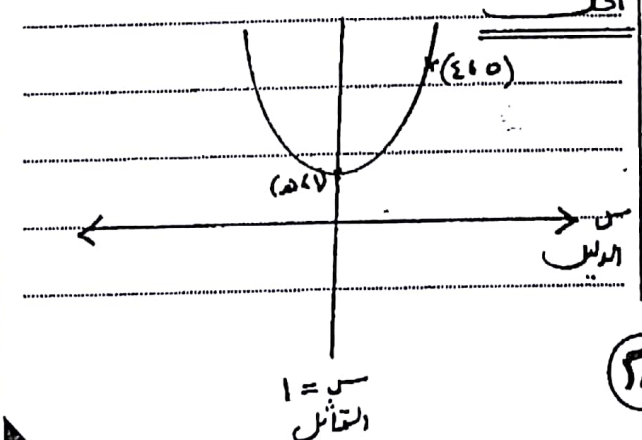
١ - ٢ ل + ل^{٢} + ١٦ = ر^{٢}

١٧ = ٢ ر ← ر = ٨,٥

المعادلة (س - ٨,٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = (٨,٥)^{٢}

١٠) جد معادلة المكافئ الذي دليله هو محور الصادات ومعادلة محور تماثله س = ١ ويمر بالنقطة (٤، ٥)

الحل



Scanned by CamScanner

المعادلة $(س-د)^2 = 4ج(ص-هـ)$

$(س-1)^2 = 4ج(ص-هـ)$ لكن

$ج = هـ$

$\therefore (س-1)^2 = 4ج(ص-ج)$

يمر المقطع بالنقطة $(-4, 0)$ ←

$16 = 4ج(4-ج)$

$\therefore 4 = 4ج - ج^2 \leftarrow ج^2 - 4ج + 4 = 0$

$(ج-2)^2 = 0 \leftarrow ج = 2 = هـ$

المعادلة $(س-1)^2 = 8(ص-2)$

بالتعويض $د^2 = (4-د)^2$ ←

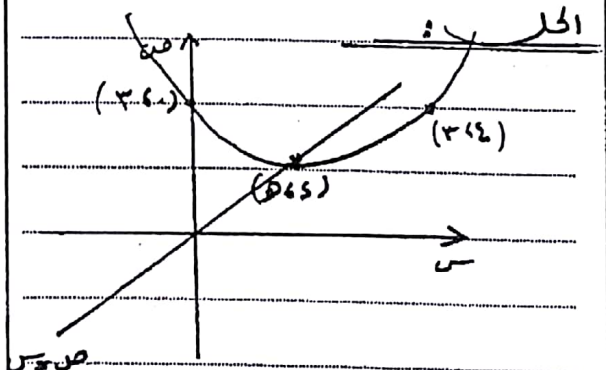
$د^2 = 16 - 8د + د^2$ ← $\boxed{د = 2}$

الرأس $(2, 2)$ $\xleftarrow{\text{من معادلة ١}}$ $\boxed{ج = 1}$

المعادلة $(س-2)^2 = 4(ص-2)$

١١) جد معادلة المكافئ الذي محوره يوازي المحاور ورأسه يقع على المستقيم $ص = س$ ويمر بالنقطتين $(4, 3)$ ، $(0, 3)$

الحل :



الرأس $(د، هـ)$ يقع على $ص = س$ ← $(د، د)$

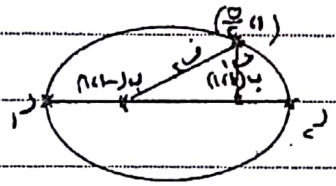
المعادلة $(س-د)^2 = 4ج(ص-د)$

يمر $(3, 0)$ ← $د^2 = 4ج(3-د)$ ---(١)

يمر $(3, 4)$ ← $(4-د)^2 = 4ج(3-د)$ ---(٢)

١٢) جد معادلة الناقص الذي احداثيات بؤرتيه $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ويمر بالنقطة $(1, \frac{5}{2})$

الحل :



نلاحظ أن

صنا سنقدم لتعويض

$ف_1 + ف_2 = 2ق$

$\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 2ق$

$\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 2ق \leftarrow 2ق = 4 \leftarrow \boxed{ق = 2}$

$2ج = 1 - -1 \leftarrow \boxed{ج = 1}$

$ج^2 = ق^2 - ب^2 \leftarrow 1 = 4 - ب^2 \leftarrow ب^2 = 3$

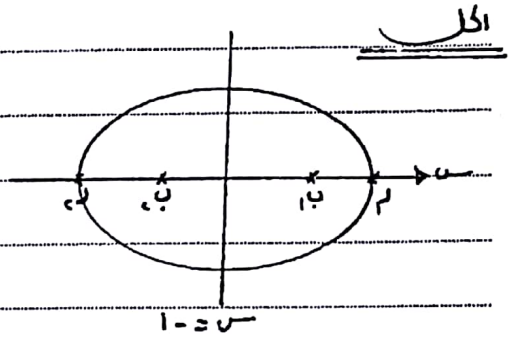
المركز $(0, 1)$

المعادلة $\frac{س^2}{4} + \frac{(ص-1)^2}{3} = 1$

Scanned by CamScanner

١٣) جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه يقع على المستقيم س = -١ وبؤرتاه على محور السينات واختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (١، ٢)

الحل



$\frac{جـ}{ا} = \frac{٢}{٣} \leftarrow جـ = \frac{٢}{٣} ا$

$\because جـ^٢ = ا^٢ - ب^٢$

$\therefore \frac{٤}{٩} ا^٢ = ا^٢ - ب^٢ \leftarrow ب^٢ = \frac{٥}{٩} ا^٢$

معادلة $\frac{(س+١)^٢}{ا^٢} + \frac{ص^٢}{\frac{٥}{٩} ا^٢} = ١$

يمر (١، ٢) $\leftarrow \frac{٤}{ا^٢} + \frac{٤}{\frac{٥}{٩} ا^٢} = ١ \times ا^٢$

$ا^٢ = ٤ + \frac{٣٦}{٥} = \frac{٥٦}{٥}$

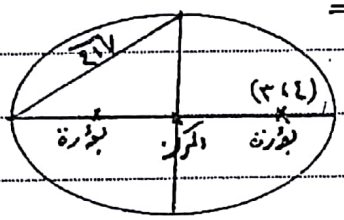
$ب^٢ = \frac{٥٦}{٩}$ وبالتعويض

ناقص ـ بؤرتاه م١ (-١، ٠) م٢ (-١، ٠)

١٤) جد معادلة الناقص الذي فيه أحد بؤرتيه (٤، ٣) والمركز نيار البؤرة.

ومحيط المثلث المكون من نقطه على القطع والبؤرتين = ١٦ وحدة وطول المحور الواصل بين أحد رأسي الناقص مع أحد طرفي المحور الأصغر = $\sqrt{٤١٧}$

الحل



$٢ا + ٢جـ = ١٦ \xleftarrow{(\div ٢)} ا + جـ = ٨ \quad ---①$

من تأثير فيثاغورس

$(\sqrt{٤١٧})^٢ = ا^٢ + ب^٢$

$٤١٧ = ا^٢ + ب^٢ \quad ---⑤$

$جـ^٢ = ا^٢ - ب^٢ \quad ---③$

⑤ + ③ $\leftarrow ٤١ + جـ^٢ = ٢ا^٢$

من ① $جـ = ٨ - ا$

$\therefore ٤١ + (٨ - ا)^٢ = ٢ا^٢$

$٤١ + ٦٤ - ١٦ا + ا^٢ = ٢ا^٢$

$ا^٢ + ١٦ا - ١٠٥ = ٠$

$(ا - ٥)(ا + ٢١) = ٠$

$ا = ٥ \leftarrow ب^٢ = ١٦$

$\therefore جـ = ٨ - ٥ = ٣ \leftarrow$ المركز (٣، ١)

Scanned by CamScanner

المعادلة $\frac{(س-1)^2}{25} + \frac{(ص-3)^2}{16} = 1$

15) جد معادلة الناقص الذي مساحة $\square$ = 60.96 ، الاختلاف المركزي = 0.8 ، معادلة المحور الأكبر ص = 2 ، معادلة المحور الأصغر س = 1

الحل :

$\pi أ ب = 60.96 \leftarrow أ ب = \frac{60}{\pi}$

$\frac{جـ}{أ} = 0.8 \leftarrow جـ = 0.8 أ$

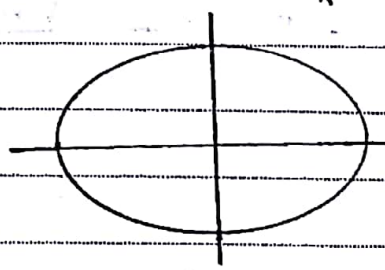
$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow 0.64 أ^2 = أ^2 - \frac{3600}{\pi^2}$

$\pi^2 \times 0.64 أ^2 = \pi^2 أ^2 - 3600$

$3600 = 0.36 \pi^2 أ^2$ جذر للطرفين

$60 = 6 أ \leftarrow أ^2 = 100 \leftarrow أ = 10$

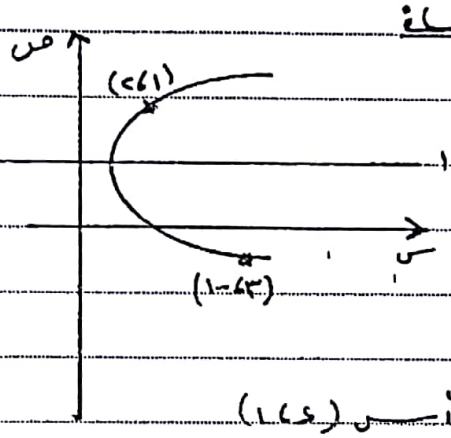
$\therefore ب = \frac{60}{10} = 6$



$(1, 2) \in$ للقطع $\frac{(س-1)^2}{100} + \frac{(ص-2)^2}{36} = 1$

16) جد معادلة القطع الزائد الذي معادلة المحور المرافق له ص = 1 ويمر بالنقطتين (1, 2) ، (3, -1)

الحل :



الرأس (1, 2)

المعادلة : $(ص-1)^2 = 4 جـ (س-2)$

يمر (1, 2) $\leftarrow 1 = 4 جـ (1-2)$

يمر (3, -1) $\leftarrow 4 = 4 جـ (3-2)$

بالقسمة :

$\frac{1}{4} = \frac{1-2}{2-3}$ تبادلي

$3-2 = 4-4 \leftarrow 3 = 1 \leftarrow = \frac{1}{3}$

$\therefore جـ = \frac{3}{8}$

المعادلة $(ص-1)^2 = \frac{3}{2} (س - \frac{1}{2})$

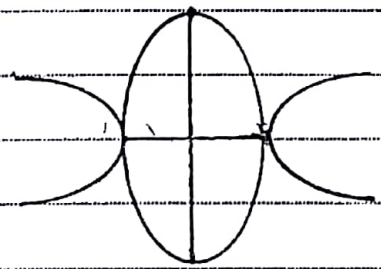
Scanned by CamScanner

ثالثاً : مجموعة الفروع

١٧) جد معادلة الزائد الذي رؤوسه هما نهايتي المحور الأصغر للناقص الذي معادلته $\frac{س^2}{4} + \frac{(ص-1)^2}{9} = 1$

والاختلاف المركزي للزائد مقلوب الاختلاف المركزي للناقص

الحل



الزائد سيني ومركزه (١،٠)

$ب_{\text{الزائد}} = ب_{\text{الناقص}} = ٣$

$هـ_{\text{الناقص}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣} \leftarrow هـ_{\text{الزائد}} = \frac{٣}{\sqrt{٥}}$

$\frac{٣}{\sqrt{٥}} = \frac{جـ}{أ} \leftarrow جـ = \frac{٣}{\sqrt{٥}} أ = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow \frac{٣٦}{٥} = ٤ + ب^2$

$\frac{٣٦}{٥} = \frac{٢٠}{٥} + ب^2 \leftarrow ب^2 = \frac{١٦}{٥}$

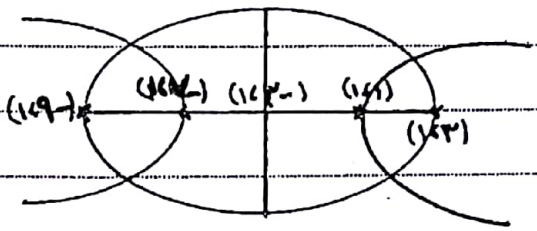
المعادلة $\frac{س^2}{٤} - \frac{(ص-١)^2}{\frac{١٦}{٥}} = ١$

١٨) جد معادلة الزائد الذي رأساه هما بؤرتا الناقص الذي معادلته

$\frac{(س+٣)^2}{٣٦} + \frac{(ص-١)^2}{٢٠} = ١$

وبؤرتا الزائد هما رأسا الناقص

الحل



رأسا الزائد هما (١،١) ، (-٧،١)

م الزائد (-٣،١) منتصف

وصوبين

$أ = ٤$ (قيمة أ من الناقص)

$جـ = ٦$ (قيمة أ من الناقص)

$جـ^2 = أ^2 + ب^2$

$٣٦ = ١٦ + ب^2 \leftarrow ب^2 = ٢٠$

$\frac{(س+٣)^2}{١٦} - \frac{(ص-١)^2}{٢٠} = ١$

Scanned by CamScanner

19) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين والكبد الأصغر للناقص الذي معادلته

$س^2 + 2ص^2 + 6س - 8ص + 9 = 0$

وتمر بالنقطة $(-4, 0)$

الحل

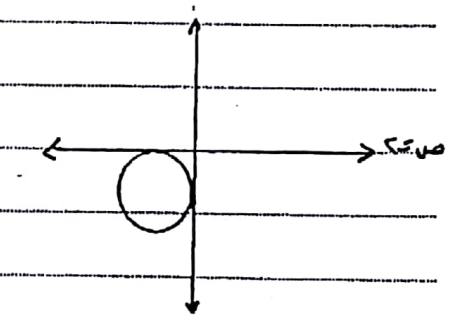
نكمل مربع

$س^2 + 6س + 9 + 2(ص^2 - 4ص + 4) = -9 + 9 + 8$

$(س+3)^2 + 2(ص-2)^2 = 8$

$\frac{(س+3)^2}{8} + \frac{(ص-2)^2}{4} = 1$

الأكبر $ص = 2$ الأصغر $س = -3$



المركز $(-3, 2) = (ل)$

المعادلة

$(س+3+ل)^2 + (ص-2+ل)^2 = ر^2$

يمر $(-4, 0)$ ←

$(-1+ل)^2 + (-2+ل)^2 = ر^2$

$1 - 2ل + ل^2 + 4 - 4ل + ل^2 = ر^2$

$2ل^2 - 6ل + 5 = ر^2$

$ل^2 - 3ل + 2.5 = ر^2$

$(ل - 2.5)(ل - 1) = 0$

$ر = 1 \leftarrow م(-4, 1)$

المعادلة $(س+4)^2 + (ص-1)^2 = 1$

$ر = 5 \leftarrow م(-8, -3)$

المعادلة $(س+8)^2 + (ص+3)^2 = 25$

20) جد معادلة الناقص الذي اختلافه المركزي $\frac{1}{2}$ وبؤرتاه هما تقاطع الدائرة $س^2 + ص^2 = 13$ مع الكافئ الذي معادلته

$س + ص^2 - 1 = 0$

الحل $ص^2 = 1 + س$ نعوض في الدائرة

$س^2 + س + 1 = 13$

$س^2 + س - 12 = 0$

$(س-3)(س+4) = 0$

$س = 3 \leftarrow 3 + ص^2 = 0 \leftarrow ص^2 = -2$

$ص = \sqrt{-2}$

$ب(3, \sqrt{2})$ $ب'(3, -\sqrt{2})$

بينما $س = -4$ غير مقبول لأن $ص^2 = -3$

المركز $(3, 0)$ ناقص صادك

$ج = 2$

Scanned by CamScanner

$\frac{جـ}{م} = \frac{1}{ك} \leftarrow \frac{جـ^2}{م^2} = \frac{1}{ك^2} \leftarrow \boxed{ك = م} \leftarrow$

$جـ^2 = م^2 - ل^2$

$ك = 16 - ب^2 \leftarrow \boxed{ل^2 = 12}$

$\frac{(س-3)^2}{12} + \frac{ص^2}{16} = 1$

٢١) جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هو بؤرة المكافئ الذي معادلته $\frac{1}{2}س^2 + 2س - 2ص = 0$ وطول المحور المرافق يساوي قطر الدائرة التي معادلتها $\frac{1}{4}س^2 + \frac{1}{4}ص^2 + س - ص - 2 = 0$ والمحور المرافق يوازي محور الصادات

الحل

نجد بؤرة المكافئ

$\times 2 \leftarrow س^2 + 4س - 4ص = 0$

$س^2 + 4س + 4 = 4ص + 4$

$(س+2)^2 = 4(ص+1)$

$4جـ = 4 \leftarrow جـ = 1$

الرأس $(-2، -1)$ ∴ البؤرة $(-2، 0)$

نجد قطع الدائرة

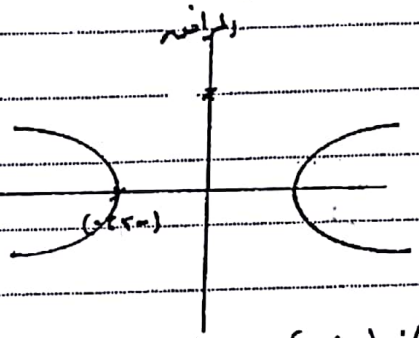
$\times 4 \leftarrow س^2 + ص^2 + 4س - 4ص - 8 = 0$

$ر = \sqrt{4 + 4 + 8} = 4$

الزائد أحدثيه $(-2، 0)$

$2ب = 2 \times 4 \leftarrow ب = 4$

القطع زائد حيث



∴ المركز $(0،0) \leftarrow م = 2$

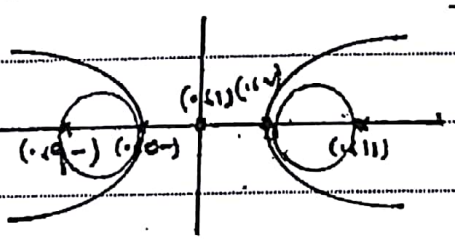
$\frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{16} = 1$

تدريب للطالب

٢٢) جد معادلة الدائرة التي نهايتي القطر فيها هما الرأس والبؤرة القريبة للزائد الذي معادلته

$\frac{(س-1)^2}{36} - \frac{ص^2}{64} = 1$

الحل



م (-2، 2)

Scanned by CamScanner

الدائرة الأولى نهايتي القطر

(٧، ٥) ، (١١، ٥) ← م (٩، ٥)

ر = ٢

$(س - ٩)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤$

الدائرة الثانية نهايتي القطر

(-٥، ٥) ، (-٩، ٥) ← م (-٧، ٥)

ر = ٢

المعادلة $(س + ٧)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤$

تدريب للطالب

٣٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع في البؤرة ، المكافئ الذي معادلته $(ص - ٥)^2 = ١٦(١ - س)$ ويمر بالنقطة (٣، ٥)

الحل

المكافئ $٤(س - ١)^2 = -١٦(ص - ١)$

$(س - ١)^2 = -٤(ص - ١)$

$-٤ج = -٤ \leftarrow ج = ١$

الرأس (١، ١) ← البؤرة (٠، ١)

∴ مركز الدائرة (٠، ١)

المعادلة $(س - ١)^2 + (ص - ١)^2 = ر^2$

تمر بـ (٣، ٥) ←

$١٦ + ٩ = ر^2 \leftarrow ر = ٥$

∴ المعادلة $(س - ١)^2 + (ص - ١)^2 = ٢٥$

٣٥) جد معادلة الناقص الذي مساحة تزيد عن مساحة الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 - ٤س - ٢ص = ١١$ بمقدار ٣٤π وأحد رأسي الناقص مركز الدائرة والبؤرة البعيدة عن هذا الرأس هي (-١، ٦)

الحل

مركز الدائرة (٢، ١)

$ر = \sqrt{٤ + ١ + ١١} = ٤$

الناقص أحد رأسيه (٢، ٧)

والبؤرة البعيدة (-١، ٦)

مساحة الناقص = مساحة الدائرة + ٣٤π

$\pi ٥ ب = ١٦\pi + ٣٤\pi$

$٥ب = ٥٠ \leftarrow ب = \frac{٥٠}{٥}$

$ج + ٥ = ٢ - ٦ = ٨ \leftarrow ج = ٨ - ٥$

لكن $ج^2 = ٥^2 - ب^2$

$٦٤ - ١٦٥ + ٥^2 = ٥^2 - \frac{٤٠٠}{٥^2} \times ٥^2$

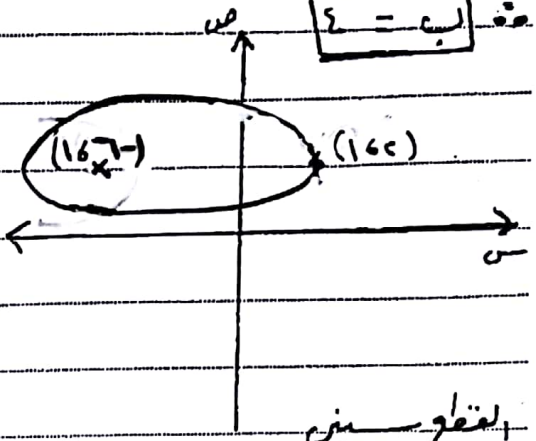
$٦٤ ٥^2 - ١٦ ٥^3 + ٤٠٠ = ٠$

$\div (-١٦) \leftarrow ٥^3 - ٤ ٥^2 - ٢٥ = ٠$

بالتجريب ← $٥ = ٥$

Scanned by CamScanner

ف : ب = ٤



القطع سيني

المركز (-٣ ، ٥ ، ١٦٣-) = (-١٦٣)

أو (-٦ + ٣ ، ١٦٣) = (-١٦٣)

المعادلة $\frac{(س+٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص-١)^{٢}}{١٦} = ١$

المركز (-٣ ، ١٦٢-) القطع سيني

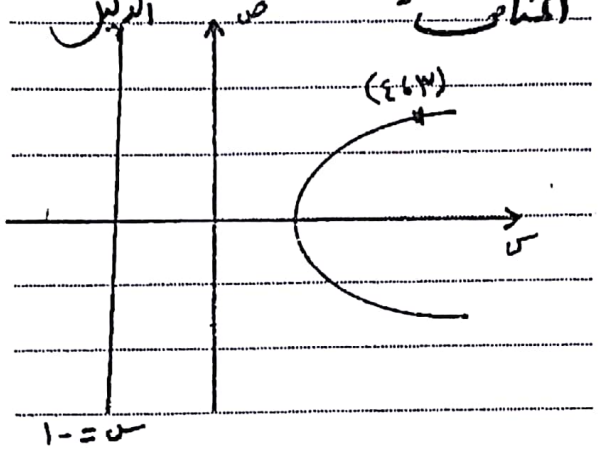
$ج^{٢} = ب^{٢} + ب^{٢} \leftarrow ٢٥ = ب^{٢} + ٤^{٢}$

$ب^{٢} = ١$

$\frac{(س+٣)^{٢}}{١} - \frac{(ص-١)^{٢}}{٤^{٢}} = ١$

تدريب للطالب

٢٦) من الشكل المجاور جد معادلة القطع



الحل

الرأس (٤ ، ٠)

المعادلة $ص^{٢} = ٤ ج (س - ك)$

لكن $ج = ك - -١ = ك + ١$

$\therefore ص^{٢} = ٤ (ك + ١)(س - ك)$

يمر (٤ ، ٣) $\leftarrow ١٦ = ٤ (ك + ١)(٣ - ك)$

$٤ = ٣ ك - ك^{٢} + ٣ - ك$

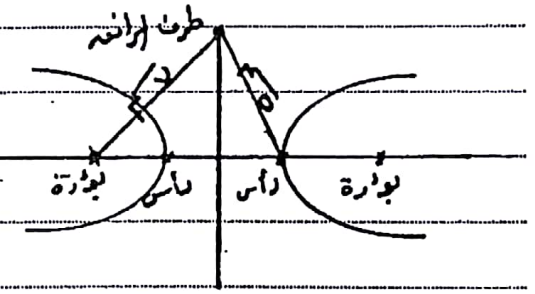
$ك^{٢} - ٢ ك + ١ = ٠$

$(ك - ١)^{٢} = ٠ \leftarrow ك = ١$

$\therefore$ المعادلة $ص^{٢} = ٨ (س - ١)$

رابعاً: معادلة القطع من الرسم

٢٥) من الشكل المجاور جد معادلة الزائد حيث المستقيم ص = ١ يمر بالرأسية و المستقيم س = -٢ معادلة المراقبة



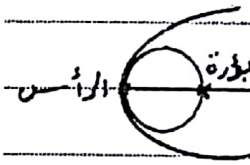
الحل $أ^{٢} + ب^{٢} = ٢٥ = ج^{٢} \leftarrow ج = ٥$

$٤٩ = ب^{٢} + ج^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٢٤$

Scanned by CamScanner

تدريب

٢٧) من الشكل المجاور جد معادلة الدائرة حيث معادلة المكافئ هي
$ص^{٢} + ٦ص - ١٢س - ٣ = ٠$



الحل

نكمل المربع $ص^{٢} + ٦ص + ٩ = ١٢س + ٣ + ٩$

$(ص + ٣)^{٢} = ١٢(س + ١)$

الرأس $(-١، -٣)$ البؤرة $(٢، -٣)$

مركز الدائرة $\left(\frac{-١ + ٢}{٢}، \frac{-٣ - ٣}{٢}\right)$

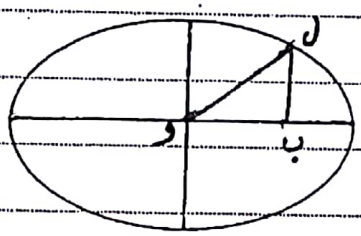
$= (٠٫٥، -٣)$

$٢ر = جـ = ٣ \leftarrow ر = ١٫٥$

∴ المعادلة

$(س - ٠٫٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٫٢٥$

٢٨) من الشكل المجاور احسب مساحة المثلث ل ب و حيث ب : البؤرة
و : المركز $(٠، ٠)$
معادلة القطع $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$



الحل

$أ^{٢} = ٢٥$ $ب^{٢} = ١٦$ $جـ^{٢} = ٩$

البؤرة $(٣، ٠)$

$ل(٣، ص)$ تقع على القطع فتحقق

$\frac{٩}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١ \leftarrow \frac{ص^{٢}}{١٦} = \frac{١٦}{٢٥}$

$ص^{٢} = \frac{(١٦)^{٢}}{٢٥} \leftarrow ص = \frac{١٦}{٥}$

$\therefore ل\left(٣، \frac{١٦}{٥}\right)$

∴ المساحة $= \frac{١}{٢} \times جـ \times ص$

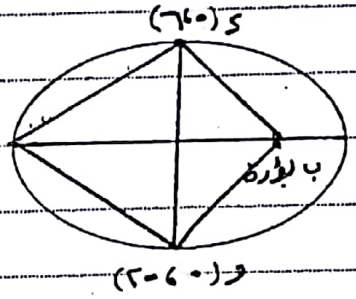
$= \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{١٦}{٥} = \frac{٤٨}{١٠}$ وحدة مربعة

Scanned by CamScanner

٢٩) من الشكل التالي

اذا علمت أن الاختلاف المركزي = ٠,٦

جد ١) محيط المربع ٢) مساحة المربع



الحل

المركز (٠,٠) ك ينتمي لمحور السينات

ب = ٤

$\frac{ج}{م} = ٠,٦ \rightarrow ج = ٠,٦ م$

$ج^2 = م^2 - ب^2 \rightarrow ٠,٣٦ م^2 = م^2 - ١٦$

$١٦ = ٠,٦٤ م^2 \rightarrow م^2 = ٢٥ \rightarrow م = ٥$

$ج = ٣$

$ك ب = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥ = ب و$

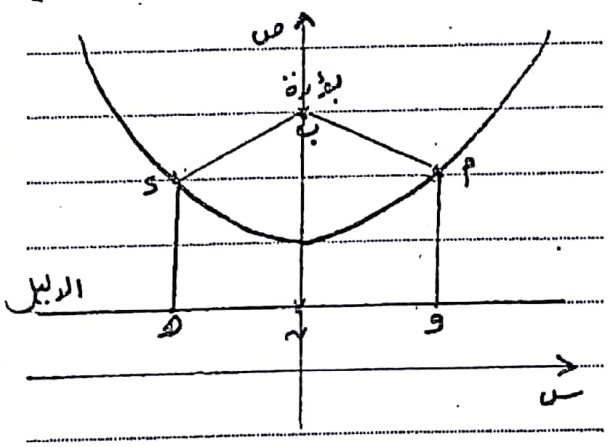
$ك ر = \sqrt{٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤١} = ر و$

∴ المحيط $= ٢ \times ٥ + ٢ \times \sqrt{٤١}$

$= ١٠ + ٢\sqrt{٤١}$

٣٠) من الشكل المجاور أ، ب فتحتان في المكافئ حيث أ $(\sqrt{٣}, ٥, ٢)$ ، ب $(-\sqrt{٣}, ٥, ٢)$ معادلة المكافئ $س^2 = ٤(ص-٢)$

جد ١) محيط الخماسي ٢) مساحة الخماسي



الحل

الرأس (٠,٠) البؤرة (٠,٢)

الدليل ص = -١

أ و = أ ب من تعريف المكافئ

كذلك ب د = د هـ من التعريف

أ و = ٢,٥ - (-١) = ٣,٥

∴ أ و = أ ب = ٣,٥ كذلك د هـ = ب د = ١,٥

هـ و = $\sqrt{٣}$ ، ن هـ = ن و = $\sqrt{٣}$

مساحة المخمس = ٢ × مساحة أ ب د ر

م = $٢ \times \frac{١}{٢} \times ٤ (٣ + ٥)$ (ب)

م = $(٤)(٣+٥) = ٣٢$ وحدة مربعة

١) المحيط = $١٠ + ١٠ + ١٠ + ١٠ + \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$

$= ٦٠ + ٢\sqrt{٢}$

٢) مساحة نصف $\frac{١}{٢}$ دائرة $= \frac{١}{٢} \times \pi \times ٥^٢ = \frac{٢٥\pi}{٢}$

مساحة المستطيل $= (١٠ - \sqrt{٢})(٥ - ٠)$

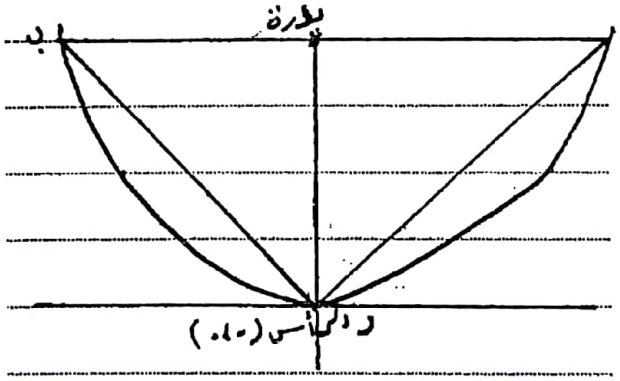
$= ٥٠ - ٥\sqrt{٢}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ١$

مساحة الشبه $= \frac{٢٥\pi}{٢} + ٥٠ - ٥\sqrt{٢} + ١$

$= ٣٠,٥ \sqrt{٢}$

٣) من الشكل التالي
اذا علمت أن مساحة المثلث $= ٤$ وحدة مربعة
جد معادلة المكافئ



الحل :

معادلة القطع $س^٢ = ٤ جـ ص$

الارتفاع $= جـ$

طول القاعدة $= ٢ل$

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٢ل \times جـ = ٤$

$\therefore جـ ل = ٤ \quad ---- (١)$

النقطة $م (ل ، جـ)$ تقع على القطع

$ل^٢ = ٤ \times جـ \times جـ \quad ---- (٢)$

من (١) $ل = \frac{٤}{جـ}$

$\leftarrow (\frac{٤}{جـ})^٢ = ٤ جـ^٢$

$\therefore جـ^٤ = ٤ \leftarrow جـ^٢ = ٢ \leftarrow جـ = \sqrt{٢}$

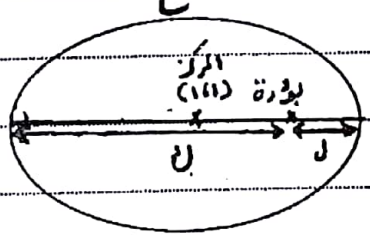
$\therefore$ المعادلة $س^٢ = ٤\sqrt{٢} ص$

(الدورة الشتوية ٢٠١٣)

٤) من الشكل المجاور اذا كان

$\frac{ل}{ك} = \frac{١}{٥}$ ، وطول المحور الأصغر $= ٤\sqrt{٥}$

جد معادلة القطع



Scanned by CamScanner

الحل

$\frac{م-جـ}{م+جـ} = \frac{1}{5} \leftarrow 5م-5جـ = م+جـ$

$4م = 6جـ = 0$ (بالقسمة على 2) $\leftarrow$ $\boxed{2م = 3جـ}$

$2ب = 4\sqrt{5} \leftarrow ب = 2\sqrt{5}$

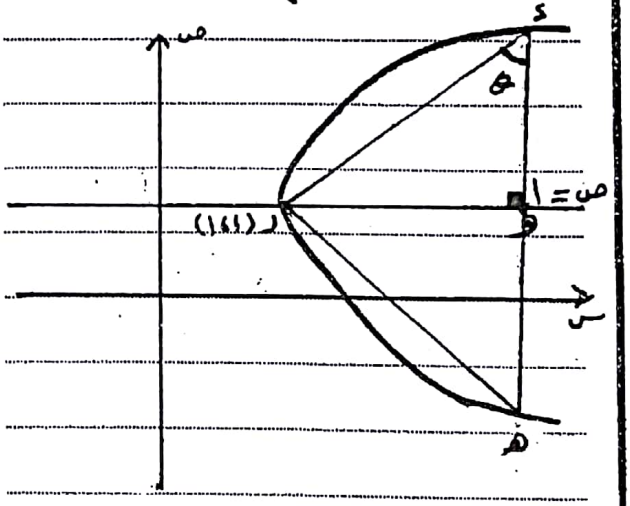
$جـ^2 = م^2 - ب^2$

$(\frac{2}{3}م)^2 = م^2 - 20 \leftarrow \frac{5}{9}م^2 = 20$

$م^2 = \frac{9}{5} \times 20 = 36 \leftarrow م = 6$

المعادلة $\frac{(س-1)^2}{36} + \frac{(ص-1)^2}{20} = 1$

(٣٣) من الشكل المعادلة الديكارتية هيث مساحة $\triangle$ دره = ١ وأن ظا$\theta = \frac{1}{2}$



الحل :-

دو = ل = رهـ

ور = لع

مساحة $\triangle$ دره = $\frac{1}{2} \times$ ٢ل $\times$ لع = ١

ل $\times$ لع = ١ ... ①

ظا$\theta = \frac{لع}{ل} = \frac{1}{2} \leftarrow$ ل = ٢لع ... ②

بالتعويض في ① ٢لع $\times$ لع = ١ $\leftarrow$ لع$^2 = \frac{1}{2}$

لع = $\frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow$ ل = $\sqrt{2}$

المعادلة $(ص-1)^2 = 4جـ(س-1)$

ء $(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}، 1 + \sqrt{2})$ تحقق المعادلة

$(1 + \sqrt{2} - 1)^2 = 4جـ(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1)$

$2 = \frac{4}{\sqrt{2}}جـ$

$جـ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

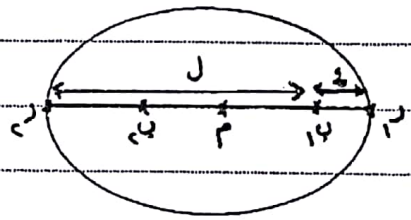
$\therefore$ المعادلة $(ص-1)^2 = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(س-1)$

$(ص-1)^2 = 2\sqrt{2}(س-1)$

Scanned by CamScanner

(تدريب للطالب)

٣٤) يمثل الشكل المجاور قطع ناقص بؤرتاه ب، ب'
اذا علمت أن ل ب ب' = ع
ب، ل = ل حيث مساحة الناقص حيث
ع × ل = ثلاثة أمثال طول محوره الأصغر
واختلافه المركزي $\frac{٤}{٥}$



الحل

$(٩-جـ^٢)(٩+جـ^٢) = ٣ \times ٢ \times ب$

$٩ - جـ^٢ = ٦ ب$

$ب^٢ - ٦ب = ٠ \leftarrow ب = ٠ ، ب = ٦$

$\therefore ب = ٦$

$\frac{جـ}{٩} = \frac{٤}{٥} \leftarrow جـ = \frac{٤}{٥} ٩$

$جـ^٢ = ٩^٢ - ب^٢ \leftarrow \frac{١٦}{٢٥} ٩^٢ = ٩^٢ - ٣٦$

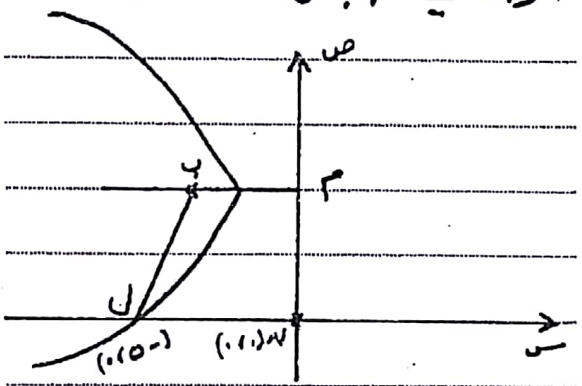
$٣٦ = \frac{٩}{٢٥} ٩^٢$ جذر

$٦ = ٩ \frac{٣}{٥} \leftarrow ٩ = ٦ \times \frac{٥}{٣} = ١٠$

$جـ = \frac{٤}{٥} \times ١٠ = ٨$

المساحة $= \pi ٩ ب = ٦٠ \pi$

٣٥) يمثل الشكل المجاور مكافئاً بؤرتاه ب، ب' دليله محور الصادات جد معادلته علماً بأن محيط المثلث ب م ب' ل = ١٦ وحدة



الحل

$م ب = ٤$

$م ب = ٢ جـ$ (لأنه بؤرة الدليل)

$ب ل = ٥$ (حسب التعريف)

$م ل = ٥$

المحيط $= ١٠ + ٤ + ٢ جـ = ١٦$

$٤ + ٢ جـ = ٦ \quad ---(١)$

رأس المكافئ $(-جـ، ٤)$

$(ص - ٤)^٢ = -٤ جـ (س + جـ)$

يمر $(-٥، ٠) \leftarrow ٤^٢ = -٤ جـ (-٥ + جـ)$

⑥ ----

Scanned by CamScanner

ع = ٦ − ٢ جـ نعوض بـ ع

(٦ − ٢جـ)² = ٤جـ − ٤جـ²

٣٦ − ٢٤جـ + ٤جـ² = ٤جـ − ٤جـ²

٨جـ² − ٤٤جـ + ٣٦ = ٠ (÷ ٤)

٢جـ² − ١١جـ + ٩ = ٠

(٢جـ − ٩)(جـ − ١) = ٠

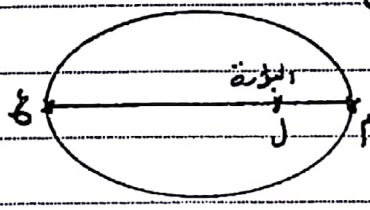
جـ = ٩/٢ ← ع = −٣ مرفوض

جـ = ١ ← ع = ٤

∴ المعادلة (ص − ٤)² = −٤(س + ١)

خامساً: الاختلاف المركزي

٣٦) من الشكل المجاور اذا علمت أن $\frac{2l}{4l} = \frac{2}{5}$ فجد الاختلاف المركزي



الحل

$\frac{م - جـ}{م + جـ} = \frac{2}{5}$ ← ٣م + ٣جـ = ٥م − ٥جـ

٣م = ٨جـ ← $\frac{جـ}{م} = \frac{3}{8}$

٣٧) جد معادلة القطع الزائد

٩هـ² س² − ٢٥ص² = ٢٢٥ حيث هـ الاختلاف المركزي للزائد جد طول القاطع

الحل

÷ ٢٢٥ ← $\frac{٩هـ^2 س^2}{٢٢٥} - \frac{٢٥ ص^2}{٢٢٥} = ١$

$\frac{س^2}{\frac{٢٥}{هـ^2}} - \frac{ص^2}{٩} = ١$

$م^2 = \frac{٢٥}{هـ^2}$ ← $م^2 = \frac{٢٥}{\frac{جـ^2}{م^2}}$

جـ² = ٢٥

ب² = ٩

جـ² = م² + ب² ← ٢٥ = م² + ٩

∴ م² = ١٦ ← م = ٤

طول القاطع = ٨

٣٨) اذا علمت أن الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ (ب² < ٩)

هو هـ١

وللقطع $\frac{س^2}{٨٠} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

هو هـ٢

وكان هـ١ × هـ٢ = ١ جد ب²

الحل

$هـ_1^2 = \frac{جـ^2}{م^2} = \frac{٩ - ب^2}{٩}$

$هـ_2^2 = \frac{جـ^2}{م^2} = \frac{٨ + ب^2}{٨}$

Scanned by CamScanner

$هـ_1 \times هـ_2 = 1$ (ربع المنبه)

$هـ_1^2 \times هـ_2^2 = 1$

$\frac{9 - ب^2}{9} \times \frac{8 + ب^2}{8} = 1$

$72 + 9ب^2 - 8ب^2 - ب^4 = 72$

$ب^2 - ب^4 = 0 \leftarrow ب^2(1 - ب^2) = 0$

$ب = 0$ ، $ب^2 = 1$

٣٩) جد الاختلاف المركزي للقطع الزائد حيث بعد البؤري = ٣ أمثال طول المرافد

الحل

$2جـ = 3 \times 2ب$

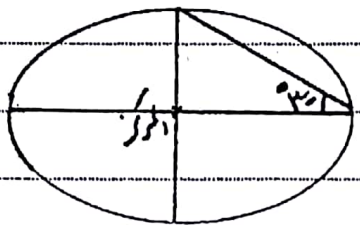
$\therefore ب = \frac{جـ}{3}$

$جـ^2 = م^2 + ب^2 \leftarrow جـ^2 = م^2 + \frac{جـ^2}{9}$

$\frac{8}{9} جـ^2 = م^2 \leftarrow \frac{جـ^2}{م^2} = \frac{9}{8}$

$\therefore \frac{جـ}{م} = \frac{3}{\sqrt{8}}$

٤٠) من الشكل التالي جد الاختلاف المركزي



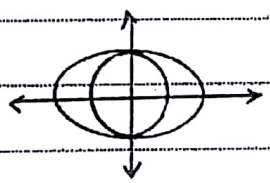
الحل $\tan 30° = \frac{ب}{م}$

$\therefore ب = م \frac{1}{\sqrt{3}}$

$جـ^2 = م^2 - ب^2 \leftarrow جـ^2 = م^2 - \frac{1}{3} م^2$

$جـ^2 = \frac{2}{3} م^2 \leftarrow \frac{جـ}{م} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

٤١) من الشكل التالي جد الاختلاف المركزي حيث مساحة النافذة = ٤ أمثال مساحة الدائرة



الحل

$\pi م ب = 4 \pi ر^2$ لكن $ر = ب$

$م ب = 4 ب^2 \leftarrow ب = \frac{م}{4}$

$جـ^2 = م^2 - \frac{م^2}{16} \leftarrow \frac{15}{16} م^2 = جـ^2$

$\frac{جـ}{م} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Scanned by CamScanner

سادساً : المحل الهندسي

٤١) جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة ن(س، ص) والتي بقوم المطلة بينها وبين (٢، ٠) ، (٨، ٠) يساوي ٤

الحل

هذا تعريف القطع الزائد

حيث بؤرتاه صا (٢، ٠) ، (٨، ٠)

٢ب (طول القاطع) = ٤ ← ب = ٢

٢ جـ = ٨ ← جـ = ٣

جـ٢ = ب٢ + ء٢ ← ٩ = ٤ + ء٢

ء٢ = ٥ المركز (٥، ٠) صدر ب

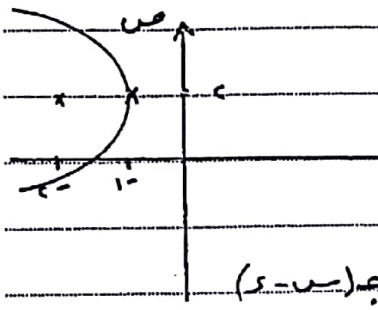
$$\frac{(\text{ص}-٥)^{٢}}{٤} - \frac{(\text{س}-٥)^{٢}}{٥} = ١$$

٤٢) جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة ن(س، ص) والتي بعدها عن محور الصادات يساوي بعدها عن (-٢، ٢)

الحل هذا تعريف المكافئ

البؤرة (-٢، ٢) الدليل س = ٠

الرأس $\left(\frac{-٢+٠}{٢}, ٢\right) = (-١، ٢)$



(ص - هـ)٢ = -٤ جـ (س - ء)

(ص - ٢)٢ = -٤ جـ (س + ١)

جـ = -١ - -٢ = ١

(ص - ٢)٢ = -٤ (س + ١)

٤٤) جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة ن(س، ص) بحيث بعدها عن المستقيم س = ٩ يساوي ٣ أمثال بعدها عن (١، ٠)

الحل

ف١ : بعد ن(س، ص) عن المستقيم س - ٩ = ٠

ف٢ : بعد ن(س، ص) عن (١، ٠)

ف١ = ٣ ف٢

$$\frac{|\text{س} - ١٩|}{\sqrt{١٧^{٢} + ١٠^{٢}}} = ٣ \sqrt{(\text{س}-١)^{٢} + (\text{ص}-٠)^{٢}}$$

نربع الطرفين ←

س٢ - ١٨ س + ٨١ = ٩ (س٢ - ٢ س + ١ + ص٢)

٨ س٢ + ٩ ص٢ - ٦٤ = ٠

(ناقص)

Scanned by CamScanner

٤٥) جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة بحيث أن بعدها عن المستقيم س = ١ يساوي ضعف بعدها عن المستقيم ص = ٢

الحل نفرض أن

ف: بُعد النقطة المجهولة ن(س، ص) عن س = ١

ف: بُعد النقطة المجهولة ن(س، ص) عن ص = ٢

ف = ٢ ف

$$\frac{|س-١|}{\sqrt{١+٠}} = ٢ \frac{|ص-٢|}{\sqrt{١+٠}}$$

|س - ١| = ٢|ص - ٢|

س - ١ = ٢(ص - ٢)

س - ٢ص - ٣ = ٠ معادلة مستقيم

أو س - ١ = -٢(ص - ٢)

س - ١ = -٢ص + ٤

٢ص + س - ٥ = ٠ معادلة مستقيم

الحل:

ف١: بُعد ن(س، ص) عن س = ٠

ف٢: بُعد ن(س، ص) عن ص = ٠

ف١ = ٣ ف٢

$$\frac{|س-١|}{\sqrt{١+٠}} = ٣ \frac{|ص-١|}{\sqrt{١+٠}}$$

|س - ١| = ٣|ص - ١|

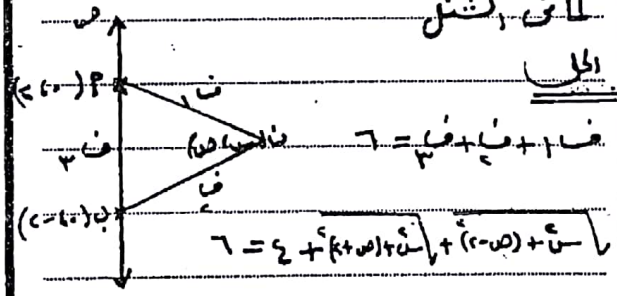
إما س = ٣ص - ٣ ← س - ٣ص + ٢ = ٠

أو س = -٣ص + ٣ ← ٣ص + س - ٤ = ٠

من كلا الحالتين معادلة مستقيم

٤٦) جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة بحيث أن بعدها عن محور الصادات يساوي ٣ أمثال بعدها عن محور السينات

٤٧) جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط ن(س، ص) حيث ٢ ب ن تشكل مع رؤوس مثلث محيطه = ٦ كما في الشكل



الحل

ف١ + ف٢ + ف٣ = ٦

$$\sqrt{س^٢ + (ص-٢)^٢} + \sqrt{س^٢ + (ص+٢)^٢} + ٤ = ٦$$

$$\sqrt{س^٢ + ص^٢ - ٤ص + ٤} = ٢ - \sqrt{س^٢ + ص^٢ + ٤ص + ٤}$$ بتربيع

$$س^٢ + ص^٢ - ٤ص + ٤ = ٤ - ٤\sqrt{س^٢ + ص^٢ + ٤ص + ٤} + س^٢ + ص^٢ + ٤ص + ٤$$

$$-٨ص - ٤ = -٤\sqrt{س^٢ + ص^٢ + ٤ص + ٤}$$

(نقسم على -٤)

Scanned by CamScanner

نقسم على ٤

$2ص + 1 = \sqrt{س^2 + ص^2 + 2ص + 4}$

$4ص^2 + 4ص + 1 = س^2 + ص^2 + 2ص + 4$

$س^2 - 3ص^2 + 3 = 0$ (قطع زائد)

٤٨) حدد نوع الحركة في المعادلات

١) $ص = جتا2ن$ ، $س + 1 = 3جان$

الكل ...

$ص = 1 - 2جا^2ن$

كمان $جان = \frac{1}{3}(س + 1)$

$ص = 1 - 2(\frac{1}{9}(س + 1)^2)$

$ص - 1 = -\frac{2}{9}(س + 1)^2$ مكافئ

٢) $س = ظتان + 1$ ، $2ص - 1 = ظتان$

الكل $ظتان = س - 1$ ، $ظتان = 2ص - 1$

$ظتا^2ن - ظتا^2ن = 1$

$(س - 1)^2 - (2ص - 1)^2 = 1$ زائد

٣) $س = جان - جتان$ ، $ص = \sqrt{جان جتان}$

الكل تربيع $س$

$س^2 = جا^2ن - 2جان جتان + جتا^2ن$

$س^2 = 1 - جا2ن$

تربيع $ص$

$ص^2 = جان جتان$

$ص^2 = \frac{1}{2}جا2ن$ ← $جا2ن = 2ص^2$

$\therefore س^2 = 1 - 2ص^2$ ← $س^2 + 2ص^2 = 1$

(ناقص)

٤) $س = جان - جتان$ ، $ص = جان + جتان$

الكل تربيع المعادلات

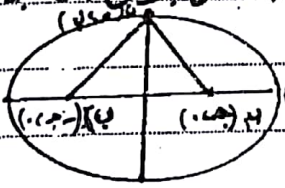
$س^2 = 1 - جا2ن$

$ص^2 = 1 + جا2ن$ +

$س^2 + ص^2 = 2$ (دائرة)

٤٩) في القطع الناقص برهن أن $جـ^2 = م^2 - ب^2$

البرهان



المثلث

ن ١ ، ب ، مثلث قائم الزاوية

ن ١ = ن ب = م والوتر يعامد

نضعه منطبقا على $س$

$ب^2 + جـ^2 = م^2$ ← $جـ^2 = م^2 - ب^2$ ✱

Scanned by CamScanner

تدريبات ـــــ (١)

١) $\int (\text{جاس جتاس})^4 \, \text{د}س$

$= \int (\frac{1}{2} \text{جا}2س)^4 \, \text{د}س$

$= \frac{1}{16} \int (\frac{1}{2}(1 - \text{جتا}4س))^2 \, \text{د}س$

$= \frac{1}{64} \int (1 - 2\text{جتا}4س + \text{جتا}^2 4س) \, \text{د}س$

$= \frac{1}{64} \int (1 - 2\text{جتا}4س + \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}8س)) \, \text{د}س$

$= \frac{1}{64}(س - \frac{2}{4}\text{جا}4س + \frac{1}{2}(س + \frac{1}{8}\text{جا}8س)) + ج$

٢) $\int (\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س)(\text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س) \, \text{د}س$

$= \int \text{جتا}2س \, \text{د}س = \frac{1}{2}\text{جا}2س + ج$

٣) $\int \frac{1}{\text{قتا}س - 1} \times \frac{\text{قتا}س + 1}{\text{قتا}س + 1} \, \text{د}س$

$= \int \frac{\text{قتا}س + 1}{\text{ظا}^2 س} \, \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}^2 س} \times (\frac{1}{\text{جا}س} + 1) \, \text{د}س$

$= \int (\text{قاس ظاس} + (\text{قا}^2 س - 1)) \, \text{د}س$

$= \text{قاس} + \text{ظاس} - س + ج$

٤) $\int \frac{\text{جتا}3س}{\text{جتا}س} \, \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جتا}(2س + س)}{\text{جتا}س} \, \text{د}س$

$= \int \frac{\text{جتا}2س \text{جتا}س - \text{جا}2س \text{جا}س}{\text{جتا}س} \, \text{د}س$

$= \int \text{جتا}2س \, \text{د}س - \int \frac{2\text{جا}س \text{جتا}س}{\text{جتا}س} \, \text{د}س$

$= \frac{\text{جا}2س}{2} - \int (1 - \text{جتا}2س) \, \text{د}س$

$= \frac{\text{جا}2س}{2} + \frac{\text{جا}2س}{2} - س + ج = \text{جا}2س - س + ج$

٥) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س + 2\text{جاس جتاس}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{د}س$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|\text{جاس} + \text{جتاس}|}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{د}س = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1 \, \text{د}س + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -1 \, \text{د}س$

$= \text{صفر}$

٦) $\int \frac{\frac{1}{2}(\text{جا}4س + \text{جا}2س)}{\text{جتا}2س - س} \, \text{د}س$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2\text{جا}3س \text{جتا}س}{\text{جتا}2س} \, \text{د}س - \frac{1}{2}\text{لو}|\text{جتا}2س| + ج$

$= -\frac{\text{جتا}3س}{2} - \frac{1}{4}\text{لو}|\text{جتا}2س| + ج$

٧) $\int \frac{س(\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س)}{\sqrt[3]{س}} \, \text{د}س = \int س^{\frac{2}{3}} \, \text{د}س$

$= \frac{3}{5} س^{\frac{5}{3}} + ج$

٨) نكتب $1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$$= \int \frac{\tan s + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan s}\, ds$$

$$= \int \tan(s + \frac{\pi}{4})\, ds = \ln|\sec(s+\frac{\pi}{4})| + c$$

---

٩) $$\int \frac{(\sin s + \cos s)(\sin s + \cos s)}{\frac{1}{2}(\sin s \cos s)}\, ds$$

$$= -2\left(\frac{\cos^7 s}{7} + \cos s\right) + c$$

تدريبات (٢)

١) $$\int \frac{ds}{s^2 + 6s + 5} \times \frac{s^{-1}}{s^{-1}}$$

$$= \int \frac{s^{-1}\, ds}{s^2 + 5s + 6}$$ تكسير جزئيا

$$\frac{s^{-1}}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$s^{-1} = A(s+3) + B(s+2)$$

$s = -2 \Rightarrow -3 = A$

$s = -3 \Rightarrow -4 = -B \Rightarrow B = 4$

$$= -3\ln|s+2| + 4\ln|s+3| + c$$

---

٢) نضع $u = \ln(s)$

$du = \frac{1}{s}\, ds \Rightarrow ds = s\, du$

$dv = s^{-2}\, ds \Rightarrow v = -s^{-1}$

$$= -\ln(s)\, s^{-1} + \int s^{-1} \cdot \frac{1}{s}\, ds$$

$$= -\ln(s)\, s^{-1} - s^{-1} + c$$

---

٣) $$\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$$

$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - 0 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

---

٤) $y = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

$dx = -2\sqrt{x}\, dy$

$$\int \frac{-2\sqrt{x}}{y^3}\, dy$$

$$= -2\int \frac{1-y}{y^{\frac{3}{2}}}\, dy$$

$$= -2\left(-2y^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right) + c$$ نرجع لـ y

٥) $\int$ س جاس جتاس دس

$= \int \frac{1}{2}$ س جا٢س دس

ف = $\frac{1}{2}$س ⟵ دف = $\frac{1}{2}$ دس

دهـ = جا٢س دس ⟵ هـ = $\frac{-\text{جتا}2س}{2}$

$= -\frac{1}{4}$ س جتا٢س + $\frac{\text{جا}2س}{8}$ + جـ

٦) $\int$ قاس^4 س ظاس دس

الحل ص = ظاس ⟵ دس = $\frac{دص}{قاس^2 س}$

$\int$ قاس^4 س ص $\frac{دص}{قاس^2 س}$

$= \int$ (١ + ص^2) ص^2 دص

ف = ص^2 ⟵ دف = $\frac{دص}{ص}$

دهـ = (١ + ص^2) دص ⟵ هـ = ص + $\frac{ص^3}{3}$

$= ص^2 (ص + \frac{ص^3}{3}) - \int (ص + \frac{ص^3}{3}) \times 2ص$ دص

$= ص^2 (ص + \frac{ص^3}{3}) - \int (2ص^2 + \frac{2ص^4}{3})$ دص

$= ص^2 (ص + \frac{ص^3}{3}) - \frac{2ص^3}{3} - \frac{4ص^5}{15} + جـ$

٧) ق) ص = ٣س + ٢ ⟵ دس = $\frac{دص}{3}$

-١ ⟵ -١

١ ⟵ ٥

$\int_{-1}^{5}$ ف(ص) $\frac{دص}{3} = \frac{2}{3} \int_{-1}^{5}$ ص دص

$= \frac{1}{3} [ص^2]_{-1}^{5} = 8$

ب) ص = جاس ⟵ دس = $\frac{دص}{\text{جتاس}}$

٠ ⟵ ٠

$\frac{\pi}{2}$ ⟵ ١

$\int_{0}^{1}$ ٢جاس جتاس ف(ص) $\frac{دص}{\text{جتاس}}$

$= \int_{0}^{1}$ ٢ص ف(ص) دص

ف = ٢ص ⟵ دف = ٢ دص

دهـ = ف(ص) دص ⟵ هـ = ف(ص)

$= 2ص ف(ص) \Big]_0^1 - 2 \int_0^1 ف(ص) دص$

$= 2 \times 1 \times 2 - 2 \int_0^1 2ص$ دص

$= 4 - 2ص^2 \Big]_0^1 = 2$

٨) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}(قاس^2 س - 1)}$ دس

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس} \, ظاس^2 س}$ دس ← الأول (+)

ص = جتاس ⟵ دس = $\frac{دص}{-\text{جاس}}$

$\int_{1}^{0} ص \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{دص}{-\text{جاس}}$

$= \int_{0}^{1} \frac{ص^2}{ص} دص = 2ص^{\frac{1}{2}} \Big]_0^1 = 2$

Scanned by CamScanner

٩) $ص = \sqrt{هـ^{س}+1} \Leftarrow ص^{٢} = هـ^{س}+1$

$٢ص\,د ص = هـ^{س}\,د س \Leftarrow د س = \frac{٢ص\,د ص}{هـ^{س}}$

$\int ص \times \frac{٢ص\,د ص}{ص^{٢}-1} = \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-1}\,د ص$

فوق طويلة $\Leftarrow \int ٢ + \frac{٢}{ص^{٢}-1}\,د ص$

$\frac{٢}{(ص-1)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1}$

$٢ = أ(ص+1) + ب(ص-1)$

$ص = 1 \Leftarrow ٢ = ٢أ \Leftarrow أ = 1$

$ص = -1 \Leftarrow ٢ = -٢ب \Leftarrow ب = -1$

$= ٢ص + لو_{هـ}|ص-1| - لو_{هـ}|ص+1| + جـ$

١٠) $\int \frac{1}{٢} جا س$ لو$_{هـ}$ جتا س $د س$

$ص = جتا س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{-جا س}$

$\frac{1}{٢}\int \cancel{جا س} جتا س$ لو$_{هـ}$ ص $\frac{د ص}{-\cancel{جا س}}$

$= \int -ص$ لو$_{هـ}$ ص $د ص$ أجزاء

$ع = -لو_{هـ}ص \longrightarrow د ع = \frac{-1}{ص} د ص$

$د هـ = ص\,د ص \longrightarrow هـ = \frac{ص^{٢}}{٢}$

$= -\frac{1}{٢}ص^{٢}$ لو$_{هـ}$ ص $+ \frac{1}{٤}ص^{٢} + جـ$

نجمع ص

١١) $ص = ظتا س + ظا س$

$د س = \frac{د ص}{-ظتا س ظتا س - ظتا س قتا س + قتا س قتا س} = \frac{د ص}{قتا س(قتا س - ظتا س)}$

$\int ص^{٦} \times \cancel{ظتا س} \times \frac{د ص}{-\cancel{ظتا س} \times هـ^{ص}}$

$= -\frac{ص^{٧}}{٧} + جـ$ نجمع ص

١٢) $\int_{١}^{\infty} \frac{(س-1)^{\frac{ن}{٢}}}{س^{ن+٢}}\,د س$

$= \int_{١}^{\infty} \frac{(١-س)^{ن}}{س^{ن+٢}}\,د س$

$= \int_{١}^{\infty} \frac{(١-س)^{ن}}{س^{ن}} \times \frac{١}{س^{٢}}\,د س$

$= \int_{١}^{\infty} \left(\frac{س-1}{س}\right)^{ن} \times س^{-٢}\,د س$

$ص = \frac{س-1}{س} \Leftarrow د س = \frac{د ص}{(١-ص)^{٢}}$

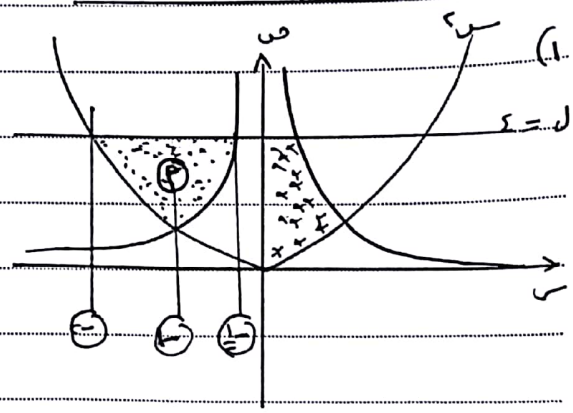
$\frac{١}{٢} \longrightarrow ١ \qquad ١ \longrightarrow ٠$

$= \int_{٠}^{١} ص^{ن} \times \cancel{(١-ص)^{٢}} \times \frac{د ص}{\cancel{(١-ص)^{٢}}} = \int_{٠}^{١} ص^{ن}\,د ص$

$= \left[\frac{ص^{ن+١}}{ن+١}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{ن+١}$ #

تدريبات (٣)

١)



$\frac{1}{س^2} = ٤ \leftarrow س = \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{س^2} = س^2 \leftarrow س = ١$

$س^2 = ٤ \leftarrow س = ٢$

$$م = \int_{-2}^{-1} (٤ - س^2)\, د س + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (٤ - \frac{1}{س^2})\, د س$$

$$= ٤ - \left[\frac{س^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + ٢ + \left[س + \frac{1}{س}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= ٤ - \frac{1}{3}(-1+8) + 2 + (-2+1)$$

$$= ٥ - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$ وحدة مربعة

ب) $$م = \int_{0}^{1} (٤ - س^2)\, د س + \int_{1}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{س^2} - س^2)\, د س$$

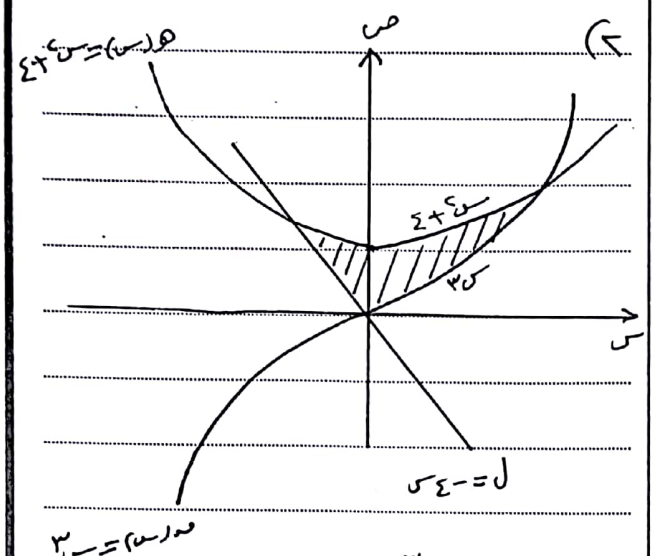
$$= ٢ \left[\frac{س^3}{3}\right]_{0}^{1} + \left[-\frac{1}{س}\right]_{1}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{س^3}{3}\right]_{1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= ٢ - \frac{1}{3}(\frac{1}{8} - 0) - (1-2) - \frac{1}{3}(\frac{1}{8} - 1)$$

$$= ٣ - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{8}{3}$$ وحدة مربعة

٢)



$س^3 = س^2 + ٤$

$س^3 - س^2 - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$-٤ - س = س^2 + ٤$

$س^2 + ٤س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

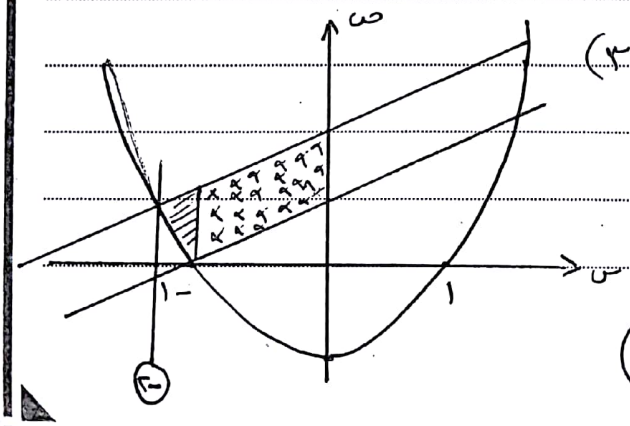
$$م = \int_{-2}^{2} [(س^2 + ٤) + ٤س]\, د س + \int_{2}^{3} [س^3 - (س^2 + ٤)]\, د س$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} + ٢س^2\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{س^4}{4} - \frac{س^3}{3} - ٤س\right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{8}{3} + (٨ - ٨) + \frac{81}{4} - ٩ - ١٢ + \frac{16}{3} + ٨$$

$$= \frac{16}{3} + ٤ = \frac{28}{3}$$ وحدة مربعة

٣)



$س^2 - 1 = س + 5 \Leftarrow س^2 - س - 6 = 0$

$(س - 3)(س + 2) = 0$

$س = 3 ، س = -2$

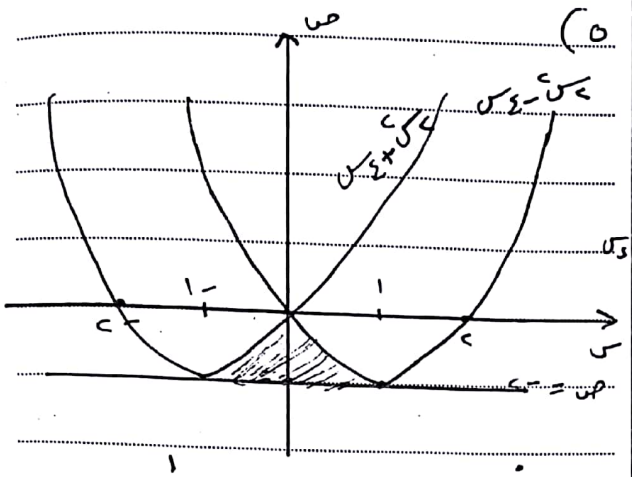
$م = \int_{-2}^{1} (س + 5) - (س^2 - 1)\, دس + \int_{1}^{3} (س + 5) - (1 - 1)\, دس$

$= 6 + \frac{4}{3} \Big]_{-2}^{1} - \frac{س^3}{3} + 4س \Big]_{1}^{3} - \frac{4}{3}$

$= 10 + \frac{-3}{3} - \frac{1}{3}(-1 - -8)$

$= \frac{60 - 9 - 14}{6} = \frac{37}{6}$ وحدة مربعة

٥)

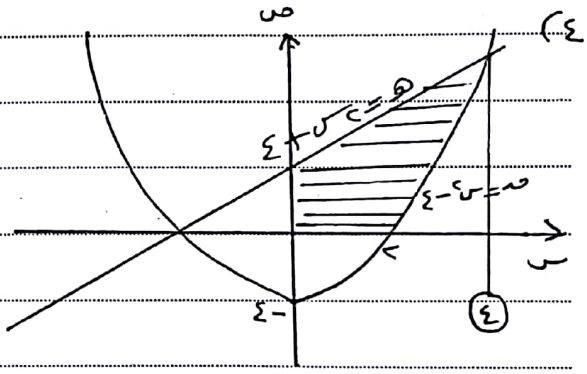


$م = \int_{-2}^{0} (س^2 + 4س + 4) - (س^2 - 4س)\, دس + \int_{0}^{1} (4س - س^2) - (س^2 - 4س)\, دس$

$= \frac{2س^3}{3} \Big]_{-2}^{0} + 4 \Big]_{-2}^{0} + \frac{4س^2}{2} \Big]_{0}^{1} - \frac{2س^3}{3} \Big]_{0}^{1} + 4$

$= \frac{4}{3} + 2 + \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$ وحدة مربعة

٤)



$س^2 - 4 = 4س + 4 \Leftarrow س^2 - 4س - 8 = 0$

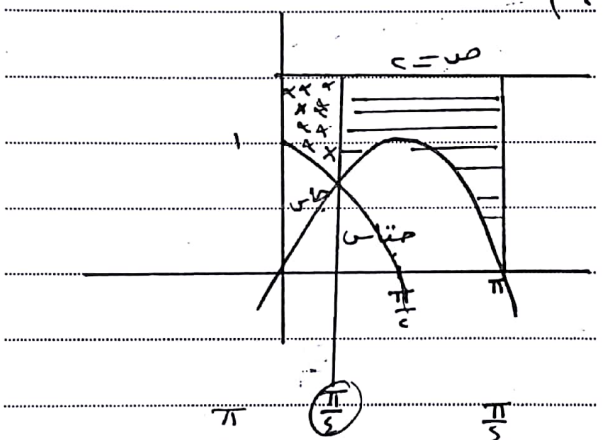
$(س - 4)(س + 2) = 0 \Leftarrow س = 4$

$م = \int_{-2}^{4} 4س + 4 - 0 - س^2 + 4س\, دس$

$= 8 + 8 + 12 + 8 - \frac{س^3}{3} \Big]_{-2}^{4}$

$= 40 - \frac{56}{3} = \frac{64}{3}$ وحدة مربعة

٦)



$م = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - جتاس) - (جاس - جتاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2 - جاس)\, دس$

$= 2س - جاس \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 2س + جتاس \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \pi - 1 - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (-2 - \pi + 0) + (-1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \pi - 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \pi - 1 - \sqrt{2}$ وحدة مربعة

Scanned by CamScanner

٧) ج

تدريبات .. (٤)

١) $\frac{دع}{دن} = \frac{١}{ع^{٢}} \Leftarrow ع \, دع = -\frac{١}{٢} \, دن$

تكامل $\Leftarrow \frac{ع^{٢}}{٢} = -\frac{١}{٢} ن + جـ$

$ع(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = ٠$

$ع^{٢} = ٤ ن \Leftarrow |ع| = ٢ ن^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دف}{دن} = ٧ \times ٢ ن^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow دف = ٧ ن^{\frac{١}{٢}} \, دن$

$ف(ن) = ٧ \times ٢ \times \frac{٢}{٣} ن^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$ف(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = صفر$

$\frac{٨}{٣} = ٧ \times \frac{٢}{٣} (٢)^{\frac{٣}{٢}}$

$٨ = ٢ \times \frac{٤}{٣} ٢^{\frac{٣}{٢}} \Leftarrow \boxed{٢ = ٢}$

٢) $\frac{دع}{دن} = ع \Leftarrow \frac{دع}{ع} = دن$

$\int \frac{دع}{ع} = \int دن$

$\ln|ع| = ن + جـ \quad ع(٠) = ٢$

$\ln ٢ = ٠ + جـ$

$ع = ٢ \, هـ^{(ن + \ln ٢)} = ٢ هـ^{ن}$

$ف = \int ٢ هـ^{ن} \, دن$

$ف(ن) = ٢ هـ^{ن} + جـ$

$ف(٠) = ٢ هـ^{٠} + جـ \Leftarrow جـ = ١$

$\therefore ف(ن) = ٢ هـ^{ن} + ١$

$ف(\ln ٣) = ٢ \times ٣ + ١ = ٧ م$

٣) $\frac{دص}{دس} = -ص \times هـ^{(س-١)}$

$\frac{دص}{ص} = -هـ^{س-١} دس$ تكامل

$\ln ص = -(-هـ^{س-١}) + جـ$

$ص = هـ^{س-١} + جـ$

$س = ١ ، ص = ٠$

$٠ = ١ + جـ \Leftarrow جـ = -١$

$ص = هـ^{س-١} - ١$

$هـ^{س-١} = ص + ١ \Leftarrow س - ١ = \ln(ص + ١)$

$ص = ١ - س$

Scanned by CamScanner