الدرس الثاني :

نظريات النهايات

ملاحظة : الأصل في النهاية التعويض إلا عند وجود ق(س) ، هـ(س) ، ل(س) ، م(س) يكون الحل بطريقة التوزيع

** نظريات النهايات

أولاً :

١) النظرية الأولى (الثابت)

نهـا جـ = جـ نهاية الثابت = الثابت نفسه
س ← أ

مثال : جد قيم النهايات الآتية

١) نهـا ٨ =
س ← ٥

٢) نهـا ٧ =
س ← ٩

٣) نهـا ١٥ =
س ← ٣

٤) نهـا -٨ =
س ← ٤

٥) نهـا -٦ =
س ← ٢

٦) نهـا -١٢ =
س ← ٣

٢) النظرية الثانية (التعويض)

نهـا (س) = نعوض مكان كل س (أ)
س ← أ

مثال : جد قيم النهايات الآتية

١) نهـا (٣س - ١)
س ← ١

٢) نهـا (٤س + ٢)
س ← ٢

٣) نهـا (٧ - ٣س)
س ← ٣

٤) نهـا ٣٤
س ← ١/٢

٥) نهـا (٣س + ١)
س ← ١/٣

٦) نهـا (س٢ - ٤)
س ← ٢

٧) نهـا (٣ - س٤)
س ← ٢

Scanned by CamScanner

) نهـا ٢س - ١
س ← ٥

) نهـا ٤س - ٤
س ← ٣

) نهـا (٣س٤ + ١)
س ← ٢

نهـا (س٤ - س)
س ← ١

) نهـا (٢س٤ - ١)
س ← ٢

) نهـا (٣س٤ - ٥س)
س ← ٢

) نهـا (٤س٤ - ٢)
س ← $\frac{١}{٢}$

١٥) نهـا (٩س٤ - ١)
س ← $\frac{١}{٣}$

١٦) نهـا (٢س - ٥)٢
س ← ٢

١٧) نهـا س٤ (س - ١)
س ← ٢

١٨) نهـا س٤ - ٤س + ٥
س ← ٢

١٩) نهـا $\frac{س٤ - ٩}{٧ - س٢}$
س ← ٥

٢٠) نهـا $\frac{س٤ - ٤}{٥ + س}$
س ← ٢

Scanned by CamScanner

٢١) نهـا (٣س + ٥)
س ← -٢

٢٢) نهـا (٣س٢ - ٣)
س ← -١

٢٣) نهـا (٥ - ٢س٣)
س ← -٢

٢٤) نهـا (س٤ + ٩)
س ← -٣

٢٥) نهـا (٩ - س٤)
س ← -٣

٢٦) نهـا (س٤ - ٣)
س ← -٤

٢٧) نهـا (٩ - ٢س٤)
س ← -١

٢٨) نهـا (٧ - ٥س٤)
س ← -٢

٢٩) نهـا (٧ - ٣س٢)
س ← -١

٣٠) نهـا (٤س - س٤)
س ← -٣

٣١) نهـا (٣س - ٣س٤)
س ← -٢

٣٢) نهـا (٥س٤ + ٣س)
س ← -١

Scanned by CamScanner

٣٣) نهـا (س^{٣} - س)
س ← -١

٣٤) نهـا (٢س^{٣} + ١)
س ← -٢

٣٥) نهـا ٢س^{٣} + س^{٢} - ١
س ← -١

٣٦) نهـا (٢س - ١)^{٣}
س ← -١

٣٧) نهـا (٣س + ١)^{٢}
س ← -١

٣٨) نهـا س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣٥ - ٧
س ← -١

٣٩) نهـا (س^{٤} - ٣س^{٢} - ٦س - ١٧)^{٥}
س ← -٢

٤٠) نهـا (س^{٤} - ٣س^{٢} - ٦س - ١٧)^{٦}
س ← -٢

Scanned by CamScanner

النظرية الثالثة

النهاية توزع على الجمع والطرح

الضرب والقسمة

① نعيد كتابة السؤال مع التوزيع

② يجب أن يكون الاقتران مجهز

③ نبدأ الحل

إذا كانت $\lim_{س \to ب} ق(س) = ل$ و $\lim_{س \to ب} هـ(س) = ك$

$$\lim_{س \to ب} (ق(س) + هـ(س))$$

$$= \lim_{س \to ب} ق(س) + \lim_{س \to ب} هـ(س) = ل + ك$$

$$\lim_{س \to ب} (ق(س) - هـ(س))$$

$$= \lim_{س \to ب} ق(س) - \lim_{س \to ب} هـ(س) = ل - ك$$

$$\lim_{س \to ب} (ق(س) \times هـ(س))$$

$$= \lim_{س \to ب} ق(س) \times \lim_{س \to ب} هـ(س) = ل \times ك$$

التجهيز

١) الثابت في الخارج

$$\lim_{س \to ب} جـ ق(س)$$

$$= جـ \times \lim_{س \to ب} ق(س)$$

٢) النهاية داخل الأسس

$$\lim_{س \to ب} (ق(س))^{؟}$$

$$= (\lim_{س \to ب} ق(س))^{؟}$$

٣) النهاية داخل الجذر

$$\lim_{س \to ب} \sqrt{ق(س)}$$

$$= \sqrt{\lim_{س \to ب} ق(س)}$$

مثال ① إذا علمت أن

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ٩$ و $\lim_{س \to ١} هـ(س) =$

فجد قيمة كل مما يأتي

١) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$

٢) $\lim_{س \to ١} ق(س) \times هـ(س)$

Scanned by CamScanner

مثال ① إذا علمت أن

نهـا ق(س) = ٥ ، نهـا هـ(س) = ٧
س←؟ س←؟

فجد

أ) نهـا (٤ ق(س) + هـ(س))
س←؟

ب) نهـا (؟ هـ(س) + ٣س؟)
س←؟

جـ) نهـا (س ق(س) + ٣ هـ(س))
س←؟

د) نهـا (√(٣؟ ق(س) - ؟) + (هـ(س))؟)
س←؟

هـ) نهـا ٣ ق(س) - ٣
س←؟ ٨ - ؟ هـ(س)

Scanned by CamScanner

مثال ③ : إذا كانت

نهـا ق(س) = ٥ ، نهـا هـ(س) = -٧
س←٢ س←٢

فجد نهـا (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٤ - ٣س)
س←٢

مثال ⑤ : إذا كانت

نهـا (٢ق(س) + ٣س) = ١١
س←٢

جد نهـا (ق(س))^٢
س←٢

مثال ⑥ : إذا كانت

نهـا ق(س) = ٨ ، نهـا هـ(س) = -٢
س←٥ س←٥

فجد نهـا (ق^٢(س) - ٢هـ(س) - س^٢)
س←٥

مثال ⑦ : إذا كانت

نهـا ق(س) = ١٠ ، نهـا هـ(س) = س^٢ + ٢٠
س←٤ س←٤

فجد نهـا (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٤ - ٣س)
س←٤

Scanned by CamScanner

ثال ⑧ : إذا علمت أن

ق(٢) = ٥ ، $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٣

فجد $\lim_{س \to ٢}$ (٧س − ٤ ق(س))

ثال ⑨ : إذا علمت أن

$\lim_{س \to ٢}$ ٣ ق(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ٤

فجد $\lim_{س \to ٢}$ $\sqrt{٢ ق^{٢}(س) + ٢ هـ(س)}$

مثال ⑩ : إذا علمت أن

هـ(٢) = ١ ، $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ١٠

فجد $\lim_{س \to ٢}$ (هـ(س) + ٢س + ١)

مثال ⑪ : إذا كان

ق(٣) = ١ ، $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٧

فجد $\lim_{س \to ٣}$ $\sqrt[٣]{٣ ق(س) + ٦}$

Scanned by CamScanner

ال ⑫ : إذا كان

(٠) = ٣ ، نهـا ٤ ق (س) = ٨
س ← ٠

د نهـا (٣ س ق (س) - س)
س ← ٠

ال ⑬ : إذا علمت أن

نهـا ق (س) = ٢ ، نهـا هـ (س) = -٤
س ← -١ ، س ← -١

د نهـا (٣ ق (س) + ٢ هـ (س))
س ← -١

Scanned by CamScanner

الحالة البسيطة

الإقتران المتشعب

مثال ①: إذا كان ق(س) = { ٢س - ١ ، س ≤ ؟ ; س٣ - ؟ ، س > ؟ } جد

أ) نهـ ق(س)
س ← ٣

ب) نهـ ق(س)
س ← ١

جـ) نهـ ق(س)
س ← ؟

د) ق(؟)

Scanned by CamScanner

مثال ② : إذا كان ق(س) = { ٥س + ١ ، س < ٢ ; س² ، س ≥ ٢ }

أوجد قيمة كل مما يأتي

أ) ق(٢) =

ب) نهـ ق(س) =
س ← ١

ج) نهـ ق(س) =
س ← ٢

د) نهـ ق(س) =
س ← ٢

هـ) نهـ ق(س) =
س ← ٢

مثال ③ : إذا كان ق(س) = { س² + ١ ، س ≤ ٣ ; ٤س - ٢ ، س > ٣ }

أوجد قيمة كل مما يأتي

أ) ق(٣) =

ب) نهـ ق(س)
س ← ١

ج) نهـ ق(س)
س ← ٤

د) نهـ ق(س)
س ← ٣

هـ) نهـ ق(س)
س ← ٣

مثال ④ : إذا كان

ق(س) = { ٣س - ٥ ، س < ٢ ; ١٢ ، س = ٢ ; ٥ - ٢س ، س > ٢ }

أوجد قيمة كل مما يلي

أ) ق(٢) =

ب) نهـ ق(س)
س ← ٠

ج) نهـ ق(س)
س ← ٣

د) نهـ ق(س)
س ← ٢

Scanned by CamScanner

ثال ⑤ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ، س < -١ \\ ٣ & ، س = -١ \\ س - ١ & ، س > -١ \end{cases}$$

جد قيمة كل مما يلي

ق (-١) =

نهـا ق(س)
س ← -٢

نهـا ق(س)
س ← ٠

نهـا ق(س)
س ← -١

جد قيمة كل مما يلي

١) ق(-٢) =

٢) نهـا ق(س)
س ← ١

٣) نهـا ق(س)
س ← -٣

٤) نهـا ق(س)
س ← -٢

ثال ⑥ ٥ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س + ٤ & ، س \neq -٢ \\ ٧ & ، س = -٢ \end{cases}$$

حظة س ≠ تعني س < -٢
و
أو س > -٢

مثال ⑦ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٧س + ٢ & ، س \neq ٤ \\ ٩ & ، س = ٤ \end{cases}$$

جد قيمة كل مما يلي

١) ق(٤) =

Scanned by CamScanner

) نهـا ق (س)
س ← ٤

) نهـا ق (س)
س ← ٣

الحالة الثانية

مثال (٨) : إذا كان

ن (س) = { س٤ - ٢ ، ٠ ≤ س < ٥ ؛ ٤ س + ١ ، ٥ ≤ س < ٧ }

جد قيمة كل مما يلي

١) نهـا ق (س)
س ← ٢

) نهـا ق (س)
س ← ٦

٣) نهـا ق (س)
س ← ٥

٤) ق (٥) =

مثال (٩) : إذا كان

ق (س) = { ٣ س ، س < ٢ ؛ ٦ ، ٢ ≤ س < ٤ ؛ ١٠ - ٢ س ، س ≥ ٤ }

جد قيمة كل مما يلي

١) نهـا ق (س) =
س ← ٣

٢) نهـا ق (س) =
س ← ٠

٣) نهـا ق (س)
س ← ٦

Scanned by CamScanner

) نهـا ق(س)	٤) نهـا ق(س)
س ← ٢	س ← ٣
) نهـا ق(س)	٥) نهـا ق(س)
س ← ٤	س ← ٥
	٦) نهـا ق(س)
	س ← ٦
ثال ① : إذا كان	
ق(س) = { ٢س + ٥ ، س > ٣ ؛ ١٧ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ ؛ ٣س - ١ ، س < ٦	
فجد قيمة كل مما يلي	
١) ق(٦) =	
٢) نهـا ق(س)	
س ← ١	
٣) نهـا ق(س)	
س ← ٧	

Scanned by CamScanner

رياً:

إ-جاد الثوابت (المجاهيل) في النهايات

حظة تعتمد على تحديد نوع جاهيل (نوع واحد أو اثنين)

ال ①: إذا كانت نهـ ؟ ٣س - ٦ = ١٦
قيمة P ؟ س ← ١

ل ②: إذا كانت نهـ ال؟ س - ٨ = ٣٤
س ← ٢
قيمة ل ؟

ل ③: إذا كانت نهـ (٣س - ١) = ٩
قيمة ل ؟ س ← ٢

مثال ④: إذا كانت نهـ (٣ - ل س) = ٥
س ← -٢
فجد قيمة ل ؟

مثال ⑤: إذا كانت نهـ (٣س + ٧) = ١
س ← -٣
فجد قيمة P ؟

مثال ⑥: إذا كانت نهـ (٢س٣ - ٣س + ٢) = ٨
س ← -١
فجد قيمة P ؟

مثال ⑦: إذا كانت نهـ $(Ps)^3$ = -٦٤
س ← ١
فجد قيمة P ؟

Scanned by CamScanner

مثال ① : إذا كان ق (س) = { أس + ٤ ، س > ٢ ; ٦ − س² ، س ≤ ٢ }

... قيمة الثابت أ إذا كانت ... هـ ق (س) موجودة ؟ ... ← ٢

مثال ② : إذا كانت

ل (س) = { س² + أس ، س > ٢ ; ٤ ، س ≤ ٢ }

... كانت نهـ ق (س) موجودة ... فجد قيمة الثابت أ ؟ ... ← ٢

مثال ③ : إذا كان ق (س) = { أس² ، ٢ < س < ٣ ; ٨١ ، ٣ > س }

وكانت نهـ ق (س) موجودة فجد قيمة الثابت أ ؟ (س → ٣)

مثال ④ : إذا كان ق (س) = { ٤أس + ٣ ، س ≤ ٣ ; س² + ٦ ، س > ٣ }

فجد قيمة الثابت أ التي تجعل نهـ ق (س) موجودة (س → ٣)

Scanned by CamScanner

⑤ : إذا كان ق(س) = { ٦س - ٤ ، س < ٢ ؛ ٤س + ١٢ ، س > ٢ }

انت نها ق(س) موجودة فجد ٢؟
س ← ٢

⑥ : إذا كان ق(س) = { ٧س² - ٢ ، س > ١ ؛ ٢٢ + ١ ، س ≤ ١ }

قيمة الثابت ٢ إذا كانت نها ق(س) موجودة
س ← ١

مثال ⑦ : إذا كان ق(س) = { ٣ - ٤س ، س ≥ ٢ ؛ ٢س + ١ ، س < ٢ }

فجد قيمة الثابت ٢ إذا كانت نها ق(س) موجودة ؟
س ← ٢

مثال ⑧ : إذا كان ق(س) = { ٢٥س - ٢٠ ، س < ١ ؛ ٢٠ ، س = ١ ؛ ٦س + ٢٤ ، س > ١ }

فجد قيمة ٢ التي تجعل نها ق(س) موجودة
س ← ١

Scanned by CamScanner

⑨: إذا كان ق(س) = { ٢ب س - ٦ ، س < ٢ ؛ ١٥ ، س = ٢ ؛ س + ٤ ، س > ٢ }

قيمة ب التي تجعل نهـ ق(س) موجودة
س ← ٢

⑩: إذا كان ق(س) = { ٥س² - ل ، س < ٢ ؛ ل س + ٢ ، س ≥ ٢ }

نهـ ق(س) موجودة فجد قيمة ل؟
س ← ٢

مثال ⑪: إذا كان ق(س) = { س² + ب ، س < ٢ ؛ ٣ب + ٦ ، س > ٢ }

وكانت نهـ ق(س) = ١٤ فجد قيم (ب ، ب)؟
س ← ٢

مثال ⑫: إذا كان ق(س) = { ٣س + ب ، س < ٢ ؛ ٣س² + ٤ ، س ≥ ٢ }

وكانت نهـ ق(س) = ٤٢ فجد قيم (ب ، ب)؟
س ← ٢

سؤال واجب: إذا كان ق(س) = { س + ٦ ، س ∈ ص ؛ حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة ، ٤س + ١ ، س ∉ ص }

فجد نهـ ق(س)
س ← ٣

Scanned by CamScanner