لا تنتظر وقتاً إضافياً ..... لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد ..... اجعل هدفك ليس النجاح فقط بل التفوق والتميز

إهداء إلى روح والداي
غفر الله لهما وجعلهما
من أهل الجنة

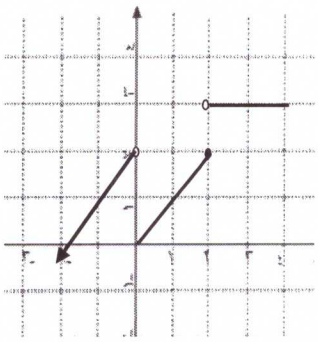
الرياضيـــــات

العلامة
الكاملة

المستوى الثالث الفرع الأدبي

النهايات + التفاضل+ تطبيقات

التفاضل (الكتاب ، أسئلة مقترحة)



إعداد الأستاذ

عبد الغفار الشيخ

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

$$هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٢} - ٨س & ، \ س < ٢ \\ ٨ & ، \ س = ٢ \\ ٢س^{٢} - ب س + ٤ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٢^-} \frac{س^{٣} - \sqrt{٨ - س^{٣}}}{}$$

تطبيقات التفاضل

التفسير الهندسي والتفسير الفيزيائي للمشتقة

التفسير الهندسي

ميل المماس = قَ (س) = نهـــــا $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، $\Delta س \leftarrow 0$

السرعة اللحظية = مشتقة المسافة ع (ن) = ف (ن)

التسارع اللحظي = مشتقة السرعة ت (ن) = ع (ن)

معادلة المماس هي (ص - ص١) = م (س - س١)

إذا كان ق (س) = ٢ س^{٣} - ٥ س^{٢} + ١ فجد

أ) ق (٢)

ب) ميل المماس لمنحنى ق عندما س = ٢

جـ) معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ٢

إذا كان ق (س) = (٢ س + ١) (٣ س – ٤) فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ٢

إذا كان ق (س) = س^{٥} + ٤ س^{٢} فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

إذا كان ص = ق (س) = س^{٣} - ٦ س + ٥ فجد

أ) ق (- ٢)

ب) ميل المماس لمنحنى ق عندما س = - ٢

جـ) معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = - ٢

إذا كان ص = ق (س) = (٢ س + ١)^{٣} فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ٢

إذا كان ق (س) = س^{٢} – ٣ س فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢ ، - ٢)

إذا كان ص = ق (س) = (٣ س^{٢} – ٢)^{٤} فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

إذا كان ق (س) = (س^{٢} + ١)^{٢} فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = - ١

إذا كان ق (س) = $\sqrt{س - ٢}$ + ٤ فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٣ ، ٥)

إذا كان ق (س) = $\frac{١}{٢س - ١}$ فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ٠

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

إذا كان ق (س) = $\sqrt{٣س^{٢} + ٦}$ فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٣)

إذا كان ق (س) = $\frac{٦س}{س^{٢} + ٢}$ فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (- ١ ، - ٢)

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

إذا كان ق (س) = س (٣ س - ١)^{٢} فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

إذا كان ق (س) = $\frac{٣}{٢س + ١}$ فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٠ ، ٣)

إذا كان ق (س) = أ س^{٢} + ٢ س + ٥ ، حيث أ عدد ثابت ،
وكان ميل المماس عند س = ٢ يساوي ١٨ فما قيمة الثابت أ

إذا كان ق (س) = $\frac{٢ س + ٢}{س^{٢} + ١}$ ،فجد معادلة المماس
لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

جد معادلة المماس لكل المنحنيات الآتية عند قيم س المبينة
إزاء كل منها :

أ) ق (س) = ٣ س + ٥ ، عند س = ٢

إذا كان ق (س) = أ س^{٢} + ٤ س - ٣ ، حيث أ عدد ثابت ،
وكان ميل المماس عند س = ٣ يساوي ٢٢ فما قيمة الثابت أ

ب) ق (س) = س^{٢} + ٣ س – ١ ، عند س = ١

إذا كان ق (س) = س^{٥} + ٤ س^{٢} فجد ميل المنحنى للاقتران
عندما س = ١

جـ) ق (س) = (٢ س - ٤) (س^{٢} + ١) ، عند س = ٠

إذا كان ق (س) = (٣ س^{٢} – ٢)^{٤} فجد
معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (- ١، ق(-١))

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

التفسير الفيزيائي

إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف (ن) = ن^{٣} + ٣ ن^{٢} + ٥ ، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثوان

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ن^{٣} + ٤ ن^{٢} + ٦ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف (ن) = ٣ ن^{٢} – ٣ن + ٢ ، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٦ ن + ٥ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٤٢ م/ث

إذا تحرك جسيم بخط مستقيم وكان بعده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة التالية ف (ن) = ٢ن^{٢} + ٣ن + ٥ ، جد سرعة الجسيم بعد مرور ٤ ثواني من بدء الحركة

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ٥ ن + ١٣ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ٢٤ م / ث^{٢}

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ن^{٢} - ٥ ن + ٦ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم بعد مرور٣ ثواني

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ١٠ م / ث^{٢}

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

إذا كانت العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني فجد

أ) السرعة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

ب) التسارع عندما تكون السرعة ٩ م / ث

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ١٦ ن + ٨ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٨ م / ث

عبد الغفار الشيخ

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ٣ ن^{٢} + ٧ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ١٢ م / ث^{٢}

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ن^{٢} + ١٠ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م / ث^{٢}

٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقا للاقتران

ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ن^{٢} + ٨ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه (٤) م/ث^{٢}

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ٣ ن^{٢} حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٣٠ م / ث

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

ف (ن) = ٣ ن^{٢} - ٦ ن + ٩ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، احسب تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٣٠ م

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف (ن) = (٢ن^{٢} + ١)^{٢} حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة

إذا كانت ف (ن) = ن^{٣} – ٩ ن^{٢} + ١٥ ن هي المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته

إذا كانت ف (ن) = ٢ ن^{٣} – ٣ ن^{٢} + ٢ هي المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني فاحسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه

تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة ف (ن) = ن^{٢} + ٤ متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن ٤ ثوان

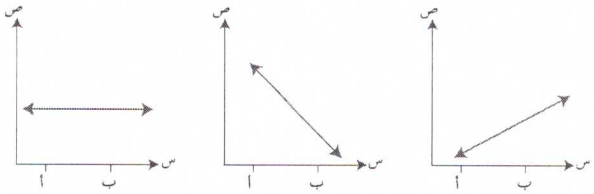
تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة التالية ف (ن) = ٢ن^{٢} ، إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [، أ] تساوي السرعة اللحظية بعد مرور ٣ ثوان ، فجد قيمة أ

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف (ن) = (٢ن - ٣)^{٣} + ٤ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد السرعة المقطوعة بعد مرور ٤ من بدء الحركة

إذا مثل الاقتران ف (ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته ، وكان ف (ن) = ن^{٣}- ن^{٢} + ٥ فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م / ث^{٢}

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

تطبيقات الاشتقاق
التزايد والتناقص



اقتران متزايد　　اقتران متناقص　　اقتران ثابت

تعريف : إذا كان ق (س) اقترانا معرفا على [أ ، ب]

وكانت س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب] يكون :

ق متزايد في [أ،ب] ⟵ ق(س٢) > ق(س١) عندما س٢ > س١

ق متناقص في [أ،ب] ⟵ ق(س٢) < ق(س١) عندما س٢ > س١

ق ثابت في [أ،ب] ⟵ ق(س٢) = ق(س١) عندما س٢ > س١

وبشكل عام نقول أنه إذا كانت :

قَ (س) موجبة يكون الاقتران متزايد

قَ (س) سالبة يكون الاقتران متناقص

أي أنه إذا كان ق اقتران معرف على [أ،ب] وقابلا للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب) عندئذ نقول أنه إذا كانت :

١- قَ (س) > ∀ س ∈ (أ ، ب) ⟵ متزايد

٢- قَ (س) < ∀ س ∈ (أ ، ب) ⟵ متناقص

٣- قَ (س) = ∀ س ∈ (أ ، ب) ⟵ ثابت

خطوات التزايد والتناقص :

١- نجد المشتقة الأولى

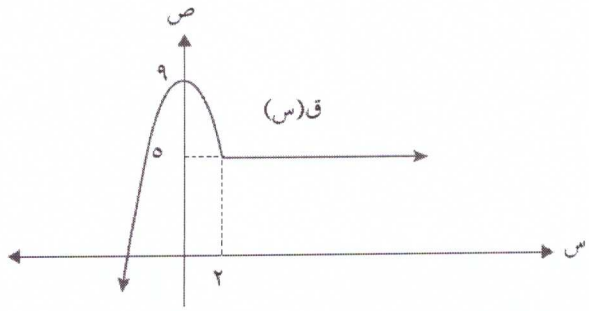
٢- نجد أصفار الاقتران

٣- البحث في إشارة المشتقة الأولى ونحددها على خط الأعداد

٤- تحديد فترات التزايد والتناقص

الشكل يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح جد فترات التزايد والتناقص والثبات لمنحنى الاقتران ق

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ - س^{٢} & ، \ س \geq ٢ \\ ٥ & ، \ س < ٢ \end{cases}$$



جد فترات التزايد والتناقص للاقترانات الآتية :

ق (س) = ٦ س - ٣

ق (س) = ٨ س – س٢

ق (س) = س٢ + ٤ س + ٣

ق (س) = ٢ س٢ – ٤ س + ٨

ق (س) = ٣س٢ – ١٢ س + ٨

ق (س) = ٤٨ س - س٣

ق (س) = ٢ س٣ + ٣ س٢ – ١٢ س

ق (س) = س٢ – ٣ س + ٢

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

جد فترات التزايد والتناقص للاقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س - ٦

بين أن ق (س) = س^{٣} + س متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

ق (س) = س^{٢} - ٤

بين أن ق (س) = س^{٣} + ٢ س + ٥ متزايد لقيم س جميعها

ق (س) = ١٦ - س^{٢}

عبد الغفار الشيخ

جد فترات التزايد والتناقص للاقترانات الآتية :

ق (س) = ٧ + س

ق (س) =١٢س - س^{٣}جد فترات التزايد والتناقص

٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

ق (س) = ٥

ق (س) = ٢س^{٣} - ٢٤ س + ٢

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

ق (س) = ٣ - ٤ س

ق (س) = س^{٣} – ٤٨ س + ٥

ق (س) = (٢ س - ٤)^{٢}

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

ق (س) = ٦س^{٢} - س^{٣}+ ٤

ق (س) = ٤ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢

جد فترات التزايد والتناقص للاقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١٥ س - ٦

جد فترات التزايد والتناقص للاقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٢} (٦ - س)

ق (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢}

ق (س) = ٢٤ س – ٢ س^{٣} + ٢

عبد الغفار الشيخ

ق (س) = ٣ س^{٢} – س^{٣} + ٤

ق (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٩س + ١

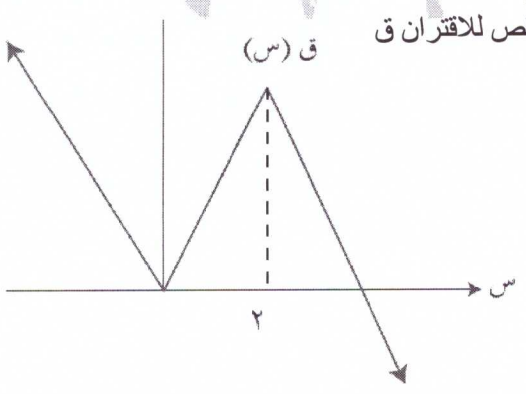
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

ق (س) = (س+ ١) (س + ٢)

إذا كان قَ (س) = هـَ (س) فأثبت أن
ق (س) = هـ (س) + جـ حيث جـ عدد ثابت

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

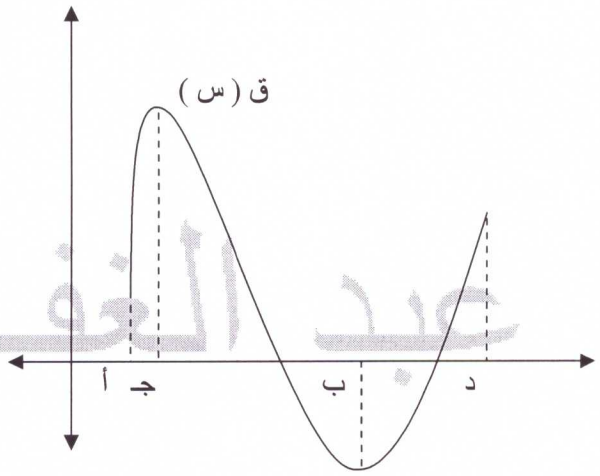


٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

ق (س) = (س+ ٢) (س +٣)

ق (س) = س (٤٨ - س^{٢})

كيفية إيجاد التزايد والتناقص والقيم القصوى والحرجة من خلال الرسم للاقتران ق (س)



فترات التزايد والتناقص

نبدأ من اليسار لليمين ، طالع متزايد نازل متناقص

التزايد [أ ، جـ] ، [ب ، د]

التناقص [جـ ، ب]

النقاط الحرجة (القمة ، القاع)

عند س = جـ يوجد نقطة حرجة (جـ ، ق (جـ))

عند س = ب يوجد نقطة حرجة (ب ، ق (ب))

القيم القصوى العظمى والصغرى (القمة ، القاع)

عند القمة يوجد قيمة عظمى

عند س = جـ يوجد قيمة عظمى قيمتها ق (جـ)

عند القاع يوجد قيمة صغرى

عند س = يوجد قيمة صغرى قيمتها ق (ب)

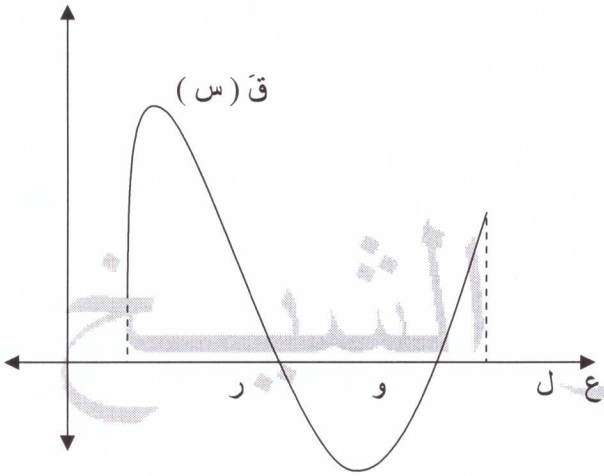
متى المشتقة تساوي صفر (قَ (س) = ٠)

عند قيم س المقابلة للقمة أو القاع

قَ (جـ) = صفر

قَ (ب) = صفر

كيفية إيجاد التزايد والتناقص والقيم القصوى والحرجة من خلال الرسم للاقتران قَ (س)



فترات التزايد والتناقص (فوق ، تحت)

الجزء الواقع فوق محور السينات يكون متزايد

إشارة قَ (س) موجبة

الجزء الواقع تحت محور السينات يكون متناقص

إشارة قَ (س) سالبة

متزايد التزايد [ر ، و] ، [ل ، ع]

التناقص [و ، ل]

النقاط الحرجة (تقاطع)

عند نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

عند س = و يوجد نقطة حرجة (و، ق (و))

عند س = ل يوجد نقطة حرجة (ل، ق (ل))

القيم القصوى العظمى والصغرى (تقاطع)

عند س = و يوجد قيمة عظمى قيمتها ق (و)

متزايد ثم متناقص ينتج عظمى من اختبار المشتقة الأولى

عند س = ل يوجد صغرى قيمتها ق (ل)

متناقص ثم متزايد ينتج عظمى من اختبار المشتقة الأولى

متى المشتقة تساوي صفر (قَ (س) = ٠)

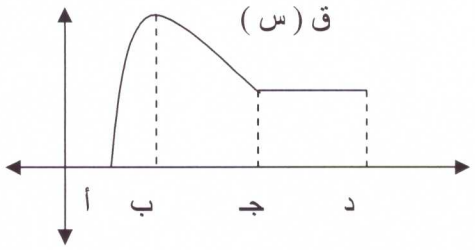
عندا لتقاطع مع محور السينات

قَ (و) = صفر

قَ (ل) = صفر

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٩٤١٠٩٠٩ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

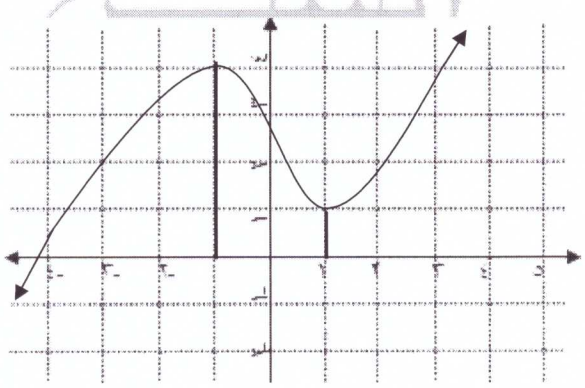
معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) حدد فترات التزايد والتناقص والثابت



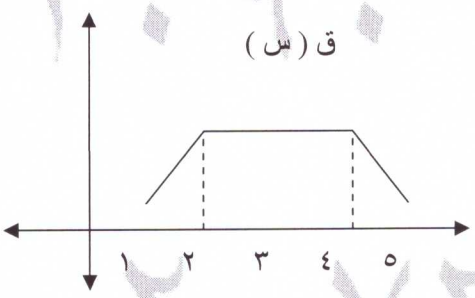
بالاعتماد على جدول الإشارات المجاور فان للاقتران ق (س) قيمة عظمى عندما س تساوي

س	∞ -	٢ -	٤	∞
قَ (س)	++++++	----------	+++++	
ق (س)				

معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد التزايد والتناقص والحرجة القيم القصوى إن وجدت للاقتران



معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على الفترة [١ ، ٥]حدد الفترة التي يكون فيها دائما قَ (س) = صفر



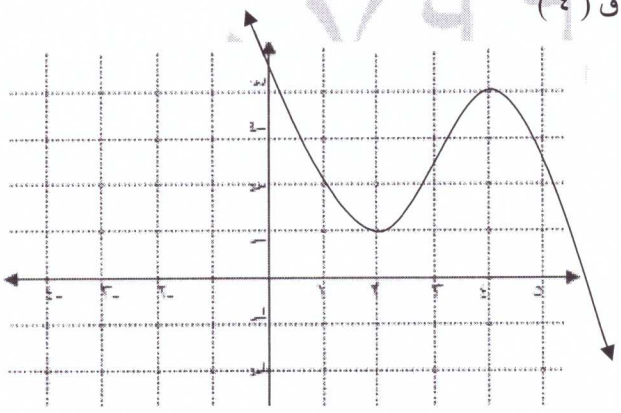
معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) جد فترات التزايد والتناقص

قيم س الحرجة والنقاط الحرجة

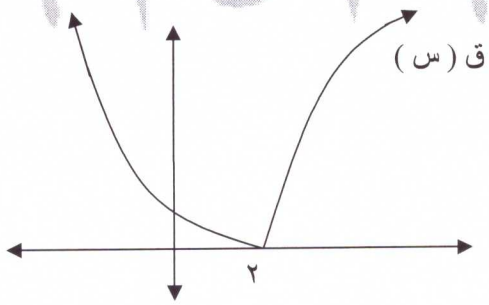
القيم القصوى إن وجدت

قَ (٢)

قَ (٤)

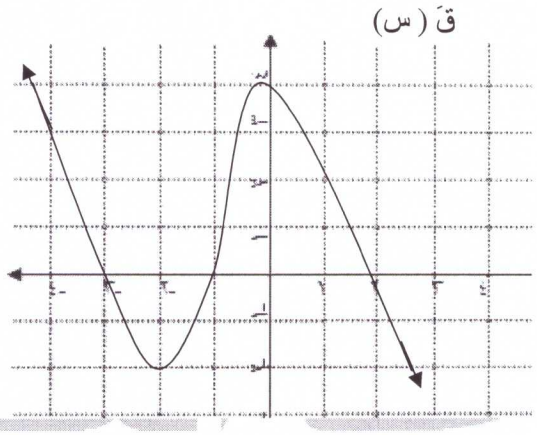


معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) حدد فترات التزايد والتناقص



ملاحظة : المشتقة عند القيم الحرجة = صفر

معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران
قَ (س)



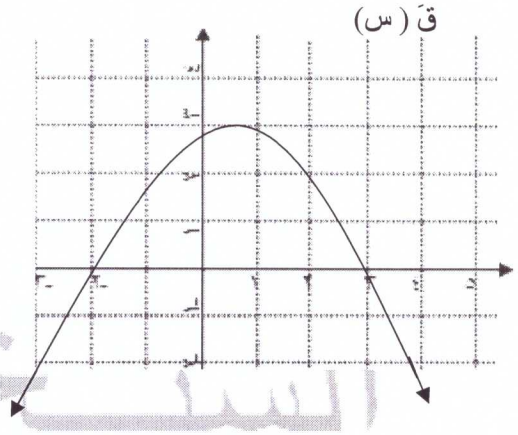
جد
فترات التزايد والتناقص

قيم س الحرجة

القيم القصوى إن وجدت

قيم التي يكون عندها قَ (س) = صفر

معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق (س) المعرف على ح أجب عما يأتي :

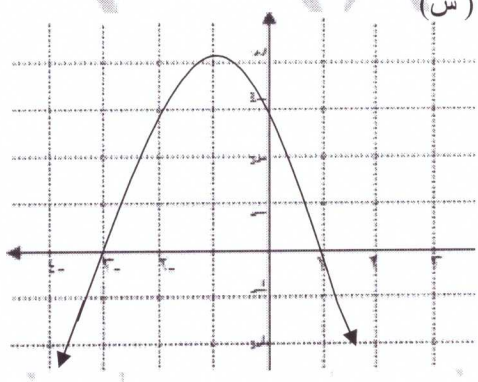


جد قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى وبين نوعها

$$\text{نهـــا}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \frac{\text{ق} (٣ + \text{هـ}) - \text{ق} (٣)}{\text{هـ}}$$

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

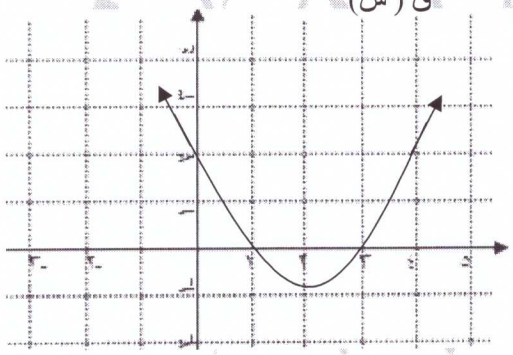
معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران
قَ (س)



جد
فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

قيم س الحرجة للاقتران ق

معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران
قَ (س)



جد قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى وبين نوعها

$$\text{نهـــا}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \frac{\text{ق} (٠ + \text{هـ}) - \text{ق} (٠)}{\text{هـ}}$$

القيم القصوى للاقتران

النقطة الحرجة : هي النقطة التي يتحول فيها الاقتران من متزايد إلى متناقص وبالعكس

عند النقطة الحرجة يمكن أن يكون للاقتران إما قيمة عظمى أو قيمة صغرى

عند النقطة الحرجة قَ (س) = صفر

أي أن المشتقة عند القيم الحرجة دائما تساوي صفر

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى

إذا كان ق قابلا للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب) وكانت جـ ∈ (أ ، ب) نقطة حرجة (قَ (س) = ٠) عندها تكون :

قَ (س) ≤ ٠ ∀ س ∈ (أ ، جـ)
قَ (س)≤ ٠∀ س∈(جـ ، ب) فإن ق(س) يكون قيمة عظمى

قَ (س) ≥ ٠∀ س ∈ (أ ، جـ)
قَ (س)≤ ٠∀ س∈ (جـ ، ب) فإن ق(س) يكون قيمة صغرى

الخطوات :

١- نجد المشتقة الأولى

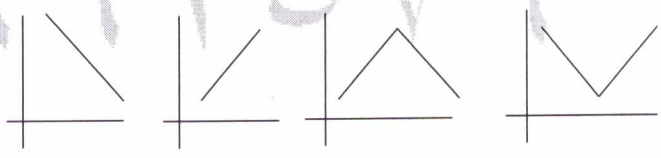
٢- نجد أصفار المشتقة الأولى قَ (س) = صفر

٣- البحث في إشارة المشتقة الأولى ونحددها على خط الأعداد

٤- عند التحول من متزايد إلى متناقص وبالعكس وعندها فإن الاقتران يمر أو بقيمة عظمى أو صغرى

٥- قَ (س) > ٠ موجبة متزايد

٦- قَ (س) < ٠ موجبة متناقص



قيمة صغرى قيمة عظمى لا يوجد قيم قصوى

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للإقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٢} – ٤ س + ٣

ق (س) = ٤ س + ١٢

ق (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س + ٢

ق (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س – ٤

ق (س) = س^{٣} – ٢ س^{٢} – ٤ س + ٨

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٩٤١٠٩٠٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للإقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} - ٢٤س + ١٢

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للإقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٢} (س – ١)

ق (س) = ٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٥

ق (س) = س^{٣} + ٤

عبد الغفار الشيخ

ق (س) = س^{٣} – ٣ س + ١

إذا كان ق (س) = ٢ س (١٢ - س^{٢}) جد كلا مما يأتي

فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق

قيم س الحرجة للاقتران ق

القيم القصوى للاقتران ق محدداً نوعها

٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

إذا كانت ق (س) = ٣س^{٣} + أس^{٢} أوجد قيمة أ علما أن للاقتران قيمة حرجة عند س = -١

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

ق (س) = ١٢ - س^{٣}

ق (س) = ٤ س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٢

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى

إذا كان ق متصلاً على [أ،ب] وكان قَ (س) ، قّ (س) معرفا على (أ ، ب) وكانت جـ ∈ (أ ، ب) نقطة حرجة

قَ (س) = ٠ عندها تكون :

قّ (س) > ٠ فإن ق (جـ) قيمة صغرى للاقتران

ق (س) < ٠ فإن ق (جـ) قيمة عظمى للاقتران

قّ (س) = ٠ يفشل لاختبار في تحديد القيم القصوى

الخطوات :

- نجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية
- نجد أصفار المشتقة الأولى قَ (س) = صفر
- نعوض أصفار المشتقة الأولى في المشتقة الثانية
- البحث في إشارة الثانية ونحددها على خط الأعداد
- قّ (س) > ٠ موجبة فإن ق (جـ) قيمة صغرى للاقتران
- قّ (س) < ٠ سالبة فإن ق (جـ) قيمة عظمى للاقتران
- قّ (س) = ٠ يفشل لاختبار في تحديد القيم القصوى

ونلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٢} + ٤

ق (س) = ٦س^{٢} + س – ٢

ق (س) = ٨ - س^{٢}

ق (س) = ٢س^{٢} + ٢ س – ٥

ق (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} – ٢٤ س + ٢

ق (س) = ٣ - ٦ س^{٢}– ٢ س

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقترانات الآتية :

ق (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س

ق (س) = س^{٢} – ٦ س + ١١

ق (س) = س^{٣} + ١٢س + ٥

ق (س) = س^{٣} - ٣ س + ٢

ق (س) = ٢ س^{٣} - ٦ س

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقترانات الآتية :

ق (س) = (س – ١)^{٤}

ق (س) = ٣س^{٢} + ٤ س^{٣}

إذا علمت أن ق (س) =١٠ س – أ س^{٢} وكان للاقتران نقطة حرجة عند س = ١ جد قيمة الثابت أ

إذا كان للاقتران ق (س) = أ س^{٢} + ٤ س + ٥ نقطة حرجة عند س = ١ جد قيمة أ

مثال : إذا كان للاقتران ق (س) = ٣ س^{٢} - أ س + ٤ نقطة حرجة عند س = ٢ جد قيمة الثابت أ

إذا كان ق (س) = ٢ س^{٣}– ٢٤ س + ٢

باستخدام اختبار المشتقة الأولى جد

قيم س الحرجة للاقتران ق (س)

فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)

القيم القصوى للاقتران ق (س) وحدد نوعها وقيمتها

إذا كان ق (س) = ٣ س^{٢} - س^{٣} + ١

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد

القيم القصوى للاقتران ق (س) وحدد نوعها وقيمتها

إذا كان ق (س) = ٤٨ س - س^{٣} أجب عما يلي

قيم س الحرجة للاقتران ق (س)

فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)

القيم القصوى للاقتران ق (س) وحدد نوعها وقيمتها

إذا كان ق (س) = ٤ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢ جد :

قيم س الحرجة للاقتران ق (س)

فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)

القيم القصوى للاقتران ق (س) وحدد نوعها وقيمتها

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

تطبيقات القيم القصوى

يجب قراءة الأسئلة جيدا وذلك لتحديد المعطيات

رسم شكل تقريبي إن أمكن

تكوين المعادلات اللازمة

الاستفادة من المعطيات

إيجاد القيمة القصوى ومن ثم الوصول إلى المطلوب .

التأكد من الحل باستخدام اختباري المشتقة الأولى والثانية

مثال : ما العددان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٦٤ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

مثال : ما العددان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٢٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

مثال : ما العددان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٣٠ ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن

مثال : ما العددان الصحيحان الموجبان الذي حاصل ضربهما ٨١ ومجموعهما أقل ما يمكن

مثال : ما العددان الصحيحان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ١٤ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : ما العددان الصحيحان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٤٨ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

مثال سلك طوله ٤٠ سم ثني على شكل مستطيل أوجد أبعاد المستطيل حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن

عبد الغفار الشيخ

ما العددان الصحيحان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٦٠ وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

مثال : مستطيل مساحته ٣٦ سم^2 أوجد أبعاده ليكون محيطه أقل ما يمكن

٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مثال : قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م ما بعدا القطعة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن

أراد شخص أن يفتح نافذة مستطيلة في جدار إحدى غرف منزله ، بحيث يكون محيط النافذة ٦ م ، جد بعدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية ممكنة من الضوء بدخول الغرفة

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : لدى مزارع ٥٠٠ م من الأسلاك الشائكة ، إذا أراد المزارع تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل ، ما بعدا قطعة الأرض المستطيلة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن

مثال : قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٣٠٠ م^{٢} يمر من أمامها نهر ، أراد صاحبها أن يحيط الجهات الثلاثة الأخرى (عدا التي يمر من أمامها النهر) بسياج جد أبعاد القطعة ليكون طول السياج أقل ما يمكن

عبد الغفار الشيـــخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

مثال : يريد مزارع تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل ، إذا كانت تكلفة المتر الواحد من جانبين متوازيين ٤ دنانير ومن الجانبين الآخرين دينارين جد مساحة أكبر قطعة مستطيلة يمكن تسييجها بمبلغ ٨٠٠ دينار

مثال : قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠٠ م^{٢} يراد إحاطتها بسياج إذا كانت التكلفة للمتر الواحد من جانبين متوازيين ٣ دنانير ومن الجانبين الآخرين دينارين جد أبعاد الأرض لتحقيق أقل تكلفة

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ١٦٠٠ م^{٢} يراد إحاطتها بسياج إذا كانت التكلفة للمتر الواحد ٣ دنانير ومن جد بعدي قطعة الأرض لتحقيق أقل تكلفة

مثال : إذا كان مجموع ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ٢٠ سم أوجد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث

عبد الغفار الشيخ

مثال : سياج طوله ٨٠٠ م أوجد مساحة أكبر قطعة مستطيلة يمكن إحاطتها من ثلاث جهات بذلك السياج

مثال : إذا كان مجموع ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ٤٠ سم أوجد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث

٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يراد تصميم بركة قاعدتها مستطيلة الشكل ، ومساحتها ٣٦ م^{٢} ثم إحاطتها بممر خارجي منتظم عرضه متران ، جد أبعاد البركة المراد تصميمها بحيث تكون المساحة الكلية للبركة والممر أقل ما يمكن

مثال : يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من صفيحة مستطيلة أبعادها ٨٠ سم ، ٥٠ سم وذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسها ثم ثني الأجزاء البارزة للأعلى ، ما أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من صفيحة من المعدن مستطيلة الشكل طولها ٢١ سم وعرضها ١٦ سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة إلى الأعلى ، جد أكبر حجم ممكن للصندوق

مثال : صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم^{٢} يراد طباعة إعلان عليها ، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم وفي كل من الجانبين ٠.٥ سم جد بعدي الورقة حتى تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن

عبد الغفار الشيخ

مثال : صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ سم^{٢} يراد طباعة إعلان عليها ، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم وفي كل من الجانبين ٠.٥ سم جد بعدي الورقة حتى تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن

٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

صندوق مربع طول ضلعه ١٢ سم إذا قص من جوانبه الأربعة (٤) مربعات متساوية طول ضلعها س ، ثم رفعت الجوانب وأصبح على صورة علبة مفتوحة من أعلى جد قيمة س ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أبعاده ١٢٠ سم ، جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

إذا كانت س هي عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة في فترة محددة في مصنع ما فإن :

ك (س) يسمى اقتران التكلفة الكلية

كَ (س) يسمى اقتران التكلفة الحدية

د (س) يسمى اقتران الإيراد الكلي

دَ(س) يسمى اقتران الإيراد الحدي

ر (س) يسمى اقتران الربح الكلي

رَ (س) يسمى اقتران الربح الحدي

- الإيراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح الكلي

  د (س) = ك (س) + ر (س)

- الإيراد الحدي = التكلفة الحدية + الربح الحدي

  دَ (س) = كَ (س) + رَ (س)

- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

  ر (س) = د (س) - ك (س)

- الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكلفة الحدية

  رَ (س) = دَ (س) - كَ (س)

ملاحظة : يكون الربح أكبر ما يكون عندما تكون

الإيراد الحدي = التكلفة الحدية

دَ (س) = كَ (س)

مثال : إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من القطع هي ك (س) = ٣٠٠ – ٥ س + س^{٢} جد التكلفة الحدية عندما س = ١٠

مثال : إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من القطع هي ك (س) = ٢٠ + ٨ س وكان الإيراد الكلي الناتج من بيع هذه القطع هو د (س) = ٦٠ س – س^{٢} جد الربح الحدي

لاحظت إحدى الشركات التي تصنع ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي

ك (س) = ٢٠٠ - ٠.٥ س + ٠.٠٠٠١ س^{٢} دينار وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هو ر(س) = ٠.٤ س دينار جد اقتران التكلفة الحدية

عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن

الإيراد الحدي الناتج من بيع (١٠٠٠) لعبة

مثال يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر ٦٠ دينارا فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة تعطى بالعلاقة

ك (س) = ٠.٤ س^{٢} + ١٢س + ٥٠٠ دينار جد الربح الحدي

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٩٤١٠٩٠٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات
د (س) = -٢ س^{٢} + ٦٠ س دينار واقتران التكلفة الكلية
ك (س) = ٢٠س حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما
جد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الكلي لمبيعات منتج ما هو
د (س) = ٨٠ س + س^{٢} دينار واقتران التكلفة الكلية
ك (س) = ٤٠ + ١٦٠ س حيث س عدد الوحدات المنتجة
من سلعة ما جد عدد الوحدات المنتجة التي يجب إنتاجها
وبيعها لتحقيق أكبر ربح

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات
د (س) = ٣٠ س - س^{٢} دينار واقتران التكلفة الكلية
ك (س) = ١٠ س حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة
ما جد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

مثال : إذا كان الإيراد الكلي الناتج عن بيع س قطعة من منتج
ما هو د (س) = ١٦ س - س^{٢} - ٢٠ دينار و التكلفة الكلية
ك (س) = ٢ س^{٢} – ٨ س + ١٥ جد قيمة التي تجعل الربح
أكبر ما يمكن الربح

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مثال : إذا كان اقتران الإيراد الكلي لمبيعات سلعة ما هو
د (س) = ٥٠ س - ٢ س^{٢} دينار واقتران التكلفة الكلية
ك (س) = ٣٠ س + ٤ س^{٢} + ٢٠٠ دينار حيث س عدد
الوحدات المنتجة من سلعة ما جد قيمة س التي تجعل الربح
أكبر ما يمكن

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرف نوم عدده س تقدر بالاقتران

ك (س) = $س^{٣}$ – ٣ $س^{٢}$ – ٨٠ س + ٥٠٠ فإذا بيعت كل غرفة نوم بمبلغ ٢٨٠٠ دينار ، فما الإنتاج الأسبوعي للشركة الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن

مثال يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر ٩٠ دينارا فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيا تعطى بالعلاقة

ك (س) = ٠.٢ $س^{٢}$ + ٧٠ س + ١٠٠ دينار جد الربح الحدي

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

مثال : وجد مصنع لإنتاج أجهزة كهربائية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيا تعطى بالاقتران

ك (س) = ٥٠ س + ٣٠٠ فإذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ – س) دينار ، جد قيمة س التي يجعل الربح أكبر ما يمكن

مثال يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر ٨٠ دينارا فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيا تعطى بالعلاقة

ك (س) = ٥٠٠٠ + ٦٠ س + ٠.٠٠٢ $س^{٢}$ دينار فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعيا لتحقيق أكبر ربح ممكن

مثال : يبيع مصنع للألعاب س قطعة من منتجاته أسبوعيا بسعر القطعة الواحدة (٢٠٠ - ٠.١ س) فلسا فإذا كانت تكلفة س من القطع (٥ س + ٢٠٠٠) فما عدد القطع المطلوب بيعها ليكون الربح أكبر ما يمكن

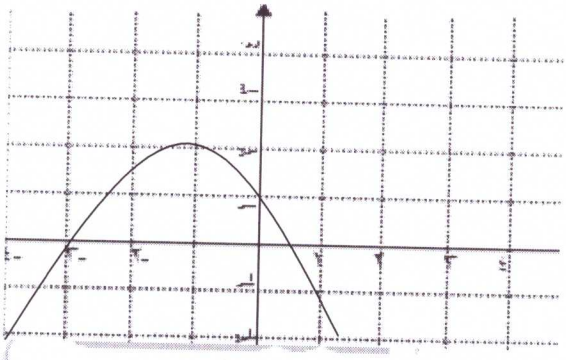
مثال : ينتج مصنع للحواسيب س جهاز أسبوعيا ، فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي تعطى بالعلاقة

ك (س) = ٣٠٠٠ + ٥٠ س + س^{٢}

وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٢٥٠ دينار ما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيا ليحقق أكبر ربح ممكن

معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق (س) المعرف على ح أجب عما يأتي :

ق` (س)



كم عدد القيم الحرجة للاقتران ق

اكتب قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى وبين نوعها

جد نهـــا $\frac{ق(-١+هـ)-ق(-١)}{هـ}$ هـ ← ٠

أسئلة الوحدة

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ١٢ ن + ٣ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٤٢ م / ث

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٢) يتحرك جسيم وفق العلاقة ف (ن) = م (ن + ١)^{٢}
حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثوان تساوي ١٢ م / ث فجد قيمة الثابت م

٣) قطعة أرض يراد تسييج جزء مستطيل منها تبلغ مساحته ٣٧٥٠ م^{٢} إذا كانت تكلفة المتر الطولي الواحد من جانبين متوازيين ٣ دنانير ومن الجانبين الآخرين دينارين فجد أبعاد الأرض التي يمكن تسييجها لتحقيق أقل تكلفة

٤) إذا كان ق (س) = س^{٢} (٦ - س) فجد :
فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق
القيم العظمى والصغرى للاقتران ق (إن وجدت)

٥) يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر ١٠٠ دينارا فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيا تعطى بالعلاقة
ك (س) = ٠.٣ س^{٢} + ٦٠ س + ٧٠ دينار جد الربح الحدي

٦) لكل من الاقترانين الآتيين جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) باستخدام اختبار المشتقة الثانية
أ) ق (س) = ٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} – ١٢ س + ٥
ب) ق (س) = س^{٣} – ٣ س + ٧

٧) إذا كان ق (س) = س (٣ س – ١)^{٢} فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٩٤١٠٩٠٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٨) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما يساوي ٥٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

٩) إذا ك (س) = ٤٠ + ٣ س^{٢} دينار اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما فجد التكلفة الحدية لإنتاج ٢٠ قطعة من هذه السلعة

١٠) إذا كان ق (س) = (٣ س – ٤)^{٣} فجد قيمة س التي تجعل قَ (س) = ٣٦

١١) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة أربعة بدائل ، واحدة منها فقط صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :

(١) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س^{٢} – ١٢ س + ١ قيمة حرجة عندما س = ٣ فإن قيمة أ تساوي :

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٢ د) - ٢

(٢) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢ – س)^{٤} عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤) ، فإن قيمة س$_{١}$ =

أ) - ٣ ب) - ٢ جـ) ٢ د) ٣

(٣) اذا كان ق (س) = س^{٢} – ٤ س ، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عندما س تساوي :

أ) صفرا ب) ٢ جـ) - ٤ د) ٤

(٤) فترة التزايد للاقتران ق (س) = س^{٢} – ٢ س – ٢ هي

أ) [٢،٣] ب) [٠،١] جـ) - ٤ د) ٤

(٥) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٦ ن^{٢} - ن^{٣} حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني، المسافة التي يقطعها الجسيم بالامتار حتى يصبح تسارعه صفرا هي :

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

(٦) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س^{٣} – ٣ س^{٢} قيمة صغرى محلية عند س = ١ فإن قيمة الثابت أ تساوي :

أ) ٢ ب) – ٢ جـ) – ٣ د) ٣

مع تمنياتي لكم
بالنجاح والتوفيق
عبد الغفار الشيخ

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٩٤١٠٩٠٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩