طرائق التكامل

التكامل بالتعويض

في حال عدم القدرة على إجراء عملية التكامل بالطريقة المباشرة نستخدم طرق أخرى منها طريقة التعويض والتي من خلالها يتم فرض ما داخل المركب = ص ، ثم نشتق الطرفين ، ونعوض ، ومن ثم نكامل

الحالات التي من الممكن استخدام طريقة التعويض :

$\int \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{هـَ}(\text{س})\,\text{د س} = \int \text{ق}(\text{ص})\,\text{د ص}$

حيث ص = هـ (س) ، د ص = هـَ (س) د س

$\int (\text{أ س} + \text{م})^{\text{ن}}\,\text{د س}$

$\int (\text{اقتران مركب})^{\text{ن}}\,\text{د س}$

$\int \frac{(\text{اقتران مركب})^{\text{ن}}}{\sqrt{\text{اقتران مركب}}}\,\text{د س}$

$\int (\text{اقتران مركب})\,(\text{اقتران مركب})\,\text{د س}$

$\int (\text{اقتران مركب}) \times \text{جا}\,(\text{اقتران مركب})\,\text{د س}$

طريقة التكامل بالتعويض:

١. نفرض ص ما داخل المركب
٢. نجد المشتقة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$
٣. نجد ص في حال التكامل المحدود أو حسب الرغبة
٤. نعوض في التكامل الأصلي قيمة ص ، د س
٥. نختصر
٦. نجري التكامل (مع الحدود الجديدة)
٧. نجد قيمة التكامل

نتيجة : برهن أن

$\int (\text{أس}+\text{م})^{\text{ن}}\,\text{د س} = \frac{(\text{أس}+\text{م})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية باستخدام طريقة التعويض

$\int \text{س}^٢ (٦\,\text{س}^٣ + ٥)^٣\,\text{د س}$

$\int ٦\,\text{س}^٥ (\text{س}^٦ + ٤)^٧\,\text{د س}$

$\int ٥\,\text{س}^٤ (\text{س}^٥ + ٢)^٣\,\text{د س}$

$\int (\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} + ٩)^٤\,\text{د س}$

$\int \text{س}^٣ \sqrt[٣]{٣\,\text{س}^٤ + ٤}\,\text{د س}$

$\int \frac{\text{س} + ٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢ + ٤\,\text{س}}}\,\text{د س}$

$\int_{١}^{٢} (٢\,\text{س} - ٣)^٤\,\text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\text{س} + 1}} \, \text{د}\text{س}$$

$$\int (4\text{س} + 2)(2\text{س}^2 + 2\text{س})^3 \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{-2}{(3 - 6\text{س})^5} \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{6\text{س} - 9}{(\text{س}^2 - 6\text{س} + 9)^3} \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{10\text{س} - 5}{\sqrt[3]{(\text{س}^2 - \text{س} + 1)^{72}}} \, \text{د}\text{س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية باستخدام طريقة التعويض

$$\int (\text{س} + 3) \sqrt[5]{\text{س}^2 + 6\text{س} - 4} \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \text{س}^3 (\text{س}^2 + 4)^6 \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + 5)^9}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \text{س}^7 \sqrt{(\text{س}^4 + 4)} \, \text{د}\text{س}$$

$$\int 2\text{س}^5 (\text{س}^2 + 5)^4 \, \text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{(\text{س} + 1)^9}{\text{س}^{11}} \, \text{د}\text{س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \dfrac{(\text{٢ س} + ١)^{٩}}{\text{س}^{٧}} \, \text{د س}$

إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق}(\text{س}) \, \text{د س} = ١٨$ جد

$\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢} \, \text{ق}(\text{س}^{٣}) \, \text{د س}$

$\int \text{س}^{٢} \sqrt[٣]{\text{س}^{٧} - \text{٥ س}^{٣}} \, \text{د س}$

بشكل عام :

$\int \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب}) \, \text{د س} = \dfrac{-١}{\text{أ}} \, \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) \, \text{د س} = \dfrac{١}{\text{أ}} \, \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \sqrt[٣]{\text{٤ س}^{٥} + \text{٢ س}^{٣}} \, \text{د س}$

$\int (\text{٧ س}^{٥} - \text{٢ س})^{٣} \, \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب}) \, \text{د س}$

مثال جد قيمة $\int \text{١٠ س ق}'(\text{س}^{٢} + ٥) \, \text{د س}$

$\int \text{جا}(\text{٥ س} + ٤) \, \text{د س}$

$\int \text{٤ س} \times \text{قا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٨) \, \text{د س}$

إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س} - ١) \, \text{د س} = ٦$ جد

$\int_{-١}^{٠} \text{٢ ق}(\text{س} + ٢) + \text{٤ س} \, \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \text{قا}^{٢}\text{س ظا ٢س} \ \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \frac{\text{جا س جتا س}}{(\text{١ – ٢ جا}^{٢}\text{ س})^{٣}} \ \text{د س}$

$\int (\text{س} + ٣) \times \text{قتا} (\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤) \ \text{د س}$

$\int_{٠}^{٤} \text{س} \sqrt{\text{س}^{٣} + ٥} \ \text{د س}$

$\int (\text{س}^{٢} + ١) \times \text{جا} (\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١) \ \text{د س}$

$\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ١)^{٥}}{\text{س}^{٧}} \ \text{د س}$

$\int \text{س ظا}^{٢} (\text{س}^{٢} + ٥) \ \text{د س}$

$\int \frac{٣\text{س}^{٢} + ١}{(\text{س}^{٣} + \text{س} + ٧)^{٥}} \ \text{د س}$

$\int_{٠}^{\pi/٢} \frac{\text{جا ٢س}}{\sqrt{١ + \text{جتا}^{٢}\text{س}}} \ \text{د س}$

$\int_{١}^{٣} \frac{٢}{(\text{س} + ٢)} \ \text{د س}$

$\int \frac{\text{جا ٢س}}{\sqrt{(١ + \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}} \ \text{د س}$

$\int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٣) \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}} \ \text{د س}$

$\int \frac{٢\text{س} + ١}{\text{جتا}^{٢} (\text{س}^{٢} + \text{س})} \ \text{د س}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \frac{\text{٢س} - \text{٣}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٦س} - \text{٥}} \, \text{دس}$

$\int \frac{\text{٢}}{(\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٢٠س} + \text{٢٥})^{\text{٧}}} \, \text{دس}$

$\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \frac{\text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٤}} \, \text{دس}$

$\int \text{جا ٤س جتا ٨س دس}$

$\int \text{جا ٦س جا ٤س دس}$

$\int \text{جتا ٣س جتا ٧س دس}$

$\int \text{قا}^{\text{٢}}\,\text{٢س} \times \text{هـ}^{\text{ظا ٢س}} \, \text{دس}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \frac{(\text{هـ})^{\frac{\text{٣}}{\text{س}}}}{\text{س}^{\text{٢}}} \, \text{دس}$

$\int \text{جا ٢س} \times \text{هـ}^{\text{جتا ٢س}} \, \text{دس}$

$\int \text{جا}^{\text{٥}}\text{س دس}$

$\int \text{جا}^{\text{٣}}\text{س دس}$

$\int \text{جا}^{\text{٤}}\text{س دس}$

$\int \text{جتا}^{\text{٤}}\text{س دس}$

$\int \text{جا}^{\text{٣}}\,\text{٢س جتا}^{\text{٥}}\,\text{٢س دس}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int$ جا^{4} س جتـــا^{3} س د س

$\int$ جا^{4} ٥س جتـــا^{3} ٥س د س

$\int$ جتـــا^{2} س جـــا^{4} س د س

$\int$ قا^{4} س د س

$\int$ جا^{5} س جتا س د س

$\int$ جتا س جا^{2}(جا س) د س

جد قيمة $\int$ ظا^{4} س قا^{2} س د س

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int$ ظا^{3} س قا^{2} س د س

$\int$ ظا^{5} ٣ س قا^{2} ٣ س د س

$\int$ ظا س قا^{2} س د س

$\int$ قا^{5} س ظا س د س

$\int$ قا^{5} س جا س د س

$\int \frac{\text{جتـــا ٢ س}}{\text{قتـــا}^{5}\text{ ٢ س}}$ د س

$\int$ قتا^{3} س ظتا^{3} س د س

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int \text{قتا}^{٤}\,\text{٦س}\;\text{ظتا}^{٣}\,\text{٦س}\;\text{دس}$

$\int \dfrac{\text{ظتا}^{٢}\,\frac{١}{\text{س}}}{\text{س}^{٢}}\;\text{دس}$

$\int \text{س قا}(١-٢\text{س}^{٢})\;\text{ظا}(١-٢\text{س}^{٢})\;\text{دس}$

$\int \dfrac{(٥+\sqrt{\text{س}})^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\;\text{دس}$

$\int \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}\sqrt{\dfrac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\;\text{دس}$

$\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \dfrac{١}{\text{س}\sqrt{١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\;\text{دس}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int (\text{هـ})^{(\text{س}^{٣}+٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\;\text{دس}$

$\int \dfrac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}+١)^{٥}}\;\text{دس}$

$\int \sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{-٣}{٤}}+١}\;\text{دس}$

$\int \text{جا٢س}\sqrt{\text{٢جتاس}}\;\text{دس}$

$\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\;\text{جتا}^{٢}\text{س}\;\text{دس}$

$\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\,(١+\text{جاس})^{٧}\;\text{دس}$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

إذا كان $\int_{0}^{1} ق(س)\ د س = ٨$ جد

$$\int_{0}^{\pi/4} ٣\ جتا(٢س)\ ق(جا\ ٢س)\ د س$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{جاس\ جتاس}{\sqrt{١ + جا^{٢}س}}\ د س$$

$$\int \frac{قتا^{٢}\sqrt{س}}{\sqrt{س}}\ د س$$

$$\int س^{٢}\ \sqrt[٣]{س - ١}\ د س$$

$$\int \frac{(١ + س)^{٧}}{س^{٩}}\ د س$$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$$\int \sqrt{\frac{(١ + س)^{٧}}{س^{١١}}}\ د س$$

$$\int_{0}^{٢} \frac{س^{٣}}{\sqrt{س^{٢} + ٩}}\ د س$$

$$\int (هـ)^{(جاس + ٢ لو_{هـ} جتاس)}\ د س$$

$$\int \frac{١ - ظا^{٢}س}{جتا^{٢}س}\ د س$$

$$\int \frac{جاس\sqrt{جا^{٢}س + ٤}}{قاس}\ د س$$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$$\int_{-١}^{٠} \text{س}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}\ \text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$$\int \sqrt{٣\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$$

$$\int (\text{س}^{٥} - ٣\,\text{س})^{٣}\ \text{د س}$$

$$\int \sqrt{٣\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٢ + \sqrt{\text{س}})}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\sqrt[٣]{(\text{س} - \text{س}^{٣})}}{\text{س}^{٤}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتا س} + ٣}}{٢ - ٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{س}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤} - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٥}}\ \text{د س}$$

$$\int \sqrt[٣]{٢\,\text{س}^{٥} - ٥\,\text{س}^{٣}}\ \text{د س}$$

$$\int \text{جا س}\,(١ + \text{جتا}\,٢\,\text{س})^{٥}\ \text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات الآتية

$\int^{\pi/2} \sqrt{\text{جتا س} - \text{جتا}^{3}\text{س}}\ \text{د س}$

$\int \text{جتا ٢ س} \left(\text{جا س} - \text{جتا س}\right)^{8}\ \text{د س}$

أثبت أن $\int_{1/2}^{1} \frac{(\text{س} - 1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن} + 2}}\ \text{د س} = \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن} + 1} & \text{، ن عدد فردي} \\ \frac{-1}{\text{ن} + 1} & \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

$\int \text{٢جتا ٢ س}\ \text{هـ}^{\text{جا٢س}}\ \text{د س}$

أكتب الفرض المناسب لا يجاد كل من التكاملات الآتية ، بطريقة التكامل بالتعويض (دون اجراء التكامل)

$\int \text{جتا}^{10}\text{س}\ \text{جا}^{7}\text{س}\ \text{د س}$

$\int \text{جتا}^{5}\text{س}\ \text{جا}^{7}\text{س}\ \text{د س}$

$\int \text{ظا}^{5}\text{س}\ \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{د س}$

$\int \text{ظا}^{3}\text{س}\ \text{قا}^{5}\text{س}\ \text{د س}$

$\int \text{ظتا}^{6}\text{س}\ \text{قتا}^{4}\text{س}\ \text{د س}$

$\int \text{ظتا}^{7}\text{س}\ \text{قتا}^{4}\text{س}\ \text{د س}$

التكامل بالأجزاء

هي طريقة أخرى لإيجاد بعض التكاملات وتستخدم عادة في حال عدم وجود اشتقاق بين الاقترانين

الصورة العامة لهذه الطريقة :

$\int$ ق . د هـ = ق . هـ - $\int$ هـ . د ق

$\int_{أ}^{ب}$ ق . د هـ = ق . هـ $|_{أ}^{ب}$ - $\int$ هـ . د ق

$\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ س (لـو$_{هـ}$ س) د س

$\int$ س لـو$_{هـ}$ س^{٣} د س

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$\int$ س (٢ س + ٣)^{٥} د س

$\int$ س (لـو$_{هـ}$ س)^{٢} د س

$\int$ ٢ س جاس د س

$\int$ س^{٢} جا س د س

$\int$ س هـ$^{س^{٣}}$ د س

$\int$ (٢ س - ٣) هـ^{س} د س

$\int_{٠}^{\pi}$ (٢ س + ١) جتا ٣ س د س

$\int$ س قا^{٢} س د س

$\int$ س جتا س د س

$\int (\text{س} - ٢)^{٢} \text{ جتا} (\text{س} + ١) \text{ دس}$

$\int \frac{\text{س}}{١ - \text{جتا } ٢ \text{س}} \text{ دس}$

$\int \text{س}^{٢} \text{ هـ}^{\text{س}} \text{ دس}$

$\int \text{س جا}^{٢}\text{س دس}$

$\int \text{س}^{٣} \text{ هـ}^{\text{س}} \text{ دس}$

$\int \text{س}^{٣} \text{ جاس}^{٢} \text{ دس}$

$\int \sqrt{\text{جاس}} \text{ دس}$

$\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}} \text{ دس}$

$\int \text{جتا} \sqrt{٢\text{س} + ١} \text{ دس}$

$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س} \sqrt[٣]{\text{س}}} \text{ دس}$

$\int \text{س}^{٢} \times (\text{س}^{٢} + ١)^{٧} \text{ دس}$

$\int \text{جا} \sqrt{\text{س}} \text{ جتا}^{٣} \sqrt{\text{س}} \text{ دس}$

$\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}} \text{ دس}$

$\int ٥\text{س} \sqrt{\text{س} + ٣} \text{ دس}$

مثال : جد كلا من التكاملات الآتية :

$\int (٣ س + ١)(٢ س + ١)^{٤}$ د س

$\int \frac{٣ س - ١}{قتا ٢ س}$ د س

$\int \sqrt{س^{٣} + ٥ س^{٢}}$ د س حيث س > صفر

$\int \frac{س جا س}{جتا^{٣} س}$ د س

$\int س^{٥} جتا س^{٣}$ د س

$\int \sqrt{س - ١}\ جا \sqrt{س - ١}$ د س

$\int س^{٢} جتا ٤ س$ د س

$\int جتا س (٢ س + قا^{٣} س)$ د س

$\int (س^{٢} - س) جا ٢ س$ د س

$\int س (جا س + جتا س)^{٢}$ د س

$\int س جتا^{٢} س$ د س

$\int ٣ قا^{٤} س\ لو_{هـ} ظا س$ د س

مثال : جد كلاً من التكاملات الآتية :

$\int$ قا^{2}س (هـ)$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ د س

إذا كان $\int_{1}^{2}$ ق (س) د س = ٣

وكان ق (١) = ٥ ، ق (٢) = ٨

فما قيمة $\int_{1}^{2}$ س قَ (س) د س

$\int$ جا ٢س هـ$^{\text{جاس}}$ د س

إذا كان $\int_{-1}^{5}$ ق (س) د س = ٤ ، ق (٥) = ٣ ، ق (- ١) = ٤

$\int$ هـ$^{2\text{س}}$ جـا س د س

فما قيمة $\int_{2}^{-1}$ س قَ (٣ - ٢ س) د س

مثال : أثبت قاعدة التكامل بالأجزاء

$\int \frac{\text{٣ س جتا س}}{\text{جا}^{3}\text{س}}$ د س

إذا كان $\int_{1}^{2}$ ق (س) د س = ١٠ ، ق (٢) = ٣ ، ق(١) = -١

فما قيمة $\int^{1}$ س^{5} قَ (س^{3} + ١) د س

$\int$ جتا $\sqrt{\text{٢ س + ١}}$ د س

مثال : جد كلاً من التكاملات الآتية :

$\int$ س^{٥} جتا س^{٣} د س

$\int$ قا^{٢} س لـو$_{هـ}$ ظا س د س

$\int$ س ظا س قا^{٢} س د س

$\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}$ د س

$\int \frac{(١ + \text{س})^{٥}}{\text{س}^{٧}}$ د س

$\int$ جتا س لـو$_{هـ}$ جا س د س

$\int$ س^{٥} $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ١}$ د س

$\int$ ٢ هـ$^{\text{س}}$ جا س جتا س د س

$\int$ (س^{٢} - ٢ س) $\sqrt{\text{س} + ٣}$ د س

$\int$ (س^{٢} + ٢ س) هـ$^{\text{س}}$ د س

$\int$ س^{٢} لـو$_{هـ}$ س د س

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\, \text{د س} = \text{لـو} \left| \text{ق}(\text{س}) \right| + \text{جـ}$$

طريقة استخدام الكسور الجزئية :

نستخدم في حال وجود كسر نسبي يكون بسطه هو مشتقة مقامه

التكامل بالتعويض

لكن في حال عدم وجود علاقة بين البسط ومشتقة مقامه

وكان بالإمكان تحليل مقامه الى عوامله الاولية فيمكن باستخدام

التكامل بالكسور الجزئية ايجاد المطلوب

في حال الكسر يكون بإحدى الصور التالية نفكر بالكسور الجزئية

اذا كانت درجة البسط > من درجة المقام | قسمة طويلة

البسط ثابت والمقام خطي | تكامل اقتران قيمته لوغريتمي

المقام تربيعي يحلل الى عوامله ومن ثم نجري التكامل

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س} + ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}\, \text{د س}$$

$$\int_{١}^{٣} \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}\, \text{د س} =$$

$$\int \frac{٢}{\text{س}^٢ - ٤}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س} - ١٣}{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ٣}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{٥}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^٤ + \text{س}^٢}\, \text{د س}$$

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{٧}{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ١٠}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} + \text{س}}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{٢\,\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٤}\,\text{د س} =$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٩}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{٢\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ١٢}\,\text{د س}$$

$$\int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س} - ١}\,\text{د س} =$$

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٤\,\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١١}{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ١٥}\,\text{د س} =$$

$$\int \frac{\text{س}^{٣} + ٤}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\,\text{د س} =$$

عندما درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int \frac{٢\,\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}}\,\text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int \frac{٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}\, \text{د س} =$$

$$\int \frac{٢}{\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} - ٤}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{٨\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ١٦}\, \text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤}\, \text{د س}$$

$$\int_{١}^{٨} \frac{٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} + ٤\text{س} + ٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}\, \text{د س}$$

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{١}{\text{س} + ٢\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{٤\text{س} - ٢} - ٢}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥ - \text{قا}^{٢}\text{س}}\, \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{١}}{\text{٢}\,\text{س} - \text{١} + \sqrt{\text{٢}\,\text{س} + \text{١}}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{|\text{١} - \text{س}|}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}\,\text{س} + \text{٦}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\,\text{س}}{\text{٥}\,\text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{س} - \text{٣}\,\text{ظاس} - \text{٢}}\ \text{د س}$$

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩})\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٤}} + \text{س}^{\text{٢}}}\ \text{د س}\ \text{، س} > \text{صفر}$$

$$\int \frac{\text{٢}\,\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{ظاس}}{\text{٢٥} - (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتاس})^{\text{٢}}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٤}\,\text{س} - \text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{جتاس}}{\text{١} + \text{٣}\,\text{جاس} - \text{جتا}\,\text{٢}\,\text{س}}\ \text{د س}$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{٤}}\ \text{د س}$$

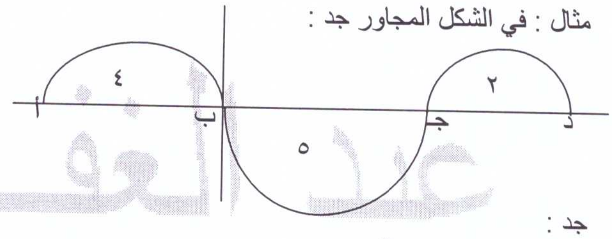
حساب المساحة باستخدام التكامل

المساحة هي تكامل محدود قيمته موجبة

المساحة فوق محور السينات الموجب تنتج تكامل موجب

المساحة تحت محور السينات الموجب تنتج تكامل سالب

مثال : في الشكل المجاور جد :

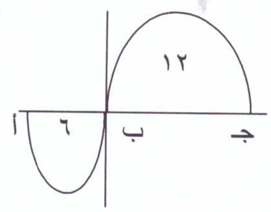


جد :

$\int_{أ}^{د}$ ق (س) د س

المساحة من أ إلى د

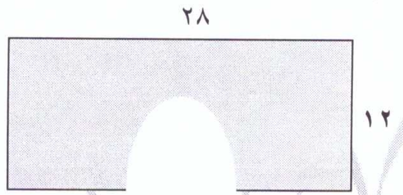
مثال : في الشكل المجاور جد :



$\int_{أ}$ ق (س) د س

المساحة من أ الى جـ

يمثل الشكل المجاور الواجهة الامامية لأحد المباني وشكل المدخل لهذا المبنى يمثله المنحنى ق (س) = ٨ - $\frac{س^٢}{٢}$ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة الملونة اذا علمت أن سعر الدهان للوحدة المربعة (٤٠) قرشا



مبادئ أساسية لحساب المساحة :

عند ورود المصطلحات التالية في السؤال فهي تعني :

ص = جـ حيث جـ عدد ثابت هو اقتران ثابت

(خط مستقيم يوازي محورالسينات ويقطع ص عند جـ)

وعندما يكون ص = ٠ المقصود محورالسينات

س = جـ حيث جـ عدد ثابت هو عامود

(خط مستقيم يوازي محور الصادات ويقطع س عند جـ)

وعندما يكون س = ٠ المقصود محور الصادات

قانون المساحة م :

م = $\int_{أ}^{ب}$ الاعلى – الادنى د س

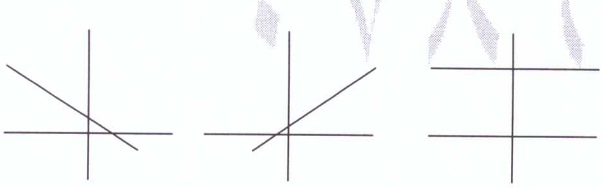
خطوات الحل :

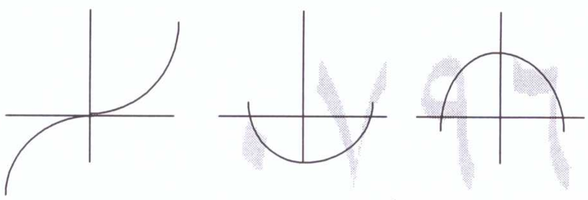
نحدد ما لدينا من أعمدة واقترانات س= ٠ ، ص = ٠

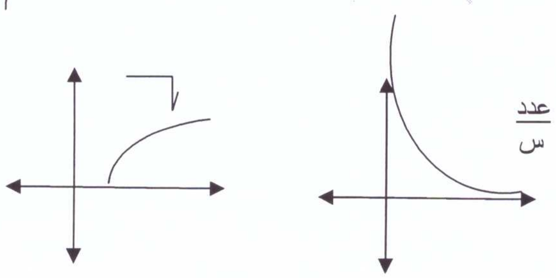
نجد نقاط التقاطع بين الاقترانات(نساويها ببعض)والتي تعتبر حدود التكامل أي أن الأعمدة هي حدود التكامل

نرسم الاقترانات والأعمدة ونحدد المساحة المطلوبة

نجد المساحة المطلوبة عن طريق التكامل







مثال : إذا كان ق (س) = ٢ س + ٥ احسب المساحة المحصورة بين ق(س) ، ومحور السينات ، والمستقيمان س = - ١ ، س = ٣

إذا كان ق (س) = ٤ $س^٣$ – ٤ س احسب المساحة المحصورة بين ق(س) ، ومحور السينات

إذا كان ق (س) = ٢ س - ٨ احسب المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات ، في الفترة [٢ ، ٥]

إذا كان ق (س) = $س^٢$ + ٢ س – ٣ احسب مساحة المنطقة المغلقة بين ق(س) ، ومحور السينات

إذا كان ق (س) = ٩ - $س^٢$ احسب المساحة المحصورة بين ق(س) ، ومحور السينات ، في الفترة [٠ ، ٤]

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ - $\sqrt{س}$ وكل من محوري السينات والصادات

إذا كان ق (س) = ٢ – ٢ س احسب المساحة المحصورة بين ق(س) ، ومحور السينات ، في الفترة [-٢ ، ٢]

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $س^٣$ - ٤ س ومحور السينات

إذا كان ق (س) = ٣ $س^٢$ – ٣ احسب المساحة المحصورة بين ق(س) ، ومحور السينات والمستقيمين س= -٣، س= ٢

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = جا س ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢ π]

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) =جتا π س
ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
ق(س) = ٤ س^{٣} – ٣ س ، هـ (س) = ٥ س

إيجاد المساحة المحصورة بين اقترانين وأكثر :

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
ق(س) = ٤ - س^{٢} ،والمستقيم ل (س) = س + ٢

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
ق(س) = ٢ س - ٣ ، هـ (س) = س^{٢} - ٢ س

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
ق(س) = س^{٢} ،هـ (س) = ٤ س + ٥

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين
المستقيم ص = ٨ س ومنحنى ق(س) = ٩- س^{٢} ومحور السينات

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
ق(س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ ، ومحور السينات والمستقيم
س = ٤ ، س = ٠

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين
ق (س)= جـا س ، هـ (س)= جـا ٢ س الواقعة في الربع الاول

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{٢}{س}$ ومحور السينات والمستقيم هـ - س = صفرا (هـ العدد النيبيري)

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} – ٤ والمستقيم ص= ٢ س + ٤ والمحورين الاحداثيين

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق (س) = ١ - س^{٢} ومحور الصادات والمستقيم

س + ص = ٥ والمستقيم ص = س - ١

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة

ص^{٢} = ٤ س ، والمستقيم س – ص = ٣

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين

ق (س) = ١ + س^{٣} ، ل (س) = س^{٢} + ٥ والمستقيمين

ص + س – ١ = صفر ، ٣ – س = صفر

مثال : إذا كان ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = أ س حيث أ > ٠ ، جد قيمة الثابت أ علما بأن المساحة المحصورة بين الاقترانين = $\frac{٤}{٣}$

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ق(س) = س^{٢} ، هـ (س) = ٢ – س ، س = ٤

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

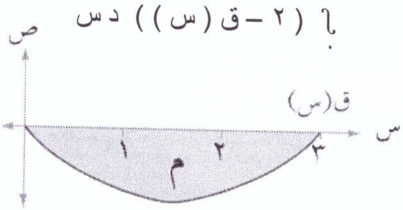
ص – س = ٦ ، هـ (س) = س^{٢}

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ق(س) = ٢ - س^{٢} ، هـ(س) = س^{٢}

معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) في الفترة [٠ ، ٣] اذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي ٦ وحدات مساحة فجد

$\int_{٠}^{٣}$ (٢ – ق (س)) د س

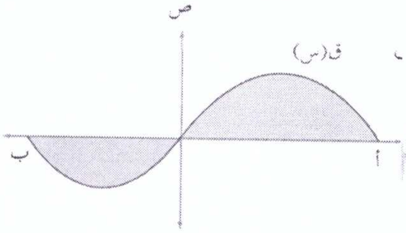


مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ص + س = ٨ ، ص = ٦ - س^{٢}

معتمدا على الشكل المجاور اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) ومحور السينات تساوي ١٤ وحدة مربعة

وكان $\int_{٠}^{ب}$ ق (س) د س = ٦ فما قيمة $\int_{أ}^{٠}$ ق (س) د س



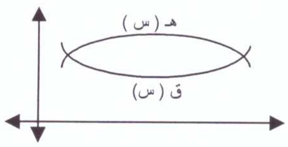
احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين ص= ١٦- س^{٢}

ومحور السينات والمستقيم س = ١، س = ٣

في الشكل المجاور إذا علمت أن المساحة المحصورة بين

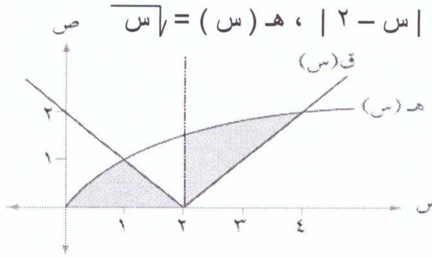
ق (س) ، هـ (س) = ٨ وحدة مربعة وكان

$\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) د س = ١٨ أوجد $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س



جد مساحة المنطقة المظللة كما في الشكل المجاور حيث

ق (س) = | س – ٢ | ، هـ (س) = $\sqrt{س}$



احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين ص = جتا س

والقطعة المستقيمة الواصلة بين القطعتين (٠، ١) ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين ص= ١+ جا س

هـ (س) = ١ + جتا س في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$)

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ق(س) = س^{٢} – ٤ س ، هـ (س) = ٥ س ، ص = ٥

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ص – س = ٦ ، ص = س^{٣} ، ٢ ص + س = ٠

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

ق (س) = جا س ، هـ (س) = جتا س في الفترة [٠ ، π]

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ص = ٦ س - س^{٢} ، هـ (س) = ٢ س

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

ص = ٢ س^{٣} ، ص = ٣ - س ، ص = - ٢ س

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

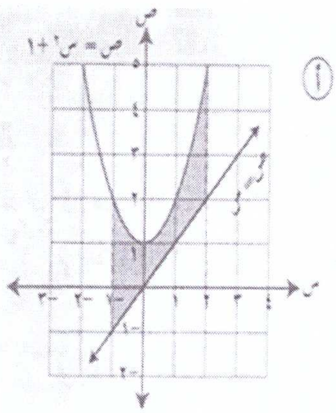
ق(س) = س^{٢} - ١ ، هـ (س) = ١ – س ، ص = ٣

مثال : احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

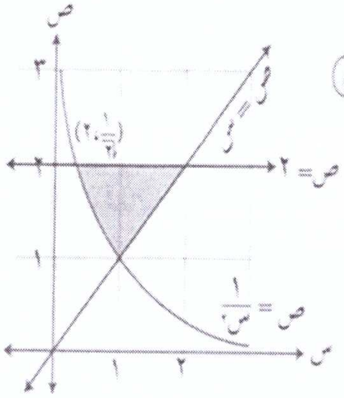
ق(س)= - س^{٣} ، هـ (س) = $\frac{١}{٢}$ س ، ل (س) = ٦ – س

مثال : جد مساحة المنطقة المظللة في كل من الأشكال التالية :

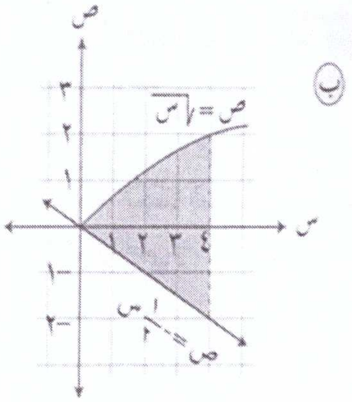
أ)



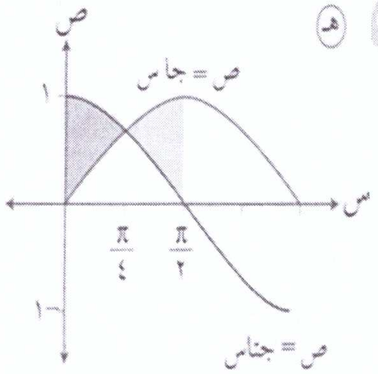
د)



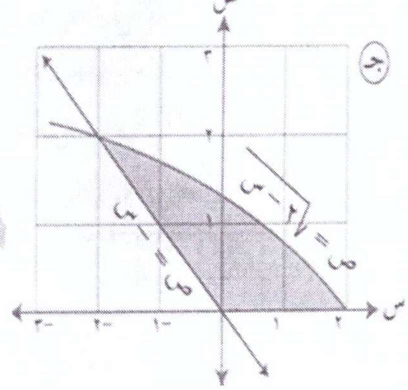
ب)



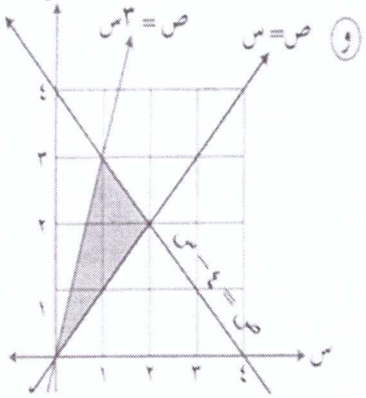
هـ)



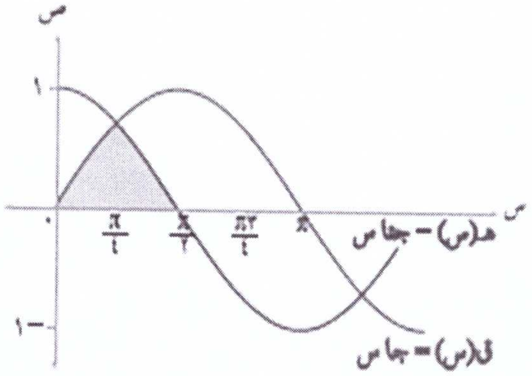
جـ)



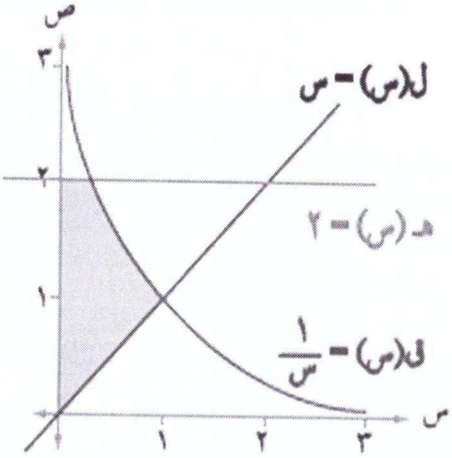
و)



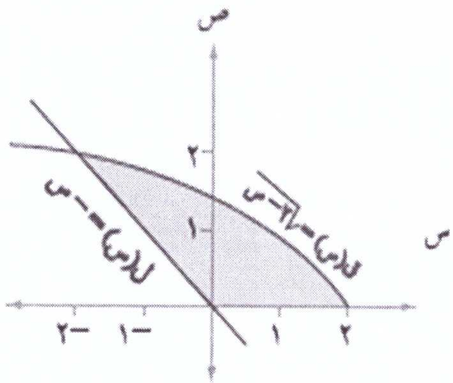
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



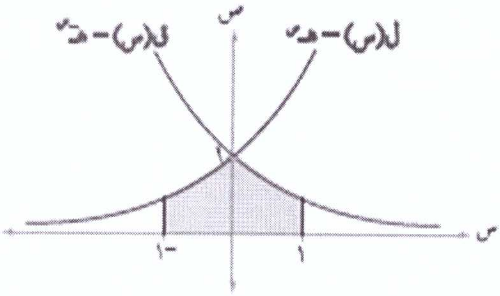
الشكل (٤-٢٤)



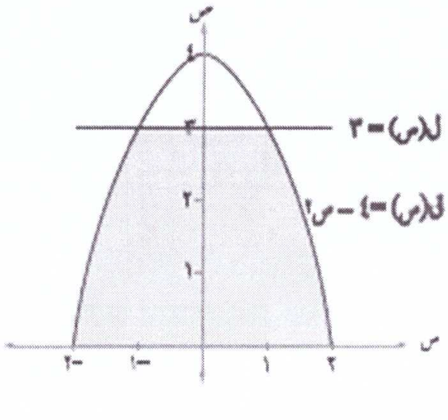
الشكل (٤-٢٥)



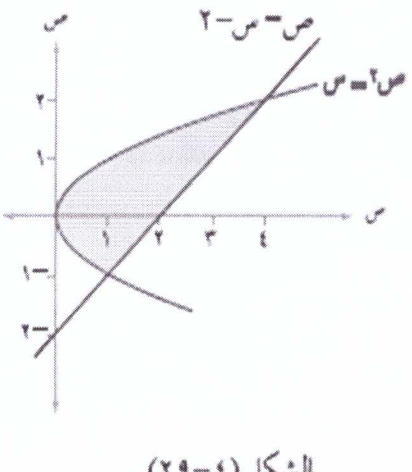
الشكل (٤-٢٦)



الشكل (٤-٢٧)



الشكل (٤-٢٨)



الشكل (٤-٢٩)

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية : هي المعادلات التي تحتوي على مشتقات أو تفاضلات

تكون على الشكل

هـ (ص) د ص = ل (س) د س

$\int$ هـ (ص) د ص = $\int$ ل (س) د س

خطوات الحل :

ايجاد علاقة تربط المتغير س مع المتغير ص

فصل السينات مع تفاضلتها والصادات مع تفاضلتها

تكامل الطرفين

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{\text{ص}}$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{ص}^{٤}}$$

مثال : إذا كان

$\sqrt{\text{س}}$ د ص = $\sqrt[٣]{\text{ص}}$ د س

جد ص بدلالة س عند (١ ، ١)

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

س^{٣} د ص – ص^{٢} د س = صفر

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{٢\ \text{د ص}}{١ - \text{س}} = (\,٢\,\text{س} + ١\,)\ \text{د س}$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

٢ جا^{٢} س د ص + ص^{٢} د س = ٢ د ص

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

جتـا^{٢} س د ص + ص د س = د ص

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

د س – ٣ د ص = جتـا س د س

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

د س + ٣ د ص = جتا س د س

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$\text{س}^{٣}$ د ص - $\text{ص}^{٢}$ د س = ٠

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية : (جد ص بدلالة س)

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$ ، س > صفر ، ص > صفر

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١ - ص + $\text{س}^{٢}$ − ص $\text{س}^{٢}$

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

د ص = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{(س / ٤)}}{\text{قا}^{٢}\text{(س / ٤)}}$ د س

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

($\text{س}^{٢}$ − ٣ س) د ص = $\text{هـ}^{-\text{ص}}$ ($\text{س}^{٢}$ + س − ١٢) د س

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$ د ص - $\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$ د س = صفر

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

($\text{س}^{٢}$ + ٣ س) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\text{هـ}^{-٢\text{ص}}$ (س + ١) ($\text{س}^{٢}$ − ٩)

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

د س + ٣ د ص = جتا س د س

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$\text{هـ}^{-\text{ص}}$ جـا س - $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ $\text{جتا}^{٢}$ س = ٠

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (س ، ص) يساوي (٣س^{٢} – ٢ س) ، جد قاعدة الاقتران ق علما بأن ق (٠) = ٣

مثال : إذا كان م هو ميل المماس لمنحنى ق عند أي لنقطة وكان $\frac{د م}{د س} = \frac{٢}{\sqrt{س}}$ بحيث س> ٠

فإذا مر منحنى الاقتران بالنقطة (٤ ، $\frac{٦٤}{٣}$) بحيث كان ميله عندها يساوي ١١ جد معادلة المنحنى

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\sqrt{٢ ص + ١}}{\sqrt{٣ س - ٢}}$ ، فجد قاعدة هذه العلاقة اذا علمت أن منحناه يمر بالنقطة (١ ، ٤)

مثال : يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = $\frac{١}{ع}$ ، ع > صفر ، ت : تسارع ، ع : سرعة

إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة مقدارها ١٠$\sqrt{٢}$ بعد مرور ٤ ثواني من حركته ، جد المسافة التي يقطعها بعد ثانية واحدة من بدء حركته

مثال : إذا كانت المشتقة الأولى لمنحنى هي (٢ س – ٢) ،وكانت القيمة الصغرى المحلية تساوي ٧ جد قاعدة الاقتران ق

يسير جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = ٢ $\sqrt{ع}$ حيث ع ≠ صفر ، ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته (٩) م/ ث فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوان من بدء حركته ، علما بأنه يقطع مسافة قدرها $\frac{٦٤}{٣}$ متر في أول ثانية من حركته

مثال : إذا كانت المشتقة الثانية قً (س) = ٢ عند أي نقطة (س ، ص) وكان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (١ ، ٣) يساوي ١٠ ، جد قاعدة الاقتران ق

يسير جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $ت = \sqrt{ع}$ حيث ع > صفر ، ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته (٩) م/ ث وقطع مسافة (٨٠) مترا في (٤) ثوان من بدء حركته ، فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء حركته

مثال : تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة $\frac{\text{د ت}}{\text{د ن}} = ٥ ن^{٤} + ٢٠ ن$ حيث ت : عدد البكتيريا، ن : الزمن بالثواني ، إذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي ٣٠ ، جد عددها بعد ٣ ثواني

مثال : قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) م/ث عن سطح الارض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م/ث وبتسارع مقداره (– ١٠) م / ث^{٢} ، جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود إلى سطح الارض

مثال : يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٠.٠٢٥\ ع$ ،حيث ع عدد السكان ،ن الزمن بالسنوات إذا علمت أن عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥) فجد عدد سكانها بعد (٤٠) عاما

مثال : قذفت كرة رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية ٦٤ م/ث من ارتفاع مقداره ٨٠ م جد معادلة الحركة لهذه الكرة إذا علمت أن تسارع الكرة يساوي – ٣٢ م / ث^{٢}

مثال : إذا كان تسارع جسيم بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = ٦ ن + ٤ ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة ، علما أن السرعة الابتدائية للجسيم ٢ م / ث ، وأنه قطع مسافة ٢١ م في أول ثانيتين من بدء الحركة

قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م / ث وبتسارع مقداره (- ١٠) م / ث^{٢} إذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية واحدة من بدء حركته يساوي (٨٠) مترا فجد أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س} + ١}$ حيث هـ العدد النيبيري ، فجد قاعدة العلاقة ص علما بأن منحناها يمر بالنقطة (٠ ، ١)

مثال : إذا كان ميل المماس لمحنى ق عند النقطة (س ، ص)

يساوي ، $\frac{\text{جا س} - \text{قا}^2 \text{س}}{3\ \text{ص}^2}$

جد قاعدة الاقتران ق علما بأن النقطة ($\frac{\pi}{4}$ ، ٤) نقع على منحناها

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{س هـ}^{(\text{س} + \text{ص}^2)}$

مثال : إذا كان ميل العامودي على المماس لمحنى ص هو

$\frac{3\ \text{ص}^2}{(2\ \text{س} + 1)^3}$ جد ص إذا كان منحنى ص يمر بالنقطة (٠،١)

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\text{ص}^2 \frac{\text{دص}}{\text{د س}} = \sqrt[3]{\text{س}^3 + \text{س}^5}$

مثال : إذا كان ميل العامودي على المماس لمحنى العلاقة ص

عند النقطة (س ، ص) يساوي $\sqrt{3 + \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

مثال : إذا كان ص = جا س هـ$^{\text{س}}$ أثبت أن

ص‴ – ٢ صَ + ٢ ص = صفر

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{\text{ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{قا}^4 \text{س ظا}^2 \text{س}}{\text{د ص}}$

مثال : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ص = (س – ١) هـ$^{\text{س}}$ + ٣ لـو س + ٢ عند النقطة (١ ، ٢)

آلة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار إذا كانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{\text{د ق}}{\text{د ن}} = \frac{-٥٠٠}{(\text{ن} + ١)^{٢}}$ ،

حيث ق : قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها ، فاحسب قيمة هذه الآلة بعد (٣) سنوات من شرائها

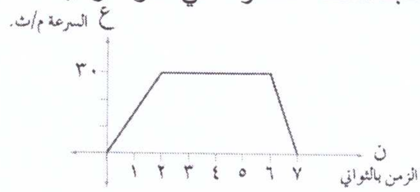
جد قيمة التكاملات الآتية :

$\int \frac{\text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤} \, \text{د س}$

$\int ٢\text{س} \, (\text{هـ})^{(٣\text{س} + ١)} \, \text{د س}$

$\int \text{قا س} \, \text{د س}$

يمثل الشكل المجاور العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم فجد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧]



$\int \text{س}^{٥} \, (\text{هـ})^{(\text{س}^{٣} + ١)} \, \text{د س}$

$\int ٣\text{س} \, (\text{هـ})^{(\text{س}^{٢} + ١)} \, \text{د س}$

ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الاصل على محور السينات وفقا للعلاقة ت = - ٤ $\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$ ، حيث ع > ٠ ، ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة (٤) سم/ث أثبت أن ف = ٢ ن $\sqrt{\text{ع}}$

$\int \sqrt[٣]{\text{هـ}^{٣\text{س}} - \text{هـ}^{٤\text{س}}} \, \text{د س}$

$\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} \, \text{د س} = \int \text{ظتا س} \, \text{د س}$

جد قيمة التكاملات الآتية :

$\int_{١}^{هـ} \text{لــو س} \; \text{دس}$

$\int \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}} \; \text{دس}$

$\int_{هـ} \text{س لــو س} \; \text{دس}$

$\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}} \; \text{دس}$

$\int_{هـ} \text{س}^{٥} \; \text{لــو س}^{٣} \; \text{دس}$

$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{٥ - س} \sqrt[٣]{\text{س}}} \; \text{دس}$

$\int \text{لــو س}^{\text{س}} \; \text{دس}$

$\int \frac{١}{\text{س لــو س}} \; \text{دس}$

$\int \frac{\text{١ + ظتا س}^{٢}}{\text{ظتا س}} \; \text{دس}$

$\int \frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا س}} \; \text{دس}$

$\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} \sqrt{\text{س}} + ١} \; \text{دس}$

$\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}} \; (٢ + \sqrt{\text{س}})} \; \text{دس}$

$\int \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}} \; \text{دس}$

جد كلا من التكاملات الآتية :

$\int_{2}^{3} \sqrt{4س + 1}\ دس$

$\int \sqrt[3]{2س^{5} - س^{2}}\ دس$

$\int \frac{س\ قا^{2}س - س\ ظا^{2}س}{\sqrt[3]{س}}\ دس$

$\int_{0}^{1} \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س} + 2هـ^{س} + 1}\ دس$

$\int \frac{\sqrt{س^{2} - س^{4}}}{س^{5}}\ دس$

$\int جا(لو_{هـ}س)\ دس$

$\int ظتاس\ لو_{هـ}جاس\ دس$

$\int \frac{س^{3}}{2س^{4} + س^{8}}\ دس$

$\int (س^{8} - 4س)^{6}\ دس$

$\int \frac{\sqrt{4س + 12} - 3}{\sqrt{س + 3} + 3}\ دس$

$\int قا^{4}س\ لو_{هـ}ظاس\ دس$

$\int لو_{هـ}(س^{2} + 2س)\ دس$

حل المعادلة التفاضلية $٣ \text{ ظا ص} - \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \text{ قا س} = ٠$

إذا كان $ص^{٢} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{ س ص} - \text{هـ}^{س^{٢}}$ فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

إذا كان م (س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق (س) وكان

$\int_{-١}^{٣} (\text{م}(س) - \text{هـ}(س)) \text{ د س} = ١٢$ فجد

$\int_{٠}^{٤} ٢ \text{ س م}(س) + \int_{٤}^{٠} ٢ \text{ س هـ}(س) \text{ د س}$

إذا كان

$\int_{٣}^{١} (٢ \text{ ق}(س) + \int_{٠}^{٢} ٢ \text{ م د م}) \text{ د س} = ١٤$ فجد

$\int_{١}^{٣} ٢ \text{ ق}(س) \text{ د س}$

إذا كان

$\text{ق}(س) = س^{-٢} - \int (٣ س^{٢} - \int_{٠}^{١} ٢ \text{ ص د ص}) \text{ د س}$

فجد $\text{قَ}(س)$

إذا كان

$\int_{-١}^{١} (٤ \text{ ق}(س) + ٣) \text{ د س} = ١٨$ ، $\int_{١}^{٤} ٢ \text{ ق}(س) \text{ د س} = ٢٠$

فجد $\int_{٤}^{-١} (٢ س - \text{ق}(س)) \text{ د س}$

يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = أ \sqrt[٣]{ع}$

$ع > ٠$ ، حيث ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، إذا تحرك الجسيم من السكون فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته (٨)سم/ث بعد (٣) ثوان من بدء الحركة

اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\sqrt{\text{هـ}^{ص}}}{١ - \text{جتا}^{٢} س}$ ، فجد قاعدة العلاقة ص علما بأن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٠)$

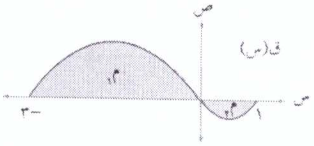
جد مساحة المنطقة المحصورة في الربع الاول والمحدودة بمنحنى الاقتران $\text{ق}(س) = ٤ - س^{٢}$ ومحور الصادات والمستقيمين $ص = س - ٢$ ، $ص = ٦ - س$

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية :

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} - ٢$ ، $\text{ل}(\text{س}) = ٣$

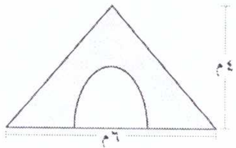
اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) في الفترة [- ٣ ، ١] حيث $\text{م}_١ = ١٠$ وحدات مربعة ، $\text{م}_٢ = ٤$ وحدات مربعة فجد

$\int_{٠}^{٢} \text{س ق}(١ - \text{س}^٢)\, \text{د س}$

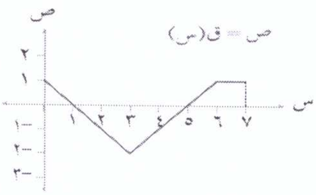


الشكل المجاور يمثل الواجهة الامامية لأحد المباني ، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢$

ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة اغذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار



اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) في ايجاد كل مما يأتي :



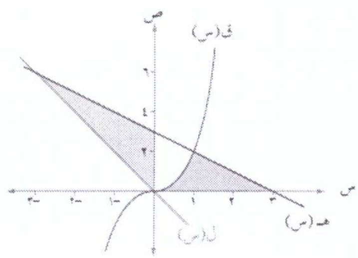
$\int_{٠}^{٧} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س}$

$\int_{٠}^{٧} |\text{ق}(\text{س})|\, \text{د س}$

$\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س}\right|$

جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين في الشكل المجاور حيث

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^٣$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٣ - \text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = -٢\text{س}$



جد كلا من التكاملات الاتية :

$\int$ جا $\sqrt{س}$ جتا^{٣} $\sqrt{س}$ د س

$\int \frac{\text{س + جاس}}{\text{١ + جتا س}}$ د س

$\int$ س^{٣} $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ د س

$\int \frac{\text{٤ لـو س}}{\text{(س - ١)}}$ د س

$\int_{٠}^{٣\pi/٤} \frac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{ س - ٣ ظاس + ٢}}$ د س

$\int$ (ظا س + قا س)^{١٠} قا س د س

$\int \frac{\text{ظتاس قتاس}}{\text{٩ – ٤ قتا}^{٢}\text{ س}}$ د س

$\int_{٠}^{٢}$ س^{٤} هـ$^{\text{س}^{٣} + \text{لـوس}_{هـ}}$ د س

$\int$ جا ٣ س قتا س د س

$\int \frac{\text{٢ جا ٣ س جتا س}}{\text{جتا ٢ س}}$ د س

يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة (٤) بدائل واحد فقط منها صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :

(١) اذا كان ق (س) اقترانا متصلا على مجاله وكان

$\int$ ق (س) د س = هـ$^{\text{جا٢س}}$ - لـو جتا س – ١ فإن ق(٠) =

أ) ١ ب) هـ جـ) ٢ هـ د) ٢

(٢) إذا كان $\int$ ق(س) د س= س^{٥} + جا س + ٣ فإن ق (س) =

أ) ٥ س^{٤} + جتا س ب) $\frac{١}{٦}$ س^{٦} – جتا س + ٣ س + جـ

جـ) ٥ س^{٤} - جتا س د) $\frac{١}{٦}$ س^{٦} – جتا س

(٣) اذا كان ق اقترانا معرفا على الفترة [- ١ ، ٢] وكان ١ $\leq$ ق (س) $\leq$ ٤ فما أكبر قيمة للمقدار

$\int_{-١}^{٢}$ ٢ ق (س) د س هي :

أ) ٦ ب) ٢٤ جـ) ٣ د) ١٢

(٤) $\int_{-٢}^{٣}$ ٢ ق (س) دس = ١٠ ، $\int_{-٢}^{١}$ ٢ ق (س) دس = ٤

فإن $\int_{١}^{٣}$ (٢ ق (س) + ٣) دس هي :

أ) ٥ ب) ١٤ جـ) ٨ د) ٢٤

(٥) $\int_{أ}^{ب}$ قَ (هـ (س)) × هـَ (س) دس يساوي

أ) ق (ب) – ق (أ) جـ) ق (هـ (ب)) – ق (هـ (أ))

ب) قَ (ب) – قَ (أ) د) قَ (هـ (ب)) – قَ (هـ (أ))

(٦) اذا كان م (س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق وكان $\int_{-١}^{٢}$ م (س) – هـ (س) دس = ١٢ فما قيمة

$\int_{-١}^{٢}$ س (م (س) – هـ (س)) دس

أ) ٣ ب) ٤.٥ جـ) ١٢ د) ١٨

(٧) اذا كان $\int_{١}^{هـ}$ س ق (س) دس = ٤ فما قيمة

$\int_{١}^{٢}$ هـ^س ق (هـ^س) دس

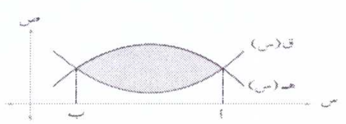
أ) ١ ب) ٨ جـ) ٢ د) ٤

(٨) اذا كان ق (س) = هـ^{٢} + لــو جــا س فإن قَ (س) =

أ) ظتا س ب) – ظتا س جـ) ٢ هـ + ظتا س د) هـ^{٢} + ظتا س

(٩) معتمدا على الشكل المجاور اذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق ، هـ تساوي (٦) وحدات مربعة وكان

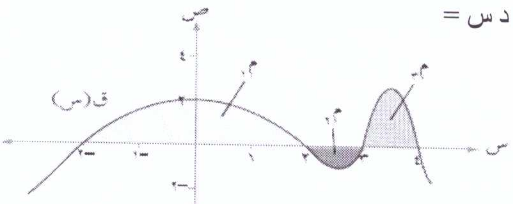
$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) دس = ١٠ فان قيمة $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) دس =



أ) ١٠ ب) ٦ جـ) ١ د) - ٤

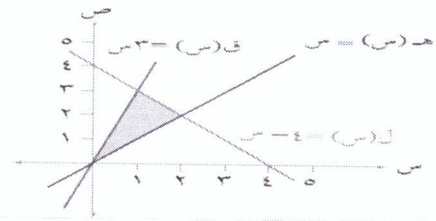
(١٠) معتمدا على الشكل المجاور الذي يبين المساحة بين منحنى ق (س) ومحور السينات اذا علمت أن م$_{١}$ = ٤.٨ وحدة مربعة م$_{٢}$=٠.٨ وحدة مربعة فإن

$\int_{-٢}^{٤}$ ق (س) د س =



أ) ٥.٦ ب) ٦ جـ) ٦.٨ د) ٧.٦

(١١) معتمدا على الشكل المجاور ما مساحة المنطقة المظللة



أ) $\int_{٠}^{١}$ (٣ س – س) د س

ب) $\int_{٠}^{١}$ ٢ س د س + $\int_{١}^{٢}$ (٤ - ٢ س) د س

جـ) $\int_{٠}^{١}$ ٢ س د س + $\int_{١}^{٢}$ (٤ – س) د س

د) $\int_{١}^{٢}$ (٣ س – س) د س

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

عبد الغفار الشيخ