لا تنتظر وقتاً إضافياً .... لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .... اجعل هدفك ليس النجاح فقط بل التفوق والتميز

إهداء إلى روح والداي
غفر الله لهما وجعلهما
من أهل الجنة

الرياضيات العلامة الكاملة

المستوى الثالث - الفرع العلمي

$\frac{\text{دص}}{\text{د س}} =$

وحدة النهايات والاتصال

(الكتاب ، أسئلة مقترحة)

إعداد الأستاذ

$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{٥ - س}] & \text{، س > أ} \\ |\text{س - ١}| & \text{، س < أ} \end{cases}$

عبد الغفار الشيخ

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ رياضيات + حاسوب ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{س جا س - ظا ٢ س}}{(\text{جا ٣ س}) - \text{٥س}}$

مقدمة : الاقترانات الأكثر أهمية في المستوى الثالث

الاقترانات كثيرة الحدود

الصورة العامة لها

ق (س) = $أ_ن$ س ^{ن} + $أ_{ن-١}$ س $^{ن-١}$ + ... + أ س + $أ_٠$

أشهر الاقترانات كثيرة الحدود :

- الاقتران الثابت : ق (س) = جـ ، مداه جـ (الثابت)
- الاقتران الخطي : ق (س) = أ س + جـ
- الاقتران التربيعي : ق (س) = أ س ^{٢} + ب س + جـ
- الاقتران التكعيبي : ق (س) = أ س ^{٣} + ب س ^{٢} + جـ س + د
- خصائص اقتران كثير الحدود .... ، مجاله ح و مداه ح
- التمثيل البياني لاقتران كثير الحدود
- إيجاد نقاط تقاطع الاقتران مع محور السينات (أصفار لاقتران)

قوانين مهمة :

س ^{٢} – ص ^{٢} = (س – ص) (س + ص)

(س – ص) ^{٢} = س ^{٢} – ٢ س ص + ص ^{٢}

(س + ص) ^{٢} = س ^{٢} + ٢ س ص + ص ^{٢}

س ^{٣} – ص ^{٣} = (س – ص) (س ^{٢} + س ص + ص ^{٢})

س ^{٣} + ص ^{٣} = (س + ص) (س ^{٢} - س ص + ص ^{٢})

(س + ص) ^{٣} = س ^{٣} + ٣ س ^{٢} ص +٣ س ص ^{٢} + ص ^{٣}

(س - ص) ^{٣} = س ^{٣} - ٣ س ^{٢} ص + ٣ س ص ^{٢} - ص ^{٣}

س ^{ن} – ص ^{ن} = (س – ص)(س $^{ن-١}$ + س $^{ن-٢}$ ص + س $^{ن-٣}$ ص ^{٢} + ... + ص $^{ن-١}$)

مثال : حلل الاقترانات التالية :

ق (س) = ٥ س ^{٣} – ١٥ س ^{٢} + ١٠ س

ق (س) = ٢٥ س ^{٢} – ٣٦

ق (س) = ٢ س ^{٣} – ١٦

ق (س) = ع ^{٣} س ^{٤} - س

ق (س) = س ^{٢} + ٩ س + ١٨

ق (س) = س ^{٢} + ٦ س - ٧

ق (س) = ٣ س ^{٢} + ١٠ س - ٨

ق (س) = (س ^{٣} - ٢ س ^{٢} - ٥ س + ٦) على (س – ٣)

ق (س) = (س ^{٣} - ٣ س ^{٢} - ٤ س + ١٢) على (س – ٢)

مثال : باستخدام خوارزمية القسمة جد ناتج وباقي قسمة الاقتران

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢$ على $\text{هـ(س)} = \text{س} + ٢$

مثال : حلل المقادير الجبرية التالية

$\frac{١}{٢٥} - \text{س}^{٢}$

$٩\,\text{س}^{٢} - ١٦\,\text{ص}^{٢}$

$(\text{س} + ٢)^{٢} - ٩$

$٨\,\text{س}^{٣} - ٢٧$

$\frac{١}{٢٧} - \text{س}^{٣}$

$\frac{١}{٨}\,\text{ص}^{٣} + \frac{١}{٦٤}\,\text{س}^{٣}$

$١٦\,\text{س} + \frac{٢\,\text{س}^{٤}}{٢٧}$

$٢\,\text{س}^{٣} + \frac{١}{٤}$

$٤\,\text{س} - ٥$

$\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}$

$٣\,\text{س}^{٣} - ١٢\,\text{س}$

$٥\,\text{س}^{٢} - \frac{٤\,\text{ص}^{٢}}{٥}$

$(٥\,\text{س} + ٤)^{٢}$

$\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} + ٢٤$

$٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٥$

$\text{ق(س)} = ٢\,\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣$ على $(\text{س} - ١)$

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

الاقترانات النسبية

الاقتران النسبي = $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ ، المقام $\neq$ صفر

ق (س) = $\frac{\text{هـ (س)}}{\text{م (س)}}$ ، م (س) $\neq$ صفر

مجاله مجموعة الاعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام

ق (س) = $\frac{س^٢ - ٤ س + ٣}{س^٢ - ٩}$

ق (س) = $\frac{س^٣ - ٤ س}{س^٢ - ٤س + ٤}$

ق (س) = $\frac{س^٣ - ٢ س^٢ - ٣ س}{س^٣ - ٢٧}$

ق (س) = $\frac{٤ س^٢ + ٨ س + ٤}{٥ س^٢ + ١٠ س + ٥}$

ق (س) = $\frac{١}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} - \frac{٩}{س^٢ - ٤}$

ق (س) = $\frac{س^٢}{س - س^٣} + \frac{س}{١ - س^٢}$

ق (س) = $\left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^٢ - ٢٥}\right)$

ق (س) = $\frac{١}{س}\left(\frac{١}{٥ + س} - \frac{١}{٥ - س}\right)$

ق (س) = $\frac{١}{٣ س^٢ - س - ١٤}\left(\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{٢ س + ٥}\right)$

الاقتران المتشعب : وهو الاقتران المعرف بأكثر من قاعدة

أنواعه : الصريح ، القيمة المطلقة ، أكبر عدد صحيح

مثال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٣ - ١ & ، \quad س < ١ \\ ٤ - ٣ س & ، \quad س > ١ \\ س & ، \quad س = ١ \end{cases}$

نرسم كل قاعدة لوحدها مع الأخذ بعين الاعتبار التعويض في قاعدة الاقتران المطلوبة

اقتران القيمة المطلقة | | :

أعد تعريف الاقترانات التالية ومثلها بيانيا

- ق(س) = |٥ س - ١٥|

- ق(س) = ٥ - |٢ - ٢ س|

- ق(س) = |١- س| + |س| ، س ∈ [-٢ ، ٤]

- ق(س) = |س^{٢} - ٢ س| ، س ∈ [١ ، ٤]

- ق(س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٣ & ، س = ٠ \end{cases}$

- ق(س) = |س^{٢} + ٦ س + ٥|

- ق(س) = ٣|س - ٢| + |س|

ملاحظة مهمة :

شكل آخر لاقتران القيمة المطلقة :

$\sqrt{س^{٢}}$ =

$\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ =

$\sqrt{(س^{٢} - ٤ س + ٤)}$ =

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة التالية :

|س - ٤| = ١٠

|٢ س - ٤| = ١٢

مثال : حل المتباينة التالية :

|س - ٢| > ٦

|س - ٥| < ٤

عبد الغفار الشيـخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

اقتران أكبر عدد صحيح [ ]

قاعدة : [س] = ن

ن ≤ س < ن + ١

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة : [٣ س - ٤] = ٢

مثال : أعد تعريف الاقترانات التالية ؟

- ق (س) = [س - ٣] ، س ∈ [-١ ، ٢]
- ق (س) = [٣ − س] ، س ∈ [-١ ، ٢]
- ق (س) = س + [س + ٠.٢] ، س ∈ [١ ، ٣]
- ق (س) = س^{٢} [٢ − $\frac{\text{س}}{٣}$] ، س ∈ [-٣ ، ٦]

ق (س) = [$\frac{\text{س}}{٢}$] ، س ∈ [-٢ ، ٥]

ق (س) = س^{٢} [س] س ∈ [-١ ، ٢]

ق (س) = [س + ٢] + ٤ | س − ٢ | ، س ∈ (٠ ، ٢)

ق (س) = $\frac{[\text{س}]}{|\text{س}|}$ س ∈ [-٤ ، ٤]

ق (س) = $\frac{\sqrt{(\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٤)}}{|\text{س} - ٢|}$ =

عبد الغفار الشيـــخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

النهـــايــــات

يستخدم مفهوم النهاية في وصف سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير من عدد معين

النهاية عند نقطة : هي القيمة التي يقترب منها الاقتران ق (س) عندما تقترب س من قيمة معينة أ وتكتب على الصورة $\underset{س \to أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل

تقرأ نهاية ق (س) عندما س تقترب من أ تساوي ل

هنا س لا تساوي أ إنما قريبة جداً من أ لذا نقوم بأخذ قيمة قريبة جدا من أ من جهة اليمين وقيمة قريبة جدا من جهة اليسار

أي أنه إذا كانت

$\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل

فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) موجودة $\underset{س \to أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل

***طرق إيجاد النهاية (الجدول ، الرسم ، التعويض)**

أولاً : الجدول : تعتمد على أخذ قيم يسار ويمين العدد ومقارنتها حسب تعريف النهاية

مثال: أدرس سلوك الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ عندما تقترب س من العدد ٥

س

س								
ق(س)								

ص

أوجد :

$\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)= $\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٥}{\text{نهــا}}$ ق(س) =

ملاحظة إذا كانت

$\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = غ . م

مثال :إذا علمت أن $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =٨ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =٤

أوجد $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

مثال : إذا علمت أن $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٦ فإن

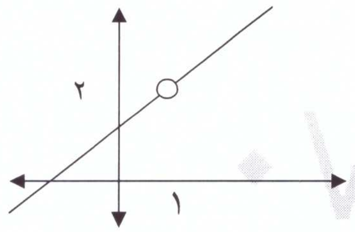
$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ، $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق (س) =

مثال : ليكن ق (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ حيث س $\neq$ ١

أدرس قيم ق (س) عندما س تقترب من ١

س								
ق(س)								

أوجد $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهــا}}$ ق (س)



مثال : بالاعتماد على الجدول التالي أوجد $\underset{س \to ٥}{\text{نهــا}}$ ق (س)

٥

س	٥.١	٥.٠١	٥.٠٠١		٤.٩٩	٤.٩٨	٤.٩
ق(س)	٢.١	٢.٠١	٢.٠٠١		٣.٩٩	٣.٩٨	٣.٩

إيجاد النهاية عند نقطة أ عن طريق الرسم :-

نأخذ قيمة صغيرة جداً جـ عن يمين أ وعن يسارها على **محور السينات** (أ + جـ ، أ – جـ) وليس بالضرورة أن يكون الاقتران معرف عند هذه النقطة أ ،ونجد قيم الاقتران لكل منها على **محور الصادات** وننظر إذا اقتربت القيمتان من اليمين واليسار **إلى نفس العدد** عندها تكون النهاية موجودة أما إذا اقتربت القيمتان من اليمين واليسار إلى عددين مختلفين فنقول أن النهاية غير موجودة.

مثال : إذا كان ق (س) = $\dfrac{\text{٤ - س}^{٢}}{\text{س - ٢}}$ ، س ≠ ٢

ارسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد

١) $\underset{\text{س} \to \text{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق (س) =

٢) $\underset{\text{س} \to \text{٢}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق (س) =

٣) $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}}$ ق (س) =

إذا كان

$$\text{ل (س) = } \begin{cases} \text{٢ س + ١} & \text{، س} \in \text{ص} \\ \text{س}^{٢} \text{ + ٤} & \text{، س} \notin \text{ص} \end{cases}$$

حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة

جد $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

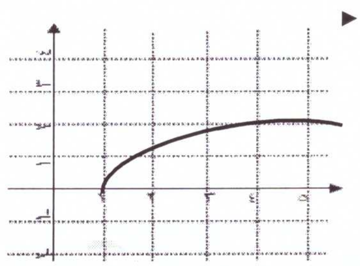
إذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س − ١}}$ جد مجاله ثم

ارسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد إن أمكن ما يلي :

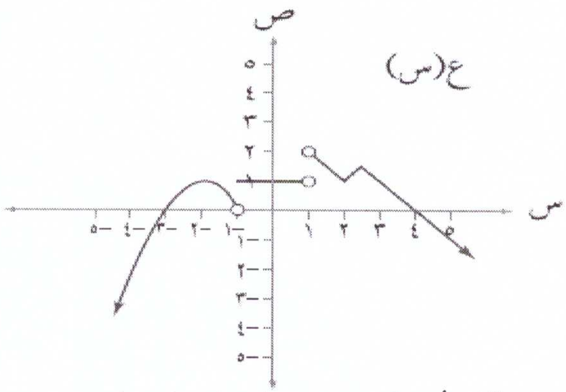
١) $\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

٢) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

٣) $\underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =



معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ع ،جد كلاً مما يأتي



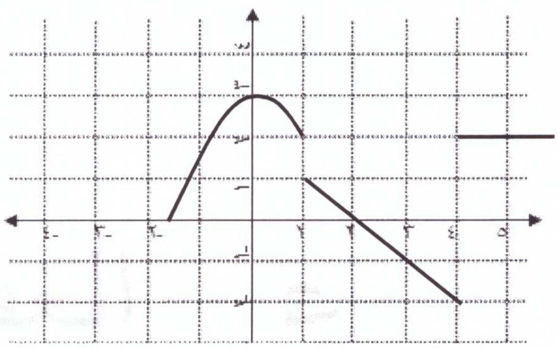
أ) مجموعة قيم أ حيث $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ع (س) = ١

ب) مجموعة قيم جـ حيث $\underset{\text{س} \to \text{جـ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ع (س) = ١

جـ) مجموعة قيم ك حيث $\underset{\text{س} \to \text{ك}}{\text{نهـا}}$ ع (س) غير موجودة

د) مجموعة قيم ل حيث $\underset{\text{س} \to \text{ل}}{\text{نهـا}}$ ع (س) = صفر

الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) جد ما يلي:



١) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

٢) $\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

٣) $\underset{\text{س} \to \text{٤}}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

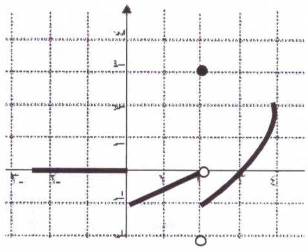
في حالة القفز تكون النهاية غير موجودة

من الشكل التالي جد النهايات الآتية :-

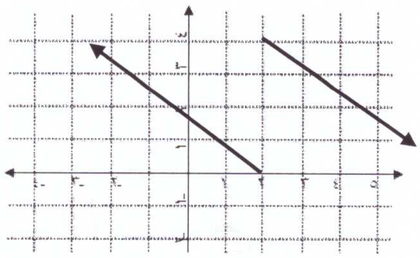
١) نهـــا ق (س) =
س ← ٠

٢) نهـــا ق (س) =
س ← ٢

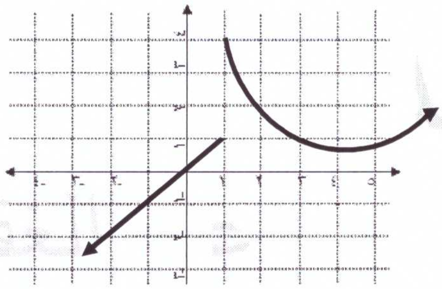
٣) نهـــا ق (س) =
س ← ٣



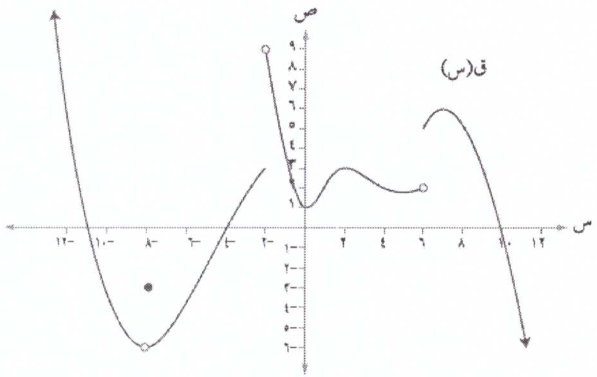
من الشكل التالي جد نهـــا ق(س)
س ← ٢



من الشكل التالي جد قيم أ التي تكون عندها النهاية غيرموجودة



مثال: اعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)المعرف على ح جد كلا مما يأتي :



١) نهـــا ق (س) =
س ← ٦+

٢) نهـــا ق (س) =
س ← ٦-

٣) نهـــا ق (س) =
س ← ٠

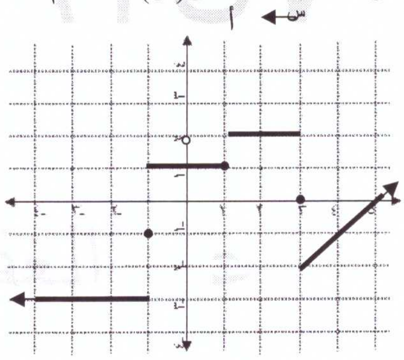
٤) نهـــا ق (س) =
س ← ٢-

٦) نهـــا ق (س) =
س ← ٨-+

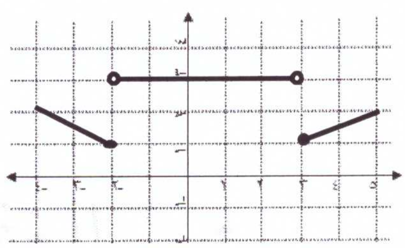
٧) نهـــا ق (س) =
س ← ٨--

٨) نهـــا ق (س) =
س ← ١٠

من الشكل التالي أدرس سلوك نهـــا ق(س) ، جد قيم أ التي تكون عندها النهاية غير موجودة
س ← أ



إذا كانت نهـــا ق(س) = ٣ جد قيمة أ
س ← أ-



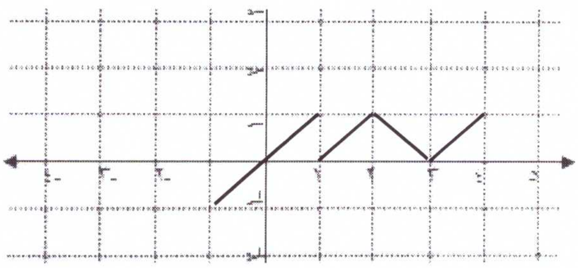
اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق (س) جد

نهــــا ق (س) =
س ← ١

نهــــا ق (س) =
س ← ٢

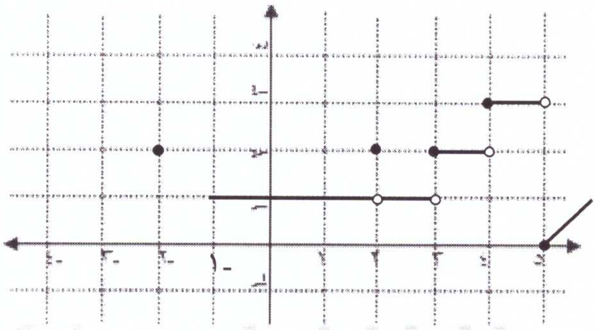
نهــــا ق (س) =
س ← ٣

نهــــا ق (س) =
س ← ٠



اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق (س) جد

مجموعة قيم أ حيث أن نهــــا ق (س) = ٢
س ← أ



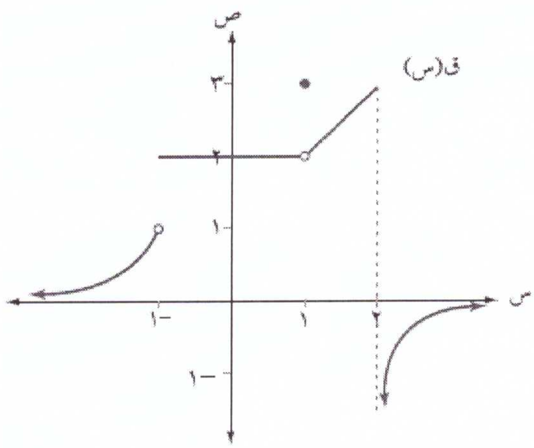
اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ق (س) جد

نهــــا ق (س) =
س ← ١

نهــــا ق (س) =
س ← -١

نهــــا ق (س) =
س ← ٠

نهــــا ق (س) =
س ← -٢



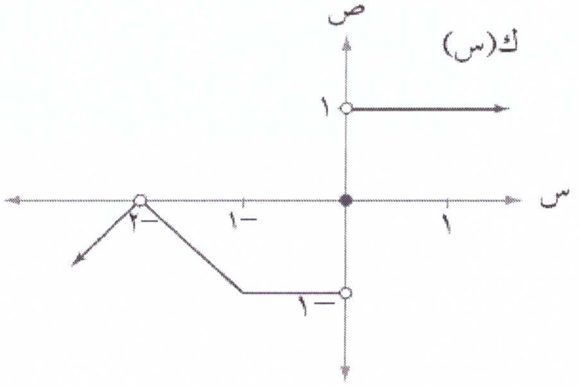
اعتمادا على الشكل التالي والذي يمثل اقتران ك (س) جد

نهــــا ك (س) =
س ← -٢

نهــــا ك (س) =
س ← -١

نهــــا ك (س) =
س ← ٠

نهــــا ك (س) =
س ← ١



نظريات في النهايات

١) $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ جـ = جـ$ نهاية الثابت = الثابت نفسه

٢) $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ س = أ$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ س^{ن} = أ^{ن}$

٣) تتوزع النهاية على جميع العمليات

إذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) \ \pm \ \times \ \div \ هـ(س)$ فإن

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) \ \pm \ \times \ \div \ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س)$ حيث المقام لا يساوي صفر

٤) $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ م\,ق(س) = م \times \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ م\,ق(س)$

٥) $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ \sqrt{ق(س)} = \sqrt{\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ م\,ق(س)}$

٦) إذا كان ق (س) اقتران كثير حدود فإن

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(أ)$

جد قيمة ١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (س^{٢} + ٤س - ٢)$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤س - ٦$

إذا كان ق (س) = ٢ س ، هـ (س) = $س^{٣} + س$

جد كل مما يأتي :

١) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\ (ق(س) + هـ(س) \times س)$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ (\sqrt{ق(س)} + ٣\sqrt{هـ(س)}) + ١٥$

مثال : إذا علمت أن

- $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(٢س + ١) = ٤$ أوجد

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ٣ق^{٢}(س) - ٢س + ١$

إذا كانت $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٢ع(س) = ١٠$

وكانت $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٣ل(س) + ١ = ٧$ أوجد

١. $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (٢ع(س) + ل(س))$

٢. $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (ع^{٣}(س) - ل^{٢}(س))$

٣. $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)}$

٤. $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (ع^{٢}(س) - ل^{٢}(س))$

إذا كانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ جد قيمة

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} =$

إذا كانت هـ كثير حدود وكانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{هـ(س) + ٥}{س} = \dfrac{١}{٢}$

وكانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ (هـ(س) - ٥ + ٣جـ) = ٢$ جد قيمة جـ

نهاية إقترانات كسرية

الاقتران النسبي : نقوم بالتعويض المباشر للنقطة فإذا كان :

١) ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ فالنهاية موجودة وهي نفس الناتج

٢) إذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ فالنهاية موجودة وتساوي ٠

٣) إذا كان ناتج التعويض <u>صفر</u> أو <u>عدد</u> نجهز

٤) إذا كانت $\lim\limits_{س \to أ} ق(س) = ل$ حيث ل عدد حقيقي ، ل $\neq$ ٠

$\lim\limits_{س \to أ} هـ(س) =$ صفر فإن $\lim\limits_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ غير موجودة

جد قيمة النهايات التالية :

$$\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^٢ + ٥}{س^٤ + ١}$$

إذا كان $ق(س) = \frac{(س^٢ + ٥)}{س^٢ - ٥س + ٦}$

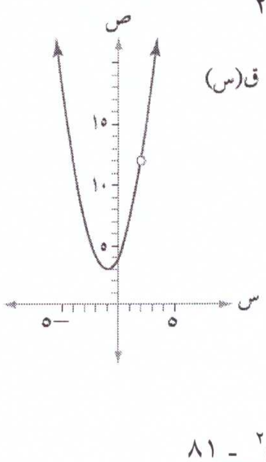
جد قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ غير موجودة

جد قيمة $\lim\limits_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥}$

إذا كان $ق(س) = \frac{(س^٣ - ٨)}{س - ٢}$ جد كلّ مما يأتي

١) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$ بيانيا

٢) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$ جبريا



مثال : جد قيمة كل مما يلي :

- $\lim\limits_{س \to ٨} \frac{(س + ١)^٢ - ٨١}{س - ٨}$

$$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س - ١)^٤ - ١٦}{س - ٣}$$

$$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س + ٢)^٢} - \frac{١}{٤}\right)$$

$$\lim\limits_{س \to ٥} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^٢ - ٢٥}\right)$$

$$\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{س^٤ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١}\right)$$

إذا كان $ق(س) = ٢س^٢ - س - ٦$ ،

$ل(س) = س^٣ - ٢س - ٣$ جد كلا من الآتي :

١) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) + ل(س)$

٢) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) \times ل(س)$

٣) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{ق(س)}{ل(س)}$

٤) $\lim\limits_{س \to ٢} (ل(س))^٤$

٥) $\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)}$

٦) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

جد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٣ - ٨}$$

• $$\lim_{س \to ٠} \frac{٦٤^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}} =$$

$$\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س}{س - ٣} - \frac{١٨}{س^٢ - ٩} \right)$$

اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{م س^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

أوجد قيمة الثابتين م ، ب

$$\lim_{س \to -٢} \frac{١}{٣س^٢ - س - ١٤} \left(\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{٢س + ٥} \right)$$

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد قيمة النهايات في كل مما يلي :

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أس^٢ + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

• $$\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٣ - ٣س^٢ + ٤)}{س^٢ - ٤س + ٤}$$

• $$\lim_{س \to ١} \frac{(س^٤ - ٢س^٢ + ١)}{س^٣ - ١}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢^{س+٢} - ١٦}{٤^{س} - ١٦} =$$

• $$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٧^{س} - ٤٩^{س}}{١ - ٧^{س}} =$$

حالة توزيع البسط على المقام

اوجد قيمة النهايات فيما يلي :

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}}{س-١} =$$

• $$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{س+هـ} - \frac{١}{س}}{هـ} =$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٤} + \frac{١}{-٤+س}}{س}$$

$$\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٧} - \frac{١}{س+١}\right)\left(\frac{١}{٦-س}\right)$$

$$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س-٤}{\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}} =$$

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{س}{٩-س^٢} + \frac{٣س}{س^٣-٩س}\right)$$

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢}}{س^٢-١} =$$

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(٢س+١)^٣ - ١٢٥}{٢ + س^٢(س-٢) - س} =$$

إذا كانت $\underset{س \to م}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{ب}{جـ}$

فهل من الضروري أن يكون

$\underset{س \to م}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ب$ ، $\underset{س \to م}{\text{نهـا}}\ ق(س) = جـ$

وضح إجابتك بأمثلة

جد قيمة النهايات التالية :

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س-٢} =$$

عبد الغفار الشيـــخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

$\sqrt[\text{ن}]{\text{ق}(\text{س})}$ **الاقتران الجذري** : وهو نوعان

الدليل فردي : يكون معرف دائما عند جميع الأعداد الحقيقية سواء كان ناتج تعويض ما داخل الجذر سالبة أو موجبة أو صفر دائما النهاية موجودة

الدليل زوجي :إذا كان ناتج تعويض ما داخل الجذر موجب فالنهاية موجودة ، سالب النهاية غير موجودة ، صفر بحاجة إلى أخذ النهاية من يمين الصفر ويساره

مثال : جد النهايات التالية

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٥} \sqrt[٣]{\text{س}+٣}$

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{-}٨} \sqrt{\text{س} - ٧}$

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{-}٥} \sqrt{٥ - \text{س}}$

جد قيم جـ التي تجعل $\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{جـ}} \sqrt{٦ - \text{س}}$ غير موجوده

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{+}٣} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢}{٢ + \sqrt{\text{س} - ٣}} =$

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{+}١} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢} + ٥\text{س}$

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{+}١} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٢}{٤ + \sqrt{\text{س} - ١}} =$

جد $\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{+}٥} \dfrac{\text{س} + ٥}{\sqrt{\text{س} - ٥} + ٢\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٥$

- $\text{نهـا}_{\text{س} \to ^{+}٤} \sqrt{\dfrac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س} - ٤}} =$
- جد $\text{نهـا}_{\text{س} \to ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ ، $\text{س} \neq ١$
- $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٥} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥} =$
- $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٧} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥} =$
- جد $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\sqrt{٤ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

حالة الضرب بالمرافق

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س} + ٦} - ٣}{\text{س} - ٣} =$$

مثال : جد قيمة النهاية إذا كانت

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}} - \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}}$$

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{٦ - \text{س}\sqrt{\text{س} + ١}}{٩ - ٣\text{س}} =$$

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨} =$$

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{٢ - \sqrt{\text{س} + ١}} =$$

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ١} =$$

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١}{٢ - \sqrt{\text{س} + ٣}} =$$

$$\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢ + \sqrt[٣]{\text{س}}} - ٢}{\text{س} - ٨} =$$

مثال : أوجد

$$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ١} - ٢}{١ - \sqrt{\text{س}}} =$$

$$\underset{\text{س} \to -٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١ - \text{س}} - ٣}{٢ + \sqrt[٣]{\text{س}}}$$

عبد الغفار الشيـــخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

- $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^2 + 9} + \sqrt[3]{2\text{س}} - 7}{\text{س} - 4} =$

- $\underset{\text{س} \to 6}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 2} + \sqrt{\text{س} + 3} - 5}{\text{س} - 6} =$

- $\underset{\text{س} \to 7}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 1} - 2}{\text{س} - 7} =$

- $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 3}{\text{س}^2 - 1} =$

عبد الغفار الشيــخ

- $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} - \sqrt{\text{س} + 3} + 1}{\text{س} - 1} =$

- $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}}\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} =$

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

- $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - 1}{\sqrt[3]{\text{س}} - 1} =$

- $\underset{\text{س} \to 8}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}{\frac{\text{س}}{2} - 4} =$

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

- $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} + \sqrt{\text{س} + 3} - 3} =$

- $\underset{\text{س} \to -8}{\text{نهــا}} \dfrac{2 + \sqrt[3]{\text{س}}}{3 - \sqrt{1 - \text{س}}} =$

- $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + 3} - \sqrt[3]{\text{س} + 7}}{\text{س} - 1} =$

الاقتران المتشعب : وهو الاقتران المعرف بأكثر من قاعدة ونعتمد في هذه الحالة على النقطة المراد إيجاد النهاية عندها فإذا كانت

- نقطة عادية : نعوض مباشرة في القاعدة المقابلة لها
- نقطة تشعب :نجد النهاية من اليمين ومن اليسار ثم نحكم على وجود النهاية .

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ - ١ &، س > ٢ \\ ٥ + س &، س < ٢ \\ س^٣ + ٥ &، س = ٢ \end{cases}$

فما قيمة كل من النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٢} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to ٤} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to -١} ق(س) =$

$ق(٢) =$

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٢٧س^٣ + ١}{٣س + ١} &، س \neq \frac{-١}{٣} \\ ٣ &، س = \frac{-١}{٣} \end{cases}$

احسب $\lim_{س \to \frac{-١}{٣}} ق(س) =$

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ٢ &، س > -١ \\ ٢س - ١ &، س \leq -١ \end{cases}$

فما قيمة كل مما يأتي :-

١) $\lim_{س \to -١} ق(س) =$

٢) $\lim_{س \to ١} ق(س) =$

٣) $\lim_{س \to -٢} ق(س) =$

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س^٢ + م &، س > ٢ \\ م س - ٢ &، س \leq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت م ؟

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٤ &، س > ٢ \\ ١٠ &، س = ٢ \\ ل س + ٦ &، س < ٢ \end{cases}$

فما قيمة الثابت ل التي تجعل $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ؟

مثال :

إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٢٧}{٢س^٢ + ٦س + ١٨} &، س \leq ع \\ س + ٥ &، س > ع \end{cases}$

فما قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim_{س \to ع} ل(س)$ موجودة ؟

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٨أ - ٦ب س &، س \leq ٣ \\ ٤أ + ١٠ &، س > ٣ \end{cases}$

فما قيمة أ ، ب علما أن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١٤$

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

نهاية اقتران القيمة المطلقة

عند نقطة تحل بالتعويض المباشر فإذا كان ناتج التعويض :

- **موجب أو سالب : تحسب النهاية والجواب موجب**
- **صفر : إعادة تعريف القيمة المطلقة إجباري**
  وحساب النهاية من اليمين ومن اليسار

مثال : جد قيمة النهايات التالية :

- $\lim_{س \to ٣} |س^{٢} - ٤| =$
- $\lim_{س \to ٣} |س - ٥| =$
- $\lim_{س \to ١^{-}} |س^{٢} - ١| =$
- $\lim_{س \to ٤} س^{٢} |٤ - س| =$
- $\lim_{س \to ٥} |س^{٢} - ٢٥| =$

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ١ ، & |س - ١| < ٣ \\ ٠ ، & |س - ١| > ٣ \end{cases}$$

أوجد

$\lim_{س \to -٣} ق(س) =$

$\lim_{س \to ٤} ق(س) =$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) =$

- $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}} =$

- $\lim_{س \to ٢} \frac{|٢س - ٤| + س}{س + ١} =$
- $\lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ٢٥}}{س - ٥} =$
- $\lim_{س \to ٣^{-}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}}{٣ - س} =$
- $\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{|س^{٢} - ٣س|}{س^{٢} - ٩} =$
- $\lim_{س \to ٢} \frac{|س^{٢} - ٢س|}{|٦ - ٣س|} =$
- $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^{٣} + س^{٢}}}{س} =$

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

إقتران أكبر عدد صحيح [ق (س)]

إذا كان ناتج التعويض

- عدد صحيح تكون النهاية غير موجودة
- ليست عدد صحيح النهاية موجودة = [ق (أ)]

خصائص هامة لاقتران اكبر عدد صحيح

- [س + أ] = [س] + أ ، أ ∋ ص
- $[\,أ\,]^{+}$ = أ ، أ ∋ ص
- $[\,أ\,]^{-}$ = أ - ١ ، أ ∋ ص

مثال : اوجد قيمة

- نهــــا (س ← -٤) [س – ٢] =
- نهــــا (س ← ٢) [١/٢ س + ٤] =
- نهــــا (س ← ٠) [٤ – ٢س] =
- نهــــا (س ← ١/٣) [٢ س - ١] =
- نهــــا (س ← ١) [٤.٠ - ٢ س] =

إذا كان ق (س) = [٢ – س] فأجب عما يلي :

١) جد قيم أ التي تجعل نهــــا (س ← أ) ق (س) غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل نهــــا (س ← جـ) ق (س) = - ١

إذا كان ق (س) = [٠.٢ س]

جد قيم جـ التي تجعل نهــــا (س ← جـ) [٠.٢ س] = - ١

لكن في حالة وجود [ ] مع اقتران آخر وكان الناتج ∋ ص يجب إعادة التعريف وعكس ذلك لا ضرورة لإعادة التعريف

مثال : اوجد قيمة

نهــــا (س ← ٠) ([٢ س + ١] - [٢ س - ١]) =

نهــــا (س ← ٠) س^{٢} [س] - ٢ =

نهــــا (س ← ١) (س [س] + | س |) =

نهــــا (س ← ٣$^{+}$) [٣ - س] / | ٣ – س | =

مثال : إذا كان ق (س) =
- [٢ س + ١] ، س < ٣
- | ١٠ – ٢ س | ، س ≥ ٣

جد قيمة نهــــا (س ← ٢) ق (س)

نهــــا (س ← ٥) ق (س)

نهــــا (س ← ٢.٥) ق (س)

* جد نهــــا (س ← ٠) [س] / س =

عبد الغفار الشيـــخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد $\underset{\text{س} \to ٢.٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - [٢\text{س}]}{٤\text{س}^{٢} - ٢٥} =$

• $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - |٣\text{س} + ١|}{\text{س}^{٣} + ٨} =$

• $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}}}{\text{س} - ٣} =$

• $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣}}}{\text{س}} =$

$\underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{س} \times \sqrt{\dfrac{١}{\text{س}^{٢}} - ٣} =$

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \left[\dfrac{\text{س}}{٣} + ١\right] =$

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{[\text{س}] - \text{س}}{\text{س} - ٢} =$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٢| ، & \text{س} \geq ٢ \\ [٦ - \text{س}] ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$ أوجد

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

إذا كان ق (س) = [س + ٥] ، ل (س) = [٤ - س] جد

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{ل}(\text{س})$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س}))$

جد $\underset{\text{س} \to ٠.٨}{\text{نهـا}} \text{س}\,[\text{س} + ٠.٢] - ٢\text{س} =$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| & \text{س} \geq ٠ \\ \sqrt{-\text{س}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

أوجد

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$ ، ثم جد ق (٠)

• $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٣ - \text{س}}{|\text{س} - ٣|} & \text{س} \geq ٣ \\ \text{جـ}\text{س}^{٢} - ٤ & \text{س} < ٣ \end{cases}$

ما قيمة الثابت جـ علما بأن النهاية موجودة عند س = ٣

• $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س} + ٣] & \text{س} > \text{أ} \\ ٩ - [\text{س}] & \text{س} < \text{أ} \end{cases}$

ما قيمة الثابت أ علما بأن النهاية موجودة

عبد الغفار الشيـخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

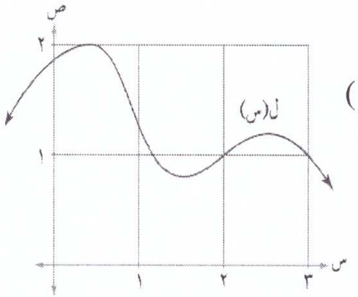
• $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤\,\text{أ} & \text{س} \leq ٣ \\ [\,٦ - \text{س}\,] & \text{س} > ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$ موجودة ، فجد قيمة الثابت أ

معتمدا على الشكل المجاور جد كلاً من الآتي :

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(٣\,\text{س} - ٣)$

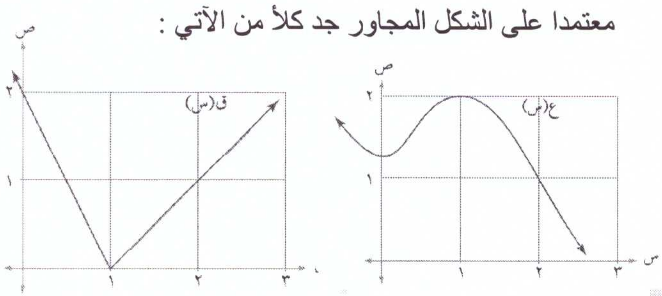
$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س} + \text{ل}(\text{س}))$



إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\,٥ - \text{س}\,] & \text{،} \quad \text{س} < \text{أ} \\ |\,\text{س} - ٢\,| & \text{،} \quad \text{س} > \text{أ} \end{cases}$

ما قيمة الثابت أ علما بأن النهاية موجودة

معتمدا على الشكل المجاور جد كلاً من الآتي :



$\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{ق}(\text{س}) + \text{ع}(\text{س}))$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{ق}(\text{س}) \times \text{ع}(\text{س}))$

• ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٤ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢} \quad \text{س} \neq ٢$

أرسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد كلا مما يلي :

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) =$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س}) =$

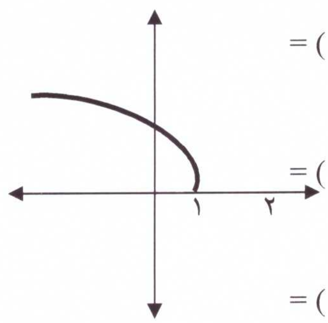
$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) =$

إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (- ٣ ، ٤) وكانت

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{س} - \text{ل}(\text{س})) = -١٠$ فجد

$\lim\limits_{\text{س} \to -٣} (\text{ق}^{٢}(\text{س}) - ٢\,\text{ل}(\text{س}))$

• إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{١ - \text{س}}$ اعتمد على الشكل المجاور لإيجاد ما يلي :



$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ق}(\text{س}) =$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ق}(\text{س}) =$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) =$

إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س – ٢) يساوي ٥

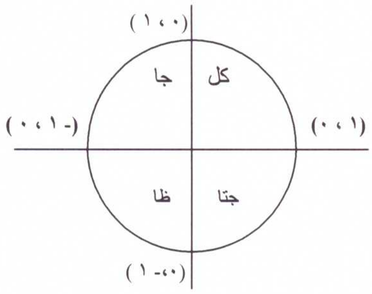
فجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (٣\,\text{ع}(\text{س}) + ٤\,\text{س}^{٢})$

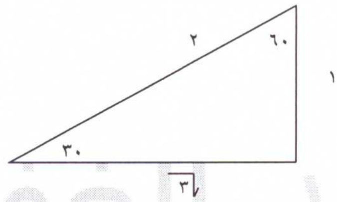
عبد الغفار ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

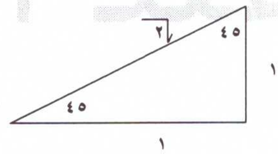
نهاية الاقترانات المثلثية

مراجعة :

دائرة الوحدة







$\text{جا س} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، $\dfrac{١}{\text{جا س}} = \text{قتا س}$

$\text{جتا س} = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\dfrac{١}{\text{جتا س}} = \text{قا س}$

$\text{ظا س} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{االمجاور}} = \dfrac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، $\dfrac{١}{\text{ظا س}} = \text{ظتا س}$

جا (- س) = - جا س ، جتا (- س) = جتا س

- جا س = جا (π – س)
- جتا س = حا ($\dfrac{\pi}{٢}$ - س)

المتطابقات المثلثية :

- $\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$
- $\text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س} - ١$
- $\text{ظتا}^٢\text{س} = \text{قتا}^٢\text{س} – ١$

- جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب
- جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب
- جا (أ – ب) = حا أ جتا ب - جتا أ جا ب
- جا (أ + ب) = حا أ جتا ب + جتا أ جا ب

- $\text{ظا (أ - ب)} = \dfrac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$
- $\text{ظا (أ + ب)} = \dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$

- $\text{جا س + جا ص} = ٢ \text{ جا } \dfrac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جتا } \dfrac{\text{س – ص}}{٢}$
- $\text{جا س - جا ص} = ٢ \text{ جتا } \dfrac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جا } \dfrac{\text{س – ص}}{٢}$
- $\text{جتا س + جتا ص} = ٢ \text{ جتا } \dfrac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جتا } \dfrac{\text{س – ص}}{٢}$
- $\text{جتا س - جتا ص} = -٢ \text{ جا } \dfrac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جا } \dfrac{\text{س – ص}}{٢}$

- $\text{جتا ٢س} = \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}$
  $= ١ – ٢ \text{ جا}^٢\text{س}$
  $= ٢ \text{ جتا}^٢\text{س} - ١$

- جا ٢ س = ٢ جا س حتا س
-
- $\text{ظا ٢ س} = \dfrac{\text{٢ ظا س}}{\text{١ – ظا}^٢\text{س}}$

- $\text{جا } \dfrac{\text{س}}{٢} = \pm \sqrt{\dfrac{\text{١ – جتا س}}{٢}}$

- $\text{جتا } \dfrac{\text{س}}{٢} = \pm \sqrt{\dfrac{\text{١ + جتا س}}{٢}}$

- $\text{ظا } \dfrac{\text{س}}{٢} = \pm \sqrt{\dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{١ + جتا س}}}$

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

نظريات نهاية الاقترانات المثلثية :

- $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{جاس} = \text{جا أ}$ ، أ ∈ ح
- $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{جتاس} = \text{جتا أ}$ ، أ ∈ ح
- $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ظاس} = \text{ظا أ}$ ، أ ∈ ح - $\left\{ \frac{\text{ن}\,\pi}{٢} : \text{ن} = ١ ، ٣ .. \right\}$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$ س بالتقدير الدائري

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{أس}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا أس}}{\text{جا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$ س بالتقدير الدائري

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{أس}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا أس}}{\text{ظا ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ملاحظة : نعوض مباشرة وفي حال كان الناتج :

- عدد : النهاية موجودة وتساوي هذا العدد
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ النهاية غير موجودة
- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$: نستخدم القسمة ، المتطابقات ...

مثال :جد كلا من النهايات التالية :

- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{جتا س}} =$
- $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \left(\text{٢ جاس} - \text{ظا}\ \frac{١}{٢}\ \text{س}\right) =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{جا س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٣س}}{\text{٥س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{٩ س}}{\text{جا ٤ س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{٣ س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س جا س - ظا ٥ س}}{\text{(جا ٤ س)} - \text{٢ س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س - جا ٣ س + ظا ٥س}}{\text{٣ س} - \text{ظا}^{٢}\,\text{س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا (س - ٤)}}{\text{س - ٤}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا (٢ س - ٦)}}{\text{٣ - س}} =$
- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{٢ س + ظا ٥ س}} =$

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مثال :جد كلا من النهايات التالية :

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا٢س}}{\text{س جا س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - \pi)}{(\text{س} - \pi)} =$

- $\underset{\text{س} \to \pi/٢}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + \text{جتا ٢ س}}{١ - \text{جا س}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٢ س}}{٣\,\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا}(٢\text{س}) - ١}{\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا ٦ س} - \text{جتا ٤ س}}{\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٨ س} + \text{جا ٤ س}}{\text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to -\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} + \text{جا أ}}{\text{س} + \text{أ}} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢}\,\text{ظتا}(٣\,\text{س})\,\text{قتا}(\text{س}) =$

- $\underset{\text{س} \to \pi/٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٢ س}}{٣\,\text{س}}$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} =$

عبد الغفار الشيـخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{٢ س} - \pi} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - \text{٢ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to -٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ١٦} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}\,\text{س}\right)}{\text{س} - ١} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - \text{جا ٣ س} + \text{ظا ٥ س}}{\text{٢ س} - \text{ظا}^{٢}\,\text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س جا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right)}{١ - \text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٦ س}}{\text{جتا ٨ س} - ١} =$

- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{ظا س} - \text{٢ س})^{٢}}{١ - \text{جتا ٣ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \text{قا س} + \text{ظا ٤ س} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ظا س} - \text{جا س}}{\text{٨ س}} =$

- $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{س}}{١ + \text{جتا}^{٣}\,\text{س}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{٣ س}}{\text{س}^{٢}} =$

- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ظا ٢ س}^{٢}}{\text{٤ س}^{٢}} =$

عبد الغفار الشيـــخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

- $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{نهـــا} \frac{جا|س|}{س} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} ٣س\,(قتا\,٣س + ظتا\,٢س) =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{قا(٢س) - ١}{س^{٢}} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ظا^{٢}\,٢س}{س^{٣} - ٢س^{٢}} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{جا(٢\pi - ٢س)}{-٥س} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{س^{٢} + جا\,٣س\,ظا\,٥س}{س^{٢}} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{س + ظا\,٢س - جا\,س}{س} =$

- $\underset{س \leftarrow -١}{نهـــا} \frac{جا(\pi س)}{س - ١} =$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{جا\,أس}{٢س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ظا\,٣س}{ب س - س} = ٦$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

- $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س - ٢}{ظا\,\pi س} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{س^{٢} + جا\,٥س - ظا\,٣س}{٢س + جا\,٧س} =$

- $\underset{س \leftarrow ٣\pi}{نهـــا} \frac{جا\,س}{\frac{س}{٣} - \pi} =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} جتا\,٨س\,ظا\,٣س\,قتا\,٧س =$

- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} قا\,س + ظا\,٥س =$

عبد الغفار الشيـــخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

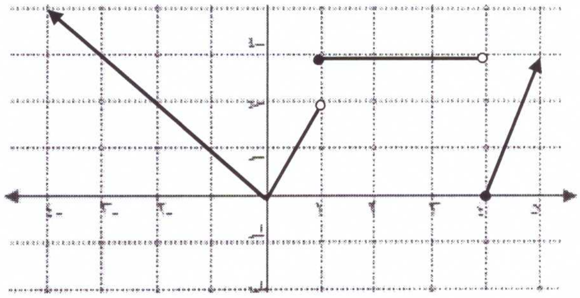
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٢ س} - \text{٢ جا س}}{\text{س}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س جا س}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧ - \text{٧ جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \sqrt{٢}\ \text{جا س}}{١ - \sqrt{٢}\ \text{جتا س}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جا س}}{(\pi - \text{٢ س})^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ جا س} - ١}{\text{٤ جتا}^{٢}\text{س} - ٣} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow -\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{جتا ٢ س}}{(\text{٢ س} + \pi)^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا ٨ س} - \text{٢ جا}^{٢}\text{س}}{\text{١٠ س}^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow \pi^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ + \text{جتا س}}}{\text{جا س}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{جتا ٤ س} - \text{٢ جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{٣ س جا س} - \text{جتا ٢ س}}{\text{س ظا ٢ س}} =$
- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا ٢ س}}} =$

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

الاتصال عند نقطة

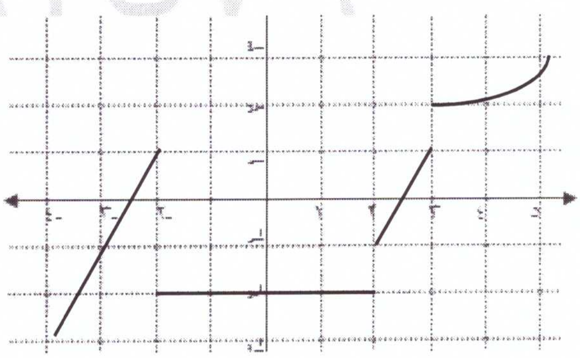
من خلال الرسم : يكون الاقتران متصلا عند نقطة ،إذا كان الاقتران ليس فيه حلقة أو قفز أو انقطاع (هو رسم المنحنى دون رفع القلم عن الورقة)

مثال : في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، جد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل

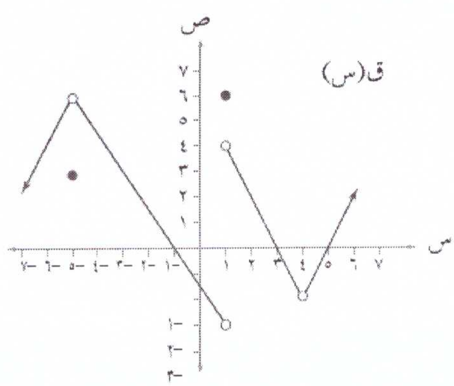


مثال : في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، ابحث في اتصال ق (س) عندما

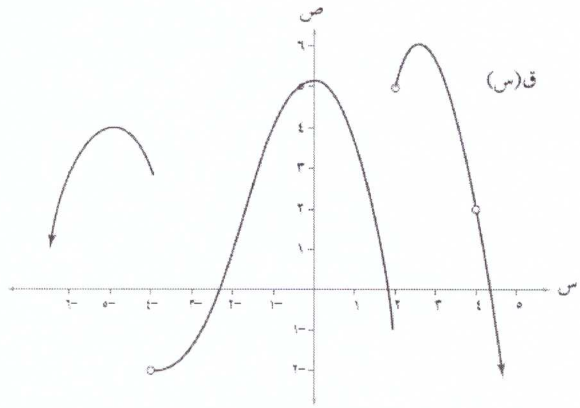
س = ـ ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤



في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، جد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل مع ذكر السبب ؟



في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على ح ، جد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل مع ذكر السبب ؟



الاتصال : يكون الاقتران متصل عند النقطة (أ) إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

١) نهـــا ق (س) ، س ← أ   النهاية موجودة

٢) ق (س) معرف عند س = أ   الصورة موجودة

٣) نهـــا ق(س) ، س ← أ = ق (أ)

- كل اقتران كثير الحدود متصل عند نقطة
- يكون الاقتران النسبي متصل عند جميع النقاط ما عدا أصفار المقام (التي تجعل المقام = صفر)
- في المتشعب نبحث عن الأطراف الداخلية وعند نقاط التحول

إذا كان ق (س) = [س + ١] - [س]

ابحث في اتصال ق عندما س = ٣

ق (س) = [س] + ١ - [س] = ١

متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود (ثابت)

- ق (س) = س^{٢} + ٣س – ٤ عند س = ١

مثال : ما نقط عدم الاتصال للاقترانات

- ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س} - ٢}$
- ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} + ٥}$

اذا كان ق (س) = [٤ س - ٤] فابحث في اتصال الاقتران عند س = ١.٢٥

ابحث في اتصال الاقتران ق (س) = $\frac{١ - س^{٢}}{س - ١}$ عند س = ١

مثال : إذا كان ك(س) = $\begin{cases} ٣س + ١ & ، س \neq ٢ \\ ٩ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ك(س) عند س=٢

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + س & ، س < ٢ \\ [س + ٤] & ، س = ٢ \\ \sqrt{س^{٢} + ٥} + \frac{٦}{س} & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) عند س = ٢

إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} + س^{٢} + ٢ س - ٤}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٥ س - ١ & ، س = ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال ل (س) عند س = ١

نظريات على الاتصال : إذا كان ق (س) ، ل (س) اقترانيين متصلين عند س ← أ فإن :

ق (س) + ل (س) ، ق (س) - ل (س)
ق (س) × ل (س) ، ق (س) ÷ ل (س)
تكون متصلة عند س ← أ

البرهان : (حالة الجمع)

المعطيات : الاقترانان ق ، ل متصلان عند س = أ

المطلوب إثبات أن الاقتران ق + ل متصل عند س = أ

البرهان :

نفرض أن هـ = ق + ل

هـ (أ) = ق (أ) + ل (أ) من تعريف الاقتران هـ

وحيث أن ق ، ل اقترانان متصلان عند س = أ فإن

$\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق (س) + $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ل (س)

ق (أ) + ل (أ)

وعليه فإن الاقتران هـ (س) متصل عند س = أ

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٤ & ، س < ٢ \\ س + ٦ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكان ع (س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٣ & ، س < ٢ \\ ٣ س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال (ق + ع) عند س = ٢

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ١ + ٢ س & ، س < ١ \\ ٣ س^{٢} & ، س \geq ١ \end{cases}$

وكان ع (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س < ١ \\ |س| & ، س \geq ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال (ق × ع) عند س = ١

إذا كان ق (س) = (س − ١)^{٢} ، ل (س) = [٢ − س]
فابحث في اتصال (ق × ل) عند س = ٣

مثال : إذا كان ق(س) =
- $\sqrt{}$ س - ٣ ، س < ٣
- ٣س - س^{٢} ، س ≤ ٣

ابحث في اتصال ق(س) عند س= ٣

إذا كان ق (س) = (س − ٥)^{٢} ، هـ (س) = [س + ٢]
فابحث في اتصال (ق × ل) عند س = ٥

مثال : إذا كان ق(س) =
- (|س| - ٢) / (س - ٢) ، س ≠ ٢
- ٥ ، س = ٢

فابحث في اتصال ق عند س = ٢

مثال : إذا كان ق(س) =
- (س^{٢} - ٥ س + ٦) / (س - ٢) ، س ≠ ٢
- ٣ / (ب س) ، س = ٢

متصلا عند س = ٢ ، ما قيمة الثابت ب

ملاحظة ليس شرطا انه إذا كان إحدى الاقترانيين غير متصل أن يكون حاصل ضربهما غير متصل لذا يجب ايجاد قاعدة الاقتران (نضرب ق(س) ×هـ (س) ثم نبحث في الاتصال)

مثال : إذا كان هـ(س) =
- س + ٣ ، س < ٣
- ٥س - ١ ، س ≤ ٣

وكان هـ (س) = س^{٢} - ٩
هل ق(س) ×هـ (س) متصل أم لا عند س = ٣

مثال : إذا كان هـ(س) =
- أ س^{٢} - ٨ س ، س < ٢
- ٨ ، س = ٢
- ٢س^{٢} − ب س + ٤ ، س > ٢

متصلا عند س = ٢ ، ما قيمة الثابت أ ، ب

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مثال : إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} أ\ س^{٢} + ب & س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \\ أ\ س - ٢\ ب & س > ٣ \end{cases}$

متصلا عند س = ٣ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{|٦ - ٢س|}{٣ - س} & ، س \neq ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٣

- إذا كان ق (س) = [٠.٥ س - ٤]

ابحث في اتصال ق عندما س = ٧

مثال : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ\ س^{٣} + ب\ س^{٢} & ، س < ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \\ ٣أ + ٥ب & ، س > ٢ \end{cases}$

جد قيمة أ ، ب علما بأن الاقتران متصل عند س = ٢

- إذا كان ق (س) = س [س + ١]

ابحث في اتصال ق عندما س =١

إذا كان ق (س) = $\dfrac{|س - ٤|}{س + ٤}$ ، س $\neq$ -٤

فابحث في اتصال ق عند س = ٤

- إذا كان ق (س) = [س] فما مجموعة قيم س التي يكون عندها الاتران غير متصل

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{جا ٣ س}{س} & ، س \ne ٠ \\ ٣ & ، س = ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٠ متصل

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س > ٠ \\ ١ - جتا س & ، س \le ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق عندما س = ٠

عبد الغفار الشيـــخ

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س^{٣} - ب س + ١ & س < ١ \\ ٥ & ، س = ١ \\ س^{٢} - (أ + ب) س + ٢ & س > ١ \end{cases}$

متصلا عند س = ١ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س - ٣} & ، س > ٣ \\ |س^{٢} - ٩| & ، س \le ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س = ٣

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

إذا كان

$ق(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٢} - ١] & ، -١ \le س \le ٢ \\ (\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}) \frac{١}{|س - ٢|} & ، ٢ < س \le ٥ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٢

إذا كان ق(س) = $(س - ٢)^{٣}$ ، هـ(س) = [س + ١]

ابحث في اتصال الاقتران ق × هـ عند س = ٢

إذا كان

$$\text{ك}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^{٢} & ، \quad ٢ \ge \text{س} \ge ٠ \\ [\text{س}] + \text{س}^{٢} & ، \quad ٣ > \text{س} > ٢ \\ ٧ & \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٢ فجد قيمة الثابت أ

مثال : إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - (٣ - ٢\text{جـ})\,\text{س} - ٦\text{جـ}}{\text{س} - ٣} & ، \quad \text{س} \ne ٣ \\ ٤\text{س} - ١ & \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٣ ، ما قيمة الثابت جـ

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\,٥ - \dfrac{\text{س}}{٣}\,]$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٦ ، - ٢

مثال : إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{ب س} - \text{س}^{٢}}{\text{س جا ٢س}} & ، \quad ٠ > \text{س} \ge \dfrac{-\pi}{٤} \\ ٢ & ، \quad \text{س} = ٠ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} + (١ - \text{أ})\,\text{س}}{\text{أ س}} & ، \quad ٢ \ge \text{س} > ٠ \end{cases}$$

متصلا جد قيمة أ ، ب

$$\text{إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}} & ، \quad \text{س} \ne ٠ \\ ١ & ، \quad \text{س} = ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عندما س = ٠

$$\text{مثال : إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ب} & ، \quad ٢ > \text{س} \ge ٠ \\ |\text{س}| - ٥ & ، \quad ٣ \ge \text{س} > ٢ \end{cases}$$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران متصلا عند س = ٢

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ١)\,[\,\text{س} + ٤\,]$

ابحث في اتصال ق عندما س = ١

$$\text{إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} + ٥ & ، \quad \text{س} \in \text{ص} \\ ٢\text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad \text{س} \notin \text{ص} \end{cases}$$

حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة
فابحث في اتصال الاقتران عند س = ٣

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

الاتصال على فترة

ملاحظات :

- كل اقتران كثير الحدود متصل على ح $(-\infty ، \infty)$
- يكون الاقتران النسبي الذي بسطه ومقامه كثير حدود أو بسطه ومقامه متصلاً عند جميع النقاط ما عدا أصفار المقام ، ح – صفر المقام وبشكل عام يكون متصل حسب القاعدة (مجال البسط $\cap$ مجال المقام – أصفار المقام)
- الجذور : الجذور الفردية متصلة على الفترة التي يكون ما داخل الجذر متصل عليها
  أما الجذر الزوجي متصلة على الفترة التي تجعل ما داخل الجذر قيمته موجبة
- اقتراني الجيب وجيب التمام متصلة على الفترة التي تكون الزاوية متصلة عليها ، وباقي الاقترانات المثلثية تعامل معاملة جا ، جتا بعد تحويلها إلى كسرية
- القيمة المطلقة : متصلة على الفترة التي يكون ما داخل المطلق متصل عليها
- اكبر عدد صحيح متصل على جميع الأعداد الحقيقية التي تجعل ما داخ اكبر عدد صحيح عددا غير صحيح بشرط أن يكون لوحده
- دراسة الفترات
- الأطراف الداخلية للفترة

تعريف :

ليكن ق إقترانا معرفا على [أ ، ب] فإن الاقتران يكون متصلا

- عند س = أ من اليمين ، إذا كانت $نها_{+}$ ق(س) = ق (أ)
- عند س= ب من اليسار، اذا كانت $نها_{-}$ ق(س) = ق (ب)
- على (أ ، ب) إذا كان متصلا عند كل س $\in$ (أ ، ب)
- على [أ ، ب] إذا كان متصلا عند كل س $\in$ (أ ، ب) و عند س = أ من اليمين و عند س = ب من اليسار

مثال : ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س $\in$ ح

ق (س) = جتا ٢ س

ق (س) = جا $\frac{١}{س}$

ابحث في اتصال ق (س) = ظا س في الفترة [٠ ، ٢ π]

ابحث في اتصال ق (س) = قتا ٢س ، س تنتمي للفترة [٠، π]

مثال : إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ٢ س + ٢ & ، -٢ \le س < ١ \\ س + ٤ & ، ١ \le س \le ٥ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق في الفترة [- ٢ ، ٥]

إذا كان ع (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٢} & ، س < ٣ \\ س + ٥ & ، س \ge ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ع على ح

إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، ٣ \le س < ٥ \\ س + ٢٠ & ، ٥ \le س < ٧ \\ ٩ & ، س = ٧ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران على الفترة [٣ ، ٧) ، [٣ ، ٧]

إذا كان ق (س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{3} - ٦٤}{\text{س} - ٤} & ، \text{س} \geq ٣ \\ - \text{س} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) على مجاله

إذا كان ق (س) = | ٢ س – ١٠| ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [- ١٠ ، ٨]

مثال : إذا كان ق (س) = $\dfrac{\text{س}}{|\text{س} - ٣| - ٤}$

ابحث في اتصال ق (س) على ح

إذا كان هـ (س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{2} - \text{س} - ٣٠}{\text{أ س} - ٦ \text{أ}} & ، \text{س} < ٦ \\ ١ & ، \text{س} = ٦ \\ \text{ب س} & ، \text{س} > ٦ \end{cases}$$

متصلا على ح فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان ل (س) =

$$\begin{cases} \sqrt{٤ - \text{س}} & \text{س} < ٤ \\ |\text{س}^{2} - ١٦| & \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران على مجاله

مثال : إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} ٣\text{س} + ٥ & ، \text{س} < ١ \\ ٨ & ، ١ \leq \text{س} \leq ٤ \\ \dfrac{\text{س}^{2} - ١٦}{\text{س} - ٤} & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س ∈ ح

مثال : إذا كان هـ(س) =

$$\begin{cases} ٥ & ، \text{س} = ٣ \\ [\text{س}] + ٥ & ، ٣ < \text{س} < ٤ \\ ٤ & ، \text{س} = ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ع (س) في الفترة [٣ ، ٤]

إذا كان ق (س) = | ٣ س – ٩ | ابحث في اتصال ق (س)

في الفترة [١ ، ٥]

مثال : إذا كان

ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س} + ٢ & ، |\text{س}| \leq ٢ \\ \text{س}^{2} & ، |\text{س}| > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) في مجاله

إذا كان ق (س) = | ٠.١ – س | ابحث في اتصال ق (س)

في الفترة [٠.١ ، ٠.٩]

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا أ س}}{\text{5 س}} & ، \ -\pi \leq \text{س} < 0 \\ 2 & \text{س} = 0 \\ \text{ب}\,(2 + \text{س}) & 0 < \text{س} \leq \pi \end{cases}$$

وكان متصلا على الفترة [- π ، π] جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

مثال : إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أ} - \text{ب ظا س} & 0 < \text{س} < \pi / 4 \\ 3 & \text{س} = \pi / 4 \\ \text{ب} + \dfrac{4}{\pi}\,|\text{س}| & \pi / 4 < \text{س} \leq \pi / 2 \end{cases}$$

وكان متصلا على الفترة [٠، π/٤] جد قيمة أ ، ب

عبد الغفار الشيـــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مثال : إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + 2\,\text{س}}{\text{س} - 3} & ، \ -2 \leq \text{س} < 0 \\ 2 & ، \ \text{س} = 0 \\ [\,2 + \text{س}\,] & ، \ 0 < \text{س} \leq 1 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-٢ ، ١]

مثال :

إذا كان ق (س) = س | س – ٢ | + ٤س^2 ، ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [٠، ٤]

مثال :

إذا كان ق (س) = [٠.٥ س - ٢]ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [- ٢، ٤]

إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + 1 & ، \ 0 \leq \text{س} < 3 \\ [\,0.25\,\text{س} + 2\,] & ، \ 3 \leq \text{س} < 6 \\ |\,9 - \text{س}\,| & \text{س} = 6 \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق (س) في الفترة [٠ ، ٦]

مثال : إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + 2\,\text{س} & ، \ -2 \leq \text{س} < 1 \\ [\,\text{س} + 2\,] & ، \ 1 \leq \text{س} \leq 3 \\ |\,8 - \text{س}\,| & ، \ 3 < \text{س} \leq 8 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-٢ ، ٨]

إذا كان ع (س) = $\begin{cases} ٢س & ، س < ٢ \\ [٠.٥ س + ٢] & ٢ \le س < ٤ \\ \dfrac{٥ س}{س^٢ - ٣٦} & ، س \ge ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال ع (س) لجميع قيم س الحقيقية

مثال : ق (س) = $\begin{cases} ٣ \text{ جتا } س & \dfrac{-\pi}{٦} < س \le ٠ \\ \dfrac{\text{ظا } ٣ س}{س} & ٠ < س \le \dfrac{\pi}{٦} \end{cases}$

إذا كان ع (س) = $\begin{cases} [س] + س & ، -١ \le س < ٠ \\ \dfrac{٣ س^٢}{٥} + س & ٠ \le س < ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-١ ، ٢]

مثال : ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{١}{٨} س^٣ + ١ & س < -٢ \\ \dfrac{٣}{٢} & س \ge -٢ \end{cases}$

م (س) = $\dfrac{\text{جتا } \frac{\pi}{٤} س}{س}$

ابحث في اتصال ق (س) + م (س) عند س = -٢

إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٢ (هـ - ١) س - ٤ هـ}{س - ٢} & س \ne ٢ \\ ٥ + س & س = ٢ \end{cases}$

متصلا على ح جد قيمة الثابت أ

إذا كان ل (س) = $\dfrac{س^٢ + ٥ س + ٢}{أ س^٢ + س + ٣}$ فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلا على مجموعة الاعداد الحقيقية ح

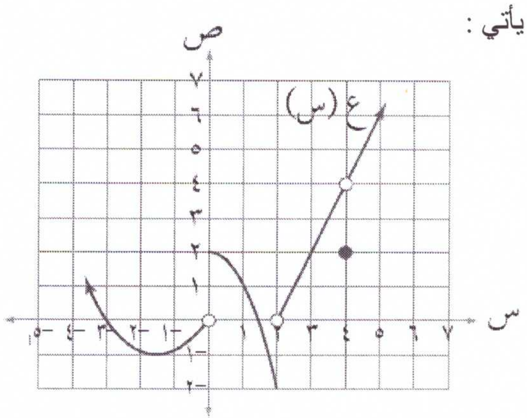
مثال :

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [٢س] \,|\, ٢ س - ٣ \,| & ، [س] = ١ \\ س [س + ٢] & ، [س + ١] = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) على مجاله

اسئلة الوحدة

١) معتمدا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ع ، جد كلا مما يأتي :



أ) $\lim\limits_{س \to ٠^{+}} ع(س) =$

ب) $\lim\limits_{س \to ٢^{-}} ع(س) =$

جـ) $\lim\limits_{س \to ٣} ع(س) =$

د) $\lim\limits_{س \to ٤} ع(س) =$

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\lim\limits_{س \to أ} ع(س) =$ غير موجودة

و) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س = ب

٢) إذا كان $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ، ق (٣) = ٦ فجد قيمة

$$\lim\limits_{س \to ١} \left(ق^{٢}(٢س + ١) - س + ٢ \right)$$

٣) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣ - س & ، \quad س > ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ & ، \quad س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان $ق(س) = \dfrac{س^{٢} + (أ + ١٣)\,س + أ}{س - ٢}$

فجد قيمة الثابت أ التي تجعل
$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

٥) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^{٢} - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ، \quad س > ٥ \\ أ \, جتا \dfrac{\pi}{٥} س + ٥ & ، \quad س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٥} ق(س)$ موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

٦) جد كلا من النهايات الآتية :

أ) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س - جا\, س}{\sqrt{١ - جتا\, س}}$

ب) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س + جا\, ٢س}{٣س}$

جـ) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{١}{س - ١} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

د) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ - ٣ س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

ط) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{قا ٢ س - ١}{س^٢} =$

هـ) $\lim_{س \to -٣} \dfrac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^٢ + ٢ س - ٣}$

ي) $\lim_{هـ \to ٠} \dfrac{\frac{١}{٢} - جتا(\frac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

و) $\lim_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س^٣} - ٢ |س|}{٢ س^٢ - ٥ س - ١٢}$

ك) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{جتا ٣ س - جتا ٥ س}{٢ س^٢}$

٧) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \dfrac{٤ س^٢ - جا ب س}{ب س - ظا ٤ س} = \dfrac{١}{٤}$

فجد قيمة الثابت ب

ز) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س^٢ + جا ٢ س}{٣ س}$

ح) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \dfrac{جتا س - \sqrt{٣} جا س}{٦ س - \pi} =$

٨) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٤|}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٢ + س & ، س = ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

٩) إذا كان
ع (س) = { | $\frac{| س |}{٢}$ - ١ | ، - ١ ≤ س < ٣
{ [٠.٥ س + ٣] ، ٣ ≤ س < ٤

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ٣

١٢) إذا كان
هـ (س) = { س^{٣} ، س < ١
{ ٢ س $\sqrt{س}$ - ١ ، س ≥ ١

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية

١٣) إذا كان ق(س) = { $\frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ ، -٢ ≤ س < - ١
{ س [س] ، - ١ < س ≤ ١

ف ابحث في اتصال ق (س) في الفترة [-٢ ، ١)

١٠) إذا كان
ل (س) = { $\frac{٩ س^{٢} - ١}{\sqrt{١ - ٦ س + ٩ س^{٢}}}$ ، - $\frac{١}{٣}$ ≤ س < $\frac{١}{٣}$
{ - ٢ ، س = $\frac{١}{٣}$
{ ٦س - [س] ، $\frac{١}{٣}$ ≤ س < $\frac{٤}{٣}$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س = $\frac{١}{٣}$

١٤) إذا كان ل (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س + ٢}$ ، هـ (س) = [س]
فابحث في اتصال ل × هـ في الفترة [٠ ، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة أربعة بدائل مختلفة ، واحدة منها فقط صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح فيما يأتي :

(١) إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ ق (س) = ٤ ، ق (٤) = ٦
فإن قيمة نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ (ق^{٢}(٢ س + ١) - س + ٧)

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٠ د) ٣٧

١١) ابحث في اتصال ع (س) = $\sqrt{[س] + س}$
في الفترة (١ ، ٢[

(٢)إذا كان ق اقترانا متصلا عند س=٤ وكان ٣ ق (٤) = ٦

وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٤^+}$ ق (س) = ٤ ب فإن قيمة الثابت ب =

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) – ٢

(٣) إذا كان ق اقتران كثير حدود وكانت

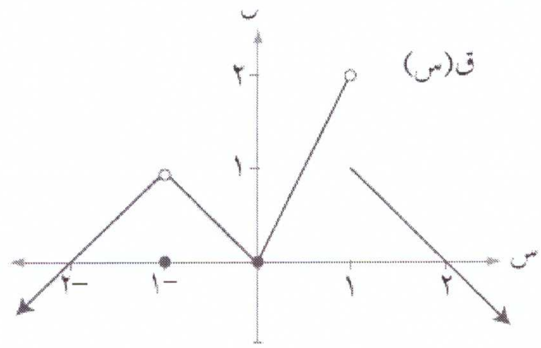
$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ق (س)}}{\text{س}}$ = ٣ فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ق}^٢\text{ (س)}}{\text{س}}$ =

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدا الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فإن مجموعة قيم أ حيث

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ ق (س) = صفراً هي :

أ){-٢ ، ٠} ب) {٠} جـ) {٠ ، ٢} د) {-٢ ، ٠ ، ٢}



(٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٤ - \text{س}^٢}{\text{س} - ٢}$ تساوي

أ) - ١ ب) صفر جـ) - ٣ د) ٣

(٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{٦\text{ س}^٤ + ١٨\text{ س}^٢}{٢\text{ س}^٢ - ٣\text{ س}^٣}$ تساوي

أ) - ٦ ب) - ٢ جـ) ٣ د) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانا متصلا عند س = ١ وكان ق(١)=٤ فإن

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^+} \left(\frac{|\text{س} - ١|}{\text{س} - ١} + \text{ق (س)} \right)$ تساوي

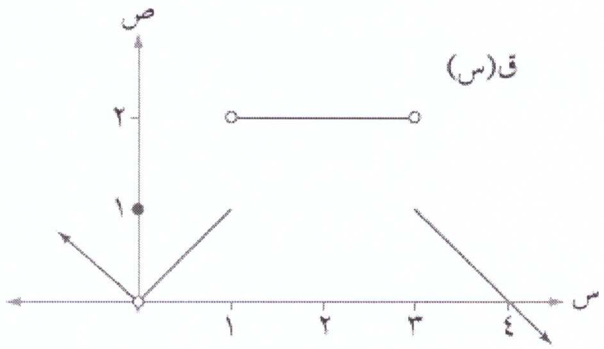
أ) -٣ ب) ١ جـ) ٥ د) غير موجودة

(٨) معتمدا الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فإن مجموعة قيم أ حيث

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ ق (س) = غير موجودة هي :

أ) {٠ ، ١ ، ٣} ب){١ ، ٣ ، ٤}

جـ) {٠ ، ١ ، ٣ ، ٤} د) {١ ، ٣}



٩) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \text{٢ جتا}^٢\text{ س} & \text{، س} < \frac{\pi}{٢} \\ \text{أ س}^٢ + \pi^٢ & \text{، س} \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلا عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي :

أ) - ٢ ب) صفر جـ) - ٤ د) ٤

(١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ & \text{، س} = ١ \\ [\text{س}] & \text{، } ١ < \text{س} < ٢ \\ ٤ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$

فإن الاقتران متصل على الفترة :

أ) [١ ، ٢] ب) (١ ، ٢) جـ) [١ ، ٢) د) (١ ، ٢]

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق
عبد الغفار الشيخ