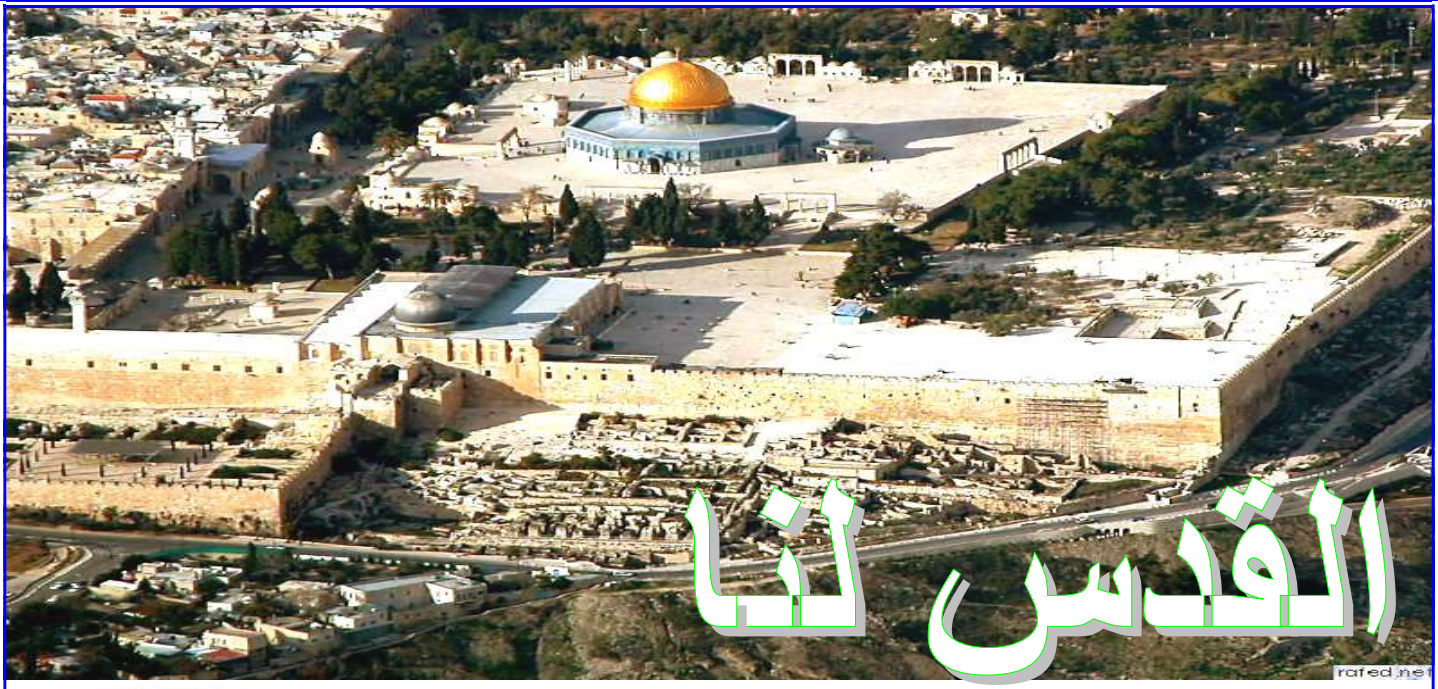
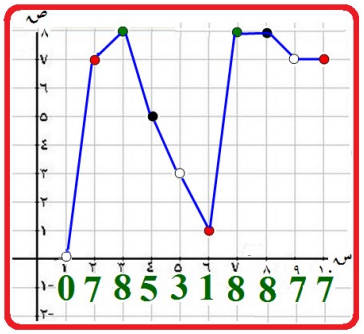


الرياضيات

للصف الثاني الثانوي **العلمي و الصناعي**

المستوى الثالث

وحدة تطبيقات التفاضل

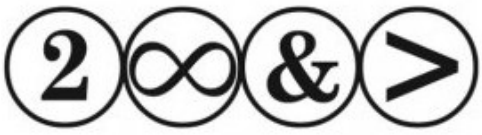


مراجعة مكثفة (أسئلة متوقعة) مع الحل

تطلب من :
مكتبة الصحوة الإسلامية / البقعة / قرب البنك العربي ٠٧٨٦٤٣٤٠٧٨
ومكتبة آية وكرم / عين الباشا / قرب الإشارة ٠٧٨٦٢٣٧٣٤٨

٢٠١٧ / ٢٠١٨

إعداد المعلم : **عبدالقادر الحسنات** 078 531 88 77



س٣) اختر الإجابة الصحيحة :

١) إذا كان ق(س) = م س٢ + ٧ س + ٢ وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عند س = ٢ هو ١٣٥° فإن م =
أ) -٢ ب) ٢ ج) -٧/٤ د) صفر

٢) إذا كان ق(س) = س٣ + ب س + م وكان المستقيم ص = س + ٢ مماساً لمنحنى ق عند (٠، ٢) فإن قيم ب ، م هي
أ) ١ ، ٢ ب) ١ ، -٢ ج) صفر ، ٢ د) صفر ، صفر

٣) إذا كان المستقيم ص = -س + ج ، ص = س + ٤ مماسين لمنحنى ق(س) = س٢ + ب س + ج عند (س، ص) فإن قيمة ج هي :
أ) -٤ ب) ٤ ج) -٢ د) ٢

٤) قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ١٢ن - ٣ن٢
فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو
أ) ٣ ب) ١٨ ج) ٦ د) ١٢

٥) إذا كان ق(س) = ٢ س٣ + م س٢ + ٣ وكان للاقتران نقطة حرجة عند س = -١ فإن قيمة م تساوي
أ) -١ ب) ٣ ج) ١ د) -٣

٦) إذا كان ق(س) = س٣ + م س٢ + ب س + ٢ وكان للاقتران نقطتين حرجتين عند س = -١ ، س = ٣ فإن قيم م ، ب هي
أ) ٣ ، ٣ ب) -٣ ، ٣ ج) -٣ ، ٣ د) -١ ، ٣

٧) إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند النقطة (٥ ، ٣) فإن معادلة المماس لمنحنى ق عند تلك النقطة هي
أ) ص = ٣ ب) س = ٥ ج) ص = ٥ د) س = ٣

٨) إذا كان ق(س) = س(س٢ - ١٢) فإن قيم س الحرجة هي
أ) {٠ ، ١٢} ب) {٠ ، ١٢} ج) {-٢ ، ٢} د) {٠ ، -٢ ، ٢}

٩) إذا كان للاقتران ق(س) = م س٣ - ٣ س٢ قيمة حرجة عند س = ٢ فإن قيمة م هي
أ) ٢ ب) ٣ ج) ١ د) -٢

١٠) القيمة العظمى المحلية للاقتران ق(س) = ١٢ س - س٣ هي
أ) ٦ ب) ١٢ ج) صفر د) ١٦

١١) إذا كان $د(س) = \begin{cases} س^2 - س & ، \ 0 \leq س < 1 \\ س - 1 & ، \ 1 \leq س \leq 3 \end{cases}$

فإن قيم $س$ الحرجة للاقتران $د$ هي

أ) $\{0, 1, 3\}$ ب) $\{0, \frac{1}{2}, 1, 3\}$ ج) $\{0, 3\}$ د) $\{0, \frac{1}{2}, 3\}$

١٢) إذا كان $د(س) = \begin{cases} س^3 - س & ، \ 0 \leq س < 2 \\ س - 2 & ، \ 2 \leq س \leq 4 \end{cases}$ فإن قيم $س$ الحرجة هي

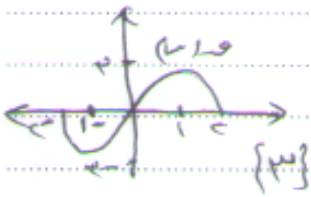
أ) $\{0, 1, 3, 4\}$ ب) $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ج) $\{0, 3\}$ د) $\{0, \frac{1}{2}, 3, 4\}$

١٣) مجموعة قيم $س$ الحرجة للاقتران $د(س) = [س - 1]$ ، $س \in [0, 2]$ هي

أ) $[0, 2]$ ب) $\{0, 1\}$ ج) $(0, 2)$ د) $\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$

١٤) الشكل المجاور يمثل منحنى $د(س)$ ، $س \in [-2, 4]$

قيم $س$ التي يكون عندها $د(س)$ صفراً هي



أ) $\{-1, 1\}$ ب) $[-2, 4]$ ج) $\{0\}$ د) $\{3\}$

١٥) في الشكل السابق، نقطة واحدة فقط للاقتران $د$ هي:

أ) $(-1, 1)$ ب) $(0, 0)$ ج) $(2, 0)$ د) $(4, -2)$

١٦) في الشكل السابق، يكون $د(س)$ متزايداً في الفترة:

أ) $[2, 4]$ ب) $[-1, 1]$ ج) $[0, 2]$ د) $[-2, 0]$

١٧) في الشكل السابق، يوجد للاقتران نقطة صغرى محلية عندما $س =$

أ) -3 ب) صفر ج) -1 د) 2

١٨) في الشكل السابق يوجد للاقتران $د$ قيمة عظمى محلية قيمتها

أ) 1 ب) -1 ج) 3 د) 2

١٩) إذا كان $د(س)$ معرفاً على $[0, 3]$ ، وكانت $د(1) = 2$ ، $د(2) =$ صفر،

$د(3) = -3$ فإن القيمة العظمى المحلية للاقتران $د(س)$ هي:

أ) 2 ب) -3 ج) 1 د) صفر

٢٠) إذا كان $د(س) = أ س + س^2$ وكان له نقطة انعطاف عندما

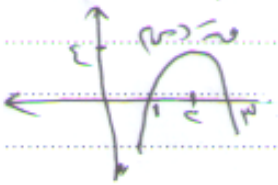
$س = \frac{\pi}{2}$ فإن قيمة الثابت $أ$ تساوي

أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) صفر د) 1

الإجابات: د د أ ب ب ج ج أ أ ب

٢٥

٣١) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س)



٣٢) دراسة تقعر المنحنى في الفترة :
أ)]-∞، ١[ب)]١، ٣[ج)]٣، ∞[د)]-∞، ∞[

٣٣) معتمداً الشكل السابق فإن ق(٢) تساوي
أ) ٤ ب) صفر ج) غير موجودة د) ٢

٣٤) معتمداً الشكل المجاور فإن ق(٣) تساوي :
أ) ٤ ب) ٢ ج) صفر د) ١

٣٥) إذا كانت ق(س) = $\frac{س-٣}{س+٤}$ ، وكانت ق(س) معرفة عند س فإن مجموعة قيم س الحرجة هي :
أ) {٣} ب) {-٤} ج) {-٣، ٤} د) {٣، -٤}

٣٦) إذا كانت ق(س) = $س^{٣}+٣س^{٢}+٩س$ ، وكانت للاقتران ق قيمة قصوى محلية عند س = -١ فإن قيمة ٩ هي :
أ) ٤ ب) -١ ج) صفر د) ٣

٣٧) إذا كانت ق(س) = $س^{٣}-٣س^{٢}+٣س+١$ فإن للاقتران ق نقطة انعطاف عند س =
أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٦

٣٨) إذا كانت ق(س) = جا س + ٩ س^{٢} ، وكانت لـ نقطة انعطاف عند س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن قيمة ٩ تساوي
أ) $\frac{١}{٤}$ ب) ٠ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٣٩) إذا كانت ق(س) = $(٣س-٤)^{٣}+٣$ ، ر =]-∞، ∞[فإن منحنى ق يكون مقعراً إلى الأعلى في
أ)]-∞، ∞[ب)]-∞، ٠[ج)]-∞، $\frac{-٤}{٣}$[د)]-∞، ∞[

٤٠) القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق(س) = $س^{٣}-٣س$ في [-٣، ٢] هي :
أ) -١٨ ب) -٢ ج) -٢٦ د) -٣

الإجابات : ب ب ج ج د د أ أ

٢٦

س٢٨) جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (٠ ، ٦) لمنحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} =١٨

س٢٩) جد النقط على منحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} =٨ والتي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم : ص + س =٤
ثم جد معادلة المماس عند تلك النقط

س٣٠) جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س)= $\frac{١}{س}$ ومحور السينات عند النقطة (٢، $\frac{١}{٢}$)

س٣١) يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف (ن) = ٢ن^{٣} - ٨ ن^{٢} +٦ن+١٠، جد سرعة الجسم عندما يقطع مسافة ١٠ م

س٣٢) قذف جسم عمودياً إلى أعلى حسب العلاقة ف (ن) = أ ن - ٥ن^{٢} ، جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٤٠ م علماً بأن أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم كان ٤٥ م

س٣٣) يتحرك جسم وفق العلاقة ف^{٣} = ع^{٢}+٢ ، جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٥ م/ث

س٣٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران ف (ن) = ٢ن^{٣} - م ن^{٢} +٢ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، عندما كانت سرعة الجسم ١٢ م/ث كان تسارعه ١٨ م/ث^{٢} ، جد قيمة م حيث م > ٠

س٣٥) يتساقط الرمل بمعدل ٤سم^{٣} / د ليصبح كومة على شكل مخروط دائري قائم...نصف قطر قاعدته مثلي ارتفاعه دائماً
جد معدل التغير في ارتفاع كومة الرمل عندما يكون نصف قطر قاعدة المخروط ١٠ سم

س٣٦) أسطوانة من الجليد نصف قطرها يساوي نصف ارتفاعها بدأت بالذوبان محافظة على شكلها ، فإذا كان معدل النقصان في نصف قطرها يساوي ٢سم / س فجد معدل التغير في حجمها ومساحتها الجانبية عندما يكون ارتفاعها ٢٠سم

س٣٧) تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س^{٢}+٣}$ بحيث يزداد الإحداثي السيني بمعدل ٣سم/ث جد معدل التغير في المسافة بين هذه النقطة والنقطة (٥، ٠) عندما تكون س=٤

س٣٨) مربع تتمدد أضلاعه بمعدل ٢سم / د ، رسمت دائرة داخل المربع وأخذت تتمدد معه بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه ، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ١٠ سم

س٣٩) انطلق صاروخ رأسياً إلى أعلى حيث تم رصده من قبل رادار على سطح الأرض من قاعدة تبعد ٢٠٠٠ م عن نقطة انطلاق الصاروخ ، إذا كانت سرعة انطلاق الصاروخ ٥٤٠م/ث جد معدل التغير في زاوية ارتفاع الصاروخ لكي يبقى ظاهراً على شاشة الرادار وهو على ارتفاع ١٢٠٠م عن سطح الأرض

س٤٠) بالون كروي الشكل قطره ٨سم ، بدأ الهواء يتسرب منه بمعدل ١٠ سم^{٣} /د جد معدل التغير في مساحة سطحه الخارجي في اللحظة التي يكون نصف قطره ٢سم

س٤١) بدأت النقطتان م ، ب الحركة من نقطة الأصل (و) بحيث تتحرك النقطة (ب) على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل وبسرعة ٤سم/د ، بينما تتحرك النقطة (م) على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} بحيث يبقى طول و م يساوي طول م ب دائماً
جد معدل التغير في مساحة المثلث م ب و ومعدل التغير في الزاوية م ب و بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

س٤٢) إذا كان ق(س) = س^{٣} -١٢س + ٣ فجد
أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية

س٤٣) إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢}-٤س)^{٢}}$ فجد
أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية

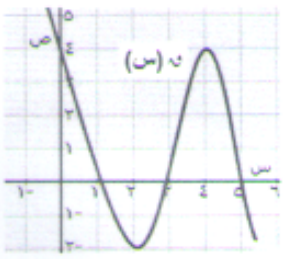
س٤٤) إذا كان ق(س) = { س^{٢} ، -٢ ≤ س < ١ ؛ ٢- س ، ١ ≤ س < ٣ ؛ ٢س ، ٣ ≤ س ≤ ٤ } فجد
أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق
ب) النقط الحرجة
ج) القيم القصوى المحلية وحدد نوعها

س٤٥) إذا كان ق(س) = جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π] فجد
أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية

٢٧

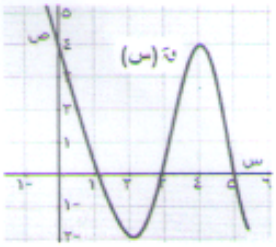
س٤٦)معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، جد

١) النقاط الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص
٣) القيم القصوى للاقتران ق
٤) ق(٤)



س٤٧)معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، جد

١) النقاط الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص
٣) القيم القصوى للاقتران ق
٤) ق(٤)
٥) ق(٢)



س٤٨) إذا كان ق(س) = س^{٣} + م س^{٢} + ب س، وكان للاقتران ق نقطتين حرجتين عند س= -١ ، س=٢ فجد قيم الثابتين م ، ب

س٤٩) إذا كان ق(س) = س^{٣} +٣م س^{٢}-٥ب س +١ وكانت ق(-١) =٢، ق(-٢) = ٦ فجد قيم الثابتين م ، ب

س٥٠) إذا كان مجموع ثلاثة أمثال عدد مع عدد آخر يساوي ٦٠ ،فجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

س٥١) عددان مجموعهما ٤٠ ، جد العددين بحيث يكون مجموع مربع الأول ومثلي الثاني أقل ما يمكن

س٥٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (١٢٨ م^{٢}) يُراد عمل مسبح داخلها مع ترك ممرات على جوانبها الأربع ، فإذا كان عرض كل ممر في جانبين متوازيين هو ٢م وعرض كل ممر في الجانبين الآخرين يساوي ١م ،جد بعدي القطعة بحيث تكون مساحة المسبح أكبر ما يمكن

س٥٣) ورقة مستطيلة الشكل يراد طباعة إعلان عليها بحيث يكون عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ٤سم وفي كل من الجانبين ١ سم، إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة تساوي ٤٠٠ سم^{٢} ،جد بعدي الورقة بحيث تكون مساحتها أصغر ما يمكن وتكفي لطباعة الإعلان

س٥٤) أوجد أكبر حجم لمخروط يمكن وضعه في كرة نصف قطرها ١٨سم ورأسه على سطح الكرة ويمس محيط قاعدته سطح الكرة.

عبد القادر الحسنات
078 531 88 77

س٥٥) كرة خشبية مصمتة نصف قطرها ١٠ سم يراد تحويلها إلى منشور رباعي قائم قاعدته مربعة ، جد أبعاد المنشور التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

س٥٦) أ ب ج مثلث فيه أ ج =٦سم ، ب ج = ٨سم ،جد قياس الزاوية ج الذي يجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

س٥٧) جد النقطة على منحنى الاقتران ق(س)= ٣س التي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (٤ ، ٢)

س٥٨) جد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة (٢ ، ٣) ويقطع من الربع الأول من المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن

س٥٩)نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين ارتفاعه مثلي طول ضلع قاعدته، فإذا كان محيط النافذة ١٠ متر فاحسب أبعاد النافذة بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن

س٦٠) جد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها ٦√٣ سم بحيث تكون المساحة الجانبية للأسطوانة أكبر ما يمكن

س٦١) إذا كان ق(س) = س^{٤} – ٦س^{٣} فجد

أ) فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق ب) نقط الانعطاف إن وجدت

س٦٢) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق'(س) ، ومنحنى ق(س) جد

١) فترات التزايد والتناقص ٢) القيم القصوى للاقتران ق
٣) مجالات التقعر للاقتران ق ٤) نقط الانعطاف إن وجدت

٢٨

٢٨) $س^2 + ص^2 = 18$

$(6, 0) : (0)^2 + (6)^2 \neq 18$

$\Leftarrow$ لا تقع على الدائرة

$\Leftarrow$ نجد نقطة التماس: $(س_1, ص_1)$

$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$م = \frac{6 - 0}{0 - س_1}$

لكنه المماس وعمودي على نصف القطر

$\Leftarrow$ $2س + 2ص \cdot ص' = 0 \Leftarrow ص' = \frac{-س}{ص}$

$\Leftarrow \frac{6 - ص}{-س} = \frac{-س}{ص}$

$\Leftarrow س^2 = 6ص - ص^2$

لكنه $س^2 = 18 - ص^2$

$18 - ص^2 = 6ص - ص^2$

$18 = 6ص \Leftarrow ص = 3$

$ص = 3 \Leftarrow س^2 = 6 \times 3 - 3^2$

$= 9$

$\Leftarrow س = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\Leftarrow$ هناك نقطتا تماس

① $(3, 3)$ وعندها المعادلة

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - 3 = \frac{-3}{3}(س - 3)$

$ص - 3 = -1(س - 3)$

② $(-3, 3)$ $\Leftarrow$

$ص - 3 = \frac{-3}{3}(س - (-3))$

$ص - 3 = 1(س + 3)$

٢٩) يوازي $س \Leftarrow$ تساوي ميل

ميل المماس: $ص' + 1 = 0 \Leftarrow ص' = -1$

ميل المحاس: $2س + 2ص \cdot ص' = 0$

$ص' = \frac{-س}{ص}$

$م_1 = م_2 \Leftarrow \frac{-س}{ص} = -1 \Leftarrow س = ص$

$س^2 + ص^2 = 8 \Leftarrow س^2 + س^2 = 8$

$2س^2 = 8 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$

نقطتا التماس $\Leftarrow (2, 2)$ و $(-2, -2)$

① عند $(2, 2)$: $م = \frac{-2}{2} = -1$

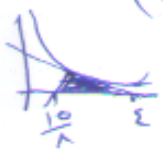
$ص - 2 = -1(س - 2)$

② عند $(-2, -2)$، $م = \frac{-(-2)}{-2} = -1$

$ص - (-2) = -1(س - (-2))$

$ص + 2 = -(س + 2)$

٣٠) نجد ميل:



$ص' = \frac{-1}{س^2}$

$م = ص'(2) = \frac{-1}{4}$

معادلة المماس: $ص - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}(س - 2)$

المقطع السيني: $ص = 0 \Leftarrow \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}(س - 2)$

$\times 4 \Leftarrow 2 = 2 - س \Leftarrow$ $س = 4$

معادلة العمودي: الميل $= -(\frac{4}{-1}) = 4$

$ص - \frac{1}{4} = 4(س - 2)$

المقطع السيني: $ص = 0 \Leftarrow \frac{-1}{4} = 8 - 4س$

$\times 8 \Leftarrow -1 = 32 - 16س \Leftarrow س = \frac{33}{16}$

طول قاعدة المثلث $= \frac{33}{16} - \frac{8}{16} = \frac{25}{16}$

ارتفاع المثلث $= ص = \frac{1}{4}$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{25}{128}$

٢٩

(٣١) $ف = ٢ن^٣ - ٨ن^٢ + ٦ن + ١٠$

$ع = ٦ن^٢ - ١٦ن + ٦$

المماسة $\Rightarrow$ $ف = ١٠$

$٢ن^٣ - ٨ن^٢ + ٦ن + ١٠ = ١٠$

$٢ن(ن^٢ - ٤ن + ٣) = ٠$

$٢ن(ن - ٣)(ن - ١) = ٠$

$ن = ٠$ $ن = ٣$ $ن = ١$

$ن = ٠ \Rightarrow ع = ٦$

$ن = ١ \Rightarrow ع = ٦ - ١٦ + ٦ = -٤$

$ن = ٣ \Rightarrow ع = ٦ \times ٩ - ١٦ \times ٣ + ٦$

$= ٥٤ - ٤٨ + ٦$

$= ١٢$ م/ث

(٣٢) $ف = ٣٠ن - ٥ن^٢$

نجد مميز $ف$ أولاً:

أقصى ارتفاع $\Rightarrow ع = ٤٥ \Rightarrow ع = ٠$

$ع = ف' = ٣٠ - ١٠ن = ٠$

$\Rightarrow ٣٠ = ١٠ن$

$ف = ٤٥ \Rightarrow ٣٠ن - ٥ن^٢ = ٤٥$

$٣٠ن - ٥ن^٢ = ٤٥$ $\Rightarrow$ $٥ن^٢ - ٣٠ن + ٤٥ = ٠$

$ن^٢ - ٦ن + ٩ = ٠$

$\Rightarrow ن = ٣ \pm \sqrt{٩ - ٩}$ ، $ن = ٣$ مرفوضة

$\Rightarrow ن = ٦$

$ف = ٣٠ن - ٥ن^٢$

$ع = ٣٠ - ١٠ن$

$ف = ع : \frac{٣٠ن}{٥} - ٥ن^٢ = ٠$

$ن^٢ - ٦ن + ٨ = ٠$

$(ن - ٢)(ن - ٤) = ٠ \Rightarrow ن = ٢ ، ٤$

$ع(٢) = ٣٠ - ٢٠ = ١٠$ ، $ع(٤) = -١٠$

(٣٣) $ف^٣ = ع^٢ + ٢$

$٣ف^٢ \times ف' = ٢ع \times ع'$

$٣ف^٢ \times ع = ٢ع \times س$

$س(ن) = \frac{٣}{٢} ف^٢$

السرعة $= ٥ \Rightarrow ف^٣ = (٥)^٢ + ٢$

$\Rightarrow ف^٣ = ٢٧$

$ف = ٣$

$س(ن) = \frac{٣}{٢} \times (٣)^٢ = \frac{٨١}{٢}$

(٣٤) $ف = ٢ن^٣ - ٣ن^٢ + ٢$

$ع = ٦ن^٢ - ٦ن$

$س = ١٢ن - ٦$

$ع = ١٢ \Rightarrow ٦ن^٢ - ٦ن = ١٢$ ..... (١)

$س = ١٨ \Rightarrow ١٢ن - ٦ = ١٨$ ..... (٢)

(٢) $\Rightarrow ٦ن = ٩ \Rightarrow ن = ٩ ، ن = -٦$

(١) $\Rightarrow ٦ن^٢ - ٦(-٦) = ١٢$

$٦ن^٢ + ١٢ن + ١٨ = ١٢$

$٦ن^٢ + ١٢ن + ٦ = ٠$

$ن^٢ + ٢ن + ١ = ٠$

$(ن + ١)(ن + ١) = ٠ \Rightarrow ن = -١$

$ن = -١$ $ن = -٦$

عندما $ن = -١$: $م = ٦ \times ١ - ٩$

$م = -٣$

$ن = -٦$: $م = ٦ \times ٦ - ٩$

$= ٣٦ - ٩$

$م = ٣$

(٣٥) $ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$

المطلوب: $\frac{د ع}{د ن}$

المعطى هو الحجم: $ع = \frac{د ح}{د ن}$

المتغير في نصف القطر غير معلوم لذا نشتق بالنسبة لـ ع.

$ح = \frac{1}{3} \pi (٤ ع)^2 ع$

$ح = \frac{16}{3} \pi ع^3$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{16}{3} \pi \times 3 ع^2 \times \frac{د ع}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{1}{16 \pi (5)^2}$

$= \frac{1}{400 \pi}$

* $نق = 10 \Leftarrow 4 ع = 10 \Leftarrow ع = 5$

(٣٦) $ح = \pi نق^2 ع$

$نق = \frac{1}{2} ع \Leftarrow ع = 4 نق$

$\frac{د نق}{د ن}$ معلومة، $\frac{د ع}{د ن}$ مجهول

نشتق بدلالة ع (لأن نق)

$ح = \pi نق^2 (4 نق) = 4 \pi نق^3$

$\frac{د ح}{د ن} = 12 \pi نق^2 \frac{د نق}{د ن}$

$= 12 \times \pi (10)^2 \times (-2)$

$= -2400 \pi$

* المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$م = 2 \pi نق ع$

$= 2 \pi (نق) (4 نق) = 8 \pi نق^2$

$\frac{د م}{د ن} = 16 \pi نق \frac{د نق}{د ن}$

$= 16 \pi \times 10 \times (-2)$

$= -320 \pi$

(٣٧) ف

$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$ف = \sqrt{(س - 0)^2 + (ص - 0)^2}$

$ف = \sqrt{(س - 0)^2 + ص^2}$

لكن $ص = \sqrt{س + 3} \Leftarrow ص^2 = س + 3$

$ف = \sqrt{(س - 0)^2 + س + 3}$

$\frac{د ف}{د س} = \frac{2(س - 0) \times 1 + 1}{2 \sqrt{(س - 0)^2 + س + 3}}$

$= \frac{(5 - 0) \times 2 + 3 \times 4}{2 \sqrt{(5 - 0)^2 + (4) + 3}}$

$= \frac{22}{2 \sqrt{41}}$

(٣٨) م = م. الجزء المظلل - م. الدائرة

$م = (س)^2 - \pi نق^2$

$\frac{د م}{د ن}$ معطى لكن $\frac{د نق}{د ن}$ مجهول نحتاج

$م = 4 س^2 - \pi س^2$

$\frac{د م}{د ن} = 8 س \frac{د س}{د ن} - 2 \pi س \frac{د س}{د ن}$

$= 8 \times 5 \times 2 - 2 \pi \times 5 \times 2$

$= 80 - 20 \pi$

(٣٩) نجد علاقة بين الزاوية والمتغيرة (ص)

$ظا هـ = \frac{ص}{1000}$

$قا^2 هـ \frac{د هـ}{د ن} = \frac{1}{1000} \frac{د ص}{د ن}$

نجد الوتر: $(الوتر)^2 = (1000)^2 + (1000)^2$

أو الأفضل: $ظا هـ = \frac{1000}{1000} = 1 = \frac{3}{3}$

$\frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{3}{5} \Leftarrow جا هـ = \frac{3}{5} جتا هـ$

$جا^2 هـ + جتا^2 هـ = 1 \Leftarrow \frac{9}{25} جتا^2 هـ + جتا^2 هـ = 1$

$\Leftarrow جتا^2 هـ = \frac{9}{34} \Leftarrow قا^2 هـ = \frac{34}{9}$

$\Leftarrow \frac{34}{9} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{1}{1000} \times 50$

$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{50}{1000} \times \frac{9}{34} = \frac{9}{680}$

٣١

٤٠) حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi نق^٣$

مساحة سطحها $= ٤\pi نق^٢$

$م = ٤\pi نق^٢$

$\frac{دم}{دن} = ٨\pi نق \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن}$ مجهولة ؛ نجعلها موضوع الحجم

$ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^٣$

$\frac{دح}{دن} = ٤\pi نق^٢ \frac{دنق}{دن}$

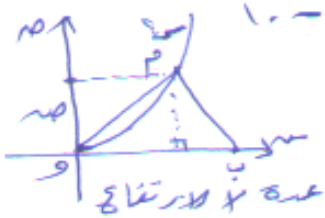
$-١٠ = ٤ \times (٢)^٢ \pi \times \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{-١٠}{١٦\pi}$

$\frac{دم}{دن} = ٨\pi \times ٤ \times \frac{-١٠}{١٦\pi}$

$= -١٠$

٤١)



المساحة $= \frac{١}{٢}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

سرعة $(ب) = ٤$ ، بعد ٢ ثانية $= ٨$

$م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ص$

$م = ٤ص = ٤س^٢$

$\frac{دم}{دن} = ٨س \frac{دس}{دن} = ٨ \times ٨ \times ٤$

$= ٤ \times ٦٤$

$= ٢٥٦$

معدل تغير زاوية م ب و $= ه$

ظا $ه =$ المقابل / المجاور $= \frac{ص}{\frac{١}{٢}س}$

ظا $ه = \frac{س^٢}{\frac{١}{٢}س} = ٢س$

$قا^٢ ه \times \frac{ده}{دن} = ٢ \frac{دس}{دن}$

بعد ٢ ثانية ؛ $س = ٨$ ، $ص = ٦٤$

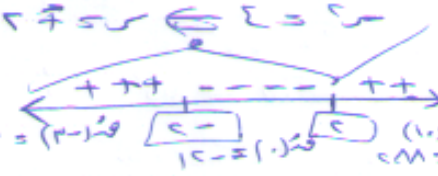
$جتا ه = \frac{٨}{٨\sqrt{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}} \Leftarrow قا ه = \sqrt{٥}$

$\sqrt{٥} \times \frac{ده}{دن} = ٤ \times ٢ \Leftarrow \frac{دص}{دن} = ٨$

٤٢) م) $ص = س^٣ - ١٢س + ٢$

$ص' = ٣س^٢ - ١٢ = ٠$

$س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$



ب) النقاط الحرجة : $س = ٢ ، س = -٢$

م) متزايد في $(-\infty ، -٢] ، [٢ ، \infty)$

متناقص في $[-٢ ، ٢]$

ب) يوجد قيمة عظمى محلي عند $س = -٢$

وقيمتها $ص(-٢) = (-٢)^٣ - ١٢(-٢) + ٢$

$= -٨ + ٢٤ + ٢ = ١٩$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

وقيمتها $ص(٢) = ١٣$

٤٣) $ص' = \frac{٤(س^٢ - ٤س)(٢س - ٤)}{٣\sqrt[٣]{(س^٢ - ٤س)^٢}} = ٠$

$٤(س^٣ - ٤س^٢ - ٨س^٢ + ١٦س) = ٠$

$س^٣ - ١٢س^٢ + ١٦س = ٠$

$س^٣ - ٦س^٢ + ٨س = ٠$

$س(س^٢ - ٦س + ٨) = ٠$

$س(س - ٢)(س - ٤) = ٠$

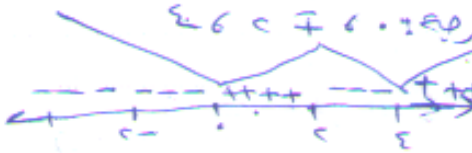
$س = ٠ ، س = ٢ ، س = ٤$

$ص'$ غير معرفة عندما المقام $= صفر$

$س^٢ - ٤س = ٠ \Leftarrow س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠ ، س = ٤$

النقاط الحرجة : $٠ ، ٢ ، ٤$



متزايد في $[-٢ ، ٠] ، [٢ ، ٤]$

متناقص في $(-\infty ، -٢] ، [٠ ، ٢] ، [٤ ، \infty)$

القيم الصغرى المحلية : $(٠ ، ٠) ، (٤ ، -٣٢\sqrt[٣]{٤})$

عظمى محلي $= (٢ ، ١٦\sqrt[٣]{٢})$.

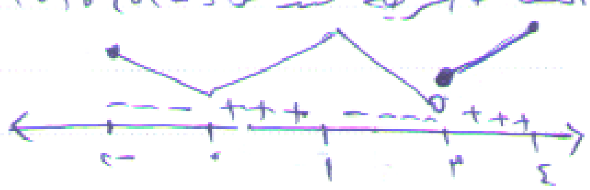
٤٤) ق(س) = { س² ، -٢ ≤ س < ١
٢ - س ، ١ ≤ س < ٣
٢س ، ٣ ≤ س ≤ ٤ }

الاتصال: ق متصل عند س = ١ لأن
ق(١) = نهــا ق(س) = ١ (س ← ١)
ق غير متصل عند س = ٣ لأن
ق(٣) = ٦ ، نهــا ق(س) غير موجودة. (س ← ٣)

قَ(س) = { ٢س ، -٢ < س < ١
-١ ، ١ < س < ٣
٢ ، ٣ < س < ٤ }
ع.م ، س ≠ -٢ ، ٤ ، ١ ، ٣
قَ(س) = ٠ ⟸ ٢س = ٠ ⟸ س = ٠

قَ(س) غير موجودة عند:
س = -٢ ، ٤ طرفا فترة
س = ١ لأن قَ₊(١) ≠ قَ₋(١)
س = ٣ لأن ق غير متصل عند س = ٣

النقاط الحرجة عند س = -٢ ، ٤ ، ١ ، ٣ ، ٠



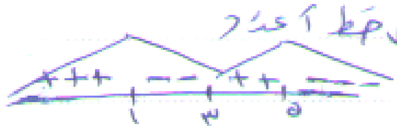
ق متزايد في [٠ ، ١] ، [٣ ، ٤]
متناقص في [-٢ ، ٠] ، [١ ، ٣)
ق(١) = ١ ، ق(-٢) = ٤ ، ق(٤) = ٨
ق(١) = ١ عظمى محلية ،
ق(٤) = ٨ عظمى مطلقة
ق(٠) = ٠ صغرى محلية مطلقة
ق(٣) = ٦ ، نهــا ق(س) = ١ ⟸ لا يوجد صغرى (س ← ٣⁻)

٤٥) ق(س) = جا²س
قَ(س) = ٢ جاس جتاس = ٠
جا٢س = ٠
⟸ ٢س = ٠ ، π
(س = ٠) (س = π/٢)

الحرجة: س = ٠ ، π/٢ ، π
متزايد في [٠ ، π/٢] ، متناقص في [π/٢ ، π]
ق(٠) = ٠ ، ق(π) = ٠
صغرى محلية صغرى مطلقة
ق(π/٢) = ١ عظمى محلية ومطلقة

٤٦) أ) النقاط الحرجة: س = ٢ ، س = ٤
ب) متزايد في [٢ ، ٤] .
متناقص في (-∞ ، ٢] ، [٤ ، ∞)
صغرى محلية عند س = ٢ وقيمتها (-٢)
عظمى محلية عند س = ٤ " (٤)
د) قَ(٤) = صفر (المماس // السينات)

٤٧) نحوله إلى خط أعداد



أ) الحرجة: س = ١ ، ٣ ، ٥
ب) متزايد في (-∞ ، ١] ، [٣ ، ٥]
متناقص في [١ ، ٣] ، [٥ ، ∞)
جـ) عظمى محلية عند س = ٥ وقيمتها ق(٥)
" " " س = ١ وقيمتها ق(١)
صغرى محلية عند س = ٣ وهي ق(٣)
د) قَ(٤) = ٤
هـ) قَ(٢) = صفر

٤٨) $ق(س) = س^3 + م س^2 + ب س + ج$

$ق'(س) = 3س^2 + 2م س + ب$

$ق'(-1) = 3 - 2م + ب = 0$

$ق'(2) = 12 + 4م + ب = 0$

نطرح

$-9 - 6م = 0$

$م = -\frac{9}{6} \Leftarrow$ **$م = -\frac{3}{2}$**

$3 - 2 \times -\frac{3}{2} + ب = 0$

$ب = -6$

٤٩) $ق(س) = س^3 + 3م س^2 - 15س + 1$

$ق'(س) = 3س^2 + 6م س - 15$

$ق'(-1) = 3 - 6م - 15 = 2$

$\boxed{6م - 15 = 1}$

$ق''(س) = 6س + 6م$

$ق''(-2) = -12 + 6م = 6$

$6م = 18 \Leftarrow$ **$م = 3$**

$\Leftarrow 6 \times 3 - 15 = 1 \Leftarrow$ **$ف = \frac{17}{5}$**

٥٠) المطلوب هو أصغر بعدين

$ح = \frac{1}{2} \times ص$

$ح = س(30 - \frac{3}{2}س)$ ، $ص = 60 - 3س$

$ح = 30س - \frac{3}{2}س^2$

$ح' = 30 - 3س = 0$

$3س = 30$

$س = 10$

$ص = 60 - 3 \times 10$

$ص = 30$

البعدان هما : 10 ، 30

التأكد :

عظمى

٥١) مجموعة تعريف الدالة ر هي $\mathbb{R}$

$م = س^2 + 2ص$

$ص = 40 - س \Leftarrow س + ص = 40$

$م = س^2 + 2(40 - س) = س^2 - 2س + 80$

$م' = 2س - 2 = 0 \Leftarrow$ **$س = 1$**

العدد الأول : 1 والثاني 39

صرحي

٥٢)

مساحة صندوق أكبر ما يمكن

$م = (س - 4)(ص - 0)$

$م = س ص - 4ص - 0س + 0$

$س ص = 128 \Leftarrow ص = \frac{128}{س}$

$م = 128 - 4 \times \frac{128}{س} - 0س + 0$

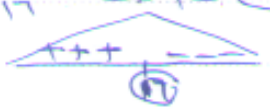
$م' = 0 - 0 - 4 \times \frac{-128}{س^2} + 0 = 0$

$\frac{1}{2} \times \not{2} = \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 128}{س^2}$

$س^2 = 256 \Leftarrow س = \pm 16$

$س = -16$ مرفوض هندسياً

$س = 16 \Leftarrow ص = \frac{128}{16} \Leftarrow$ **$ص = 8$**



٥٣)

مساحة الورقة أصغر ما يمكن

$م = (س + 4)(ص + 8)$

$م = س ص + 8س + 4ص + 32$

$س ص = 400 \Leftarrow ص = \frac{400}{س}$

$م = 400 + 8س + \frac{1600}{س} + 32$

$م' = 0 + 8 + \frac{-1600}{س^2} + 0 = 0$

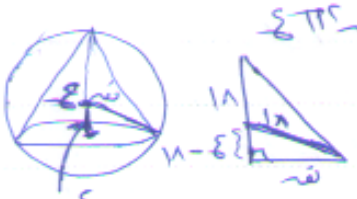
$-\frac{8}{1} = \frac{-1600}{س^2}$

$س^2 = \frac{1600}{8} = 200$

$س = 10 \Leftarrow ص = \frac{400}{10} = 40$

أبعاد الورقة : $10 + 4 = 14$ ، $40 + 8 = 48$

٥٤) $ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$



فيثاغورس :

$(١٨)^2 = نق^2 + (ع - ١٨)^2$

$٣٢٤ = نق^2 + ع^2 - ٣٦ع + ٣٢٤$

$نق^2 = ٣٦ع - ع^2$

$ح = \frac{\pi}{3} (٣٦ع - ع^2) \times ع$

$ح = \frac{\pi}{3} (٣٦ع^2 - ع^3)$

$ح' = \frac{\pi}{3} (٧٢ع - ٣ع^2) = ٠$

$\frac{\pi}{3} ع (٢٤ - ع) = ٠$

$ع = ٠$ أو $ع = ٢٤$ مرفوضة

Δ $نق^2 = ٤ح ع - ع^2$

$= ٤ح (٣٦ - ع)$

$نق^2 = ٤ \times ١٢ \times ٤$

$نق^2 = ٧٧ ح^2$

ح' | + + + | 0 | - - - |
ع = ٤ح

أكبر حجم $= \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times ٧٧ ح^2 \times ٤ح$

$= \pi ح^3 ٣٠٤$

٥٥)

قطر الكرة = قطر المخروط

قطر الكرة = ٢ح

$ص^2 + ح^2 = ع^2$

$٤ح^2 + ع^2 = ٢٥$

$ع = ٥ - ٢ح$

$ع^2 = ٢٥ + ٤ح^2 - ٢٠ح$

حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi ص^2 \times ع$

$ص^2 = ٢٥ - ع^2$

$ح = \frac{٢٥ - ع^2}{ع} \times ع$

$ح = ٢٥ع - ع^3$

$ح' = ٢٥ - \frac{3}{2} ع^2 = ٠$

$ع^2 = \frac{٥٠}{3}$

$ع = \frac{\sqrt{٥٠}}{\sqrt{3}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{3}$

ح' | + + + | 0 | - - - |
ع = $\frac{٥\sqrt{٦}}{3}$

$ص^2 = ٢٥ - \frac{٥٠}{3} = \frac{٢٥}{3}$

$ص = \frac{٥}{\sqrt{3}}$

$ص^2 = \frac{١}{3} \times \frac{٥٠}{3}$

$ح = ٥ - \frac{٥\sqrt{٦}}{3} = \frac{١٥ - ٥\sqrt{٦}}{3}$

$س = \frac{٥}{\sqrt{3}}$

المخروط عبارة عن مكعب

(٥٦) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ما × جا × جتا

أي مثلثين × جيب زاوية بينهما

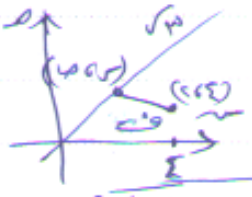
م = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٦ × جا هـ

م = ٢٤ جا هـ

م' = ٢٤ جتا هـ = ٠

$\Leftarrow$ هـ = $\frac{\pi}{2}$ أو ٩٠°

(٥٧)



ف = $\sqrt{(\text{س} - ٤)^2 + (\text{ص} - ٠)^2}$

ف = $\sqrt{(\text{س} - ٤)^2 + (\sqrt{3}\text{س} - ٠)^2}$

= $\sqrt{(\text{س} - ٤)^2 + 3\text{س}^2}$

ف' = $\frac{2(\text{س} - ٤) + 2(\sqrt{3}\text{س} - ٠)\sqrt{3}}{2\sqrt{(\text{س} - ٤)^2 + 3\text{س}^2}}$ = ٠

٤س − ٨ + ٦س = ٠

١٠س − ١٠ = ٠

١٠س = ١٠

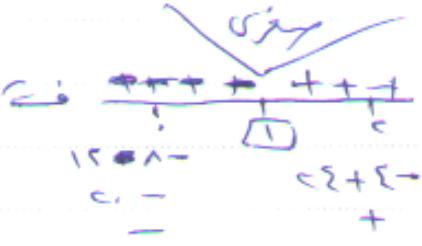
$\Leftarrow$ س = ١

ص = $\sqrt{3}$ س

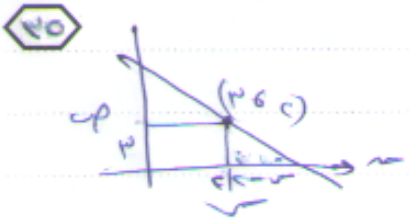
ص = $\sqrt{3}$

النقطة هي : (١ ، $\sqrt{3}$)

مرفوض



(٥٨)



م = $\frac{1}{2}$ × س × ص

$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{4-\text{س}}$ $\Leftarrow$ ص = $\frac{3\text{س}}{4-\text{س}}$

م = $\frac{1}{2}$ س × $\frac{3\text{س}}{4-\text{س}}$ = $\frac{3\text{س}^2}{2(4-\text{س})}$

م' = $\frac{6\text{س}(4-\text{س}) - 2\text{س}^2(-1)}{2(4-\text{س})^2}$ = ٠

٢٤س − ٦س² + ٢س² = ٠

٢٤س − ٤س² = ٠

٤س (٦ − س) = ٠

$\Leftarrow$ س = ٠ ✗

س = ٦

الاستقامة تمر في (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٦)

ميل = $\frac{4-6}{0-3}$ = $\frac{-2}{-3}$ = $\frac{2}{3}$

ص − ٠ = $\frac{2}{3}$ (س − ٤) .

٥٩

الارتفاع = ع ، القاعدة
ع = ٢ص √٢
ع = ٤ ص

ك² = ص² + ع² = ص² + ١٦ ص²
ك = ٥ ص √٢ ⟸ ك = ٥√٢ ص

المحيط = ١٠
طول المستطيل = ٢ × ص + ك + ك = ١٠
٢ ص + س + ٢ ك = ١٠
ص + س + ٥ ص √٢ = ٥
ص + س + ٥ ص √٢ = ٥
س = ٥ − ص − ٥ ص √٢

المساحة الجانبية = مساحة المستطيل + مساحة المثلث
م = س × ص + ١/٢ × ٢ص × ع
= ص(٥ − ص − ٥ ص √٢) + ص × ٤ ص
م = ١٠ ص − ٢ ص² − ١٠ ص² √٢ + ٤ ص²
م = ١٠ ص − ٢ ص² − ١٠ ص² √٢ + ٤ ص²
م = ١٠ ص + ٢ ص² − ١٠ ص² √٢
م = ١٠ + ٤ ص − ١٠ ص √٢ = ٠

ص = ١٠ / (٤ + ١٠√٢)

ع = ٤ × ١٠ / (٤ − ١٠√٢)

س = ٥ − ٤ / (٤ − ١٠√٢) − ٥√٢ / (٤ − ١٠√٢)

٦٠

حجم الأسطوانة = م ب ع
نق = ع/٢
م ب² + (ع/٢)² = (٦√٢)²
م ب² + ١/٤ ع² = ٧٢
م ب² + ١/٤ ع² = ٧٢
م ب² = ٧٢ − ١/٤ ع²

ح = م ب² ع
= (٧٢ − ١/٤ ع²) ع
= ٧٢ ع − ١/٤ ع³

ح' = ٧٢ − ٣/٤ ع² = ٠

ع² = ٧٢ / (٣/٤)

ع = ٤√٢٤ = ٤√(٤ × ٦)

ع = ٨√٦

ع'' = −٣/٢ ع
ع'' = −٣/٢ × ٨√٦ < ٠ ⟸ ح عظمى

م ب² = ٧٢ − ١/٤ (٨√٦)²

م ب² = ٧٢ − ١/٤ × ٣٨٤ × ٦

م ب² = ٧٢ − ٤ × ٦ ⟸ م ب = √٤٨

نصف قطرها √٤٨ وارتفاعها ٨√٦

ل) $ق(س) = س^٤ - ٦س^٣$

$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٨س^٢$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ١٢س^٢(س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ $س = ٣$

الاقتران متقعر للأسفل في $[٣، ٠]$

متقعر للأعلى في $(-\infty، ٠]$ ، $[٣، \infty)$

نقط الانعطاف: $(٠، ق(٠)) = (٠، ٠)$

$(٣، ق(٣))$ ، $(٤، ق(٤))$

ح) نحوّل سنن وحشة الأولى إلى خط أعداد وإشارات

ق متزايدة في $(-\infty، -١]$ ، $[١، \infty)$

متناقصة في $[-١، ١]$

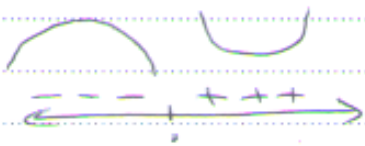
ب) يوجد قيمة عظمى محلية عند $س = -١$ وقيمتها $ق(-١)$

$= ق(١)$ ، يوجد قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ $= ق(١)$

* نحوّل منحنى ق إلى خط أعداد وإشارات

ج) ق متقعر للأعلى في $[٠، \infty)$

متقعر للأسفل في $(-\infty، ٠]$



د) يوجد انعطاف ق نقطة انعطاف عند $س = ٠$

وهي: $(٠، ق(٠))$