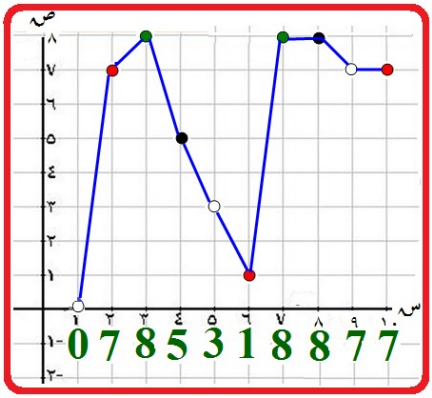
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي **العلمي** و **الصناعي**

المستوى الثالث

وحدة النهايات والاتصال



مراجعة مكثفة (أسئلة متوقعة) مع الحل

٢٠١٧ / ٢٠١٨

تطلب من :
مكتبة الصحوة الإسلامية / البقعة / قرب البنك العربي ٠٧٨٦٤٣٤٠٧٨
ومكتبة آية وكرم / عين الباشا / قرب الإشارة

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

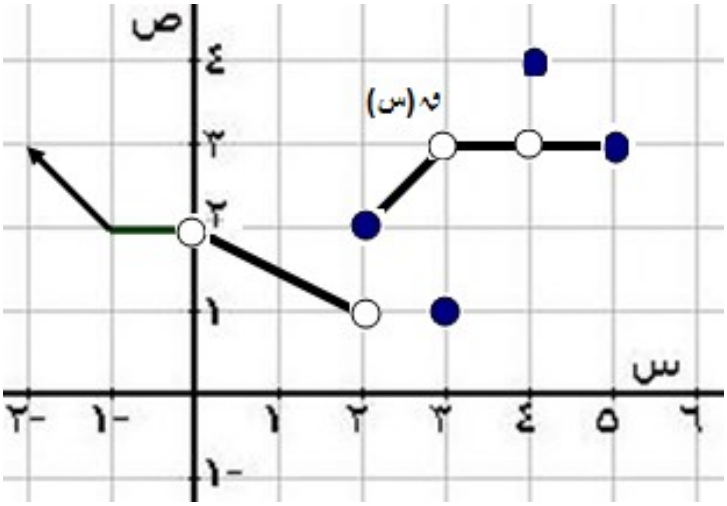
I ♥ Maths √16 Ever

2∞&>

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

١

س١) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق (س) المعرف على الفترة (- ∞ ، ٥] أجب عن الأسئلة (١-١٠):



١) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) =
أ) ٢ ب) ١ ج) ٣ د) غير موجودة

٢) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق (س)=
أ) ٣ ب) ١ ج) ٢ د) غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠}$ ق (س)=
أ) صفر ب) ٢ ج) ١ د) غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٤}$ (٢ق (س) – ٧)=
أ) ١ ب) – ١ ج) – ٦ د) غير موجودة

٥) $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س+١)=
أ) ٢ ب) – ١ ج) ١ د) غير موجودة

٦) $\lim_{س \to ٤^+}$ ق (س – ٢)=
أ) ١ ب) – ١ ج) ٢ د) غير موجودة

٧) مجموعة نقاط عدم الاتصال للاقتران ق هي :
أ) { ٠، ٢، ٣، ٤ } ب) { ٢، ٣، ٤ } ج) { - ٢، ٠، ٢، ٣، ٤، ٥ } د) { ٠، ٢، ٣، ٤، ٥ }

٨) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to م}$ ق (س) غير موجودة هي :
أ) { ٠، ٢، ٣، ٤ } ب) { ٢، ٣، ٤ } ج) { - ٥، ٢، ٢، ٠ } د) { ٢، ٥ }

٩) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to م}$ ق (س)=٣ هي :
أ) [٣، ٥) ∪ { -٢ } ب) [٣، ٥] ∪ { -٢ } ج) (٣، ٥) ∪ { -٢ } د) [٣، ٥)

١٠) $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س)=
أ) ٢ ب) ٠ ج) ٢ د) غير موجودة

---

١١) $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{\sqrt{٢س - ٦} - ٤}{س - ٢}$ = أ) غير موجودة ب) – ٤ ج) ٤ د) صفر

١٢) $\lim_{س \to ٣^+}$ $\frac{\sqrt{٢س - ٦} - ٤}{س - ٢}$ = أ) غير موجودة ب) – ٤ ج) ٤ د) صفر

١٣) $\lim_{س \to ٣^+}$ $\frac{\sqrt{٢س - ٦} - ٤}{س - ٣}$ = أ) صفر ب) غير موجودة ج) – ٤ د) ٤

الإجابات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
	أ	أ	ب	ب	ج	ج	د	د	أ	أ	أ	ب	ب

٢

١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{جا(\pi - ٦س)}{٣س}$ = أ) ١ ب) ٢ ج) – ٢ د) غير موجودة

١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{جا(\pi + ٦س)}{٢س}$ = أ) ١ ب) ٣ ج) – ٣ د) غير موجودة

١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{٨س + ٣ظا٤س}{ظا٢س}$ = أ) ٨ ب) غير موجودة ج) ١٠ د) ٦

١٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{\pi - ٢س}$ = أ) غير موجودة ب) ٣ ج) $-\frac{١}{٢}$ د) ١

١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{\pi - س}$ = أ) غير موجودة ب) ١ ج) – ١ د) صفر

١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س-٢}}{\sqrt{س^٢-٤}}$ = أ) $\frac{١}{٤}$ ب) صفر ج) $\frac{١}{٢}$ د) غير موجودة

٢٠) $\lim_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{س^٢-٤٩}}{\sqrt{س-٧}}$ = أ) ٧ ب) – ٧ ج) غير موجودة د) $\sqrt{١٤}$

٢١) $\lim_{س \to ٢^-} \frac{|س-٢|}{س-٢}$ = أ) – ١ ب) ١ ج) ٢ د) غير موجودة

٢٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + (م+٢)س - م}{س - ٢}$ موجودة ، فإن قيمة م = أ) ١ ب) – ٨ ج) ٢ د) $\frac{٨}{٣}$

٢٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٤^{س} + ٢^{-س} - ٢}{٢^{س} - ١}$ = أ) ١ ب) – ٣ ج) ٣ د) غير موجودة

٢٤) مجموعة نقط عدم الاتصال للاقتران ق(س)= $\frac{س^٢ + ١}{س^٣ - ٩س}$ هي : أ) {-٣ ، ٣} ب) { ٩ } ج) { ٩ ، ٠} د) {-٣ ، ٠ ، ٣}

٢٥) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \frac{٤}{س - ١} & ، س < ٢ \\ \frac{١٢}{س + ٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$ فإن مجموعة نقط عدم الاتصال للاقتران ق(س)هي :

أ) {-٢ ، ٢} ب) {-٢ ، ١} ج) {-٢} د) {-٢ ، ١ ، ٢}

٢٦) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً عند س=٢ وكان ٣ق(٢) = -٦ فإن $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + ٥س) =

أ) -٤ ب) ٨ ج) صفر د) ٤

٢٧) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً عند س=٥ وكان $\frac{١}{٢}$ ق(٥) = ٦ وكانت $\lim_{س \to ٥}$ (ق(س) +م س) =٤م فإن قيمة م =

أ) – ٣ ب) ٨ ج) – ١٢ د) ٤

الإجابات	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧
	ب	ج	ج	ج	د	د	د	أ	ب	ج	د	أ	ب	ج

٣

س٢)

أ) إذا كان هـ(س) كثير حدود وكانت $\lim_{س\to ١} \frac{هـ(س) - ٦}{س - ١} = ٢$ فجد $\lim_{س\to ١} (\frac{١}{٣}$ هـ(س) – ٧س -٢)

ب) إذا كانت $\lim_{س\to ٢} \frac{س^{٣} + م س - أ}{س - ٢} = ٨$ فجد قيم الثابتين أ ، م

ج) إذا كانت $\lim_{س\to -١} \frac{أ س^{٢} + ٣ب س - ١٢}{س^{٢} - ١} = ٧$ ، فجد قيم أ ، ب

د) إذا كانت $\lim_{س\to م} \frac{س^{٢} - أ^{٢}}{أ س^{٢} - ٧ س + ب} = ٤$ فجد قيمة كلا من أ، ب حيث أ ، ب > ٠

هـ) إذا كانت $\lim_{س\to ٣}$ و(س) =٨، وكان و(س) = $\begin{cases} س - ٥ب & ، س \leqslant ١ \\ م^{٢} - ٥م س & ، س > ١ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س\to ١}$ و(س) موجودة فجد قيم ب،م

و) إذا كانت $\lim_{س\to ٢} [أ س + ١] = ٨$ فجد قيم أ

ز) إذا كان و(س) = $\begin{cases} \frac{جا م س}{٢س} & ، س \leqslant ٠ \\ س + م^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س\to ١}$ و(س) موجودة فجد قيم م

س٣) جد قيمة النهايات الكسرية الآتية :

أ) $\lim_{س\to ٣} \frac{|٢س - ٦|}{س - ٣}$

ب) $\lim_{س\to ٣} \frac{س - ١}{|٣س - ١٢|}$

ج) $\lim_{س\to ٣^{+}} \frac{|٢س - ١|}{[س] - ٣}$

د) $\lim_{س\to ١٢} [٢ - \frac{١}{٤} س]$

هـ) $\lim_{س\to ١٤} [٢ - \frac{١}{٤} س]$

و) $\lim_{س\to -١^{+}} [س + ١]$

ز) $\lim_{س\to -١} \frac{١}{س + ١} (\frac{١}{٣} - \frac{١}{\sqrt{١ - ٣س}})$

ح) $\lim_{س\to ١} \frac{٥س - ٣\sqrt{س} - ٢}{س^{٢} - س}$

ط) $\lim_{س\to -\frac{١}{٣}} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٦س + ١}}{٣س + ١}$

ي) $\lim_{س\to ٣} \frac{س \sqrt{س + ١} - ٦}{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٢}$

ك) $\lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt[٣]{٢س + ٢} - [\frac{١}{٢} س + ١]}{(٥ - س)^{٢} - ٤}$

ل) $\lim_{س\to ١} \frac{١ - \sqrt{س}}{\sqrt{س + ٣} - \sqrt{٣س + ١}}$

م) $\lim_{س\to -٣} \frac{(س + ٥)^{٢} - ٤}{(س + ١)^{٣} + ٨}$

ن) $\lim_{س\to ١} \frac{\frac{١}{\sqrt{س}} - \frac{٣}{|٤ - س|}}{س^{٢} - ١}$

س) $\lim_{س\to ٤} \frac{\sqrt{٣ - \sqrt{س}} - ١}{٤ - س}$

ع) $\lim_{س\to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س + ١} + ١}{(س - ٥)^{٢} - ٩}$

ف) $\lim_{س\to -٣} \frac{(س^{٢} - ٣ س - ٦)^{٢}}{(س + ٢)^{٢}}$

ص) $\lim_{س\to ١} \frac{\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٤]{س} - ١}$

عبد القادر الحسنات 078 531 88 77
عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77
عبد القادر الحسنات 078 531 88 77

٤

س٤) جد قيمة النهايات الآتية :

أ) $\lim_{س\to 0} \frac{جا^{٢}س + جتا^{٢}س - جتا^{٣}س}{١ - جتا^{٢}س}$

ب) $\lim_{س\to 0} \frac{١ - جتاس}{جتا٢س - ١}$

ج) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس - جاس}{١ - ظاس}$

د) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتاس}{جا٢س - جتا٢س - ١}$

هـ) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{(\frac{\pi}{٢} - س)^{٢}}$

و) $\lim_{س\to 0} \frac{١ - جتا٦س - ٢جا^{٢}س}{٥س^{٢}}$

ز) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ - جتا٤س}{١ - جاس}$

ح) $\lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{قاس - ١}}{س}$

ط) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢جتاس - ١}{س - \frac{\pi}{٣}}$

ي) $\lim_{س\to 2} \frac{س - ٢}{ظا \pi س}$

ك) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٣}} \frac{ظا^{٢} س - ٣}{\pi - ٣س}$

ل) $\lim_{س\to 2} \frac{جا(س^{٣} - ٨)}{ظا (س^{٢} - ٤)}$

م) $\lim_{س\to -1} \frac{س جا\frac{\pi}{س}}{س+١}$

ن) $\lim_{س\to 2} \frac{س جتا\frac{\pi}{س}}{س^{٢} - ٤}$

س) $\lim_{س\to 1} \frac{س جا\frac{\pi}{س}}{س-١}$

س٥) إذا كان ه(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س - ٥}{س^{٢} - ٢س + ٢م}$ متصلاً على ح فجد قيمة م

س٦) إذا كان ه(س) =
- أ س^٣ - م س + ١ ، س < -١
- ٥ ، س = -١
- س^٢ - (أ + م) س + ٢ ، س > -١

فجد قيم أ ، م التي تجعل ه متصلاً عند س = -١

س٧) إذا كان ه(س) =
- $\frac{جا ب(س - ٤)}{٣س - ١٢}$ ، س > ٤
- ٢ ، س = ٤
- $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{م س - ٤م}$ ، س < ٤

فجد قيم ب ، م التي تجعل ه متصلاً عند س = ٤

س٨) إذا كان ه(س) =
- $\sqrt{٥ - س}$ ، س ≤ -٢
- [س + ٥] ، -٢ < س ≤ ٠
- | س - ٢ | ، س > ٠

فابحث في اتصال ه (س) على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

س٩) إذا كان ه(س) =
- $\frac{\frac{١}{٢}س^{٢} - س}{س - ٢}$ ، س > ٢
- $\frac{٥س - ٨}{س}$ ، س ≤ ٢

فابحث في اتصال ه (س) عند س = ٢

س١٠) إذا كان ه(س) =
- | س - ٢ | ، ١ ≤ س ≤ ٣
- $\frac{٥}{٢ - س}$ ، ٣ < س ≤ ٤

فابحث في اتصال ه (س) على [١ ، ٤]

س١١) إذا كان ل(س) = $\frac{س - ١}{س + ٢}$ ، هـ(س) = [س - ١] فابحث في اتصال ه(س) = ل(س) × هـ(س) في الفترة [٠ ، ٢]

س١٢) إذا كان م (س) = (س-٣)^٣ ، هـ(س) = [س + ٢] فابحث في اتصال ه (س) = م (س) × هـ(س) عند س = ٣

عبد القادر الحسنات 078 531 88 77

٤) أ) التعويض في المقام ← صفر ⇐ التعويض في البسط = صفر

$س = ١$ ⇐ $ه(س) = ٠$ ⇐ $ه(١) = ٠$ ⇐ $ه(س) = ٦$

$س = -٢$ ⇐ $ه(-٢) = -٨ - ٧ + ٣ = -٦$

ب) قسمة تركيبية: $س^٣$ $س^٢$ $س$ ثابت

	١	٠	م	$-ف$
		٤	٤	$٨ + ٢ف$
	١	٤	$م+٤$	$٨ + ف - ٢ف$

الباقي = صفر ⇐ $٨ + ف - ٢ف = ٠$

$س = ٢$ ⇐ $\frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + م + ٤)}{س - ٢} = ٨$

$٤ + ٤ + م + ٤ = ٨$ ⇐ $م = ٨ - ١٢$ ⇐ $م = -٤$

$٤ - ف + ٨ = ٠$ ⇐ $-ف + ١٢ = -٨$ ⇐ $ف = ٢٠$

ج) قسمة تركيبية ⇐ $س^٢$ $س$ ثابت

	ف	ب	
		$-٣ف$	$-ف$
	ف	$-٣ف + ب$	$-ف + ب$

الباقي = صفر ⇐ $-ف + ب = ٠$

$س = -١$ ⇐ $\frac{(س+١)(س^٢ - ٣ف + ب)}{س + ١} = ٧$ ⇐ $-ف + ب = ٧$ ⇐ $-٣ف + ب = ١٢$

الباقي $= ب - ف = ١٢$

$-ف + ب = ٠$ ⇐ $-٣ف + ب = ١٢$ ⇐ $-ف = ١٢$ ⇐ $ف = -٤$ ⇐ $ب = -٤$

$ب = -٤$ ⇐ $ب = \frac{١٠}{٣}$

د) قسمة تركيبية ⇐ $س^٢$ $س$ ثابت

	ف	ب	
		$٤ف$	$-٧ف$
	ف	$٤ف + ب$	$-٧ف + ب$

الباقي = صفر ⇐ $-٧ف + ب + ٤ = ٠$

$س = ٤$ ⇐ $\frac{(س-٤)(س^٢ + ٤ف + ب)}{س - ٤} = ٤$ ⇐ $\frac{٤ف}{٧ - ٢ف} = ٤$ ⇐ $٤ف = ٨ - ٨ف$

$٨ف + ٤ف - ٨ = ٠$ ⇐ $٤(٢ف + ٣)(ف - ١) = ٠$

$ف = ١$ ⇐ $ف = -\frac{٣}{٢}$ ⇐ $ف = -\frac{٣}{٢}$ ⇐ $ب = -٤$

الباقي $= -٧ف + ب + ٤ = صفر$

$٢١ + ب + ٤ = ٠$

$ب = -٦$

$ب = -٦$

٦

$\lim_{س \to ٣} (س^٢ + ب س + ج) = ٨ \Leftarrow \lim_{س \to ٣} (س - ٥) \lim_{س \to ٣} (س - ٣) = ٨$

$٣^٢ + ٣ب + ج = ٨$

$ب = -١ \Leftarrow ٣ب = ٥ - ٨$

$\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ + ب س + ج}{س + ١}$ موجودة $\Leftarrow \lim_{س \to -١} (س + ١) = ٠$

$(-١)^٢ + ب(-١) + ج = ٠$

$ج = ب - ١ = -٢$

$\frac{س^٢ - س - ٢}{س + ١} = \frac{(س + ١)(س - ٢)}{س + ١} = س - ٢$

$\lim_{س \to -١} (س - ٢) = -٣$

$\lim_{س \to ٠} \frac{م س^٢ + ٥ س}{٦ س^٢ - ٣ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س(م س + ٥)}{س(٦ س - ٣)} = \frac{٥}{-٣} = -\frac{٥}{٣}$

$م^٢ - ٥م = ٦ \Leftarrow م^٢ - ٥م - ٦ = ٠$

$(م - ٦)(م + ١) = ٠$

$م = ٦$ أو $م = -١$

$\lim_{س \to ٢} [٢ س + ١] = ٨ \Leftarrow [٢ ب + ١] = ٨$

$١ + [٢ ب] = ٨$

$[٢ ب] = ٧$

$٧ \leq ٢ ب < ٨$

$\frac{٧}{٢} \leq ب < ٤$

لكنه عند $ب = \frac{٧}{٢}$ النهاية غير موجودة لأن اليمين $\neq$ اليسار

$ب \in [\frac{٧}{٢}, ٤) \Leftarrow$

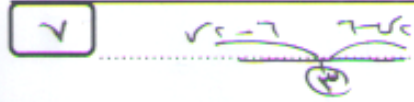
$\lim_{س \to ٠} \frac{جا م س}{س^٢ + ٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا م س}{س(س + ٢)}$ موجودة $\Leftarrow$ اليمين $=$ اليسار

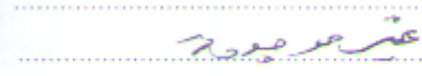
$\frac{م}{٢} = \frac{م}{٠ + ٢}$

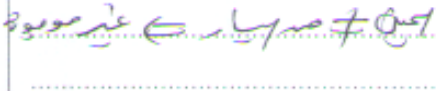
$٢ م^٢ = م$

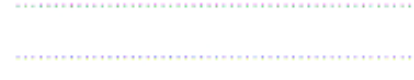
$م(٢ م - ١) = ٠ \Leftarrow ٢ م^٢ - م = ٠$

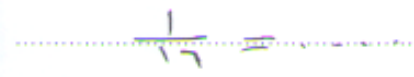
$م = \frac{١}{٢}$ ، $م = ٠$

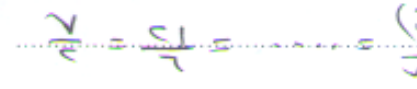


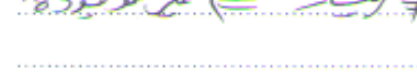


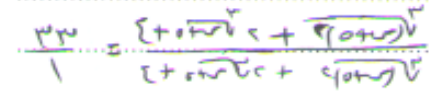












ج) ل) $\frac{ص}{س}$ ، معادلة المماس المطلوب

$$\text{ميل} = \frac{1-\sqrt{س}}{1+\sqrt{3س}-2س} \times \frac{1+\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}} \times \frac{1+\sqrt{3س}+\sqrt{3س}+3س}{1+\sqrt{3س}+\sqrt{3س}+3س} = \frac{1-3س}{2+2\sqrt{3س}} \times \frac{1}{2} = -1$$

م) $\frac{ص}{س}$ عند $(1,2)$ $= \frac{(س+1)(س+5)}{(1+(س+1)^2)(1+(س+1)^2)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

ع) $\frac{ص}{س}$ عند $(1,2)$ $= \frac{1-\sqrt{3س}}{س-1}$ ، $\frac{س-4}{1-\sqrt{3س}}$

معادلة المماس : $ص = -5$

س) $\frac{ص}{س}$: $\frac{1-\sqrt{3-س}}{(2-س)(2)}$ $= \frac{1-\sqrt{3-س}}{(2-س)(2)} \times \frac{1+\sqrt{3-س}}{1+\sqrt{3-س}}$

$= \frac{1}{8}$ $= \frac{2س}{(2)(2)(2-س)}$ $= \frac{2+\sqrt{س}}{2-\sqrt{س}} \times \frac{2-\sqrt{س}}{2+\sqrt{س}}$

ع) $\frac{ص}{س}$: طريقة ثانية ، $\frac{\sqrt[3]{س}-2}{(س-5)^2}$ عند 8 $= \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{-1}{12}$

ف) $\frac{ص}{س}$ عند -2 $= \frac{(س-5)(س+3)}{(س+5)^2}$ $= \frac{(-7)(1)}{(3)^2} = -\frac{7}{9}$

ص) $\frac{ص}{س}$ ، جذور $أ$ لها مختلفة $\Leftarrow$ وضعان مشتركان لا آخر

الأعداد : $1, 2, 3, 4, 6, 12$ هي 12

نفرض أن $س = ص^{12}$

$\sqrt{س} = \sqrt{ص^{12}} = ص^6$

$\sqrt[3]{س} = \sqrt[3]{ص^{12}} = ص^4$ ، $ص^{\frac{12}{3}} = ص^4$

$\sqrt[4]{س} = \sqrt[4]{ص^{12}} = ص^3$

$س = 1 \Leftarrow ص = 1$

$= \frac{ص^6 - ص^4}{ص^3 - 1}$ عند $ص = 1$ $= \frac{ص^4(ص^2-1)}{ص^3-1}$

$= \frac{ص^4(ص-1)(ص+1)}{(ص-1)(ص^2+ص+1)}$

$= \frac{1(1+1)}{(1+1+1)} = \frac{2}{3}$

٩

ع) م) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^3 س}{(1)^2 - (\text{جتا} س)^2} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{(1 - \text{جتا} س)(1 + \text{جتا} س + \text{جتا}^2 س)}{(1 - \text{جتا} س)(1 + \text{جتا} س)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{(1 - \text{جتا} س)}{(\text{جتا}^2 س - 1)} \times \frac{1 + \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س} \times \frac{\text{جتا}^2 س + 1}{\text{جتا}^2 س + 1}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{(1 - \text{جتا}^2 س)(\text{جتا}^2 س + 1)}{(\text{جتا}^2 س - 1)(1 + \text{جتا}^2 س)} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{-\text{جا}^2 س} = -1$

ج) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} س - \text{جا} س}{1 - \text{ظا} س} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} س - \text{جا} س}{1 - \frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س}} = \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} س - \text{جا} س}{\frac{\text{جتا} س - \text{جا} س}{\text{جتا} س}} = \text{جتا} س = \text{جتا} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

د) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س - \text{جتا} س}{\text{جا} س \text{جتا} س - \text{جتا}^2 س + 1}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س - \text{جتا} س}{\text{جا} س \text{جتا} س - (2\text{جتا}^2 س - 1) - 1} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س - \text{جتا} س}{\text{جا} س \text{جتا} س - 2\text{جتا}^2 س + 1 - 1}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س - \text{جتا} س}{\text{جتا} س (\text{جا} س - 2\text{جتا} س)} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

هـ) $\lim_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جا}(\frac{\pi}{2} - ص)}{ص^2} = \text{نهـ}$ حيث $ص = \frac{\pi}{2} - س$ و $ص \to 0$ عندما $س \to \frac{\pi}{2}$

$= \text{نهـ}_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جتا} ص}{ص^2} \times \frac{1 + \text{جتا} ص}{1 + \text{جتا} ص} = \text{نهـ}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}^2 ص}{ص^2 (1 + \text{جتا} ص)} = \frac{1}{2}$

و) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جا}^2 س - \text{جتا} 2س}{س^2} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جتا} 2س - \text{جتا} 0}{س^2} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{-2\text{جا}(\frac{2س + 0}{2}) \text{جا}(\frac{2س - 0}{2})}{س^2}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{-2\text{جا} س \text{جا} س}{س^2} = -2$

ز) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جتا} 4س}{1 - \text{ظا} س} \times \frac{1 + \text{جتا} 4س}{1 + \text{جتا} 4س} \times \frac{1 + \text{ظا} س}{1 + \text{ظا} س}$

$= \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}^2 4س}{\text{جتا}^2 س} \times \frac{1 + \text{ظا} س}{1 + \text{جتا} 4س} = \frac{\text{جا}^2 \pi \times 2}{\text{جتا}^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$

ح) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{\text{ظا} س + 1} - \sqrt{\text{جا} س + 1}}{س^3} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\sqrt{\text{ظا} س + 1} - \sqrt{\text{جا} س + 1}}{س^3} \times \frac{\sqrt{\text{ظا} س + 1} + \sqrt{\text{جا} س + 1}}{\sqrt{\text{ظا} س + 1} + \sqrt{\text{جا} س + 1}}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س - \text{جا} س}{س^3 (\sqrt{\text{ظا} س + 1} + \sqrt{\text{جا} س + 1})} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س (\frac{1}{\text{جتا} س} - 1)}{س^3 (\sqrt{\text{ظا} س + 1} + \sqrt{\text{جا} س + 1})}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س (1 - \text{جتا} س)}{س^3 \text{جتا} س (\sqrt{\text{ظا} س + 1} + \sqrt{\text{جا} س + 1})} = \frac{1}{\text{جتا} 0 (\sqrt{0+1} + \sqrt{0+1})} = \frac{1}{2}$

ط) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جتا} 4س} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} 2س}{\text{جتا} 4س} = \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} 2س}{2\text{جتا}^2 2س - 1} = \text{نهـ}_{ع \to \frac{\pi}{2}} \frac{ع}{2ع^2 - 1}$ حيث $ع = 2س$ و $ع \to \frac{\pi}{2}$ عندما $س \to \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{2} \div (2 \times \frac{\pi^2}{4} - 1) = \frac{\pi}{2} \div (\frac{\pi^2}{2} - 1) = \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{\pi^2 - 2} = \frac{\pi}{\pi^2 - 2}$

ي) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} 3س}{\text{جا}^2 (\frac{\pi}{2} - 2س)} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} 3س}{\text{جتا}^2 2س} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{جتا} 3س} \times \frac{1}{\text{جتا}^2 2س} = \frac{3}{1 \times 1} = 3$

ك) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 (\frac{\pi}{2} - س)}{\text{جتا}^2 (\frac{\pi}{2} - 2س)} = \text{نهـ}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 2س} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س}{(2\text{جا} س \text{جتا} س)^2} = \frac{1}{4}$

ل) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{ظا} 4س}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\frac{\text{جا} 4س}{\text{جتا} 4س}} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{جا} 4س} \times \text{جتا} 4س = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

م) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 3س}{\text{جتا} 2س - 1}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 3س}{-2\text{جا}^2 س} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{9\text{جا}^2 س}{-2\text{جا}^2 س} = -\frac{9}{2}$

ن) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جتا}^4 2س}{\text{ظا} س - 1} \times \frac{1 + \text{جتا}^2 2س}{1 + \text{جتا}^2 2س} \times \frac{\text{ظا} س + 1}{\text{ظا} س + 1}$

$= \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}^4 2س}{1 - \text{ظا} س} \times \frac{1 + \text{جتا}^2 2س}{1 + \text{جتا}^2 2س} \times \frac{1 + \text{ظا} س}{1 + \text{ظا} س} = \frac{\text{جا}^4 \frac{\pi}{2} \times 2}{\text{جتا}^2 \frac{\pi}{4} \times 2}$

$= \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} (\frac{\text{جا}^2 2س}{\text{جتا}^2 2س})^2 = \text{نهـ}_{س \to \frac{\pi}{4}} (\frac{2\text{جا} 2س \text{جتا} 2س}{\text{جتا}^2 2س})^2 = (2)^2 = 16$

ع) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{ظا} 5س}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\frac{\text{جا} 5س}{\text{جتا} 5س}} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{جا} 5س} \times \text{جتا} 5س = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

ف) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{ظا} 5س}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\frac{\text{جا} 5س}{\text{جتا} 5س}} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{جا} 5س} \times \text{جتا} 5س = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

ص) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{ظا} 5س}$

$= \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\frac{\text{جا} 5س}{\text{جتا} 5س}} = \text{نهـ}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 3س}{\text{جا} 5س} \times \text{جتا} 5س = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

١٠

ملاحظة: في الفرع ع، ن، ص نستخدم صيغا جاهزة.

١) جا س = - جا (π + س)

٢) جتا س = جا (π/٢ - س) : صحيحة

٣) جا س = جا (π - س) ثم عامل مشترك

١١

ج) متصل ⇐ النهاية موجودة ⇐ المقام ≠ صفر ⇐ المميز سالب

المميز = $ب^2 - 4أجـ$

$= 4 - 4 \times 1 \times 2م < 0 \Leftarrow 4 - 8م < 0 \Leftarrow 8م > 4 \Leftarrow م > \frac{1}{2}$

د) متصل ⇐ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = الصورة

$ق(-1) = ل(-1) \Leftarrow 0 = 1 + م(-1) - م(-1)^2 \Leftarrow 0 = 1 + م + م^2 \Leftarrow م^2 + م + 1 = 0$

$\Delta = ب^2 - 4أجـ = (م)^2 - 4(1)(1) = م^2 - 4$

$م^2 - 4 = 0 \Leftarrow م^2 = 4 \Leftarrow م = \pm 2$

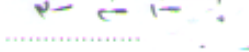
$م + ق = 0 \Leftarrow م + 2 = 0 \Leftarrow م = -2$

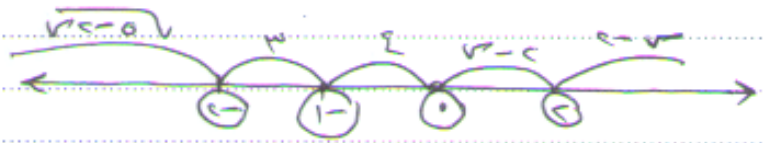
هـ) $\lim_{س \to -2} \frac{أ س^2 + ب س + 4}{(س+2)(س-1)} = ج \Leftarrow ج = \frac{ب}{-3} \Leftarrow ب = -6$

$\lim_{س \to -2} \frac{أ س^2 - 6س + 4}{(س+2)(س-1)} = ج \Leftarrow ج = \frac{6أ + 4}{-3} \Leftarrow ج = -2أ - \frac{4}{3}$

$\lim_{س \to -2} \frac{أ س^2 - 6س + 4}{(س+2)(س-1)} = \lim_{س \to -2} \frac{(أ س - 2)(س - 2)}{(س+2)(س-1)} = ج \Leftarrow \frac{4أ + 4}{-3} = ج \Leftarrow ج = 3$

و) إعادة التعريف: $ق(س) = \begin{cases} 5 & س = 5 \\ [س + 5] & 5 > س \geq -5 \end{cases}$





مدى ق على الفترة المفتوحة: $(-5, 5)$ لأنه ما بين أكبر وأصغر

$(-5, -4) \cup (-1, 0)$ لأنه ثابت

$(0, 2) \cup (2, \infty)$ لأنه كثير حدود

نقاط الشعب:

$س = -2 : ق(-2) = \sqrt{9} = 3$

$\lim_{س \to -2^+} = 3$ ، $\lim_{س \to -2^-} = 3$ ⇐ متصل عند $س = -2$

$س = 1$: غير متصل لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار: $3 \neq 4$

$س = 0$: النهاية من اليمين ≠ اليسار: $4 \neq 0$ ⇐ غير متصل

$س = 2$: $ق(2) = 0$ ، $\lim_{س \to 2^+} = \lim_{س \to 2^-} = 0$ ⇐ متصل

⇐ مدى ق متصل في $ح - \{-1, 0\}$

ج) $هـ(٣) = \frac{٥ \times ٢ - ٨}{٢} = ١$ كذلك $\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ١$

$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{١}{٢}(س+٣) = ٣ = هـ(٣)$ ⇐ $هـ$ متصل عند $س = ٣$

ب) $|س - ٢| = ٠ \Leftrightarrow س = ٢$

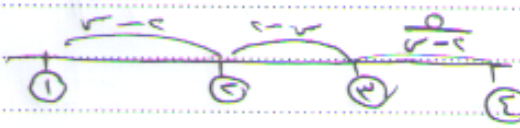
$س = ٢$

ا) $هـ$ متصل على الفترات الجزئية

$(-\infty, ١)$ لأنه كثير حدود

$(١, ٣)$ " "

$(٣, \infty)$ لأنه نسبي ومجاله مقارنا الفترة



ج) نقاط مشتبه: $س = ٣$ متصل لأنه $\lim_{س \to ٣^+}$ ، $\lim_{س \to ٣^-}$ موجودة

$س = ٣$: $هـ(٣) = ٣ - ٢ = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = ٣ - ٢ = ١$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{٥}{س - ٢} = \frac{٥}{٣ - ٢} = ٥$ ⇐ $هـ$ غير متصل لأن النهايات غير موجودة

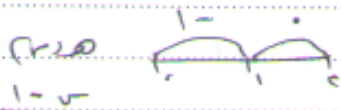
د) نقاط مشتبه:

$س = ١$: $هـ(١) = |١ + ١| = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} = ١ - ٢ = -١$ ⇐ متصل

$س = ٤$ $هـ(٤) = \frac{٥}{٤ - ٢} = \frac{٥}{٢}$ ، $\lim_{س \to ٤^-} = \frac{٥}{٤ - ٢} = \frac{٥}{٢}$ ⇐ متصل

⇐ مجاله متصل هو $[-١, ١] - \{٠\}$

ه) $[س - ١] = ٠ \Leftrightarrow س - ١ = ٠ \Leftrightarrow س = ١$



ا) $هـ$ متصل على $(-٢, ١)$ لأنه مجاله

مقارنا مجاله نسبي

$(١, ٢)$ متصل لأنه كثير حدود

ج) نقاط مشتبه: $س = ١$ ، $هـ(١) = ٠$ ، $\lim_{س \to ١} = ٠$

$\lim_{س \to ١^+} = \frac{١ - ١}{٢ + ١} = ٠$ ، $\lim_{س \to ١^-} = ١ - ١ = ٠$

⇐ $هـ$ متصل عند $س = ١$

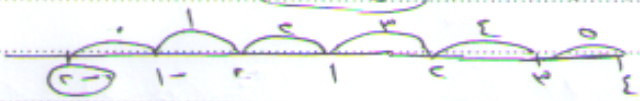
د) $س = ٠$: $هـ(٠) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٠^+} = ٠$ ، $\lim_{س \to ٠^-} = ٠$ ⇐ متصل

$\lim_{س \to ٢^-} = \frac{٢ - ١}{٢ + ٢} \times [٢ - ١] = \frac{١}{٤} \times ١ = \frac{١}{٤}$

$\lim_{س \to ٢^+} = \lim_{س \to ٢^+}$ مجاله $= ٢$ ⇐ $هـ$ غير متصل عند $س = ٢$

⇐ $هـ$ متصل على $[-٢, ٢] - [٢]$ أو متصل على $(-٢, ٢)$

١٣٥) $[س + ٢]$: $س + ٢ = ٠ \leftarrow س = -٢$



$$هـ(س) = \begin{cases} (س-٣)^{٣} \times ٤ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ (س-٣)^{٣} \times ٥ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$$

$هـ(٣) = (٣-٣)^{٣} \times [٢+٣] = صفر$

$هـ'(٣^{+}) = \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{(س-٣)^{٣} \times ٥ - صفر}{س - ٣} = \lim (س-٣)^{٢} \times ٥ = صفر$

$هـ'(٣^{-}) = \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{(س-٣)^{٣} \times ٤ - صفر}{س - ٣} = \lim (س-٣)^{٢} \times ٤ = صفر$

$\Leftarrow هـ'(٣^{+}) = هـ'(٣^{-})$ موجود عند $س = ٣$