لا تنتظر وقتاً إضافياً ...... لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .... اجعل هدفك ليس النجاح فقط بل التفوق والتميز

اهداء إلى روح والداي
غفر الله لهما وجعلهما
من أهل الجنة

الرياضيات

العلامة الكاملة

المستوى الثالث - الفرع العلمي

وحدة تطبيقات التفاضل

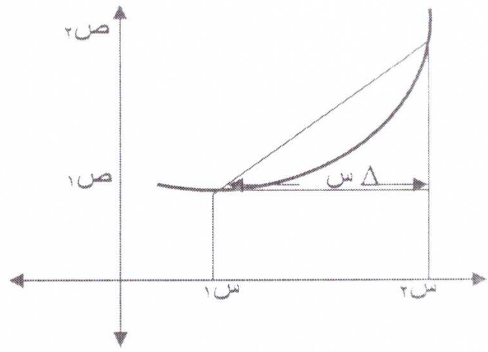
إعداد الأستاذ

عبد الغفار الشيخ

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

تطبيقات التفاضل

تطبيقات هندسية



ميل القاطع المار بنقطتين :

$$\frac{\Delta\, \text{ق(س)}}{\Delta\, \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_2\text{)} - \text{ق(س}_1\text{)}}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\frac{\Delta\, \text{ق(س)}}{\Delta\, \text{س}} = \frac{\text{ق(س} + \Delta\text{س)} - \text{ق(س)}}{\Delta\, \text{س}} \quad ، \quad \Delta\text{س} \neq 0$$

$$\frac{\Delta\, \text{ص}}{\Delta\, \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

ميل القاطع = ميل المماس عند النقطة أ (عند نقطة التماس) ويساوي المشتقة الأولى وعليه يكون :

$$\text{ميل المماس} = \lim_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\text{ق(س} + \Delta\text{س)} - \text{ق(س)}}{\Delta\, \text{س}}$$

عندما $\text{قَ(س}_1\text{)} = \text{هـَ(س}_1\text{)}$ أي $\text{م}_1 = \text{م}_2$

$\text{قَ(س}_1\text{)} - \text{هـَ(س}_1\text{)} = $ صفر يكون ق (س) يوازي هـ (س)

وعندها تكون معادلة المماس

$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$

$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{قَ (س)}\,(\text{س} - \text{س}_1)$

- عندما $\text{قَ (س}_1\text{)} \times \text{هـَ(س}_1\text{)} = -1$

يكون ق (س) عمودي على هـ (س)

وعندها تكون معادلة العمودي على المماس

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{-1}{\text{م}}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

ملاحظة: عند ورود الكلمات التالية في السؤال

- المماس أفقي يعني قَ (س) = صفر
- المماس يوازي محور السينات يعني قَ (س) = صفر
- ميل المماس عند نقطة هي المشتقة الأولى عند تلك النقطة
- العمودي موازي لمحور الصادات فإن المماس موازي لمحور السينات أي المماس أفقي يعني قَ (س) = صفر
- ميل المستقيم = ظل الزاوية مع محور السينات الموجب
- $\text{م} = \text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

في معادلة الخط المستقيم أس + ب ص + جـ = صفر

يكون الميل $\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

- الاقترانين متقاطعين يعني ق (س) = هـ (س)
- الاقتران ق (س) يمس الاقتران هـ (س) يعني
  قَ (س) = هـَ (س)
  ق (س) = هـ (س)
- ق (س) يمس محور السينات عند س = أ
  فإن ق (أ) = صفر يعني جذر
- كلمة **عند هذه** تعني أن النقطة هي نقطة تماس ، عندها يكون الميل م = قَ (س)
- المماس يمر أو من نقطة مثل (س_1 ، ص_1) تعني أنها ليست نقطة تماس ، لذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن (س_2 ، ص_2) ثم تطبيق

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \quad \text{فنجد قيمة س}$$

ثم نجد الإحداثي الصادي ثم ميل المماس وذلك بتطبيق
قَ (س) = م

- كلمة العامودي يمر أو من نقطة مثل (س_1 ، ص_1) تعني أنها ليست نقطة تماس لذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن (س_2 ، ص_2) ثم تطبيق

$$\text{قَ (س)} \times \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = -1 \quad \text{فنجد قيمة س}$$

إذا علمت أن ق (س) = $س^٢$ – ٣ جد معادلة كل من المماس والمستقيم العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٤)

جد جميع النقط النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق (س) = $س^٢$ – ٣ س + ٣ التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{س + ٣}$ عند النقطة (١ ، ٢)

بين أن لمنحنى الاقتران ق (س) = $جا^٢$ س مماس أفقيا في [٠ ، π]

عبد الغفار الشيــخ

جد جميع النقط النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق (س) = $س^٣$ – ٣ $س^٢$ والتي يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات

إذا كان مماس منحنى الاقتران ق (س) = $س^٢$ + ٣ س + ١ عند س = $س_١$ يصنع زاوية مقدارها ٤٥ مع محور السينات الموجب جد إحداثي نقطة التماس

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

بين أن لمنحنى الاقتران ق (س) = $س^٢$ - ٦ س + ١٢ مماسا افقيا عند النقطة (٣ ، ٣)

إذا كان ق (س) = جـ$س^٢$ + جـ س + ٢ وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢ ، ق (٢)) هو ١٣٥° فجد قيمة الثابت جـ

جد جميع قيم س التي يكون العمودي على المماس لمنحنى ق (س) = س – جـا ٢ س عندها موازي لمحور الصادات

جد معادلة المماس لمنحنى ق (س) = $س^٣$ + س عند النقطة التي يكون ميل المماس **عندها** يساوي ٤

جد نقاط تعامد منحنى الاقترانين

ق (س) = س^{٣} − ٢ س + ٥ ، هـ (س) = س + ١

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران

ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ ،والذي يمر بالنقطة (٠ ، ١)

بين أن لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٤} مماسين مرسومين

من النقطة ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) والتي **لا تقع عليه**

بين أن مماس منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ (س) = س

متعامدة عند نقطة تقاطعهما

عبد الغفار الشيـخ

بين أن لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} + ١ مماسين

مرسومين من النقطة (٠ ، ٠) ثم جد معادلة كل منهما

جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (- ٥ ، ٠) لمنحنى

الاقتران ق (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٢٠}$

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

بين أن لمنحنى الاقتران ق (س) = ٥ - س^{٢} مماسين

مرسومين من النقطة (٣ ، ٠)

جد الاحداثي السيني للنقط التي يكون عندها المماس لمنحنى

الاقتران ق (س) = س^{٤} - ٤ س^{٣} + ٤ موازيا للمستقيم الذي

معادلته ص + ٤ س + ١ = ٠

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران

ق (س) = $\frac{١}{س}$ عند س = ٢

جد النقطة التي يكون **عندها** المماس لمنحنى العلاقة

٩ س^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ٥٢ **موازيا للمستقيم**

٩ س − ٨ ص = ١

أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنيي العلاقتين
٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٤٥
س^{٢} - ٤ ص^{٢} = ٥
عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الاول يكونا متعامدان

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} – ٦ س + ٧ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص – ٣ س + ١ = ٠

جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ق (س) = س^{٣} عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص - س – ٦ = ٠

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} – ٤ س + ٣ بحيث يكون المماس عموديا على المستقيم الذي معادلته ٦ ص – ٣ س – ٥ = ٠

عبد الغفار الشيـخ

مثال : جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة
س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥
عند نقطة تقاطعه مع المستقيم س + ص = ١

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

جد مساحة المثلث الذي يتكون من المماس المرسوم من النقطة (١ ، ٠) لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٣} + ٣ والعامودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم ص = ١

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (٦ ، ٠) لمنحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} = ١٨

جد مساحة المثلث الذي الناتج عن تقاطع محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} + ١ عند النقطة (١ ، ٢)

جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (-٤ ، ٠) لمنحنى العلاقة س^{٢} - ص^{٢} = -٨

جد مساحة المثلث القائم الزاوية المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ص = $\sqrt{س}$ ، س > ٠ ، عند النقطة (٤ ، ٢) ومحور السينات والمستقيم س = ٤

معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) هي

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

اثبت أن نصف القطر عامودي على المماس

إذا كان المستقيم أ س + ٣ ص = ١ يمس منحنى الاقتران ق (س) = ٤ $س^2$ + أ س + ب عند النقطة (١ ، ق (١)) جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

إذا كان منحنى ق (س) = أ $س^2$ + ب س + جـ يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣) وله مماسان ، المماس الأول عند نقطة س = -١ ، ويصنع زاوية ٤٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، والمماس الثاني عند النقطة س = ٢ ويصنع زاوية مقدارها ١٣٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات جد قيمة أ ، ب ، جـ

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٦) يمس منحنى الاقتران ق (س) = أ $س^2$ + س − ١ جد أ

جد جميع النقط الواقعة على منحنى الاقتران ٢ $س^2$ − ٤ س + $ص^2$ − ١٠ = صفر والتي يمر المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند كل منها بالنقطة (٤ ، ٠)

إذا كان المستقيم ٤ س − ٢ ص + ٥ = ٠ يمس منحنى ق عند النقطة (٣ ، ٢) وكان المستقيم ٩ص + ٣س − ٤ = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣ ، -١) جد (ق × ل)َ (٣)

جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة $(ص - ٤)^2$ = س + ٢ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم الذي معادلته ٣ س + ٦ ص + ٢ = ٠

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران هـ (س) = س^{٢} - $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة ص^{٢} + س^{٢} + ٦ ص – ٢ س + ٢ = ٠ عند النقطة (٣ ، - ١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

اذا كان ق (س) = أ س^{٢} – ٤ س + ٥ فما قيمة الثابت أ التي تجعل المماس لمنحنى ق (س) عندما س = ١ عموديا على المستقيم ٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠

اوجد معادلة المماس والعامودي لمنحنى العلاقة س^{٣} + ٣ س ص^{٢} = ٥ س + ٨ عند النقطة (١ ، ٢)

عبد الغفار الشيـخ

جد قيمة كل من الثابتين ب ، جـ اللتين تجعلان المستقيم الذي معادلته ص – س – ٢ = ٠ مماسا لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} + ب س + جـ عند النقطة (٠ ، ٢)

جد معادلة المماس والعامودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = ٣ ظتا س + قا^{٢} س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

إذا كان المستقيم ٢ س – ص + جـ = ٠ يمس منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{-٢}{س}$ فجد قيم الثابت جـ

رسم مماس لمنحنى ق (س) = س^{٢} + جـ من نقطة التماس (١ ، ب) الواقعة على منحناه فقطع محور السينات في النقطة س = -١ جد قيم كل من جـ ، ب

جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة س = ص^{٢} – ٤ ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات

اوجد معادلة المماس والعامودي لمنحنى الاقتران ق (س) = ٣ س – س ظتا س عندما س = π/ ٢

تطبيقات فيزيائية

ع̄ = (ف (س + Δ ن) − ف (ن)) / Δن ، Δ ن ≠ ٠

ع (ن) = نهـــا (ف (س + Δ ن) − ف (ن)) / Δ ن ، Δ ن ≠ ٠

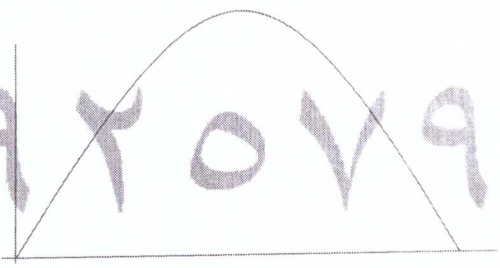
السرعة اللحظية = ع (ن) = فَ (ن)

ت(ن) = نهـــا (ع (س + Δ ن) − ع (ن)) / Δ ن ، Δ ن ≠ ٠

التسارع اللحظي = عَ (ن) = فً (ن)

لاحظ الرسم التالي

ع(ن)= ٠
ف(ن) = ؟؟
ن = ؟؟



ع(ن)= ؟؟ ، ف(ن) = ٠ ، ن = ٠

ع(ن) = ؟؟ ، ف(ن) = ٠ ، ن = ؟؟

ملاحظة :

عندما يصل الجسيم إلى أعلى ارتفاع تكون سرعته تساوي صفر

عندما ينعدم التسارع تكون ت = صفر

إذا كان المقذوف من أعلى بناية نضيف للعلاقة ارتفاع البناية اذا كانت غير مضافة

اذا كان المقذوف من عمق نطرح مقدار العمق من العلاقة إذا كانت غير مطروحة

زمن الصعود = نصف الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود الى سطح الأرض

زمن الصعود = زمن الهبوط

السرعة نازل سالب ، صاعد موجب

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى وفقا للاقتران ف (ن) = ن^{3} - ٣ ن^{2} - ٣ احسب سرعة الجسيم وتسارعه بعد ٤ ثواني بدء الحركة

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقا للاقتران ف (ن) = ٢ ن^{2} - ٤ ن + ٣٢ جد المسافة عندما تكون سرعة الجسيم تساوي تسارعه

اذا كانت ف (ن) = ٤ جا ٣ ن − ٥ جتا ٣ ن ، حيث أن المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني ، احسب المسافة والسرعة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٦}$ ثانية

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث سرعة الجسيم تعطى بالعلاقة ع (ن) = $\sqrt{٢ ن^{2} + ٧}$ جد التسارع المتوسط للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٣] وسرعته عندما تسارعه = ٦ / ٥ م / ث^{2}

عبد الغفار الشيـخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى وفقا للاقتران ف (ن) = ٢ ن^{٣} - ٣ ن^{٢} + ٢ احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه

قذف جسيم رأسيا للأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض يعطى بالعلاقة

ف (ن) = ١٩.٦ ن – ٤.٩ ن^{٢} جد كلا مما يأتي :

أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم عن سطح الارض

تسارع الجسيم في اللحظة ن

سرعة الجسيم لحظة وصوله إلى سطح الارض

إذا كانت ف (ن) = ن^{٣} - ٩ ن^{٢} + ١٥ ن

هي العلاقة الزمنية لحركة جسيم على خط مستقيم ، حيث ، ن الزمن بالثواني ، المسافة بالامتار احسب تسارع الجسيم في اللحضة التي تنعدم فيها السرعة

قذف جسيم رأسيا للأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض يعطى بالعلاقة

ف (ن) = ١٢٨ ن – ١٦ ن^{٢} جد كلا مما يأتي :

مجموعة قيم ن التي تكون عندها السرعة سالبة

تسارع الجسيم عند أي لحظة

قذف جسيم رأسيا للأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض يعطى بالعلاقة

ف (ن) = ٣٠ ن – ٥ ن^{٢} جد كلا مما يأتي :

السرعة الابتدائية للجسيم (السرعة التي قذف بها الجسيم)

أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسيم ١٠ م / ث

الزمن اللازم حتى يعود الجسيم إلى سطح الأرض

قذف جسيم من سطح برج رأسيا الى أعلى بحيث أن ارتفاعه بالامتار عن سطح البرج بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف (ن) = ٢٥ ن – ٥ ن^{٢} جد ارتفاع البرج اذا كانت سرعة الجسيم لحظة وصوله الارض تساوي (- ٥٥ م / ث)

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الأرض سقوطا حراً بحيث أن المسافة ف، (ن)= ٥ ن^{٢} وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للاعلى بحيث قطع مسافة تعطى بالعلاقة ف٢(ن) = ٦٠ ن - ٥ ن^{٢} جد سرعة كل من منهما عندما يكون لهما نفس الارتفاع من سطح الأرض

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقا للاقتران ف (ن) = جا ٥ ن + جتا ٥ ن أثبت أن ت + ٢٥ ف = صفر

قذف جسيم رأسيا لاعلى من سطح الارض حسب العلاقة ف (ن) = ٦٤ ن – ١٦ن^{٢} بين انه يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨

أسقط جسم من ارتفاع ٢٠٠ م عن سطح الأرض سقوطا حراً بحيث أن المسافة ف (ن) = ٥ ن^{٢} جد سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ١٢٠ م سطح الأرض

عبد الغفار الشيـــخ

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى وفقا للاقتران ف (ن) = جا^{٤} ن احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه لأول مرة بعد تحركه

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ٦ ن^{٢} + ٩ ن + ٣ احسب سرعة الابتدائية للجسيم ، تسارع الجسيم لحظة سكونه

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يتحرك جسيم حسب العلاقة ع^{٢} = ١ - ف^{٢} احسب التسارع عندما تنعدم السرعة

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته ع = أ $\sqrt{\text{ف}}$ أ > ٠ ، ف > ٠ حيث ع السرعة ف المسافة بالامتار اذا علمت أن تسارعه ٨ م / ث^{٢} فجد قيمة الثابت أ

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقا للاقتران ف (ن) = ٢جا^{٢} $\frac{\text{ن}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ، ن [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$ م / ث

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ع^{٢} = ١ – ٢ ف^{٢} حيث ع السرعة ف المسافة بالامتار جد تسارع الجسيم عندما تنعدم السرعة

من نقطة على ارتفاع ٨٠ م من سطح الارض ، قذف جسيم راسيا الى اعلى حسب العلاقة

ف (ن) = ٤٠ ن – ٥ ن^{٢} جد كلا مما يأتي :

اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسيم إلى نقطة القذف

الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسيم الى سطح الارض

متى تصبح سرعة الجسيم ٣٠ م / ث

متى يصبح ارتفاع الجسيم ١٣٥ مترا عن سطح الأرض

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقا للمعادلة

ف (ن) = ن^{٣} - ٣ ن^{٢} + ٣ ن + ٣

أثبت ان الجسيم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته

من نقطة على عمق ٥ م من سطح الارض قذف جسيم راسيا لاعلى حسب العلاقة ف (ن) = ٦ ن – ن^{٢} جد

اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الارض

الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسم الى سطح الارض

من سطح بناية أفلت جسما من السكون وفق العلاقة

ف (ن) = ١٦ ن^{٢} ، وفي اللحظة نفسها قذف شخص ثان جسما عموديا الى اسفل بسرعة ابتدائية ٢٠ م /ث من السطح نفسه وفق العلاقة ف (ن) = ٢٠ ن + ١٦ ن^{٢} ، فإذا ارتطم الجسم الاول بعد نصف ثانية (٠.٥) من ارتطام الجسم الثاني بالارض اوجد سرعة كل من الجسم الاول والجسم الثاني لحظة ارتطامها بالارض ، ارتفاع البناية

قذف جسيم رأسيا لاعلى قطع مسافة حسب العلاقة

ف (ن) = ٩٦ ن – ١٦ ن^{٢} جد سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ قدما

قذف جسيم رأسيا لاعلى قطع مسافة حسب العلاقة

ف (ن) = أ ن – ٥ ن^{٢} جد سرعة الجسم و هو على ارتفاع ٦٠ م علما بان اقصى ارتفاع وصله الجسيم = ٨٠ م

من نقطة على ارتفاع ٢٢٥ م من سطح الارض ، قذف جسيم راسيا الى اعلى حسب العلاقة

ف (ن) = ٦٠ ن – ٥ ن^{٢} جد

اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

سرعة الجسيم عندما يصل الى نقطة القذف

المعدلات المرتبطة بالزمن

بشكل عام عند حل المعدلات المرتبطة بالزمن :

الاشتقاق يكون بالنسبة الى الزمن

نقرأ السوال بشكل جيد ونحدد المعطيات والمطلوب

رسم الشكل إن أمكن وتحديد المعلومات والفرض عليه

تحديد الثوابت والمتغيرات والمعدلات الزمنية

ربط المتغيرات والثوابت بمعادلة رياضية

الاشتقاق الضمني والتعويض بعد الاشتقاق

مقتربا ، انخفاض يعني الإشارة سالبة
مبتعدا ، ارتفاع الإشارة موجبة
ايجاد المطلوب

قوانين مهمة للحفظ :

مساحة المثلث = ١ / ٢ القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = ١ / ٢ حاصل ضرب الضلعين × جا هـ

مساحة المربع = مربع الضلع

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة متوازي الاضلاع = القاعدة × الاتفاع

مساحة شبه المنحرف =

١ / ٢ × مجموع الضلعين المتوازيين × البعد العمودي بينهما

مساحة الدائرة = نق^{٢} π

محيط الدائرة = ٢ نق π

حجم المكعب = مكعب الضلع

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم الهرم = ١ / ٣ مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم الكرة = ٤ / ٣ نق^{٣} π

مساحة سطح الكرة = ٤ نق^{٢} π

حجم الاسطوانة = نق^{٢} π ع

المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ نق π ع

المساحة الكلية للاسطوانة =

(٢ نق π ع) + (٢ نق^{٢} π)

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ نق^{٢} π ع

المساحة الجانبية للمخروط = نق π $\sqrt{\text{نق}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

حجم المخروط الدائري القائم الناقص المتوازي القاعدتين =
١ / ٣ ع π (نق$_{١}^{٢}$ + نق$_{٢}^{٢}$ + نق$_{١}^{٢}$ × نق$_{٢}^{٢}$)

نظرية فيثاغورس
الوتر^{٢} = الضلع^{٢} + الضلع^{٢}

قانون جيب التمام
أ^{٢} = بَ^{٢} + جَـ^{٢} - ٢ بَ جَـ جتــا أ

قانون المسافة بين نقطتين =

ف = $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

طول القوس = نق × هـ : هـ مركزية

قطر متوازي الاضلاع

القطر^{٢} = الطول^{٢} + العرض^{٢} + الارتفاع^{٢}

قوانين تشابه المثلثات

تتحرك نقطة على منحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} – ٥ س ٣ص – ٦ = ٠ فاذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة إلى الزمن ٣سم/ث عند النقطة (١ ، ٢) فجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة إلى الزمن عند النقطة نفسها

تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ بحيث يزداد الاحداثي السيني بمعدل ٣ سم / ث جد معدل تغير البعد بينهما وبين النقطة (٢ ، ٠) عندما تكون س = ٥

تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ اذا كان معدل تزايد الاحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٥ وحدات / ث جد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه نقطة الاصل (٠ ، ٠) والنقطة الثابتة (١ ، ٠) والنقطة المتحركة

مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعية المتطابين ٨ سم يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل ٢° / د جد معدل التغير في مساحة المثلث في كل من الحالات الاتية :

عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠°

عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠°

عبد الغفار الشيـخ

قرص دائري الشكل يتمدد بالحرارة محافظا على شكله، فتزداد مساحة سطحه بمعدل ٦ سم^{٢} / ث جد معدل تغير طول نصف قطر القرص عندما يكون نصف قطره ٣ سم

يتساقط الرمل بمعدل ٠.٤٣٢ م^{٣}/ث ليصنع كومة على شكل مخروط ارتفاعه دائما يساوي ربع قطر قاعدته جد سرعة تغير الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع ١.٢م

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

خزان ماء اسطواني يخرج الماء منه بشكل منتظم وبمعدل ٠.٠٠٣ م^{٣} / دقيقة ، أوجد معدل التغير (السرعة) في انخفاض مستوى سطح الماء في الخزان

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يتساقط الرمل بمعدل ٣ قدم^{٣}\دقيقة ليصنع كومة على شكل مخروط نصف قطر قاعدته يساوي ضعفي ارتفاعه جد معدل تغير الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع ١٠ قدم

يزداد طول ضلع من أضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٠.١ سم / د جد المعدل الذي تزداد به مساحته عندما يكون طول ضلعه ٢٠ سم

بدأت سفينتان بالحركة معا من مكان واحد فاتجهت الاولى نحو الشمال بسرعة بسرعة ١٥ ميل / ساعة والثانية نحو الشرق بسرعة ٢٠ ميل / ساعة ، جد معدل ابتعادهما بعد ساعتين من بدء الحركة

انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين قياس الزاوية التي بينهما ١٢٠° إذا كانت سرعة الاولى ٣٠ كم / س وسرعة الثانية ٤٠ كم / س فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعادهما عن نقطة الانطلاق ٦ كم ، ٨ كم على الترتيب

عبد الغفار الشيـــخ

يرتكز سلم طوله ٥ م بطرفه العلوي على حائط عمودي ، وبطرفه السفلي على أرض مستوية ، إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ١ / ٢ م/ث ، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣ م عن الحائط

بالون على ارتفاع ١٠٠ قدم عن سطح الارض بدأ بالارتفاع الى اعلى بسرعة ٢٠ قدم / ث وفي نفس الوقت مرت سيارة من تحته بسرعة ٥٠ قدم / جد معدل تغير المسافة بين البالون والسيارة بعد ١ ث من بدء الحركة

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

أ ، ب ميناءان بينهما ٤٠ ميل ويقع أ شرق ب،إذا اقلعت سفينة من أ قاصدة ب بسرعة١٠ ميل / س وفي نفس الوقت اقلعت سفينة من ب بسرعة ٧.٥ ميل / ساعة متجه جنوبا جد معدل اقترابهما أو ابتعادهما بعد ساعتين من بدء الحركة

يرتفع بالون رأسيا إلى ظاعلى بمعدل ثابت قدره ٤٠ م / د رصده مشاهد يقف على الارض ويبعد ١٢٠ م عن موقع البالون على الارض جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الارض

طار طير باتجاه الافق يصنع ٦٠ مع الافق وبعدان قطع مسافه مقدارها ٩ م اتجه افقيا بسرعة ٢ م / ث جد معدل ابتعاده عن نقطة انطلاقه بعد ٣ ثواني بعد طيرانه الافقي

مستطيل مساحته ٥٠ سم^2 اذا ازداد طولا ضلعين متوازيين فيه بمعدل ٢ سم / ث وتتناقص طولا الضلعين الاخرين بحيث تظل مساحته ثابتة فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها محيط المستطيل عن التناقص

قضيب طوله ١٠ م ترك بحيث يبقى طرفيه أ ، ب على محوري السينات والصادات على الترتيب ، وإذا كانت أ تتحرك مبتعدة عن نقطة الاصل بمعدل ٢ م / ث جد معدل تغير مساحة المثلث المكون من القضيب عندما س = ٨ م

يستخدم معلم الكيمياء في احدى تجاربه قمعا على شكل مخروط قطر قاعدته ١٢ سم ارتفاعه ١٢ سم وقاعدته الافقية والرأسية الى اسفل اذا صب سائل فيه بمعدل ١٦سم^3/ث وفي اللحظة نفسها يخرج منه السائل بمعدل ٧ سم^3 / ث جد سرعة ارتفاع سطح السائل في القمع عندما يكون عمق السائل فيه ٦ سم

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

اسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها ٦/٧ طول قطر قاعدتها دائما ، فاذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ٠.٠١ سم / ث فجد معدل التغير في حجم هذه الاسطوانه عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم

قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للاعلى فاذ كان ارتفاع القمع ١٣ سم وطول نصف قطر قاعدته ٨ سم صب فيه سائل بمعدل ١٢ سم^3 / ث جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨ سم

تحرك رجل من النقطة أ واتجه شمالا بسرعة ١٠ قدم / ث وبعد ثانية من تحركه تحرك ابنه من النقطة أ واتجه شرقا بسرعة ٨ قدم / ث جد معدل تغير المسافة بين الرجل وابنه بعد ٢ ثانية بعد تحرك الرجل

م مثلث قائم الزاوية ، إذا كان طولا الضلعين المقابل والمجاور للزاوية الحادة هـ في اللحظة ن هما ص ، س على التوالي ، وكان معدل تزايد س ١ سم / ث ومعدل تناقص ص هو ٠.٢٥ سم / ث جد سرعة تغير الزاوية هـ التي يتساوى فيها الضلعان س ، ص حيث ص = ٢ سم

يتمدد أضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٤ سم / دقيقة ، رسمت دائرة داخل المثلث تمس الاضلاع وأخذت تتمدد مع المثلث ، جد معدل تمدد مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث و الدائرة ، عندما يكون طول ضلع المثلث ١٨ سم

مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الارضي المسافة الفقية بينهما ٨ م بدأ المصعد الأول يرتفع الى الاعلى بسرعة ٢ م / ث وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١ م / ث جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني

تتمدد أضلاع مربع بمعدل ٤ سم / ث رسمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه وأخذت تتمدد مع الربع بحيث تبقى محافة على شكلها ووضعها جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع عندما يكون طول ضلع المربع ١٠ سم

رجل طوله ١.٧ م يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعدا عن عمود كهرباء في قمته مصباح يرتفع ٥.١ أمتار عن سطح جد ١) معدل تغير طول ظل الرجل

٢) جد معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار عن عمود الكهرباء

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٦٠ قدم ، اسقطت كرة من السكون من نقطة تبعد ٤٠ قدم عن المصباح وعلى نفس ارتفاع الكرة اوجد سرعة تحرك ظل الكرة على الارض بعد ١ ث عن سقوطها علما أن المسافة التي يقطعها الجسيم الساقط ف (ن) = ١٦ ن^{2}

بدأت النقطتان أ ، ب الحركة معا من نقطكة الاصل م بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الاصل بسرعة ٢ سم / ث وتتحرك النقطة أ في الربع الاول على منحنى الاقتران ق (س) = س^{3} بحيث تبقى أ ب دائما عمودية على محور السينات الموجب جد :

أ) معدل التغير في مساحة المثلث أ م ب بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

ب) معدل التغير في طول وتر المثلث أ ب م ب بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

عبد الغفار الشيـــخ

بدأت النقطة الحركة من نقطة الاصل في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٤ سم /ث وبعد مضي ٢ ث بدأت نقطة اخرى الحركة من نقطة (٣ ، ٠) في الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٢ سم / ث جد معدل البعد بينهما بعد مضي ١ ثانية من حركة النقطة الثانية

دائرتان متحدتان في المركز ، نصف قطريهما ٥ سم ، ٢٠ سم ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٢ سم / دقيقة وفي نفس اللحظة اخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدل ١ سم / دقيقة جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

أطلق صاروخ عموديا لاعلى بسرعة ١٠٠ م / ث وعلى بعد ٢٠٠ م من نقطة انطلاق الصاروخ ، كان مشاهد جالسا على الارض ينظر الى الصاروخ جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الارض

طريقان مستقيمان يميل احدهما عن الاخر بزاوية مقدارها ٦٠ يلتقيان في أ ويوجد بيت على احدى الطريقين ويبعد ٢ كم عن أ ، فاذا سار رجل على الطريق الاخر بسرعة ٤ كم / س باتجاه أ اوجد معدل تغير البعد عن البيت التي يبعد عنها ١.٥ كم عن النقطة أ

عبد الغفار الشيـــخ

اقلعت احدى الطائرات في احدى المطارات في الساعة السابعة صباحا متجهة نحو الشرق بسرعة ٤٠٠ كم / س وبعد ساعة واحدة من اقلاعها اقلعت طائرة اخرى من نفس المطار متجهة نحو الجنوب بسرعة ٦٠٠ كم / س اوجد معدل التغير في المسافة بين الطائرتين بعد ساعة واحدة من اقلاع الطائرة الثانية

يزداد حجم بالون بمعدل ١٠٠ سم^{٣} / دقيقة أوجد معدل الزيادة في نصف قطره ومعدل الزيادة في مساحة سطحة في اللحظة التي يكون نصف قطر البالون ١٠ سم

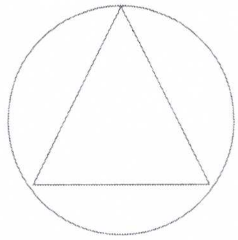
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

مصباح معلق فوق مركز منضدة دائرية افقية ارتفاعها عن الارض ٩٠ سم ،نق = ٢٠ سم تحرك المصباح رأسيا لاسفل نحو المنضدة بسرعة ثابتة = ٦ سم / ث اوجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل المنضدة على الارض عندما يكون ارتفاع المصباح عن المنضدة = ٦٠ سم

نقطة تتحرك على المنحنى ص = س^{٢} ــ ٦ فاذا كان معدل التغير في الاحداثي السيني ١ / ٤٠ سم / ث ومعدل التغير في الاحداثي الصادي لنفس النقطة ٣ / ١٠ سم / ث أوجد موضع هذه النقطة على المنحنى

مثال : الشكل المجاور يمثل مثلثا متساوي الاضلاع مرسوما داخل دائرة تتمدد الدائرة والمثلث معا مع بقاؤها على نفس الهيئة المبينة في الشكل اذا علمت ان نصف قطر الدائرة يزيد ٠.٢ سم / دقيقة احسب معدل تغير مساحة المنطقة المظللة عندما يكون نصف قطر الدائرة ١٠ سم



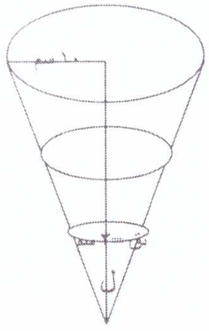
مخروط دائري قائم ارتفاعه نصف قطر قاعدته ويتمدد بالحرارة جد طول نصف قطر قاعدة المخروط عندما يكون معدل زيادة نصف القطر = ٣ / ٤ سم ث ومعدل زيادة الحجم = ١٢ π سم^3 / ث

صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ٣ أمثال طول قاعدته ، فإذا كان طول ضلع القاعدة يتمدد بمعدل ٠.٢٥ سم /ث احسب معدل التغير في حجم الصندوق عندما يكون طول ضلعه ٨ سم معدل التغير في المساحة الكلية في سطحه عندما يكون طول الضلع ٨ سم

صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها ٣ امثال عرضها ، جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها ١٥ سم

مستطيل يزيد طوله بمعدل ٣ سم / ث ويتناقص عرضه بمعدل ٢ سم / ث جد معدل التغير في مساحة المستطيل عندما يكون طوله ١٠ سم وعرضه ٦ سم

مثال : يمثل الشكل المجاور اناء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٣٠ سم اغلق جزء منه بقرص معدني دائري رقيق طول نصف قطره ٣ سم ، يوازي قاعدة المخروط يمنع وصول اي مادة للجزء السفلي من الاناء فاذا صب سائل في هذا الاناء بمعدل ثابت قدره ٥π سم^3 / ث جد سرعة ارتفاع الاناء عندما يكون حجم السائل في الاناء يساوي ٣٧ π سم^3

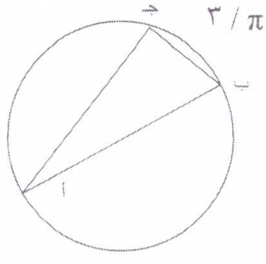


اذا كانت المقاومة الكلية م لمقاومتين موصولتين على التوازي (م١ ، م٢) تعطى بالعلاقة $\frac{1}{م} = \frac{1}{م_1} + \frac{1}{م_2}$

فإذا كانت م١ ، م٢ تزدادان بمعدل ١ اوم / ث^2 ، ١.٥ اوم /ث^2 على الترتيب ، جد معدل الزيادة في المقاومة م عندما يكون م١ = ٢ اوم، م٢ = ١ اوم

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

في الشكل المجاور أ ب قطر في الدائرة طوله ٢٠ سم ،تتحرك النقطة جـ على القوس أ ب بحيث يزيد قياس الزاوية جـ ب أ بمعدل ٣ سم / دقيقة احسب معدل تغير مساحة المثلث أ ب جـ عندما يكون قياس الزاوية جـ ب أ تساوي π / ٣



مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠.٠٠٠١ سم / ث جد معدل التغير في كل من حجمه ومساحته الجانبية عندما يكون طل ضلعة ١٠ سم

عبد الغفار الشيخ

بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الاصل من النقطة (٥ ، ٠) باتجاه عكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١٠ سم / ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥ ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$

كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة بحيث تبقى محافظة على شكلها ، فإذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠.٠١ سم / ث فجد كلا من الاتي
معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠ سم
معدل تناقص مساحة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

حلبة سباق دائرية الشكل نصف قطرها ٢٠٠ قدم ،يجلس شخص عند أحد أطرافها ، يتحرك جسم على الحلبة مبتعدا عن الشخص بمعدل ٥٠ قدم / ث ، جد معدل تغير المسافة بين الشخص والجسم عندما يكون الجسم على بعد ٢٠٠ قدم عن الشخص

كرة حديدية قطرها ٨ سم مغطاة بطبقة من الجليد ، فإذا كان الجليد ينصهر بمعدل ١٠ سم^3 / دقيقة جد
سرعة تناقص حجم الجليد عندما يكون سمكه ٢ سم
سرعة تناقص مساحة السطح الخارجي للجليد عند تلك اللحظة

تطبيقــــات عملية على التفاضـــــــــل

النقط الحرجة

اذا كانت س$_{١}$ ضمن مجال ق فإن القيمة س$_{١}$ تسمى قيمة حرجة للاقتران ق إذا تحقق أن قَ (س$_{١}$) = ٠ أو قَ (س$_{١}$) غير موجودة وفي هذه الحالة تسمى النقطة (س$_{١}$ ، ق (س$_{١}$)) نقطة حرجة للاقتران ق

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = ٣ س^{٢} – س^{٣}

س ∈ [-٢ ، ٣]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = س^{٣} – ١٢ س + ١

س ∈ [-٣ ، ٣]

جد النقط الحرجة للاقتران

ق (س) = -٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٣٦س + ١٠

س ∈ [-٤ ، ٤]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = ٢ س + ١

س ∈ [١ ، ٣)

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = س^{٤} – ٤ س + ١

س ∈ [-٢ ، ٢]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = جا س - $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س

س ∈ [٠ ، π]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = جا س - جا^{٢} س

س ∈ [٠ ، π]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = جا س + جتا س

س ∈ [٠ ، ٢π]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = $\sqrt[٣]{٤ - \text{س}^{٢}}$

س ∈ [-٣ ، ٣]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

س ∈ [-٢ ، ٢]

جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = $\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س})^{٢}}$

س ينتمي الى ح

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = |س^{٢} - ٢س|$

$س \in [١ ، ٣]$

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = س^{٢}|س - ١|$

$س \in [-٣ ، ٢]$

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \sqrt{جتا^{٢}س}$

$س \in [٠ ، \pi]$

جد النقط الحرجة للاقتران

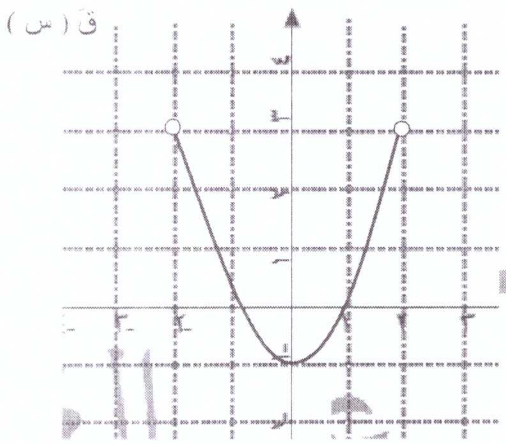
$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، -٢ \le س \le ١ \\ ٢س & ، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$$

اذا كانت $ق(س) = ٣س^{٣} + أس^{٢}$ أوجد قيمة أ علما أن للاقتران قيمة حرجة عند $س = -١$

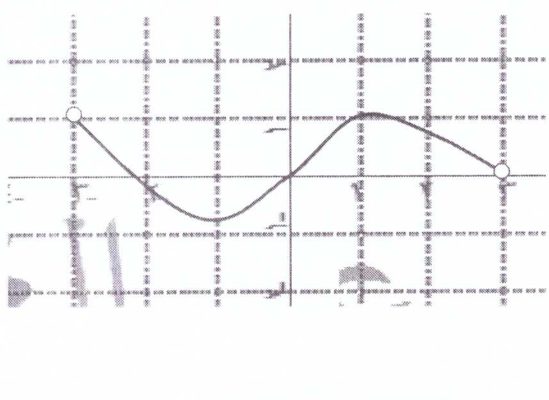
جد قيم أ،ب التي تجعل للاقتران $ق(س)= س^{٣}+ أس^{٢}+ ب س$ نقطتين حرجتين عند $س = -١$ ، $س = ٣$

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٣} + ١}$

يمثل الشكل الآتي منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق (س) المعرف على الفترة [- ٢ ، ٢] اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق

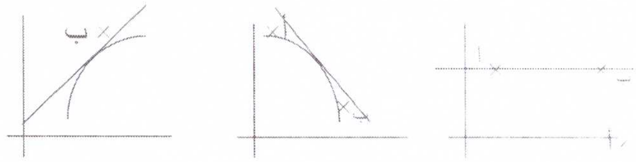


يمثل الشكل الآتي منحنى المشتقة الاولى للاقتران كثير الحدود ق (س) المعرف على الفترة [- ٣ ، ٣] اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق



عبد الغفار ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

التزايد والتناقص



إقتران ثابت   إقتران متناقص   إقتران متزايد

تعريف : إذا كان ق (س) اقترانا معرفا على [أ ، ب]

وكانت $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∈ [أ ، ب] عندئذ يكون الاقتران ق :

متزايد على[أ، ب] إذا كان ق($س_{١}$) < ق($س_{٢}$) لكل $س_{١}$ < $س_{٢}$

متناقص على [أ، ب]إذا كان ق($س_{١}$)>ق($س_{٢}$) لكل $س_{١}$ <$س_{٢}$

ثابت على [أ، ب] إذا كان ق($س_{١}$) = ق($س_{٢}$) لكل $س_{١}$ < $س_{٢}$

وبشكل عام نقول أنه إذا كانت :

ق′ (س) موجبة يكون الاقتران متزايد

ق′ (س) سالبة يكون الاقتران متناقص

نظرية: إذا كان ق (س) متصلا على الفترة [أ، ب] وقابلا للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب) وكان :

١- ق′ (س) > ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب) ⟵ متزايد

٢- ق′ (س) < ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب) ⟵ متناقص

٣- ق′ (س) = ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب) ⟵ ثابت

خطوات التزايد والتناقص :

١- نجد المشتقة الأولى

٢- نجد أصفار الاقتران

٣- البحث في إشارة المشتقة الأولى ونحددها على خط الأعداد

٤- تحديد فترات التزايد والتناقص

ابحث في التزايد والتناقص إذا كان ق (س) = س + ٥ على الفترة [-٣ ، ٣]

ابحث في التزايد والتناقص إذا كان ق (س) = ٣ - س على الفترة [- ٤ ، ٤]

حدد فترات التزايد والتناقص للاقترانات فيما يأتي :

ق (س) = ٢ $س^{٢}$ − ٤ س + ٨   س ∈ [- ٤ ، ٤]

ق (س) = $س^{٣}$ - ٣ س   ، س ∈ [- ٢ ، ٢]

ق (س) = $س^{٣}$ - ٦ $س^{٢}$ +٩س - ٦

ق (س) = ٣ $س^{٢}$ - $س^{٣}$ - ٢

ق (س) = ٤ س − $س^{٢}$ ، س ∈ ح

ق (س) = س + $\frac{١}{س}$: س ≠ صفر

ق (س) = $\frac{س − ١}{س^{٢} + ٣}$

ق (س) = $(٢ − س)^{٢}$ ، س ∈ ح

عبد الغفار الشيـخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

ق (س) = جتا س   س ∈ [٠ ، ٢ π]

اذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$

ما مجال هذل الاقتران ، حدد مجالات التزايد والتناقص

ق (س) = جا س   س ∈ [٠ ، ٢ π]

اذا كان ق (س) = $\sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}}$

ما مجال هذل الاقتران ، حدد مجالات التزايد والتناقص

ق (س) = جا^{٢} س   س ∈ [٠ ، ٢ π]

عبد الغفار الشيخ

اذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢}}$

ما مجال هذل الاقتران ، حدد مجالات التزايد والتناقص

ق (س) = جتا^{٢} س   س ∈ [٠ ، ٢ π]

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

ق (س) = جتا ٢ س في الفترة [٠ ، ٢ π]

اذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{(\text{س} - ٤)^{٢}}$

ما مجال هذل الاقتران ، حدد مجالات التزايد والتناقص

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

ق (س) = جتا س - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

إذا كان ق : [- ١ ، ٥] الى ح حيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & -١ \leq \text{س} < ١ \\ ٢\,\text{س} - ١ & ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٥ & ٣ < \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

اذا كان ق (س) = ٣ س + جتا س بين ان ق (س) متزايد على ح

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س) = | س^{٢} − ٩ |

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{٣ - س}^{٢} & \text{س} \geq ١ \\ \dfrac{٢}{\text{س}} & \text{س} < ١ \end{cases}$$

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

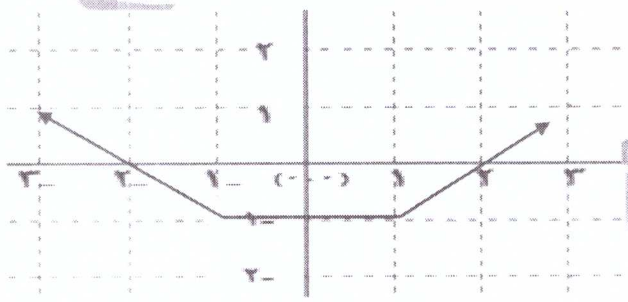
ق (س) = ٥ - | ٣ − س | في [٠ ، ٧]

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{٤ - س}^{٣} & \text{س} < ١ \\ \dfrac{٣}{\text{س}} & \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

اذا كان ق (س) ، هـ (س) كثيرا حدود معرفان على الفترة [١ ، ٤] ويقع كل منهما في الربع الاول ، فإذا كان ق (س) متزايد في مجاله، هـ (س) متناقص في مجاله هـ (س) ≠ ٠

اثبت أن $\dfrac{\text{ق (س)}}{\text{هـ}}$ متزايد في الفترة [١ ، ٤]

يمثل الشكل الآتي منحنى اقتران المشتقة الاولى للاقتران ق ، حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

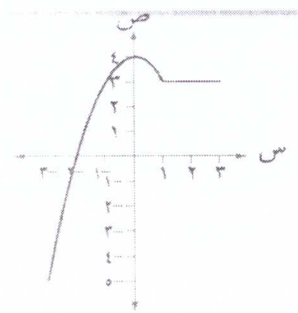


إذا كان ق (س) اقترانا متصلا على الفترة [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ (س) > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب) وكان هـ (س) = ق (س) + س^{٣} فأثبت أن هـ (س) متزايد على [أ ، ب]

اعتمادا على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{٤ - س}^{٢} & -٣ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٣ & ١ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

صف سلوك منحنى الاقتران ق كلما زادت قيم س الفترة [-٣ ، ٣]



جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق لكل مما يأتي :

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤ & \text{س} \leq ٠ \\ [\,\text{س} + ٤\,] & ٠ < \text{س} < ١ \\ |\,٣\text{س} + ١\,| & \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

عبد الغفار الشيخ ١٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

القيم القصوى للاقتران

من خلال تحديد النقطة الحرجة ودراسة اشارة المشتقة الاولى فانه عندما تتحول فيها إشارة مشتقة الاقتران من متزايد إلى متناقص أوالعكس عندها يكون للاقتران إما قيمة عظمى أو قيمة صغرى

تعريف :

إذا كان ق (س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ ، ب] وكان $س_١$ ∍ [أ ، ب] فإن :

١ - ق ($س_١$) قيمة عظمى محلية للاقتران ق إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحوي $س_١$ وكان ق($س_١$) $\geq$ ق (س) لكل س ∍ ف

٢ - ق ($س_١$) قيمة صغرى محلية للاقتران ق إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحوي $س_١$ وكان ق($س_١$) $\leq$ ق (س) لكل س ∍ ف

يكون للاقتران ق قيمة عظمى مطلقة عند $س_١$ وهي

٣ - ق ($س_١$) قيمة عظمى مطلقة للاقتران ق إذا كان ق ($س_١$) $\geq$ ق (س) لكل س ∍ [أ ، ب]

٤ - ق ($س_١$) قيمة صغرى مطلقة للاقتران ق إذا كان ق ($س_١$) $\leq$ ق (س) لكل س ∍ [أ ، ب]

نظرية : إذا كان ق (س) اقترانا معرفا على الفترة [أ ، ب] وكانت ق (جـ) قيمة قصوى للاقتران ق حيث جـ ∍ [أ ، ب] فان قَ (جـ) غير موجودة أو قَ (جـ) = صفر

نظرية اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى

إذا كان ق (س) متصلاً على الفترة [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق على الفترة المفتوحة (أ ، ب) وكانت النقطة (جـ ، ق (جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق حيث جـ ∍ (أ ، ب) عندئذ :

١ - إذا كان قَ (س) $\geq$ ٠ لكل س < جـ

وكان قَ (س) $\leq$ ٠ لكل س > جـ فإن :

ق (جـ) تكون قيمة عظمى محلية للقتران ق

٢ - إذا كان قَ (س) $\leq$ ٠ لكل س < جـ

وكان قَ (س) $\geq$ ٠ لكل س > جـ فإن :

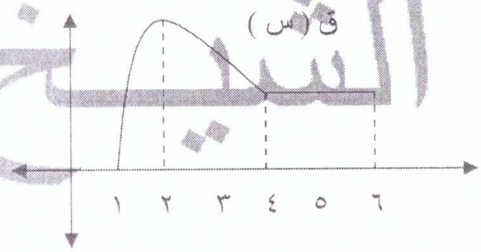
ق (جـ) تكون قيمة صغرى محلية للقتران ق

ملاحظة :

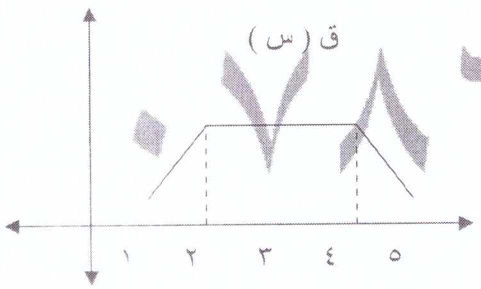
١ - اذا كان الاقتران معرفا على فترة مغلقة يوجد عند الاطراف قيم قصوى اما اذا كان الاقتران معرفا على فترة مفتوحة لايوجد عند الاطراف قيم قصوى (لا ينظر الى الاطراف في الفترة المفتوحة على انها قصوى)

٢ - الاقتران الثابت كل مجاله نقاط حرجة

معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) حدد فترات التزايد والتناقص والثابت



معتمداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) والمعرف على الفترة [١ ، ٥] حدد الفترة التي يكون فيها دائما قَ (س) = صفر



بالاعتماد على جدول الإشارات المجاور فان للاقتران ق (س) قيمة عظمى عندما س تساوي

س	-∞ -٤	-٤ ٦	٦ ∞
قَ (س)	+++++++	- - - -	+++++
ق (س)			

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

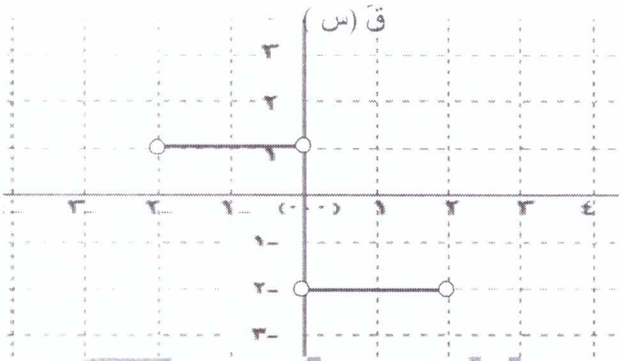
اذا كان ق (س) كثير حدود من الدرجة الرابعة فإن أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للاقتران ق (س) على الفترة [أ ، ب] هو أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة هي ٥ نقاط

معتمدا على الشكل الآتي والذي يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق المتصل على الفترة [- ٢ ، ٢] جد كلا مما يأتي :

١ – مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

٢ – مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية



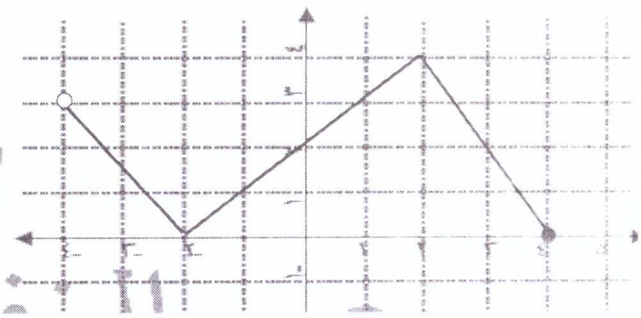
بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق (س) المعرف على الفترة [- ٤ ، ٤]

أجب عما يلي

١) جد قيم س الحرجة للاقتران ق (س)

٢) جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)

٣) جد القيم القصوى للاقتران ق (س) وبين نوعها



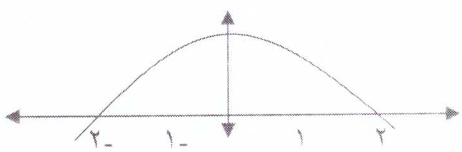
ار الشيـح ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

معتمدا على الرسم الآتي الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق (س) فإن المعرف على الفترة [- ٣ ، ٣] جد كل من الآتي :

١) جد قيم س الحرجة للاقتران ق (س)

٢) جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)

٣) جد القيم القصوى للاقتران ق (س) وبين نوعها

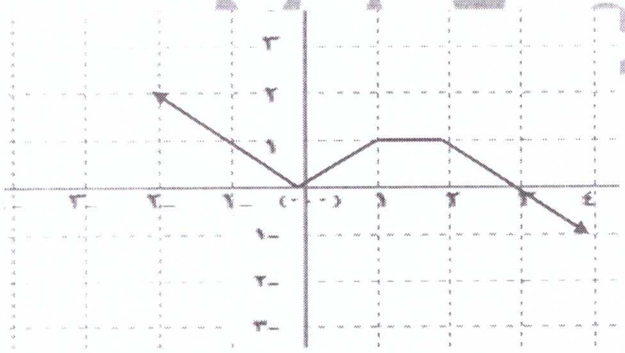


معتمدا على الشكل الآتي والذي يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق المعرف على ح جد كلا مما يأتي :

١ – مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

٢ – مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية



بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق (س) المعرف على الفترة [١ ، ٥] جد كل مما يلي :

١) مجموعة قيم أ التي تجعل نهــا ق (س) = ٤
س ← أ

٢) نهــا ق (س) + ٢ س^{٢} + ٣ س + ٤
س ← ٢

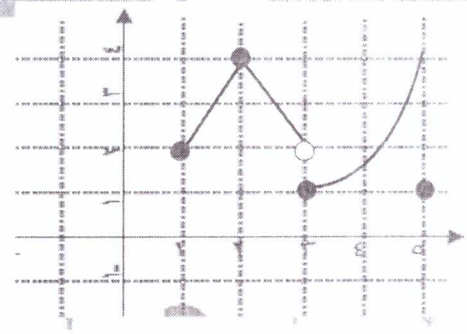
٣) قيم س التي تجعل ق (س) غير متصل

٤) القيم الحرجة للاقتران ق (س)

٥) القيم الصغرى المحلية

٦) الفترات التي يكون عندها الاقتران ق (س) متزايد ، متناقص

٧) القيم العظمى المطلقة



إذا كان الاقتران ق (س) متصل على الفترة [-١ ، ٤] حيث

ق (س) = { جـ س^{٢} + د س + هـ ، -١ ≤ س < ١
أ س + ب ، ١ ≤ س ≤ ٤

ومثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق (س) كما في الشكل المجاور جد كلاً مما يلي :

النقط الحرجة للاقتران ق (س)

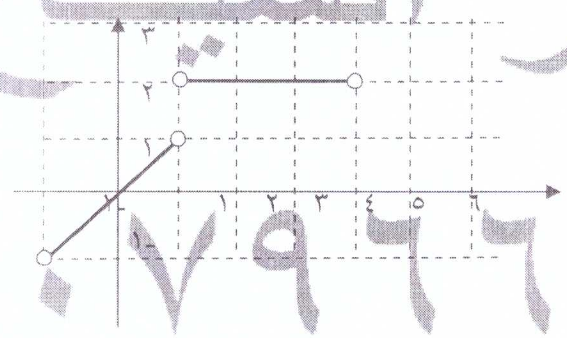
فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق (س)

قيم س التي يكون عندها للاقتران ق (س) قيم قصوى محلية

قيم كل من الثوابت أ ، ب ، جـ ، د ، هـ علماً بأن

ق (- ١) = ٢ ، ق (٤) = ٨

ق̀ (س)



عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد النقط الحرجة والقيم القصوى وحدد نوعها إن وجدت

ق(س) = س^{٢} − ٦ س + ٩ ، س ∈ [٠ ، ٥]

ق(س) = س^{٣} − ١٢ س ، س ∈ [-٤ ، ٤]

ق(س) = -٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٣٦ س + ١٠

ق(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١ ، س ∈ [-٢ ، ٤]

ق(س) = ٦ س^{٢} − س^{٣} − ٩ س + ٢ ، س ∈ [-١ ، ٥]

ق(س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س ، س ∈ [-١ ، ٥]

جد النقط الحرجة والقيم القصوى وحدد نوعها إن وجدت

ق(س) = ٤ س − س^{٣} ، س ∈ [-٣ ، ٣]

ق(س) = ٤ س − س^{٢} + ١

ق(س) = (٢ − س)^{٣} ، س ∈ [٠ ، ٤]

ق(س) = (١ − س)^{٤} ، س ∈ [-٢ ، ٣]

ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ، س ∈ [٠ ، ٣]

ق(س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} − ٤ س)^{٢}}$ س ينتمي الى ح

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد النقط الحرجة والقيم القصوى وحدد نوعها إن وجدت

ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، س ∈ [-٨ ، ١]

ق (س) = جا س في الفترة [٠ ، π]

ق (س) = جتا س – جا س في الفترة [٠ ، π]

ق (س) = س + جا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

ق (س) = جتا س - $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣} س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

ق (س) = س + ٢ جا س ، س ∈ [٠ ، π]

جد النقط الحرجة والقيم القصوى وحدد نوعها إن وجدت

ق (س) = | س - ٢ | ، س ∈ [٠ ، ٤]

ق (س) = | (س – ١)^{٢} | ، س ∈ [-١ ، ٣]

ق (س) = { س^{٢} + ١ ، -٢ ≤ س < ٣
{ ٣ س + ١ ، ٣ ≤ س ≤ ٥

ق (س) = { س^{٢} – ٢ س + ٣ ، -٤ ≤ س < ٢
{ | س – ٥ | ، ٢ ≤ س ≤ ٧

إذا كان للاقتران ق (س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٣) بين أن للاقتران هـ (س) = (١ - ق (س))^{٣} قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢ ، -٨)

عبد الغفار الشيــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

التقعـر

تعريف

ليكن ق اقترانا معرفا على الفترة [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) فيكون منحنى ق :

١ - مقعرا للاسفل على الفترة [أ ، ب] إذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى الاقتران ق في الفترة [أ ، ب]

٢ - مقعرا للاعلى على الفترة [أ ، ب] إذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى الاقتران ق في الفترة [أ ، ب]

نظرية اختبار التقعر

إذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة [أ ، ب] وكان كل من ق (س) ، قً (س) معرفين على الفترة (أ ، ب) فإنه :

١ - يكون منحنى الاقتران ق مقعرا للاسفل على الفترة [أ ، ب] إذا كان قً (س) < ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

٢ - يكون منحنى الاقتران ق مقعرا للاعلى على الفترة [أ ، ب] إذا كان قً (س) > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

جد فترات القعر للاسفل وللاعلى لمنحنى الاقترانات في كل مما يأتي :

ق (س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [- ٢ ، ٢]

ق (س) = س + $\frac{٤}{س}$

ق (س) = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ، س ∈ [- ٤ ، ٤]

ق (س) = ٣ - ٦ $س^{٢}$ - ٢ س

ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & س < ٢ \\ ٥ - س & س \geq ٢ \end{cases}$

ق (س) = $س^{٣}$ - ٦ $س^{٢}$ + ٩ س

ق (س) = $(س - ١)^{٤}$

ق (س) = $س^{٣}$ - ٣ $س^{٢}$ + ٣ س + ١

ق (س) = $\left(\frac{س - ١}{س}\right)^{٢}$

ق (س) = $س^{٤}$ - ٦ $س^{٣}$ + ١٢ $س^{٢}$ ، س ∈ [- ٥ ، ٥]

ق (س) جتا س - جا س + ١ ، س ∈ [٠ ، π]

ق (س) = $س^{\frac{١}{٥}}$ ، س ∈ [- ٢ ، ٢]

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

تعريف

إذا كان ق اقترانا متصلا على فترة مفتوحة تحوي $س_١$،
وكان منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند $س_١$، فإن النقطة
($س_١$ ، ق ($س_١$)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق

ق (س) = جا ٢ س ، س ∋ [٠ ، π]

جد نقط الانعطاف في كل مما يأتي (إن وجدت) :

ق (س) = $س^٣$ - ٦ $س^٢$ + ٩ س + ٢ ، س ∋ ح

ق (س) = جتا س - جا س ، س ∋ [٠ ، π]

ق (س) = $س^٤$ - ٦ $س^٢$ + ١ ، س ∋ ح

ق (س) = ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س ، س ∋ [٠ ، ٢π]

عبد الغفار الشيـــخ

ق (س) = ٦ $س^٣$ - $س^٤$

ق (س) = ٢ جا س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س ، س ∋ [٠ ، ٢π]

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

ق (س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ - $س^{\frac{١}{٣}}$ ، س ∋ ح

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

ق (س) = س - ظا س ، س ∋ [$\frac{-π}{٢}$ ، $\frac{π}{٢}$]

ق (س) = $س^{\frac{٣}{٥}}$ ، س ∋ ح

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

على فرض أن المشتقة الاولى قَ (س) ، والمشتقة الثانية قً (س) معرفتان عند س$_{١}$ ∋ (أ ، ب) عندئذ :

١ - إذا كان قَ (س) = ٠ ، قً (س) > ٠ فإن للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = س$_{١}$ هي ق (س$_{١}$)

٢ - إذا كان قَ (س) = ٠ ، قً (س) < ٠ فإن للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = س$_{١}$ هي ق (س$_{١}$)

٣ - إذا كان قَ (س) = ٠ ، قً (س) = ٠ فإن الاختبار يفشل فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الاولى

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى المحلية (إن وجدت)

ق (س) = ٢ س^{٣} – ٢٤ س + ٢

ق (س) = ٣ س^{٢} - س^{٣} + ١

ق (س) = ٤٨ س - س^{٣}

ق (س) = ٤ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢

ق (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢

ق (س) = س^{٣} - ١٢ س + ٣

ق (س) = جا س - جتا س ، س ∋ [٠ ، ٢π]

ق (س) = جا س - $\sqrt{٣}$ جتا س ، س ∋ [٠ ، ٢π]

ق (س) = س^{٤} ، س ∋ ح

ق (س) = ٤ | س – ٢ | - | س + ١ | + س ، س ∋ ح

ق (س) = س^{٢} + $\frac{١٢٨}{س}$ ، س ≠ ٠

عين قاعدة الاقتران ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د (أ ≠ ٠ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية) الذي يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (٢ ، ١) هي : ص + ٣ س – ٧ = ٠

عبد الغفار الشيـــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

اذا كان ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، هـ (س) = س $^{\frac{١}{٣}}$

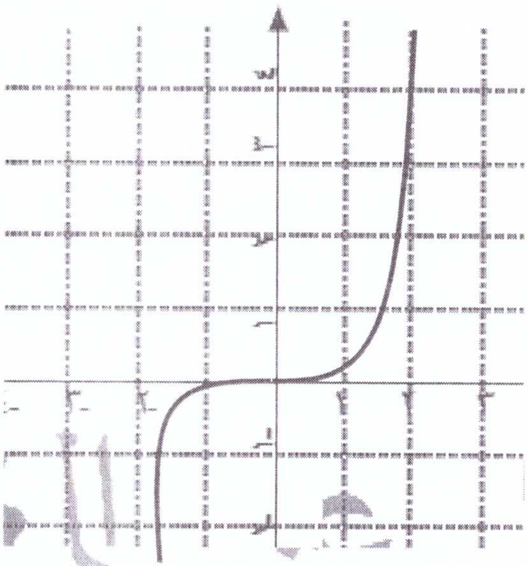
فاجب عما يأتي :

١ - قارن بين مجالات التقعر لكل من الاقترانين ق ، هـ

٢ - جد النقط التي يكون عندها كل من الاقترانين ق ، هـ غير متصل

٣ - جد نقط الانعطاف لكل من الاقترانين ق ، هـ إن وجدت

بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى ق (س) في الفترة (- ∞ ، ∞) الذي يمثل منحنى ق ، أرسم شكلا تقريبيا لمنحنى قَ (س) في الفترة (- ∞ ، ∞)



عبد الغفار

يمثل الشكل الآتي منحنى قَ (س) ومنحنى قً (س) للاقتران ق (س) المعرف على ح ،اعتمد على ذلك في الاجابة عما يأتي

١ - عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

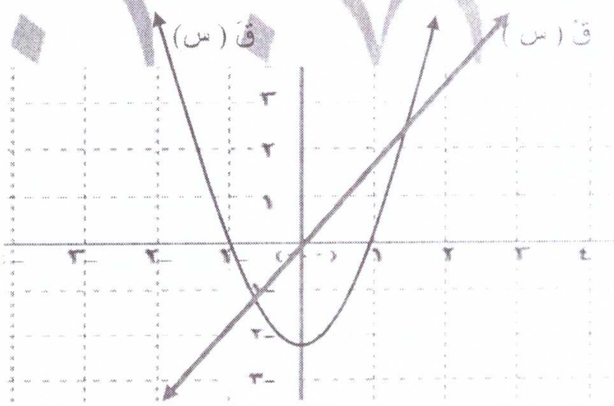
٢ - عين قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية باستخدام أ - اختبار المشتقة الاولى

ب - اختبار المشتقة الثانية

٣ - عين مجالات التقعر للاقتران ق

٤ - عين نقط الانعطاف للاقتران ق

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣



تطبيقات القيم القصوى

يجب قراءة الأسئلة جيدا وفهمه وذلك لتحديد المعطيات وتكوين المعادلات اللازمة ثم الاشتقاق ومساواة المشتقة بالصفر ومن ثم الوصول إلى المطلوب .

ما يميز ها عن المرتبطة بالزمن ترد في السؤال أكبر من ، أقل من ، أقل حجم ، لأكبر مساحة ....

مثال : ما العددان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٥٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

ما العددان الموجبان الذي مجموعهما يساوي ٩٠ وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

إذا كان مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠ جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

إذا كان مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر يساوي ٦٠ جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

جد العدد الذي ينتمي للفترة [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$] الذي يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن

قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٨٠٠ م ما بعدا القطعة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨ سم^{٢} ، يراد طباعة إعلان عليها ، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل من الجانبين ٠.٥ سم جد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن

عبد الغفار الشيـخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال احرفه ٦٠٠ سم ، جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

جد النقطة على منحنى ق (س) = $\sqrt{\text{٨ س}}$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤ ، ٢)

اذا كان لديك سلك طوله ٨٠ م أوجد مساحة أكبرقطعة ارض مستطيلة يمكن سياجها

جد النقطة الواقعة في الربع الاول على منحنى ق (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٦ ، ٠)

عبد الغفار الشيـخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من صفيحة مستطيلة أبعادها ٨٠ سم ، ٥٠ سم وذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسها ثم ثني الأجزاء البارزة للأعلى ، ما أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة

جد إحداثي النقطة (س ، ص) الواقعة على منحنى العلاقة ص = $\text{س}^{٢}$ التي بعدها عن النقطة ب (١ ، ٠) أقل ما يمكن

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويصنع مع المحورين الاحداثيين الموجبين مثلثا مساحته أكبر ما يمكن

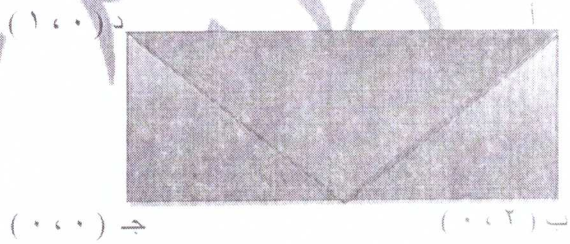
أ (٠ ، ٢) ، ب (٠ ، ٥) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب جد أكبر قياس ممكن للزاوية أ ب جـ

أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق (س) = ٢ س^{٢} ، هـ (س) = ٣٦ - س^{٢} ، بحيث يقع رأساه أ ، ب ، على منحنى ق ، ورأساه جـ ، د يقعان على منحنى هـ ، جد بعدي المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن

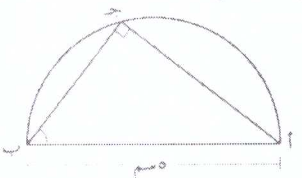
نحتاج إلى قص لوح خشبي على شكل مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما ٨ سم إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

عبد الغفار الشيـــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يمثل الشكل المجاور المستطيل أب جـ د ، حيث ب (٢ ، ٠) د (٠ ، ١) إذا فرضت النقطة م على الضلع ب جـ ، وعلى بعد س سم من نقطة الأصل جـ ، ووصل م أ ، م د فتكونت الزاوية المتغيرة هـ ، جد قيمة س التي تجعل هـ في نهايتها العظمى



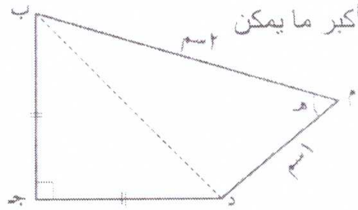
يمثل الشكل المجاور نصف دائرة طول قطرها أ ب (٥ سم) بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه عقارب الساعة لترسم مع القطر مثلثا جد قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن



قطاع دائري قياس زاويته المركزية هـ بالتقدير الدائري ، وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات ، حول إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته نق ، وارتفاعه ع جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن

جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٤ سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة

معتمدا على الشكل الآتي الذي يمثل الشكل الرباعي م ب جـ د الذي فيه الضلع م ب ثابت وطوله ٢ سم وفيه م د ثابت طوله ١ سم الا أن وضعه متحول يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة م ، أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة والضلعان جـ د ، جـ ب متطابقان دوما ، جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن

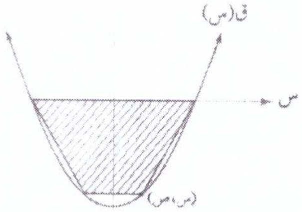


جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ١٢ سم ، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي

أثبت أن أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{4}{9}$ حجم المخروط

جد حجم أكبر لموشور (منشور) رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (٦) سم وارتفاعه (٩) سم

جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الاخران على منحنى الاقتران ق (س) = س^{2} − ٤



عبد الغفار الشيــخ

قطعة خشب على شكل أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ π سم^{2} ، حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساو لطول قطر قاعدة الاسطوانة ، جد طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة أكبر ما يمكن

كرة مصمتة نصف قطرها ١٠ سم حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع سم جد أبعاد متوازي المستطيلات ليكون حجمه أكبر ما يمكن

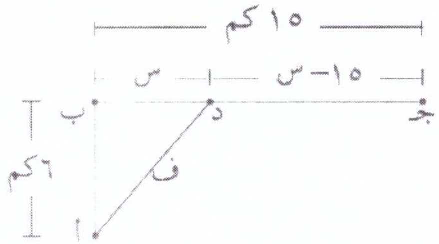
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يريد رجل اقامة سياج حول قطعة ارض مستطيلة الشكل تقع على ضفة نهر مستقيم ، فاذا لم يسيج طرف النهر اوجد ابعاد القطعة ليكون طول السياج اقل ما يمكن علما بان مساحة القطعة تساوي ٨٠٠ م^{2}

عمودان ارتفاعهما ٣٠ م ، ٤٠ م والبعد بينهما ٨٠ م جد النقطة على المستقيم الواصل بين قاعدتيهما بحيث يكون مجموع البعد بين مربعي بعديهما عن قمتي العمودين اقل ما يمكن

يقف رجل عند النقطة أ التي تبعد ٦ كم جنوب النقطة ب ، يريد أن يصل إلى النقطة جـ شرق النقطة ب مرورا بالنقطة د إذا كان يسير بسرعة ٣ كم / س عند الانتقال من النقطة أ إلى النقطة د ويسير بسرعة ٦ كم / س عند الانتقال من النقطة د إلى النقطة جـ فحدد موقع النقطة د بحيث يصل في أقصر وقت ممكن ، علما بأن البعد بين النقطة ب والنقطة جـ (١٥) كم



عبد الغفار الشيـخ

شخص في غابة يبعد ٥ أميال عن طريق مستقيم معبد و ١٣ميل عن بيت يقع على الطريق ، اذا كان باستطاعة هذا الشخص أن يسير ٣ ميل / ساعة في الغابة وبسرعة ٥ ميل / ساعة على الطريق ، جد اقصر وقت يحتاجه الشخص للوصول الى البيت علما بانه يسير في الغابة بخط مستقيم

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩

٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

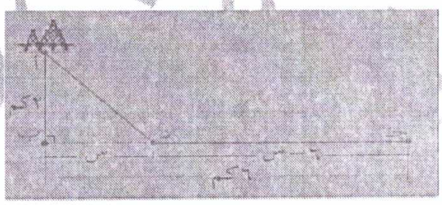
مصنع للاجهزة الكهربائية ينتج س جهازا سنويا يبيع كل جهاز بسعر (٢٠٠ - ٠.٠١ س) دينارا فإذا كانت تكلفة انتاج هذه الاجهزة (٥٠ س + ٢٠) دينار فكم جهازا ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنويا

كرة نصف قطرها نق حيث نق ثابت ،جد بدلالة نق كلا من نصف قطر قاعدة وارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات اكبر حجم التي يمكن رسمها داخل هذه الكرة

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢ كم عن أقرب نقطة ب على الساحل وأردنا أن نضخ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل وتبعد ٦ كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى جـ ، على فرض أن الانابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد ، إذا كانت تكلفة الانابيب تحت سطح البحر (٥٠٠٠٠٠) دينار لكل كيلو متر وعلى اليابسة (٣٠٠٠٠٠) دينار لكل كيلو متر فأجب عما يأتي :

١ - أين يجب أن تكون النقطة د لتحقق أقل تكلفة ممكنة

٢ - أين يجب أن تكون النقطة د لتحقق أكبر تكلفة ممكنة



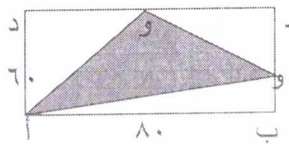
يراد صنع وعاء اسطواني الشكل قاعدته دائرية ومفتوحة من الاعلى لتكون سعته ٥٤ π سم^3 فاذا كانت تكاليف صنع سم^2 من الجوانب قرشين ومن القاعدة ٤ قروش اوجد ابعاد هذا الوعاء لتكون تكلفته اقل ما يمكن

وعاء اسطواني الشكل مفتوح من الاعلى حجمه ١٠٠٠ π سم^3 جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه

صاحب مزرعة اغنام لديه ٣٦٩ م من السلك الشائك يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة كما في الشكل اوجد اكبر مساحة للحظائر يمكن عملها

اراد احد الاندية تصميم راية مستطيلة الشكل صفراء اللون وبداخلها مثلث احمر اللون بحيث يكون ب هـ = جـ و = س كما في الشكل

جد اقل مساحة ممكنة للمثلث أ هـ و



عبد الغفار الشيـــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

أ ب جـ مثلث قاعدته ب جـ يساوي ١٢ سم وطول ارتفاعه النازل من الرأس أ يساوي ١٦ سم فرضت نقطة د على ب جـ تم رسم مستقيم يوازي ب جـ ويقطع أ ب ، أ جـ في النقطتين هـ ، و احسب طول العامود النازل من د على هـ و لتكون مساحة المثلث هـ د و أكبر ما يمكن

في الواحدة بعد الظهر كانت الباخرة أ على بعد ٣٠ كم جنوبي الباخرة ب وتسير شمالا بسرعة ١٥ كم / ساعة ، اذا كانت ب تسير غربا بسرعة ١٠ كم / ساعة ، متى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن

أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه ب ، جـ على محور السينات ويقع الرأس أ في الربع الاول على منحنى الاقتران ق (س) = ١٢ – ١ / ٤ $س^{٢}$ ويقع الرأس د في الربع الثاني على منحنى الاقتران هـ (س) = ١٢ – $س^{٢}$ اوجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل أ ب جـ د

سلك طوله ٦٠ سم يراد قطعه قطعتين تعمل احداهما دائرة وتعمل الاخرى مثلث متساوي الاضلاع ، فأين تقطع السلك بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمثلث

أقل ما يمكن

أكبر ما يمكن

عبد الغفار الشيخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

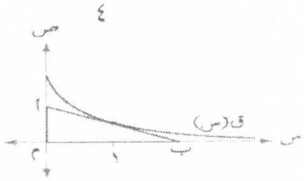
يراد اقامة سياج حول قطعة ارض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة كما في الشكل المجاور ، فإذا كانت تكلفة تركيب المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين ٤ دنانير وعلى الاجزاء المحنية ٦ دنانير جد اكبر مساحة ممكنة لقطعة الارض التي يمكن احاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار

سلك طوله ٢٨ سم يراد قطعه قطعتين تعمل احداهما مربعا وتعمل الاخرى مستطيلا طوله ٥ أمثال عرضه اوجد طول كل من القطعتين ، إذا كان مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل ما يمكن

أسئلة الوحدة

معتمدا على الشكل الآتي الذي فيه المثلث أ م ب الذي ضلعه أ ب يمس منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{جـ}{س + ١}$ عند (١ ، ق (١))

جد قيمة الثابت جـ التي تجعل مساحة المثلث تساوي $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة



عين قاعدة الاقتران ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د حيث (أ ≠ ٠ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية ثابتة) ويمر منحنى الاقتران ق بالنقطة (٠ ، ٥) ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة (١ ، ق (١)) هي : ٩ س + ص – ٩ = ٠ ولمنحناه نقطة انعطاف عند س = ٢

عبد الغفار الشيــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بعده عن نقطة الأصل بالامتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف (ن) = $\frac{ن}{٢}$ - جا^{٢} ن

ن ∈ [٠ ، π] جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته

يمثل الشكل منحنى المشتقة الاولى لكثير الحدود ق (س) جد

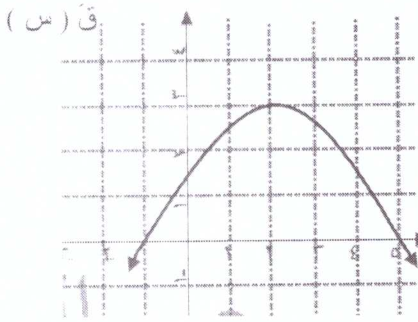
١ – النقط الحرجة للاقتران ق

٢ – فترات التزايد و فترات التناقص للاقتران ق

٣ – قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية

٤ – فترات التقعر لمنحنى الاقتران

٥ – قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة انعطاف



إذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٣} - ٢٧ س}$ ، س ∈ ح

فجد كلا مما يأتي :

أ – قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقط حرجة

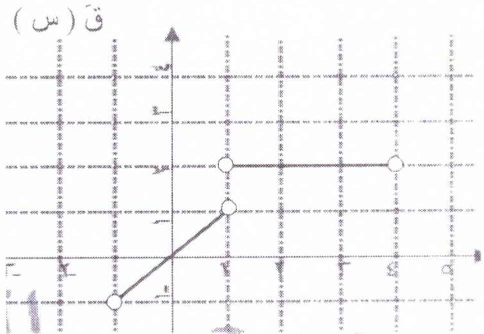
ب – فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق

جـ - قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى مبينا نوعها

اذا كان الاقتران ق (س) متصل على [- ١ ، ٤] وكان

ق (س) = { جـ س^{٢} + د س + هـ ، - ١ ≤ س < ١
أ س + ب ، ١ ≤ س ≤ ٤

ومثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق كما في الشكل فجد كل مما يأتي



أ - مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

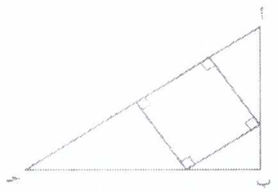
ب - فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق

جـ - قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية

د - قيم كل من الثوابت أ ، ب ، جـ ، د علما بأن

ق (- ١) = ٢ ، ق (٤) = ٨

يمثل الشكل مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على ضلعي القائمة جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن



يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد ويلي كل فقرة أربعة بدائل واحدة فقط منها صحيحة ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح

١ - تتحرك نقطة على خط مستقيم بحيث أن المسافة (ف) بالامتار التي تقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي :

ف (ن) = ٦ ن^{٢} – ن^{٣} + ١٣ فإن المسافة ف عندما يصبح التسارع صفراً هي :

أ) ١٤ ب) ١٨ جـ) ٢٩ د) ٣٤

٢ - معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم هي

أ) ١٠٠ ب) ٤ π جـ) ٢٠ π د) ١٠٠π

٣ - وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل ارتفاعه ١٦ سم وطول نصف قطر قاعدته ٤ سم صب فيه الماء بمعدل ٢ π سم^{٣} / ث فإن معدل تغير ارتفاع الماء فيه في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء ٨ سم يساوي :

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٢\pi}$

عبد الغفار الشيـــخ
٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩
٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

٤ - إذا كان ق (س) = ١٢ س + ٦ (م – ٢) س^{٢} فإن قيم م التي تجعل منحنى الاقتران مقعراً للاسفل :

أ) (-٢ ، ٢) ب) (-∞ ، -٢)

جـ) (٢ ، ∞) د) (-∞ ، ٢]

٥ - إذا كان لمنحنى الاقتران ق (س) = جا ٤ س نقطة انعطاف عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ميل المماس عندها يساوي :

أ) -٤ ب) ٤ جـ) -٢ د) -١

٦ - إذا كان ق (س) = $\frac{س^{٢} - ٢ س + ١}{س^{٢}}$ فإن منحنى الاقتران ق متناقص على الفترة :

أ) (-∞ ، ٠) ب) (١ ، ∞)

جـ)] ٠ ، ١ [د) (٠ ، ١]

٧ - الشكل المجاور يمثل منحنى قً (س) للاقتران المعرف على ح إذا كان للاقتران ق نقطة حرجة عند (١ ، ق (١)) فان ق (١) هي قيمة :

أ) عظمى محلية ب) عظمى مطلقة

جـ) صغرى مطلقة د) صغرى محلية

٨ - إذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$: س ∈ [-١ ، ١] فإن احداثي النقطة الحرجة للاقتران ق هي :

أ) (-١ ، ١) ب) (١ ، ١)

جـ) (٠ ، ٠) د) (٠ ، ١]

٩ - يراد صنع علبة مفتوحة من الأعلى من قطعة كرتون مستطيلة الشكل أبعادها ١٦ سم ، ٣٠ سم وذلك بقص مربعات متساوية من زواياها الاربع طول كل ن\منها (س) وحدة ثم طي الجوانب للأعلى ، ما قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر مايمكن

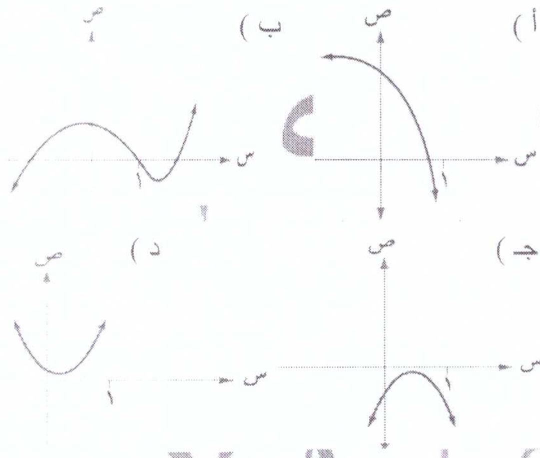
أ) ١٢ ب) $\frac{١٠}{٣}$ جـ) ١٠ د) ٨

١٠ – إذا كان ق (س) = جتا س – جا س : س ∈ [٠ ، π] فإن قيمة س التي يكون للاقتران عندها قيمة صغرى مطلقة هي

أ) ٠ ب) $\frac{\pi}{٤}$ جـ) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{٣\pi}{٤}$

أي المنحنيات الآتية يمثل رسم الاقتران ق الذي فيه قَ (٠) > ٠ ، قَ (١) < ٠ ، قً (س) سالبة دائما

أ) ب) جـ) د)



مع تمنياتي لكم بالنجاح الباهر

عبد الغفار الشيــخ

عبد الغفار الشيخ ٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩ ٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣