الاوائل في الرياضيات

المنهاج الجديد ٢٠١٨

التوجيهي الأدبي و الفندقي و السياحي

للمعلم صالح الزبيدي

هاتف : ٠٧٩٧٨٢٥٨٦٨

تحتوي على:

- النهايات والاتصال .
- التفاضل .
- تطبيقات على التفاضل .
- أسئلة سنوات سابقة لكل درس .

حاول ثم حاول ، فإن نجحت فافتخر ، و إن فشلت فتعلم من أخطاءك

التأسيس

أولاً : العمليات على الأعداد السالبة والموجبة

(في حالة اختلاف الإشارة نأخذ الفرق بينهم مع اشارة العدد الاكبر)

$-٤ + ٥ = ١$

$-٧ - ١٠ = -٣$

(في حالة تشابه الإشارة نأخذ المجموع مع الاشارة)

$-٤ - ٥ = -٩$

$-٧ - ١٠ = -١٧$

(عدد ـ ـ عدد = عدد + عدد)

$-٣ - ٤ = ٣ + ٤ = ٧$

(سالب × موجب = سالب)

$-٢ \times ٥ = -١٠$

(سالب × سالب = موجب)

$-٢ \times -٥ = ١٠$

$\frac{-٦}{٢} = -٣$

$\frac{-٦}{-٢} = ٣$

صالح الزبيدي
0797825868

ثانياً : التحليل

١ اخراج عامل مشترك (قد يكون العامل المشترك رقم أو متغير)

$٢س - ٢ = ٢(س-١)$

$٣س + ٦ = ٣(س+٢)$

$٤س^{٢} - ٢س = ٢س(٢س - ١)$

$٤س^{٢} - ٨س = ٤س(س - ٢)$

٢ فرق مربعين (نفتح قوسين الاول سالب و الثاني موجب)

$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$

تذكر حفظ

$١^{٢} = ١$

$٢^{٢} = ٤$

$٣^{٢} = ٩$

$٤^{٢} = ١٦$

$٥^{٢} = ٢٥$

$٦^{٢} = ٣٦$

$٧^{٢} = ٤٩$

أمثلة تتكرر كثيرا

$س^{٢} - ١ = (س-١)(س+١)$

$س^{٢} - ٤ = (س-٢)(س+٢)$

$س^{٢} - ٩ = (س-٣)(س+٣)$

$س^{٢} - ١٦ = (س-٤)(س+٤)$

$س^{٢} - ٢٥ = (س-٥)(س+٥)$

* $(س+٣)^{٢} - ١٦ = ((س+٣)-٤)((س+٣)+٤)$

٣ فرق أو مجموع مكعبين (نفتح قوسين الأول صغير و اشارته اذا كان فرق - و مجموع + و الثاني كبير له اشارتان الأولى **عكس** و الثانية **دائماً موجب** كما يلي)

$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أ \times ب + ب^{٢})$

الأول^{٣} - الثاني^{٣} = (الأول - الثاني) (مربع الاول + الأول × الثاني + مربع الثاني)

عكس دائما موجب

$أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أ \times ب + ب^{٢})$

تذكر أن :

$١^{٣} = ١$

$٢^{٣} = ٨$

$٣^{٣} = ٢٧$

$٤^{٣} = ٦٤$

$٥^{٣} = ١٢٥$

أمثلة على فرق مكعبين

$س^{٣} - ١ = (س-١)(س^{٢} + س + ١)$

$س^{٣} - ٨ = (س-٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)$

$س^{٣} - ٢٧ = (س-٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

أمثلة على مجموع مكعبين

$س^{٣} + ١ = (س+١)(س^{٢} - س + ١)$

$س^{٣} + ٨ = (س+٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)$

$س^{٣} + ٢٧ = (س+٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)$

٤ العبارة التربيعية على الصورة : أس^{٢} + ب س + جـ (نفتح قوسين و نبحث عن عددين حاصل ضربهما = جـ و مجموعهما = ب)

و تكون الإشارات كما يلي :

+ + ⟵ (+) (+)

+ − ⟵ (−) (+)

− + ⟵ (−) (−)

− − ⟵ (+) (−)

أمثلة على تحليل عبارة تربيعية

س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)

س^{٢} − ٢س − ١٥ = (س -٥) (س +٣)

س^{٢} − ٣س +٢ = (س -٢) (س -١)

٣س^{٢} − س − ٢ = (٣س +٢) (س -١)

س^{٢} + ٣س − ١٠ = (س+٥) (س − ٢)

ثالثاً :توحيد المقامات

يتم توحيد المقامات عندما يكون المقام مختلف حسب القاعدة الآتية :

$$\frac{أ}{ب} \mp \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times د \mp جـ \times ب}{ب \times د}$$

مثال ١

$$\frac{٣}{٥} + \frac{٦}{٨} = \frac{٣ \times ٨ + ٥ \times ٦}{٥ \times ٨} = \frac{٢٤+٣٠}{٤٠} = \frac{٥٤}{٤٠}$$

مثال ٢

$$\frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}}{س - ٥} = \frac{١ \times ٥ - ١ \times س}{٥س} = \frac{-١}{٥س} \quad (٥ - س \text{ و } س - ٥ \text{ تختصران})$$

رابعاً :الضرب بالمرافق

ملاحظة : حاصل ضرب مقدارين مترافقين تربيعياً = الأول^{٢} - الثاني^{٢}

مثال ١ مرافق المقدار $\sqrt{س + ٢} - ٢$ هو $\sqrt{س + ٢} + ٢$

$$(\sqrt{س + ٢} - ٢) \times (\sqrt{س + ٢} + ٢) = (\sqrt{س + ٢})^{٢} - ٢^{٢} = س + ٢ - ٤ = س - ٢$$

مثال ٢ مرافق المقدار $\sqrt{س} + ١$ هو $\sqrt{س} - ١$

$$(\sqrt{س} + ١) \times (\sqrt{س} - ١) = س - ١$$

صالح الزبيدي
0797825868

الدرس الأول مفهوم النهاية

توضيح مفهوم النهاية : هو دراسة سلوك الاقتران على جانبي **نقطه معينة**.

اي انه كلما اقتربت س من النقطة أ من كلا الجهتين فإن الاقتران ق(س) يقترب من القيمة ل

و يتم التعبير عن ذلك بالرموز :

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}} \; ق(س) = ل$$

مثال توضيحي : اذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + س – ١ فإن :

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to ٢} \; ق(س) = ٣ \times ٢^{٢} + ٢ - ١ = ٣ \times ٤ + ٢ - ١ = ١٣$$

أي أنه عندما تقترب س من العدد ٢ ، فإن ق(س) تأخذ قيم قريبة من العدد ١٣

ملاحظات مهمة

* **س $\to$ أ :** تعني س تقترب من العدد أ من الجهتين ولكن لا تساوي أ .
* **$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^{+}}$ ق(س) :** النهاية من اليمين (س تقترب من أ من جهة اليمين اي أن س تأخذ قيم اكبر بقليل من العدد أ)
* **$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^{-}}$ ق(س) :** النهاية من اليسار (س تقترب من أ من جهة اليسار اي أن س تأخذ قيم أقل بقليل من العدد أ)
* تكون النهاية **موجودة** إذا كانت $\text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} ق(س) = \text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} ق(س)$

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

صالح الزبيدي 0797825868

* تكون النهاية **غير موجودة** عندما تكون $\text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} ق(س) \neq \text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} ق(س)$

طرق ايجاد نهاية اقتران عند نقطة معينة:

- الجداول
- الرسم البياني
- التعويض المباشر و النظريات .

أولاً : ايجاد النهاية من الجدول

مثال ١

أدرس الجدول الآتي الي يبين قيم س و ق(س) للاقتران ق(س) = س+٥ ثم **اوجد ما يلي** :

١. نهـــــا ق(س) / س ← ٣+

٢. نهـــــا ق(س) / س ← ٣-

٣. نهـــــا ق(س) / س ← ٣

جهة اليمين + ٣ جهة اليسار -

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٨,١	٨,٠١	٨,٠٠١		٧,٩٩	٧,٩٨	٧,٩٠

لاحظ ما يلي: عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليمين فإن ق(س) تقترب من العدد ٨ و تكتب : نهـــــا ق(س) / س ← ٣+ = ٨

عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليسار فإن ق(س) تقترب من العدد ٨ و تكتب : نهـــــا ق(س) / س ← ٣- = ٨

و بالتالي نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٣ من الجهتين تساوي ٨ و تكتب نهـــــا ق(س) / س ← ٣ من الجهتين = ٨

مثال ٢

بالاعتماد على الجدول الآتي اوجد مايلي :

من اليمين ٢ من اليسار

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩	١,٩٨	١,٩٠
ق(س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠

٥ ٣

١. نهـــــا ق(س) / س ← ٢+

٢. نهـــــا ق(س) / س ← ٢-

٣. نهـــــا ق(س) / س ← ٢

الحل :

١. نهـــــا ق(س) / س ← ٢+ = ٥

٢. نهـــــا ق(س) / س ← ٢- = ٣

٣. نهـــــا ق(س) / س ← ٢ = **غير موجودة**

سؤال اضافى

بالاعتماد على الجدول الآتي اوجد مايلي :

٤

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٣,٩٩	٣,٩٨	٣,٩٠
ق (س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٦,٩٩	٦,٩٨	٦,٩٠

١. نهـــــا ق(س) / س ← ٤+

٢. نهـــــا ق(س) / س ← ٤-

٣. نهـــــا ق(س) / س ← ٤

ثانيا : ايجاد النهاية من الرسم البياني

مثال ١

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران : ق(س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢}$

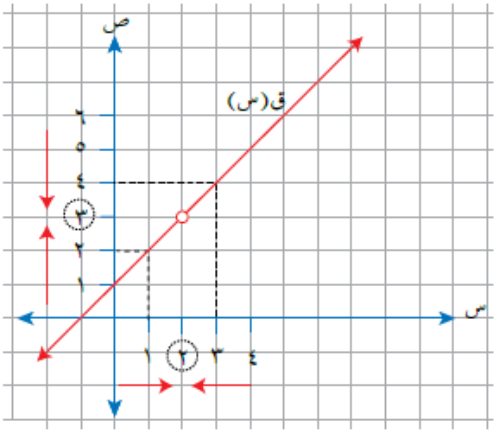
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٤) ق(٢)



الشكل (١-٢).

الحل :

١) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ٣

٢) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = ٣

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٣

٤) ق(٢) = غير معرف

ملاحظات مهمة

* الدائرة الفارغة ○ : تعني ان الاقتران غير معرف عندها
* الدائرة المغلقة ● : تعني ان الاقتران معرف عندها و له قيمة

مثال ٢

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران المتشعب : ق(س) = $\begin{cases} ١ & ، س > ١ \\ ٢ & ، س = ١ \\ ٣ & ، س < ١ \end{cases}$

جد قيمة كل مما يلي :

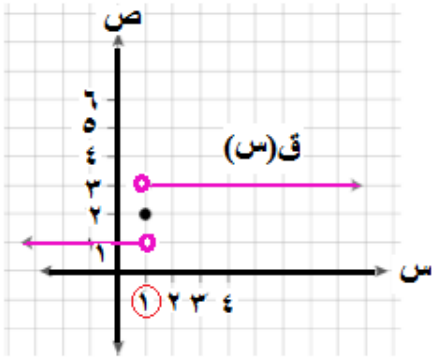
١) $\lim_{س \to ١^{-}}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ١^{+}}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٤) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٥) ق(١)



الحل :

١) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ١

٢) $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٣

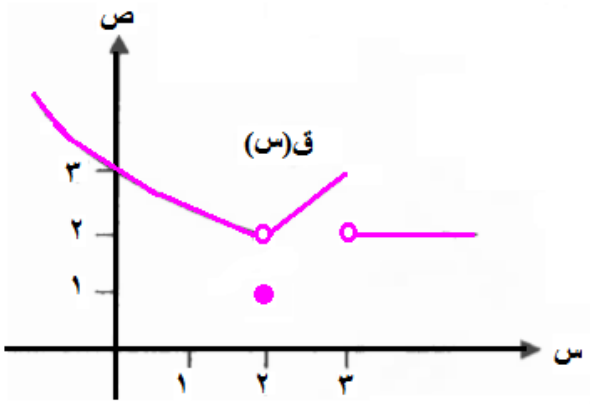
٣) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = غير موجودة (لان النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار)

٤) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٣

٥) ق(١) = ٢

مثال ٣

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :



أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

ج) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س)

هـ) ق(٣)

و) ق(٢)

الحل :

أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٢

ب) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٣

ج) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = غير موجودة

د) $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٣

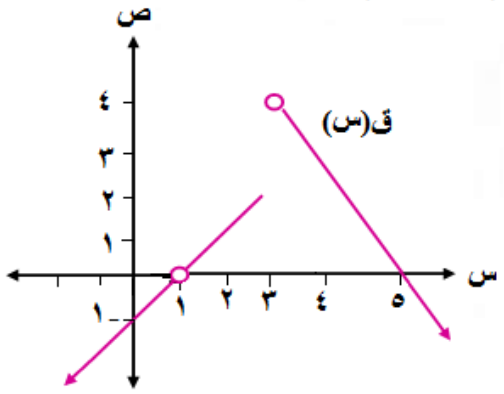
هـ) ق(٣) = غير معرفة

و) ق(٢) = ١

صالح الزبيدي
0797825868

مثال ٤

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :



أ)

١. $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

٢. $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

٣. $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

٤. $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٥. $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٦. $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

ب) قيمة الثابت أ بحيث أن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ٠

ج) قيمة الثابت ب بحيث أن $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = غير موجودة

الحل :

أ)

١. $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = [١-]

٢. $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = [٤]

٣. $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = [٢]

٤. $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = [غير موجودة]

٥. $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = [٠]

٦. $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = [٠]

ب) [أ = ١ ، ٥] تكون النهاية تساوي صفر عندما يقطع او يمس الاقتران ق(س) محور السينات

و نلاحظ ان الاقتران يقطع محور السينات عند النقاط ١ ، ٥

جـ) [ب = ٣] حيث تكون غير موجودة عند س = ٣

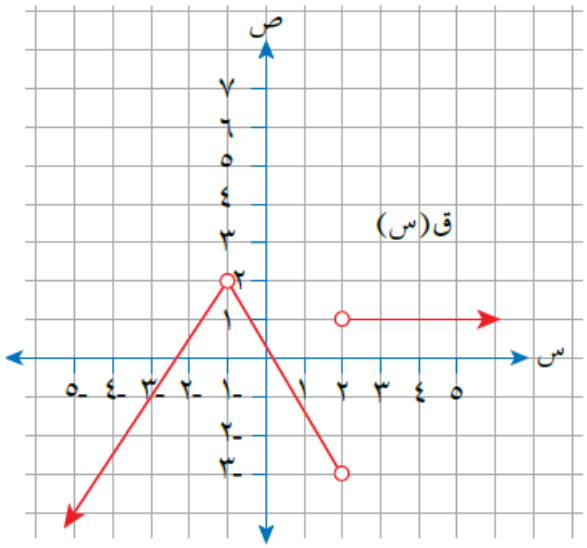
سؤال اضافي

اعتمادًا على الشكل (١-٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to -١} ق(س)$

٢) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

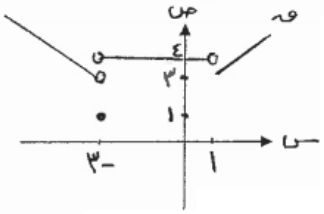
٣) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$



الشكل (١-٦).

أسئلة سنوات سابقة

١) اعتماداً على الرسم البياني جانباً ، أوجد ما يلي :



أ) $\lim_{س \to -٣^+} ق(س)$

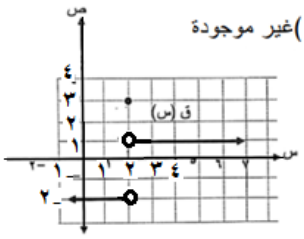
ب) $\lim_{س \to -٣^-} ق(س)$

ج) $\lim_{س \to -٣} ق(س)$

د) ق(-٣)

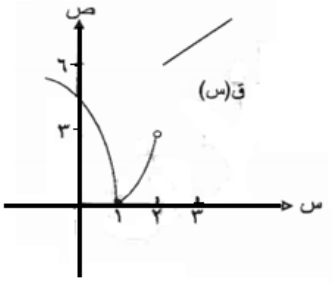
٢) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ؟

أ) ١ ب) -٢ ج) ٣ د) غير موجودة



$\lim_{س \to ١^+} ق(س)$

٣) اعتماداً على الرسم البياني جانباً ، أوجد ما يلي :

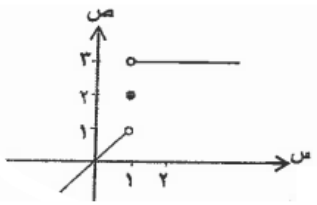


أ) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

ب) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

ج) $\lim_{س \to ١} ق(س)$

٤) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)،



$\lim_{س \to ١^+} ق(س)$ تساوي:

■ ١ ■ ٢

■ ٣ ■ غير موجودة

الأسئلة

١) اعتمادًا على الشكل (١-٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ،

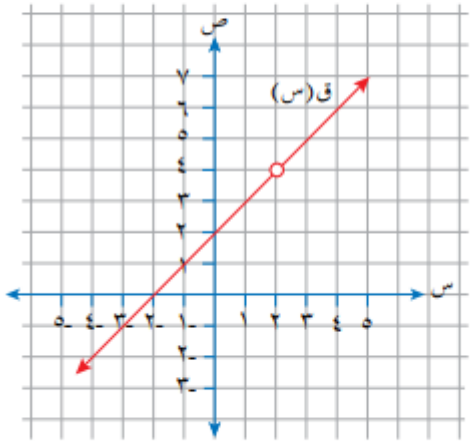
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) نهـــا ق(س)
س←٢

جـ) ق(٣)

د) نهـــا ق(س)
س←٣



الشكل (١-٩).

صالح الزبيدي
0797825868

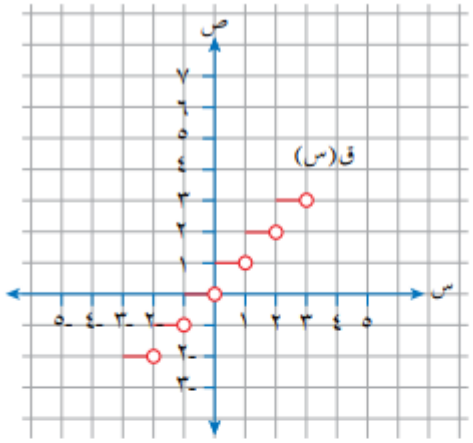
٢) اعتمادًا على الشكل (١-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهـــا ق(س)
س←٠,٥

ب) نهـــا ق(س)
س←٢+

جـ) نهـــا ق(س)
س←٢-

د) نهـــا ق(س)
س←٢



الشكل (١-١٠).

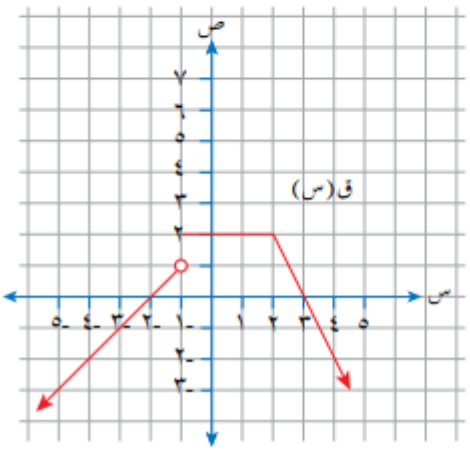
٣) اعتمادًا على الشكل (١-١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) نهـــا ق(س)
س←٢

ب) نهـــا ق(س)
س←١

جـ) قيمة أ، حيث نهـــا ق(س) غير موجودة.
س←أ

د) قيم ب، حيث نهـــا ق(س) = صفرًا.
س←ب



الشكل (١-١١).

الدرس الثاني — نظريات في النهايات

اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = م$ حيث أن ل ، م ، جـ أعداد حقيقية فإن :

١ $\lim_{س \to أ} جـ = جـ$ نهاية الثابت = الثابت نفسة

أمثلة : $\lim_{س \to ٢} ٩ = ٩$ ، $\lim_{س \to ٥} ٢٧ = ٢٧$

٢ $\lim_{س \to أ} (ق(س) + هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) + \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل + م$

٣ $\lim_{س \to أ} (ق(س) - هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) - \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل - م$

٤ $\lim_{س \to أ} (ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \times م$

٥ $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ حيث م ≠ ٠

٦ $\lim_{س \to أ} جـ \times ق(س) = جـ \times ل$

٧ $\lim_{س \to أ} (ق (س))^{ن} = (ل)^{ن}$

٨ $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

صالح الزبيدي
0797825868

مثال ١

إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ١٢$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٤$ أوجد مايلى :

١. $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$

٢. $\lim_{س \to ١} (ق(س) - هـ(س))$

٣. $\lim_{س \to ١} (٢ ق(س) + ٥ هـ(س))$

٤. $\lim_{س \to ١} (ق(س) \times هـ(س))$

٥. $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

الحل :

١. $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س)) = \lim_{س \to ١} ق(س) + \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١٢ + ٤ = ١٦$

٢. $\lim_{س \to ١} (ق(س) - هـ(س)) = \lim_{س \to ١} ق(س) - \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١٢ - ٤ = ٨$

٣. $\lim_{س \to ١} (٢ ق(س) + ٥ هـ(س)) = ٢ \times \lim_{س \to ١} ق(س) + ٥ \times \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٢ \times ١٢ + ٥ \times ٤ = ٢٤ + ٢٠ = ٤٤$

٤. $\lim_{س \to ١} (ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to ١} ق(س) \times \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١٢ \times ٤ = ٤٨$

٥. $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} ق(س)}{\lim_{س \to ١} هـ(س)} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

مثال ٢

إذا كانت $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٩$ ، $\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٣$

أوجد ١. $\lim_{س \to ٤} (\sqrt{ق(س)} + س هـ(س))$

٢. $\lim_{س \to ٤} \frac{س + ق(س)}{هـ^{٢}(س)}$

الحل :

١. $\lim_{س \to ٤} (\sqrt{ق(س)} + س هـ(س)) = \sqrt{٩} + ٤ \times ٣ = ٣ + ١٢ = ١٥$

٢. $\lim_{س \to ٤} \frac{س + ق(س)}{هـ^{٢}(س)} = \frac{٤ + ٩}{٣^{٢}} = \frac{١٣}{٩}$

مثال ٣

اعتماداً على الرسم البياني جانباً ، أوجد ما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٢}$ ((ق(س))^٢ − $\frac{١}{٤}$ (س + ٦))

الحل :

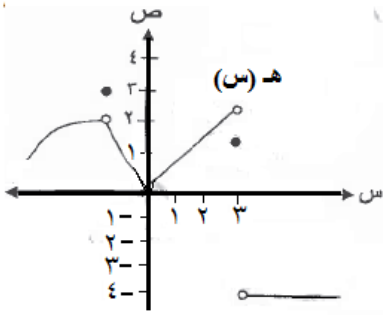
أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ③

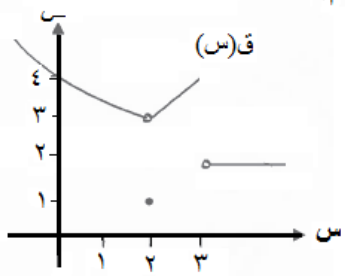
ب) $\lim_{س \to ٢}$ ((ق(س))^٢ − $\frac{١}{٤}$ (س + ٦)) = $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س))^٢ − $\frac{١}{٤}$ × $\lim_{س \to ٢}$ (س + ٦)

= ٣^٢ − $\frac{١}{٤}$ × (٢ + ٦) = ٩ − $\frac{٨}{٤}$ = ٩ − ٢ = ⑦

مثال ٤

اعتماداً على الرسم البياني جانباً ، أوجد ما يلي : $\lim_{س \to ٣^+}$ (٥ ق(س) − هـ (س))





الحل :

$\lim_{س \to ٣^+}$ (٥ ق(س) − هـ (س)) = ٥ × $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) − $\lim_{س \to ٣^+}$ هـ (س) = ٥×٢ − ٤- = ١٠ + ٤ = ١٤

مثال ٥

إذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ (٢ ق(س) + ٥ س) = ٢٣ فجد ناتج ما يلي :

١. $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٢. $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س))^٢

٣. $\lim_{س \to ٣}$ (٢س + $\frac{٤ س}{ق(س)}$ − ٨)

الحل :

١. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٢ \times \text{ق}(س) + \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٥س = ٢٣$

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٢ \times \text{ق}(س) + ٥ \times ٣ = ٢٣$

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٢ \times \text{ق}(س) + ١٥ = ٢٣$ بطرح ١٥ من الطرفين

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٢ \times \text{ق}(س) = ٨$ بالقسمة على ٢ في الطرفين

$\boxed{\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ \text{ق}(س) = ٤}$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ (\text{ق}(س))^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦$

$= ٩ - ٨ = \boxed{١}$

٣. $= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٢س + \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ \frac{٤س}{\text{ق}(س)} - \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}\ ٨$ توزيع النهاية ثم تعويض قيمة س و قيمة النهاية

$= ٢ \times ٣ + \frac{٤ \times ٣}{٤} - ٨$

$= ٦ + \frac{١٢}{٤} - ٨$

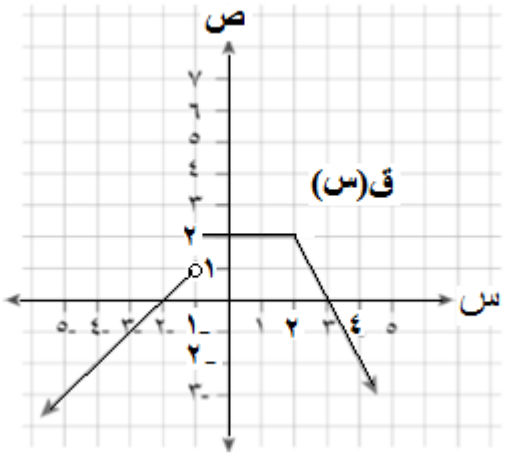
$= ٦ + ٣ - ٨$

$= ٩ - ٨ = \boxed{١}$

صالح الزبيدي
0797825868

سؤال اضافي

اعتماداً على الشكل جانباً ، اوجد ناتج ما يلي :



١. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١}\ \text{ق}(س)$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤}\ (س - ٣\text{ق}(س))$

مثال ٦

اذا كان ق(س) ، هـ (س) كثيري حدود و كانت ق(٢) = ١٥ ،

و كانت $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{ق(س)}{٣} - هـ(س) \right) = ٦$ فجد ما يلي : $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$

الحل :

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢) = ١٥$ لأن ق(س) كثير حدود

$\frac{١٥}{٣} - \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٦$

$٥ - \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٦$

$- \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٦ - ٥$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = -١$

ثالثا : ايجاد النهاية من التعويض المباشر

الاقترانات التي سيتم دراسة النهاية لها : ١. اقتران كثير الحدود ٢. الاقتران المتشعب ٣. الاقتران النسبي

١. نهاية الاقتران كثير الحدود

نتيجة

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فإن : $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$

مثال : $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ق(٤)$

مثال ١

أوجد ناتج النهايات الآتية :

١) $\lim_{س \to ١} (٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٠)$

٢) $\lim_{س \to ٥} (٤س - ١)$

٣) $\lim_{س \to -٢} (٢س + ٣)(س + ١)$

٤. $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤س + ١}$

الحل : لايجاد نهاية الاقتران كثير الحدود يتم تعويض أ بدلاً من س

١) $\lim_{س \to ١} (٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٠) = (٢ \times (١)^{٣} + ٣ \times (١)^{٢} - ١٠) = ٢ + ٣ - ١٠ = ١٠ - ٥ = -٥$

٢) $\lim_{س \to ٥} (٤س - ١) = (٤ \times (٥) - ١) = ٢٠ - ١ = ١٩$

٣) $\lim_{س \to -٢} (٢س + ٣)(س + ١) = (٢ \times (-٢) + ٣)(-٢ + ١) = (-٤ + ٣)(-١) = -١ \times -١ = ١$

٤. $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٤س + ١} = \sqrt{٤ \times (٢) + ١} = \sqrt{٨ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

مثال ٢

إذا علمت أن ق(س) اقتران كثير حدود و كان ق(٧) = ٤ فما قيمة $\lim_{س \to ٧} ق(س)$ ؟

الحل : بما أن ق(س) اقتران كثير حدود فإن $\lim_{س \to ٧} ق(س) = ق(٧) = ٤$

٢. **نهاية الاقتران المتشعب** (يحتوي أكثر من قاعدة)

ايجاد نهاية الاقتران المتشعب

تحسب نهاية الاقتران المتشعب حسب النقطة المطلوب ايجاد النهاية عندها كما يلي :

أ. إذا **لم تكن النقطة نقطة تشعب** تحسب النهاية من خلال **تعويض العدد في قاعدة الاقتران المناسبة** للفترة التي ينتمي لها العدد .

ب. إذا كانت النقطة نقطة تشعب نجد النهاية من **اليمين (قاعدة س> أ) و النهاية من اليسار (س<أ)**

* تكون النهاية **موجودة** إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to أ^+} ق(س) = \text{نهـــا}_{س \to أ^-} ق(س)$

* تكون النهاية **غير موجودة** عندما تكون $\text{نهـــا}_{س \to أ^+} ق(س) \neq \text{نهـــا}_{س \to أ^-} ق(س)$

مثال ١

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س + ١ ، & س > ٢ \\ س^٢ ، & س \leq ٢ \end{cases}$ فجد كلاً مما يأتي (إن وجدت) :

١) ق(٢) ٢) $\text{نهـــا}_{س \to ١} ق(س)$ ٣) $\text{نهـــا}_{س \to ٣} ق(س)$ ٤) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} ق(س)$

الحل :

١) ق(٢) $= ٢^٢ = ٤$ (من المساواة نجد الصورة)

٢) $\text{نهـــا}_{س \to ١} ق(س) = ٥ \times (١) + ١ = ٥ + ١ = ٦$ {١ يقع ضمن قاعدة الاقتران المقابلة لـ س > ٢ }

٣) $\text{نهـــا}_{س \to ٣} ق(س) = ٣^٢ = ٩$ {٣ يقع ضمن قاعدة الاقتران المقابلة لـ س ≤ ٢ }

٤) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} ق(س)$ = نجد النهاية من اليمين، نجد النهاية من اليسار

نجد النهاية من اليمين: $\text{نهـــا}_{س \to ٢^+} ق(س) = ٢^٢ = ٤$

نجد النهاية من اليسار: $\text{نهـــا}_{س \to ٢^-} ق(س) = ٥ \times (٢) + ١ = ١٠ + ١ = ١١$

بما أن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

اذن $\text{نهـــا}_{س \to ٢} ق(س)$ = غير موجودة

مثال ٢

إذا كان ق(س) = { ٢س٢+١ ، س < ١ ؛ ٣س ، ١ < س < ٤ ؛ ٥س + ٦ ، س ≥ ٤ } فجد كلاً مما يأتي (إن وجدت) :

١) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) ٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ٣) $\lim_{س \to ٦}$ ق(س) ٤) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

الحل :

١) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ٢ × (-٢)٢ + ١ = ٢ × ٤ + ١ = ٩

٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٣ × ٣ = ٩

٣) $\lim_{س \to ٦}$ ق(س) = ٥ × (٦) + ٦ = ٣٠ + ٦ = ٣٦

٤) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = نجد النهاية من اليمين ← $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٣ × ١ = ٣

نجد النهاية من اليسار ← $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٢ × (١)٢ + ١ = ٢ × ١ + ١ = ٣

اذن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٣

صالح الزبيدي
0797825868

مثال ٣

إذا كان ق(س) = { س + ٣ ، س ≠ ٧ ؛ ١٠ ، س = ٧ }

أوجد ما يلي : ١) $\lim_{س \to ٧}$ ق(س) ٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ٣) $\lim_{س \to ٩}$ ق(س) ٤) ق(٧)

الحل :

١) $\lim_{س \to ٧}$ ق(س) = ٧ + ٣ = ١٠

ملاحظة : س ≠ ٧ تعني س > ٧ أو س < ٧

٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٣ + ٣ = ٦

٣) $\lim_{س \to ٩}$ ق(س) = ٩ + ٣ = ١٢

٤) ق(٧) = ١٠

مهم جداً : ايجاد الثوابت

مثال ١

إذا كانت نهـــــا (أ س^{٢} + ٣) = ٧ ، جد قيمة الثابت أ
س ← -١

الحل :

أ × (-١)^{٢} + ٣ = ٧
أ + ٣ = ٧
-٣ -٣
أ = ٤

مثال ٢

إذا كان ق(س) = { م س + ٥ ، س < ٤ ; س + ٩ ، س ≤ ٤ }

جد قيمة الثابت م إذا كانت نهـــــا ق(س) موجودة
س ← ٤

الحل :

نهـــــا ق(س) = نهـــــا ق(س) (لان النهاية موجودة عند س = ٤)
س ← ٤+ س ← ٤-

٤ + ٩ = م × ٤ + ٥
١٣ = ٤م + ٥
٤م = ١٣ - ٥
٤م = ٨ نقسم على ٤ بالطرفين

إذن : م = ٢

مثال ٣

إذا كان ق(س) = { س + ٦ ، س > ب ؛ ٣س - ٤ ، س < ب }

ما قيمة الثابت ب إذا كانت نهـــــا ق(س) موجودة ؟ (س ← ب)

الحل : نهـــــا ق(س) = نهـــــا ق(س) (س ← ب+ ، س ← ب-)

٣ × (ب) - ٤ = (ب) + ٦

٣ب - ٤ = ب + ٦

٢ب = ٦ + ٤

٢ب = ١٠

ب = ١٠ / ٢

اذن : ب = ٥

سؤال اضافي١

إذا كان ق(س) = { ٤ ، س > ١ ؛ أ س^{٣} - ٢ ، س ≤ ١ }

جد قيمة الثابت أ إذا كانت نهـــــا ق(س) موجودة (س ← ١)

سؤال اضافي٢

إذا كان ق(س) = { س^{٣} + ١ ، س > ٣ ؛ ٢٠ ، س = ٣ ؛ أس + ١ ، س < ٣ }

ما قيمة الثابت أ إذا كانت نهـــــا ق(س) موجودة ؟ (س ← ٣)

الأسئلة

١) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٨، $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = −٢، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٣}$ (٤ق(س) + ٢هـ(س))

ب) $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) − ٢هـ(س))

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) × هـ(س))

د) $\lim_{س \to ٣}$ ٥ق(س)

هـ) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ١)

و) $\lim_{س \to ٣}$ ((هـ(س))^{٣} + ٣س − ٧)

ز) $\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤)

٢) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to -٢}$ (٣س^{٤} − ٥س^{٣} + ٦س − ٧)

ب) $\lim_{س \to ١}$ (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٥س − ٢)

جـ) $\lim_{س \to -١}$ (س^{٣} + ٢)^{٥}

٣) إذا كانت $\lim_{س \to -٢}$ (٣ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧، فجد $\lim_{س \to -٢}$ (ق(س))^{٣}

٤) إذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥، فما قيمة الثابت م؟

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س + ١ & ، س > ٠ \\ ٥ - س^{٢} & ، س \leq ٠ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

٦) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢}+١ & ، \ س \neq ٣ \\ ٨ & ، \ س = ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) ب) $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) جـ) هـ (٣)

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س + ٤ & ، \ س < ٢ \\ ٥س^{٢}+أ & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ ؟

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+١ & ، \ س < ٢ \\ ٥س & ، \ ٢ \leq س \leq ٦ \\ س^{٢}-٦ & ، \ س > ٦ \end{cases}$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) د) $\lim_{س \to ٦}$ ق(س)

٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س - أ & ، \ س < ٢ \\ ١٠ & ، \ س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت أ ؟

الدرس الثالث نهاية خارج قسمة اقترانين

الاقتران النسبي : هو اقتران على صورة كسر يكون فيه البسط والمقام اقترانات كثيرة حدود .

شكل الاقتران النسبي : $\dfrac{\text{البسط (اقتران كثير حدود)}}{\text{المقام (اقتران كثير حدود)}}$

مثال على اقتران نسبي : $\dfrac{س + ٤}{٣س - ١}$

لإيجاد نهاية الاقتران النسبي نقوم بالتعويض المباشر فتنتج اربع حالات كما يلي :

١ $\dfrac{\text{عدد}}{\text{عدد}} = \text{عدد}$

٢ $\dfrac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$

٣ $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \text{غير موجودة}$

٤ $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

← ناتج غير مقبول

← نستخدم احد الخيارات الأتية :

- التحليل
  - اخراج عامل مشترك
  - فرق مربعين
  - فرق او مجموع مكعبين
  - تحليل عبارة تربيعية
- توحيد المقامات
- الضرب بالمرافق

صالح الزبيدي 0797825868

مثال ١

اوجد ناتج النهايات الآتية :

١. $\lim_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} + ٦}{س + ٣}$

٢. $\lim_{س \to ١} \dfrac{س^{٢} - ١}{س + ٢}$

٣. $\lim_{س \to -١} \dfrac{س + ٥}{س + ١}$

الحل : تعويض مباشر و يكون الحل و الناتج حسب الحالة

١. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} + ٦}{س + ٣} = \frac{(٢)^{٢} + ٦}{٢ + ٣} = \frac{٤ + ٦}{٢ + ٣} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ١}{س + ٢} = \frac{(١)^{٢} - ١}{١ + ٢} = \frac{١ - ١}{١ + ٢} = \frac{٠}{٣} = ٠$

٣. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{س + ٥}{س + ١} = \frac{-١ + ٥}{-١ + ١} = \frac{٤}{٠}$ = غير موجودة

مثال ٢

اوجد ناتج النهايات الآتية :

١. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٤س^{٢} - ٥س + ٦}{٢س^{٣} + ٧س + ٣}$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{\sqrt{٣س + ٤} + ٧}{س^{٢} - ١}$

الحل :

١. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٤س^{٢} - ٥س + ٦}{٢س^{٣} + ٧س + ٣} = \frac{٤ \times (٠)^{٢} - ٥ \times (٠) + ٦}{٢ \times (٠)^{٣} + ٧ \times (٠) + ٣} = \frac{٤ \times ٠ - ٥ \times ٠ + ٦}{٢ \times ٠ + ٧ \times ٠ + ٣}$

$= \frac{٠ - ٠ + ٦}{٠ + ٠ + ٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{\sqrt{٣س + ٤} + ٧}{س^{٢} - ١} = \frac{\sqrt{٣ \times (٤) + ٤} + ٧}{(٤)^{٢} - ١} = \frac{\sqrt{١٦} + ٧}{١٦ - ١} = \frac{٤ + ٧}{١٦ - ١} = \frac{١١}{١٥}$

تدريب الكتاب ١

جد قيمة النهاية لكل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س + ٥}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س + ٣}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س + ٣}{٤ - س^{٢}}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ١}{س + ٣}$

حل نهايات ناتج التعويض المباشر فيها يعطي = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

يكون الحل حسب الخطوات الآتية :

١. نقوم بالتعويض المباشر فينتج حالة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ و هذا جواب **غير مقبول** لذلك نستخدم احدى العمليات الجبرية الآتية :

٢. اخراج العامل المشترك ، فرق مربعين ، فرق او مجموع مكعبين ، توحيد المقام ، الضرب بالمرافق .

٣. ثم نختصر

٤. ثم نعوض .

مثال ٣

نهايات تحتاج اخراج عامل مشترك وتحليل فرق مربعين

اوجد ناتج النهايات الآتية :

١. $\lim_{س \to ١} \frac{٤س - ٤}{س - ١}$ ٢. $\lim_{س \to ٣} \frac{٥س - ١٥}{س^{٢} - ٩}$ ٣. $\lim_{س \to ٢} \frac{٦س^{٣} - ١٢س^{٢}}{س^{٢} - ٤}$

الحل :

١. بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ غير مقبول

$\lim_{س \to ١} \frac{٤س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤(س - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} ٤ = \boxed{٤}$

تذكر أن $أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب) (أ + ب)$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٢} - ١٥}{س^{٢} - ٩} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س - ٣) ٥}{(س - ٣)(س + ٣)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{٥}{(س + ٣)} = \frac{٥}{(٣ + ٣)} = \boxed{\frac{٥}{٦}}$

٣. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٦س^{٣} - ١٢س^{٢}}{٤ - س^{٢}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٦س^{٢}(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٦س^{٢}}{(س + ٢)} = \frac{٦ \times ٢^{٢}}{٢ + ٢} = \frac{٤ \times ٦}{٢ + ٢} = \boxed{\frac{٢٤}{٤}}$

مثال ٤

جد ناتج $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س + ٤)^{٢} - ٤٩}{٩ - س^{٢}}$ تحتاج تحليل فرق مربعين

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ نقوم بالتحليل باستخدام فرق مربعين $= \frac{(٣ + ٤)^{٢} - ٤٩}{٩ - ٣^{٢}} = \frac{٤٩ - ٤٩}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$ غير مقبول

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س + ٤)^{٢} - ٤٩}{٩ - س^{٢}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س + ٤ - ٧)(س + ٤ + ٧)}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س + ١١)(س - ٣)}{(س + ٣)(س - ٣)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{(س + ١١)}{(س + ٣)} = \frac{(٣ + ١١)}{(٣ + ٣)} = \frac{١٤}{٦}$$

مثال ٥

اوجد ناتج النهايات الآتية : نهايات تحتاج تحليل عبارة تربيعية و عامل مشترك

١. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ٧س + ٦}{س - ١}$ ٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٥} \frac{س^{٢} - س - ٣٠}{س^{٢} + ٥س}$ ٣. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٢ - س}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

الحل :

١. بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ غير مقبول

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ٧س + ٦}{س - ١} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ١)(س - ٦)}{س - ١} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} (س - ٦) = ١ - ٦ = \boxed{-٥}$$

٢. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٥} \frac{س^{٢} - س - ٣٠}{س^{٢} + ٥س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٥} \frac{(س + ٥)(س - ٦)}{س(س + ٥)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٥} \frac{(س - ٦)}{س} = \frac{-٥ - ٦}{-٥} = \frac{-١١}{-٥} = \boxed{\frac{١١}{٥}}$

٣. $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٢ - س}{س^{٢} + ٣س - ١٠} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{-(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٥)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{-١}{(س + ٥)} = \frac{-١}{٢ + ٥} = \boxed{\frac{-١}{٧}}$

مثال ٦

اوجد ناتج النهاية الآتية : نهايات تحتاج تحليل فرق او مجموع مكعبين

١. $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$

الحل :

١. بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ غير مقبول

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} (س^{٢} + ٢س + ٤) = (٢)^{٢} + ٢ \times ٢ + ٤ = ١٢$$

تدريب الكتاب ٢

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} + ٣س}{س + ٣}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠}$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} + ٢٧س}{س + ٣}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{٩ - س^{٢}}$

مثال ٧

اوجد ناتج النهايات الآتية : نهايات تحتاج توحيد مقامات

١. $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٤}$

٢. $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{س+١}}{س - ٢}$

الحل : بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ غير مقبول

١. $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٤} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١ \times ٢ - ١ \times س}{٢ \times س}}{٢(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{-(س - ٢)}{٢س}}{٢(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \dfrac{-١}{٤س} = \dfrac{-١}{٨}$

تذكر أن $\dfrac{أ - ب}{ب - أ} = -١$

٢. $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{س+١}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١ \times ٣ - ١ \times (س + ١)}{٣ \times (س + ١)}}{(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{٣ - (س + ١)}{٣(س + ١)}}{(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{-(س - ٢)}{٣(س + ١)}}{(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{-١}{٣(س + ١)}$

$= \dfrac{-١}{٣(١ + ٢)} = \dfrac{-١}{٩}$

مثال ٨

اوجد ناتج النهايات الآتية : نهايات تحتاج الضرب بالمرافق

١. $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

٢. $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$

الحل :

١. بالتعويض المباشر ينتج $\div$ غير مقبول

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{(\sqrt{س} + ١)}{(\sqrt{س} + ١)} = \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{(\sqrt{س} + ١) \times س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{(\sqrt{س} + ١)} = \frac{١}{(\sqrt{١} + ١)} = \frac{١}{٢}$$

٢. $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$

تدريب الكتاب٣

جد قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$

مثال ٩

إذا كان ق(س) = س^{٢} ، فجد $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

ق(س) = س^{٢}

ق(٢) = ٢^{٢} = ٤

الحل :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٢ + ٢ = \boxed{٤}$$

ملاحظة : سيتم التوضيح لاحقاً

هذا السؤال مشترك مع وحدة الاشتقاق حيث سنلاحظ أن $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = ق'(٢)$

صالح الزبيدي
0797825868

الأسئلة

١) إذا كانت نهـــا ق(س) = ٣، نهـــا هـ (س) = ٩، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):
س←٢ س←٢

أ) نهـــا $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ (س)}}$ ب) نهـــا $\frac{\text{هـ (س)} + ١}{\text{ق(س)} + \text{س} - ٥}$
س←٢ س←٢

٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

أ) ق(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} + ٨}$ ، س←صفر

ب) هـ(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ٥\text{س}}{\text{س} - ١}$ ، س←١

جـ) ل(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{١٢ - ٣\text{س}}$ ، س←٤

د) م(س) = $\frac{٢٧ - \text{س}^٣}{٣\text{س}^٢ - ٩\text{س}}$ ، س←٣

هـ) ك(س) = $\frac{\frac{١}{\text{س} - ٢} - \frac{١}{٥}}{٢\text{س} - ١٤}$ ، س←٧

و) د(س) = $\frac{٣ - \sqrt{\text{س} + ١}}{\text{س} - ٨}$ ، س←٨

ز) و(س) = $\frac{\text{س} - ٧}{٣ - \sqrt{\text{س} + ٢}}$ ، س←٧

٣) إذا كان ق(س) = س، فجد نهـــــا $\frac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣}$
س←−٣

٤) إذا علمت أن نهـــــا ق(س) = −٧، نهـــــا هـ (س) = ٢، فبيِّن أن: نهـــــا $\frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧}$ = −٤
س←٥ س←٥

٥) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س - ٢}$، فجد نهـــــا $\frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$
هـ←٠

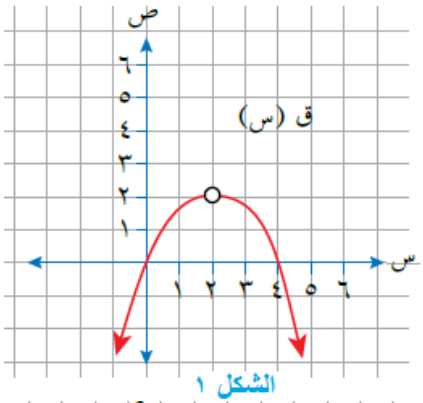
٦)* جد نهـــــا $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$
س←١

الدرس الرابع — الاتصال عند نقطة

لتوضيح مفهوم الاتصال سندرس الاشكال التالية :

١. الاقتران **ق(س)** في الشكل ١ غير معرف عند **س=٢** (دائرة فارغة تعني غير معرف)
نلاحظ وجود **انقطاع** (ثقب) في منحنى الاقتران عند س=٢

ق(٢) غير معرف

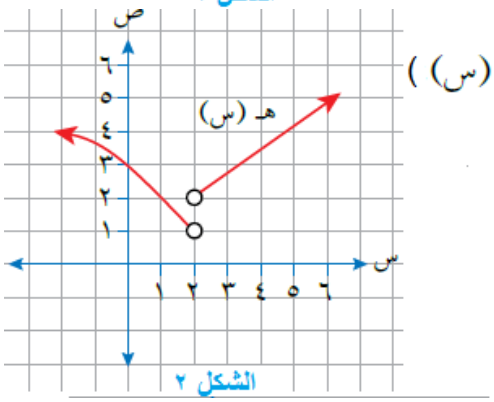


الشكل ١

٢. $\lim_{س \to ٢}$ هـ **(س)** في الشكل ٢ **غير موجودة** ($\lim_{س \to ٢^-}$ هـ (س) ≠ $\lim_{س \to ٢^+}$ هـ (س))

نلاحظ وجود **قفزة** في منحنى الاقتران **هـ (س)** عند النقطة س=٢

النهاية غير موجودة

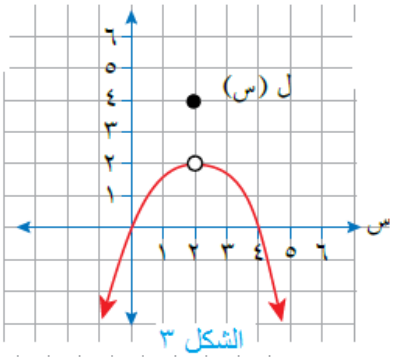


الشكل ٢

٣. $\lim_{س \to ٢}$ ل(س) ≠ ل(٢)؛ في الشكل ٣ لذا ظهرت **فجوة** في منحنى الاقتران ل عندما س = ٢

النهاية ≠ الصورة

صالح الزبيدي
0797825868

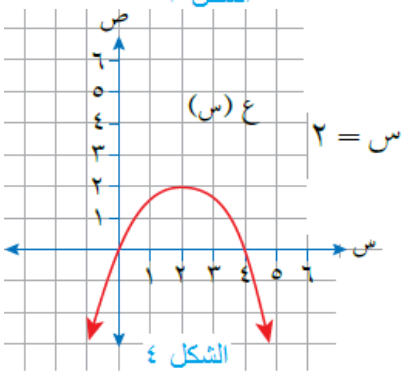


الشكل ٣

٤. في الشكل ٤ ع(٢) = ٢، $\lim_{س \to ٢}$ ع (س) موجودة، $\lim_{س \to ٢}$ ع (س) = ع (٢)،

ولم يظهر انقطاع في منحنى الاقتران ع؛ لذا يوصف الاقتران ع بأنه **متصل** عندما س = ٢

النهاية موجودة
ع(٢) = ٢
النهاية = الصورة



الشكل ٤

شروط اتصال الاقتران عند نقطة

يكون الاقتران ق متصل عند س= أ اذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية معاً :

١) ق(أ) معرفة

٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة ($\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س))

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

إذا لم يتحقق اي شرط من هذه الشروط فإن ق يكون غير متصل عند س=أ

ملاحظة:
الاقترانات **كثيرة الحدود** دائماً **متصلة على ح**

مثال ١

اذا كان ق(س) = ٥س^{٢} +٣س - ٦ ، ابحث في اتصال ق(س) عند س=٢

الحل :

ق(٢) = ٥ × (٢)^{٢}+٣ × (٢)-٦ = ٥ × ٤+٣ × ٢-٦ = ٢٠+٦-٦= ٢٠

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٥ × (٢)^{٢}+٣ × (٢)-٦ = ٥ × ٤+٣ × ٢-٦ = ٢٠+٦-٦= ٢٠

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢)

ق(س) متصل عند س=٢

مثال ٢

إذا كان ق(س) = { س^{٢} + ١ ، س > ٢ ؛ ٥ س − ٥ ، س ≤ ٢ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل :

الاقتران ق اقتران متشعب عندما س = ٢

١) ق معرف عندما س = ٢ ، ق(٢) = ٥ × ٢ − ٥ = ٥

٢) نهـــا ق (س) = نهـــا (س^{٢} + ١) = (٢)^{٢} + ١ = ٥
س←٢$^{-}$ س←٢$^{-}$

نهـــا ق(س) = نهـــا (٥س − ٥) = ٥ × ٢ − ٥ = ٥
س←٢$^{+}$ س←٢$^{+}$

∴ نهـــا ق(س) = ٥ **موجودة**
س←٢

٣) نهـــا ق(س) = ق(٢) = ٥
س←٢

∴ بما أن الاقتران ق حقق شروط الاتصال جميعها عندما س = ٢ ، فإن الاقتران ق متصل عندما س = ٢

مثال ٣

إذا كان ق(س) = { س^{٢} + ٢ ، س > ١ ؛ ٣س ، ١ ≤ س < ٣ ؛ س^{٣} − ١٨ ، س < ٣ }

فابحث اتصال الاقتران ق عند كل مما يأتي: ١) س = ٠ ٢) س = ١ ٣) س = ٣

الحل : ١) س = ٠

ق(٠) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢

نهـــا ق(س) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢
س←٠

نهـــا ق(س) = ق(٠) ∴ ق(س) متصل عند س = ٠
س←٠

٢) س = ١ الاقتران ق اقتران متشعب عندما س = ١

ق(١) = ٣ × ١ = ٣ من المساواة

نهـــــا ق (س) = نهـــــا (س^{٢} + ٢) = (١)^{٢} + ٢ = ٣
س←١$^{-}$ س←١$^{-}$

نهـــــا ق (س) = ٣ موجوده
س←١

نهـــــا ق(س) = نهـــــا ٣س = ٣ × ١ = ٣
س←١$^{+}$ س←١$^{+}$

نهـــــا ق(س) = ق(١) = ٣
س←١

∴ الاقتران ق متصل عندما س = ١

٣) س = ٣

ق(٣) = **غير معرفة** بسبب عدم وجود مساواة

∴ الاقتران ق(س) غير متصل عند س = ١ لأنه لم يحقق شروط الاتصال

مثال ٤

إذا كان هـ (س) = { س + ٣ ، س ≠ −١ ؛ ٤ ، س = −١ }

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = −١

ملاحظة :
س ≠ −١ تكافئ س > -١ أو س < -١

الحل :

١) هـ معرف عندما س = −١ ، هـ (−١) = ٤

٢) نهـــــا هـ (س) = نهـــــا (س + ٣) = −١ + ٣ = ٢
س←−١ س←−١

٣) نهـــــا هـ (س) ≠ هـ (−١)
س←١$^{-}$

∴ الاقتران هـ غير متصل عندما س = −١

مثال ٥

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢}-٢س}{س-٢} & ، س \neq ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل :

١) ق(٢) = ٤ معرفة

٢) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}-٢س}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٢)}{س-٢}$ = ٢

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) ≠ ق(٢)

∴ الاقتران ق غير متصل عندما س = ٢

مثال ٦

إذا كان ق اقتراناً متصلاً عند س=٣ وكانت ق(٣)=١١ فأوجد $\lim_{س \to ٣}$ (س ق(س) - ٦)

الحل :

بما أن الاقتران ق متصل عند س=٣ ∴ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ق(٣)=١١

$\lim_{س \to ٣}$ (س ق(س) - ٦) = ٣ × $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) - ٦ = ٣ × ١١ - ٦ = ٣٣ - ٦ = ٢٧

مثال ٧

إذا كان الاقتران ق متصلًا عندما س = ١ ، وكانت $\lim_{س \to ١}$ ٢ق(س) + ٤س = ١٢ ، فجد قيمة ق(١).

الحل :

∴ ٢ × $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + ٤ × ١ = ١٢

٢ × $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + ٤ = ١٢

-٤ -٤

$\frac{٢}{٢}$ × $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = $\frac{٨}{٢}$

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٤

∴ ق(١) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٤ (لأن الاقتران ق متصل عند س=١)

مهم جداً : ايجاد الثوابت اذا كان الاقتران متصلاً

مثال ١

ملاحظة:

اذا طلب ايجاد ثابت واحد فقط أ و الاقتران متصل و متشعب (قاعدة > و قاعدة < فقط)

نساوي النهاية من اليمين مع النهاية من اليسار ثم **نعوض قيم** المتغيرات و **نجد قيمة الثابت**.

إذا كان ق (س) $= \begin{cases} أ\,س + ٧ & ، \quad س \geq ٣ \\ س + ١ & ، \quad س < ٣ \end{cases}$

وكان ق متصلًا عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت أ.

الحل: بما أن ق متصل عندما س = ٣ (القيمة التي يتشعب عندها الاقتران)،

∴ $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة؛

أي إن: $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} ق(س)$

$\lim_{س \to ٣^-} (أ\,س + ٧) = \lim_{س \to ٣^+} (س + ١)$

$٣\,أ + ٧ = ٣ + ١$

$٣\,أ + ٧ = ٤$

$٣\,أ = -٣$

$أ = -١$

ملاحظة:

اذا طلب ايجاد ثابت واحد فقط أ و الاقتران متصل و متشعب (قاعدة ≠ و قاعدة = فقط)

نساوي النهاية بالصورة ق(أ)

مثال ٢

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ١٠ & ، \ س \neq ٢ \\ أ^{٢} \ س & ، \ س = ٢ \end{cases}$

وكان ق متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة الثابت أ.

الحل:

بما أن ق متصل عندما س = ٢ (القيمة التي يتشعب عندها الاقتران)، فإن

∴ نهـــــا ق(س) = ق (٢).
س←٢

نهـــــا (س^{٣} + ١٠) = ٢أ^{٢}
س←٢

٢^{٣} + ١٠ = ٢أ^{٢}

١٨ = ٢أ^{٢}

٩ = أ^{٢}

∴ أ = ٣، −٣

صالح الزبيدي
0797825868

ملاحظة:

اذا طلب ايجاد ثابتين أ ، ب و الاقتران متصل تكون خطوات الحل كما يلي :

١. نساوي النهاية من اليسار بالصورة ق(أ) فنحصل على معادلة ، نعطيها رقم ١

٢. نساوي النهاية من اليمين بالصورة ق(أ) فنحصل على معادلة ، نعطيها رقم ٢

٣. نستخدم طرق حل معادلتين خطيتين (الحذف و التعويض او الجمع و التعويض) .

مثال

٢أ + ب = ٥ ..... ١

− ٢أ − ٤ ب = ٥ ..... ٢ حذف و تعويض انسب للتخلص من احد المتغيرات

٥ب = ٥

ب = ١ ثم نعوض ب في احدى المعادلات ونجد المتغير الآخر

مثال ٣

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢أس + ب & ، \ س < ٢ \\ ٨ & ، \ س = ٢ \\ أس^{٢} + ٣ب\ س & ، \ س > ٢ \end{cases}$

وكان ق متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ ، ب.

الحل: بما أن الاقتران ق متصل عندما س = ٢، فإن نهـــا ق(س) = ق(٢)
س←٢

∴ نهـــا ق(س) = ق(٢)، ومنه: نهـــا (٢أس + ب) = ق(٢)
س←٢⁻ س←٢⁻

أي إن: ٤أ + ب = ٨ ..... (١)

وأيضًا نهـــا ق(س) = ق(٢)، ومنه: نهـــا (أس٢ + ٣ب س) = ق(٢)،
س←٢⁺ س←٢⁺

أي إن: ٤أ + ٦ب = ٨ ..... (٢)

ولإيجاد قيمة كل من: أ، ب، يمكن استخدام طريقة الحذف والتعويض لحل النظام المكون من المعادلتين: (١) و (٢) الخطيتين بمتغيرين.

٤أ + ب = ٨

−(٤أ + ٦ب = ٨)

−٥ ب = ٠

بالتعويض في المعادلة (١):

∴ ب = ٠

٤ أ + ٠ = ٨

∴ أ = ٢

تدريب الكتاب ٣

١) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢س^{٣} + ٤ & ، \ س < -٢ \\ أس + ٦ & ، \ س \leq -٢ \end{cases}$

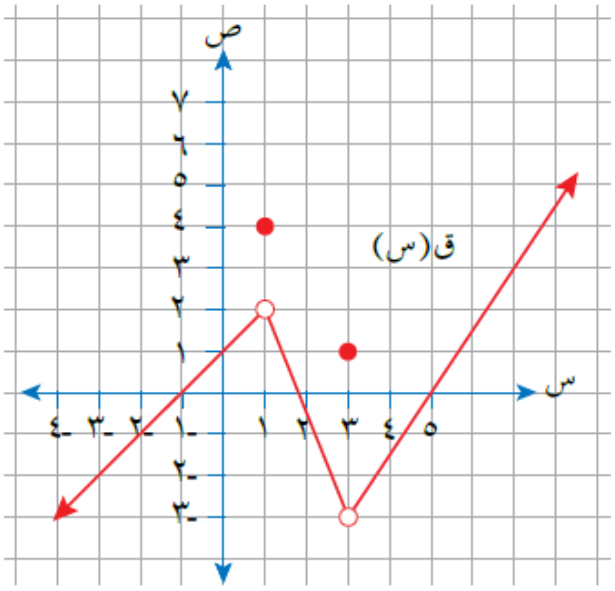
وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = −٢، فجد قيمة الثابت أ.

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس + ٣ & ، \ س > ١ \\ ٧ & ، \ س = ١ \\ س - ب & ، \ س < ١ \end{cases}$

وكان ق متصلًا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

الأسئلة

١) اعتمادًا على الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل.



الشكل (١−١٥).

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، \ س > ١ \\ ٢س & ، \ س \leq ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

٣) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \frac{٥}{س + ١} & ، س \neq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

٤) إذا علمت أن ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، س < -١ \\ ٥ - س & ، -١ \geq س < ١ \\ س^{٣} + ٣ & ، س \leq ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما:

أ) س = ١ ب) س = -١

٥) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ م س + ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت م.

٦) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س + أ & ، س > ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ ب س + ٦ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان الاقتران هـ متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ ، ب.

٧) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} أ س - ب & ، س > ١ \\ ٤ & ، س = ١ \\ أس^{٣} + ب + ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ل متصلا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

٨) إذا كان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٢، وكانت $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦ ، فجد قيمة ق(٢).

الدرس الخامس نظريات الاتصال

نظرية

اذا كان الاقترانان ق ، هـ متصلين عند س=أ فإن :

١) ق + هـ متصل عند س = أ

٢) ق ـ هـ متصل عند س = أ

٣) ق × هـ متصل عند س = أ

٤) $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ حيث هـ (أ) ≠ ٠

مثال ١

إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٥س ، هـ (س) = $\begin{cases} ٥س & ، س \geq ٠ \\ س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق × هـ) (س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠

الحل :

١) نبحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٠

ق اقتران كثير حدود متصل لكل قيم س؛ لذا فهو متصل عندما س = ٠

٢) نبحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٠

هـ (٠) = ٥ × ٠ = ٠

نهـــا هـ (س) = نهـــا (٥س) = ٥ × ٠ = ٠
س←٠$^{-}$ س←٠$^{-}$

نهـــا هـ (س) = نهـــا س^{٢} = (٠)^{٢} = ٠
س←٠$^{+}$ س←٠$^{+}$

بما أن $\lim_{س \to ٠^-}$ هـ (س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ هـ (س)، فإن $\lim_{س \to ٠}$ هـ (س) = صفرًا.

وأيضًا $\lim_{س \to ٠}$ هـ (س) = هـ (٠) = ٠

∴ هـ (س) اقتران متصل عندما س = ٠

٣) الاقتران ل متصل عندما س = ٠ ؛ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عندما س = ٠

مثال ٢

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٢ ، هـ (س) = $\begin{cases} س - ١ & ، \ س \geq ٣ \\ ٥ - س & ، \ س < ٣ \end{cases}$

فابحث اتصال (ق + هـ) عندما س = ٣

الحل :

١) نبحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣

ق اقتران كثير حدود متصل لكل قيم س؛ لذا فهو متصل عندما س = ٣

٢) نبحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٣

هـ (٣) = ٣ − ١ = ٢

$\lim_{س \to ٣^-}$ هـ (س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ س − ١ = ٣ − ١ = ٢

$\lim_{س \to ٣^+}$ هـ (س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ ٥ − س = ٥ − ٣ = ٢

$\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) = ٢ موجودة

$\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) = هـ (٣) = ٢ ∴ الاقتران هـ متصل عندما س = ٣

∴ الاقتران (ق + هـ) متصل عندما س = ٣

ملاحظة:
عندما يكون أحد الاقترانين أو كلاهما غير متصل عند س=أ نقوم أولاً بإيجاد ناتج العملية ق + هـ ، ق – هـ ، ق × هـ ، $\frac{ق}{هـ}$ ثم نبحث في اتصال الاقتران الناتج .

مثال ٣

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ١٥ ، هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٥ \\ ٣س & ، س < ٥ \end{cases}$

م(س) = (ق – هـ) (س)، فابحث اتصال الاقتران م عندما س = ٥

الحل :

١) هـ (س) غير متصل عند س=٥ لذلك نجد م(س) = (ق – هـ) (س):

٢) (ق– هـ) (س) = $\begin{cases} (س^{٢} + ١٥) - س^{٢} & ، س > ٥ \\ (س^{٢} + ١٥) - ٣س & ، س \leq ٥ \end{cases}$

∴ م(س) = $\begin{cases} ١٥ & ، س > ٥ \\ س^{٢} - ٣س + ١٥ & ، س \leq ٥ \end{cases}$

والآن، يجب بحث اتصال الاقتران م عندما س = ٥:

م(٥) = (٥)^{٢} – ٣ × ٥ + ١٥ = ٢٥

نهـــا م(س) = ١٥ ، نهـــا م(س) = ٢٥

س←٥$^{-}$ س←٥$^{+}$

∴ نهـــا م(س) غير موجودة
س←٥

لهذا فإن م غير متصل عندما س = ٥

مثال ٤

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٤ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٥ & ، \ س > ٠ \\ ٥ & ، \ س = ٠ \\ -٥ & ، \ س < ٠ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ل(س) = (ق × هـ) (س)، عندما س = ٠

الحل :

١) هـ (س) غير متصل عند س= ٠ لذلك نجد ل(س) = (ق × هـ) (س):

٢) ل(س) = (ق × هـ) (س) = $\begin{cases} ٥ \times (س^{٢} + ٤) & ، \ س > ٠ \\ ٥ \times (س^{٢} + ٤) & ، \ س = ٠ \\ -٥ \times (س^{٢} + ٤) & ، \ س < ٠ \end{cases}$

٣) نبحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٠

ل(٠) = ٥ × (٤ + (٠)^{٢}) = ٢٠

نهـ ل(س) = نهـ ٥ × (س^{٢} + ٤) = ٥ × (٤ + (٠)^{٢}) = ٢٠
س ← ٠$^{-}$ س ← ٠$^{-}$

نهـ ل(س) = نهـ -٥ × (س^{٢} + ٤) = -٥ × (٤ + (٠)^{٢}) = -٢٠
س ← ٠$^{+}$ س ← ٠$^{+}$

غير موجودة

نهـ ل(س) غير موجودة لهذا فإن ل غير متصل عندما س = ٠
س ← ٠

ملاحظة: نقاط عدم الاتصال

١) **لا يوجد** نقاط عدم اتصال للاقترنات **كثيرة الحدود** (لأنها متصلة على ح).

٢) **الاقترانات النسبية** تكون نقاط عدم الاتصال **أصفار المقام** فقط .

٣) **الاقتران المتشعب** نختبر **نقاط التشعب** فقد تكون نقاط عدم الاتصال او قد تكون نقاط اتصال .

مثال ٥

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

١) ق(س) = $س^{٢} + ٥س + ١$

٢) ق(س) = (٣س + ٨) ($س^{٢} - ١$)

٣) هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ٣}$

صالح الزبيدي
0797825868

٤) ل(س) = $\frac{٥س}{س^{٢} - ١}$

٥) ق(س) = $\begin{cases} س - ١ ، & س < ٣ \\ ٥ - س ، & ٣ < س < ٨ \\ -٣ ، & س \geq ٨ \end{cases}$

الحل :

١) ق(س) = $س^{٢} + ٥س + ١$ — **لا يوجد نقاط عدم اتصال لان ق كثير حدود**

٢) ق(س) = (٣س + ٨) ($س^{٢} - ١$) — **لا يوجد نقاط عدم اتصال لان ق كثير حدود**

٣) هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ٣}$

نجد اصفار المقام س -٣ = ٠ س =٣
هـ غير متصل عند س =٣

٤) ل(س) = $\frac{٥س}{س^{٢} - ١}$

س - ١ = ٠ ، س= ١ ل غير متصل عند
س + ١ =٠ ، س = -١ س= ١ ، -١

٥) ق(س) = $\begin{cases} س - ١ ، & س < ٣ \\ ٥ - س ، & ٣ < س < ٨ \\ -٣ ، & س \geq ٨ \end{cases}$

ق غير متصل عند س = ٣ و السبب أن ق(٣) غير موجودة

تدريب الكتاب

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

١) ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٨

٢) هـ(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$

٣) ل(س) = $\frac{٥ - \text{س}}{\text{س}^{٣} - ١}$

الأسئلة

١) إذا كان ق(س) = ٥س^{٢} + ٥س − ١ ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٩ & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٥\text{س} + ١ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

وكان ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٢

٢) إذا كان ق(س) = ٥ س^{٢} + ٤ ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٤ & ، \text{س} > ٠ \\ ٤ - \text{س}^{٣} & ، \text{س} \leq ٠ \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق × هـ) (س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ٥ \\ \text{س} - ٥ & ، \text{س} \leq ٥ \end{cases}$ ، هـ(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ ،

فابحث اتصال (ق × هـ) (س) عندما س = ٥

٤) إذا كان (ق + هـ) (س) متصلًا عندما س = أ، فهل نستنتج أن كلًّا من ق، هـ متصل عندما س = أ ؟ برِّر إجابتك.

٥) جد قيم س (إن وجدت) التي **لا** يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلًا:

أ) ق(س) = $س^{٣} + ١$

ب) هـ(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

جـ) ل(س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} - ١} + \frac{٥}{س}$

تم بحمد الله

تم بحمد الله

في الختام أحمد الله الذي وفقني لهذا العمل

في الختام أحمد الله الذي وفقني لهذا العمل

و اتمنى التوفيق لكل مجد و مجتهد

و اتمنى التوفيق لكل مجد و مجتهد