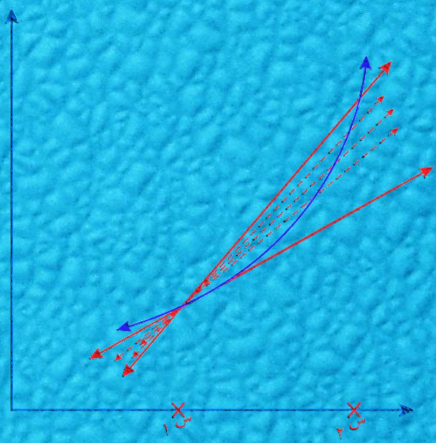
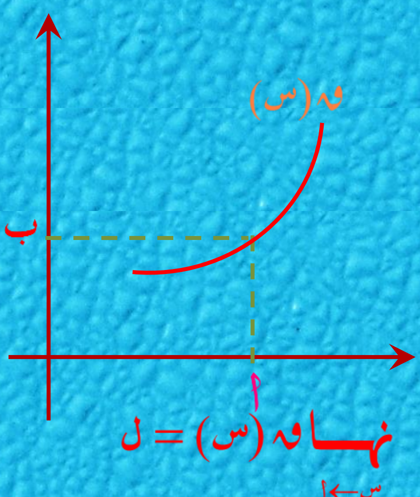
أساسيات الرياضيات

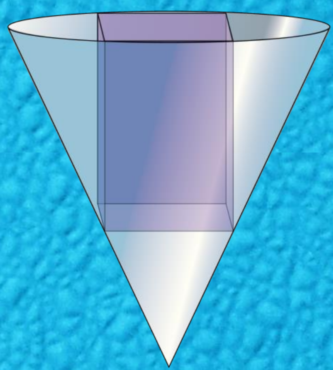
التوجيهي العلمي

أ. علي حافظ
0778324532



$$\acute{\text{ق}}(\text{س}_1) = \underset{\text{س}_2 \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$





- **فيما يلي أهم الأساسيات التي يحتاجها طالب التوجيهي:**

ملحق: المساحات والحجوم والعلاقات المساعدة.

١) مجموعات الأعداد

أ) مجموعة الاعداد الطبيعية : ط = {١، ٢، ٣، .....}.

ب) مجموعة الاعداد الصحيحة: ص = {...، ٣، ٢، ١، ٠، −١، −٢، −٣، ...}.

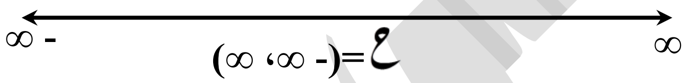
ج) مجموعة الأعداد النسبية: ك = { $\frac{أ}{ب}$: أ،ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ }.

مثال: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٧}$

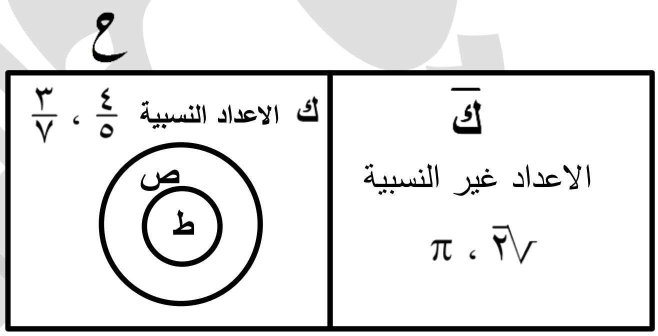
د) مجموعة الأعداد غير النسبية: $\overline{ك}$ وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة $\frac{أ}{ب}$

مثال: $\sqrt{٢}$ ، π ، $\sqrt[٣]{٥}$

هـ) مجموعة الأعداد الحقيقية: ع وهي تشمل جميع المجموعات السابقة وتمثل جميع القيم على خط الاعداد.



ع=(-∞ ،∞)



الفترات

- الفترة [أ،ب] : مغلقة من الجهتين، وهي تشمل العددين أ و ب وجميع القيم بينهما

- الفترة (أ،ب] : مغلقة من جهة واحدة، وتشمل جميع الأعداد بين أ و ب ولا تشمل العدد أ

• **الفترة** [أ،ب) : مغلقة من جهة واحدة، وتشمل جميع الأعداد بين أ و ب ولا تشمل العدد ب

• **الفترة** (أ،ب) : مفتوحة من الجهتين، وهي تشمل جميع القيم بين العددين أ و ب ولا تشمل أ و ب

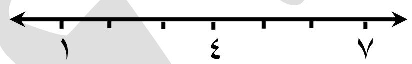
مثال

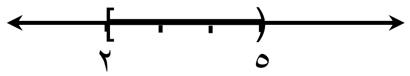
مثل المجموعات والفترات التالية على خط الأعداد:

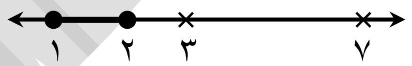
١) {١ ، ٤ ، ٧} ٢) [٢ ، ٥)

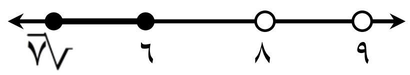
٣) {٣ ، ٧} ∪ [١ ، ٢] ٤) [√٧ ، ٦] ∪ (٨ ، ٩)

الحل:

١) 

٢) 

٣) 

٤) 

٢) قوانين الأسس

القاعدة	مثال
١) $س^{ن} \times س^{م} = س^{ن+م}$	$س^{٢} \times س^{٣} = س^{٢+٣} = س^{٥}$
٢) $\frac{س^{ن}}{س^{م}} = س^{ن-م}$	$\frac{س^{٧}}{س^{٥}} = س^{٧-٥} = س^{٢}$
٣) $(س^{م})^{ن} = س^{م\times ن}$	$(س^{٢})^{٣} = س^{٢\times٣} = س^{٦}$
٤) $(س \times ص)^{ن} = س^{ن} \times ص^{ن}$	$(٢س)^{٤} = (٢)^{٤} \cdot س^{٤} = ١٦س^{٤}$
٥) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن} = \frac{س^{ن}}{ص^{ن}}$	$\left(\frac{٥}{ص}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{ص^{٢}}$
٦) $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$	$\sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$ ، $\sqrt[٥]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٥}}$
٧) $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$	$\frac{٥}{س^{٣}} = ٥س^{-٣}$
٨) $س^{٠} = ١ \quad (س \neq ٠)$	$٧^{٠} = ١$ ، $\sqrt{٥}^{\,٠} = ١$

مثال

استخدم قوانين الأسس في تبسيط المقادير التالية:

١) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤}$.

٢) $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = \left(٢^{\cancel{٣}}\right)^{\frac{٢}{\cancel{٣}}} = ٤$.

٣) $(١٦)^{\frac{-٣}{٤}} = \left(٢^{\cancel{٤}}\right)^{\frac{-٣}{\cancel{٤}}} = ٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$.

٤) $\left(\sqrt[٣]{س^{٢}}\right)^{٥} = \left(س^{\frac{٢}{٣}}\right)^{٥} = س^{\frac{٢}{٣}\times ٥} = س^{\frac{١٠}{٣}}$.

٥) $\sqrt{١٢} = \sqrt{٤\times ٣} = ٢\sqrt{٣}$.

٦) $\left(\frac{٣س ص^{٣}}{س^{٢}\sqrt{ص}}\right)^{-٢} = \left(\frac{س^{٢}\sqrt{ص}}{٣س ص^{٣}}\right)^{٢} = \frac{س^{٤}\times ص}{٩س^{٢} ص^{٦}} = \frac{س^{٢}}{٩ص^{٥}}$.

---

٣) الاقترانات

أ) كثير الحدود.　　ب) الاقتران الجذري.　　ج) الاقتران النسبي.

د) الاقتران المتشعب.　　هـ) اقتران القيمة المطلقة.　　و) اقتران أكبر عدد صحيح.

ز) الاقتران الأسّي.

أ) كثيرات الحدود :

وهي الاقترانات التي تكون على الصورة

$$\boxed{ق(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \ldots + أ_{١} س + أ_{٠}} \quad : \quad (أ_{ن} \neq ٠)$$

حيث أن المعاملات $(أ_{ن} ، \ldots ، أ_{٠})$ أعداد حقيقية.

والقوى $(ن ، ن-١ ، \ldots ، ١)$ أعداد صحيحة موجبة.

- **مجال كثير الحدود هو ح**
- **<u>درجة كثيرات الحدود هي القوة الأكبر للعدد س في الاقتران ق(س).</u>**
- **من أنواع كثيرات الحدود :**

١) **الثابت:** $ق(س) = أ$ ، $(أ \in ح)$ وهو كثير حدود من الدرجة صفر

٢) **الخطي:** $ق(س) = أس + ب$ ، $أ،ب \in ح$ ، $أ \neq ٠$

٣) التربيعي: $ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$ ، $أ، ب، جـ \in ح$ ، $أ \neq ٠$

وهناك كثيرات حدود من الدرجة الثالثة فأكثر.

مثال

أي من الاقترانات التالية يمثل كثير حدود، ثم حدد درجة كثير الحدود:

١) $ق(س) = ٢\sqrt{س} + ٣س - ٤$.

٢) $ق(س) = \sqrt{٢}س + \frac{١}{٥}س^{٣}$

٣) $ق(س) = ٢س - \frac{٣}{س^{٢}} + ٥$

٤) $ق(س) = ٢س^{٢} - ٥س^{٤} + ١٢$

الحل:

١) ليس كثير حدود، لأن $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ قوة غير صحيحة موجبة.

٢) كثير حدود من الدرجة الثالثة.

٣) ليس كثير حدود لأن $\frac{٣}{س^{٢}} = ٣س^{-٢}$ قوة غير صحيحة موجبة.

٤) كثير حدود من الدرجة الرابعة.

- **الاقتران الثابت:**

$\boxed{ق(س) = أ}$ ، $(أ \in ح)$ وهو كثير حدود من الدرجة صفر

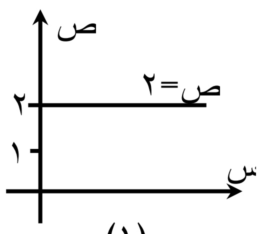
لرسم الاقتران الثابت، وهو مستقيم يوازي محور السينات.

مثال

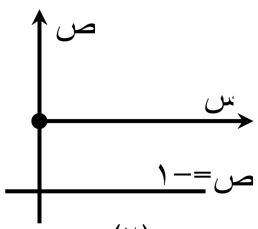
ارسم الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = ٢$.   ٢) $ص = -١$.   ٣) $ص = ٠$.

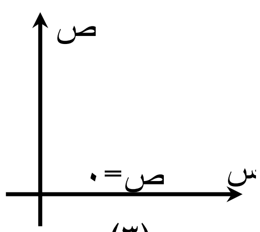
الحل:



(١)



(٢)



(٣)

* لاحظ أن (ص=٠) هي معادلة محور السينات

ملاحظة: المستقيم (س= أ) ليس اقتران، وإنما هو مستقيم يوازي محور الصادات.

مثال

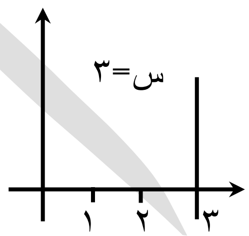
ارسم المستقيمات التالية:

١) س = ٣.

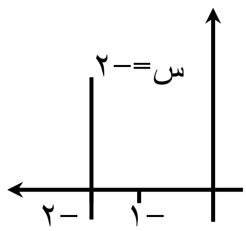
٢) س = −٢.

٣) س = ٠ .

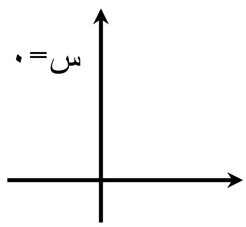
الحل:



(١)



(٢)



(٣)

* لاحظ أن (س=٠) هي معادلة محور الصادات

- **الاقتران الخطي:**

$\boxed{ق(س) = أس+ب}$ ، أ ≠ ٠ ، (أ،ب ∈ ح) وهو كثير حدود من الدرجة الأولى

لرسم الاقتران الخطي نأخذ نقطتين على الاقتران ثم نصل بينهما بخط مستقيم.

مثال

ارسم الاقترانات التالية:

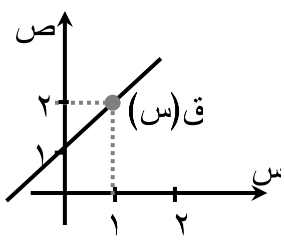
١) ق(س) = س + ١.

٢) ق(س) = ٣ − ٢س.

الحل:

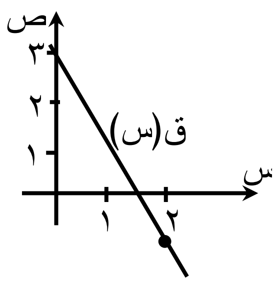
١)

س	٠	١
ق(س)	١	٢



٢)

س	٠	٢
ق(س)	٣	−١



- **الاقتران التربيعي:**

$\boxed{ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ}$ ، أ $\neq$ ٠ ، (أ،ب،جـ $\in$ ع) وهو كثير حدود من الدرجة الثانية

لرسم الاقتران التربيعي نتبع ما يلي:

١) نجد معادلة محور التماثل: $س = \frac{-ب}{٢أ}$.

٢) نجد نقطة الرأس: $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$.

٣) نأخذ نقطة قبل الرأس وأخرى بعده.

٤) إذا كان معامل س (+) فالاقتران مفتوح للأعلى $\cup$.

وإذا كان معامل س (−) فالاقتران مفتوح للأسفل $\cap$.

مثال

ارسم الاقترانات التربيعية التالية:

١) $ق(س) = س^{٢} + ١$.

٢) $ق(س) = ٢س^{٢} - ٤س + ٣$

٣) $ق(س) = ٨ - س^{٢} + ٦س$

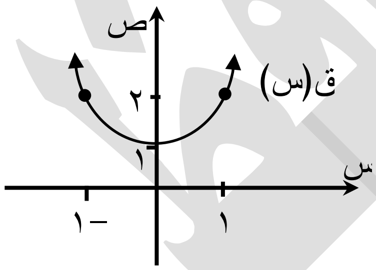
الحل:

١) $ق(س) = س^{٢} + ١$. أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ١

محور التماثل : $س = \frac{٠}{٢} = ٠ \Leftarrow$ الرأس: (٠ ، ١)

س	−١	٠	١
ق(س)	٢	١	٢

معامل $س^{٢}$ (+) $\Leftarrow$ الاقتران مفتوح للأعلى $\cup$

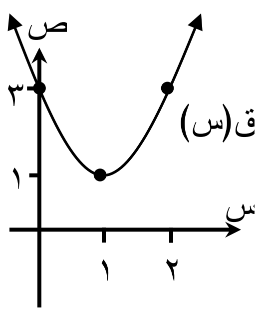


٢) $ق(س) = ٢س^{٢} - ٤س + ٣$. أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ = ٣

محور التماثل : $س = \frac{-(-٤)}{٢ \times ٢} = ١ \Leftarrow$ الرأس: (١ ، ق(١)) = (١ ، ١)

معامل $س^{٢}$ (+) $\Leftarrow$ الاقتران مفتوح للأعلى $\cup$

س	٠	١	٢
ق(س)	٣	١	٣

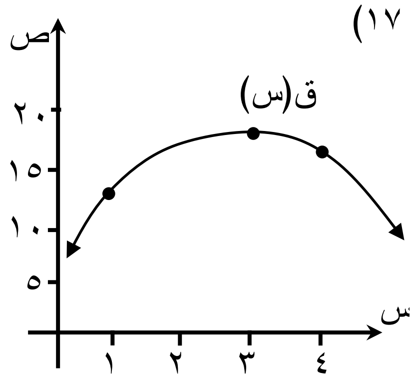


٣) ق(س) = ٨ − $س^{٢}$ + ٦س . أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = ٨

محور التماثل : س = $\frac{-٦}{٢\times -١}$ = ٣ ⇐ الرأس: (٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ١٧)

معامل $س^{٢}$ (−) ⇐ الاقتران مفتوح للأسفل ∩

س	١	٣	٤
ق(س)	١٣	١٧	١٦



تدريب

ارسم كل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = ٢س + ١.

٢) ق(س) = $س^{٢}$ − ٦س + ٥

٣) ق(س) = ٤ − ٢س

٤) ق(س) = ٨ + ٢س − $س^{٢}$

- كثير الحدود من الدرجة الثالثة يكون على الصورة:

ق(س) = أ$س^{٣}$ + ب$س^{٢}$ + جـس + د ، (أ،ب،جـ،د ∈ ح)، أ ≠ ٠

- كثير الحدود من الدرجة الرابعة يكون على الصورة:

ق(س) = أ$س^{٤}$ + ب$س^{٣}$ + جـ$س^{٢}$ + دس + هـ ، (أ،ب،جـ،د،هـ ∈ ح)، أ ≠ ٠

..... وهكذا

• دراسة إشارة الاقتران:

١) <u>الاقتران الخطي</u>: ق(س) = أس+ب

* نجد صفر الاقتران : أس+ب = ٠ ⇐ س = $\frac{-ب}{أ}$ ثم نعينه على خط الأعداد.

عكس إشارة معامل س ● نفس إشارة معامل س

س = $\frac{-ب}{أ}$

مثال

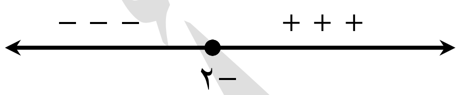
أدرس إشارة كل اقتران فيما يلي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٤$.

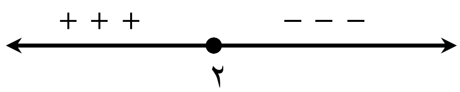
٢) $\text{ق}(\text{س}) = ٦\text{س} - ٣\text{س}$

الحل:

١) $٢\text{س} + ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٢$



٢) $٦\text{س} - ٣\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢$



- **<u>الاقتران التربيعي:</u>**

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} \quad ، \quad (\text{أ} \neq ٠)$$

* نجد أصفار الاقتران إن وجدت.

إن وجدت الأصفار تكون الإشارة بين الجذرين عكس إشارة معامل $\text{س}^{٢}$ وخارج الجذرين نفس إشارة معامل $\text{س}^{٢}$.

إن لم توجد الأصفار تكون إشارة الاقتران هي إشارة معامل $\text{س}^{٢}$.

قاعدة: إذا كان $\text{س}^{٢} = \text{أ}$ ، $(\text{أ} \geq ٠)$ فإن $\text{س} = \pm\sqrt{\text{أ}}$	إذا كان $\text{س}^{٢} = \text{أ}$ ، $(\text{أ} < ٠)$ فإنه لا يوجد للمعادلة حلول

مثال

أدرس إشارة كل اقتران فيما يلي:

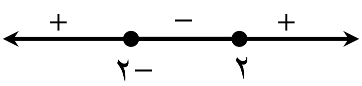
١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤$.

٢) $\text{ق}(\text{س}) = ٩ - \text{س}^{٢}$

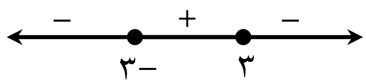
٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$

الحل:

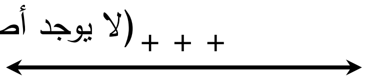
١) $\text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ٢$



٢) $٩ - \text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ٣$



٣) $\text{س}^{٢} + ١ = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢} = -١$ (لا يوجد أصفار)



ملاحظة: للبحث في إشارة أي اقتران، نجد أصفار البسط والمقام، ثم نعينها على خط الأعداد، ثم نختار عدد في كل فترة ونعوضه في الاقتران فتكون إشارة الفترة هي إشارة العدد.

مثال

أدرس إشارة كل اقتران فيما يلي:

١) ق(س) = (س − ١) (س + ٢) (س − ٣) .

٢) ق(س) = (س + ١)^{٢} (س − ٤)

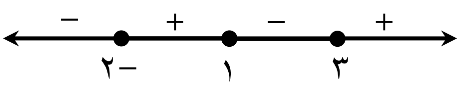
٣) ق(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$

٤) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س} - ٤}$

الحل:

١) (س − ١) (س + ٢) (س − ٣) = ٠

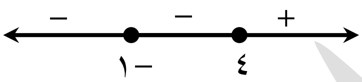
س = ١ ، −٢ ، ٣



---

٢) (س + ١)^{٢} (س − ٤) = ٠

س = −١ ، ٤

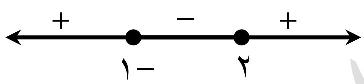


---

٣) $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ = ٠

س − ٢ = ٠ ← س = ٢

س + ١ = ٠ ← س = −١



---

٤) $\frac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س} - ٤}$ = ٠

س^{٢} − ١٦ = ٠ ← س^{٢} = ١٦ ← س = ±٤

س − ٤ = ٠ ← س = ٤

مثال

حل المتباينتين التاليتين:

١) س^{٢} − س − ٦ ≤ ٠

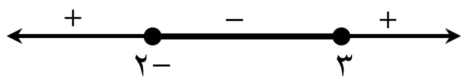
٢) س^{٣} − ٩س < ٠

الحل:

١) نفرض أن ق(س) = س^{٢} − س − ٦ وندرس الإشارة

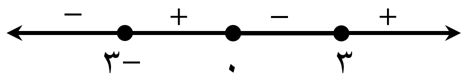
ق(س) = (س − ٣) (س + ٢) = ٠ ← س = ٣ ، −٢

∴ س ∈ (−∞ ، −٢] ، [٣ ، ∞)



٢) نفرض أن $\text{و}(س) = س^{٣} - ٩س = س(س^{٢} - ٩) = (س - ٣)(س + ٣) = ٠$

$س = ٠ ، -٣ ، ٣$



$\therefore س \in (-\infty ، -٣) ، (٠ ، ٣)$

ب) الاقتران الجذري:

$$\text{و}(س) = \sqrt[ن]{\text{هـ}(س)}$$

- إذا كان (ن) فردي فإن مجال الاقتران ق(س) هو ح
- إذا كان (ن) زوجي فإن مجال الاقتران ق(س) هو قيم (س) حيث هـ(س) ≥ ٠

مثال

حدد مجال كل من الاقترانات التالية:

١) $\text{و}(س) = \sqrt[٣]{س + ١}$ ٢) $\text{و}(س) = \sqrt{س - ١}$ ٣) $\text{و}(س) = \sqrt[٥]{س^{٢} - ٧}$

٤) $\text{و}(س) = \sqrt[٤]{٦ - ٢س}$ ٥) $\text{و}(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ٦) $ق(س) = \dfrac{\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}{\sqrt{٥ - س}}$

الحل:

١) بما أن دليل الجذر = ٣ (عدد فردي). فإن مجال الاقتران هو ح.

٢) بما أن دليل الجذر = ٢ (عدد زوجي). فإن مجال الاقتران عندما $س - ١ \geq ٠$

$\Leftarrow س \geq ١ \therefore$ مجال ق(س) هو $[١ ، \infty)$.

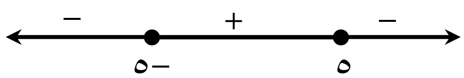
٣) بما أن دليل الجذر = ٥ (عدد فردي). فإن مجال الاقتران هو ح.

٤) بما أن دليل الجذر = ٤ (عدد زوجي). فإن مجال الاقتران عندما $٦ - ٢س \geq ٠$

$\Leftarrow س \leq ٣ \therefore$ مجال ق(س) هو $(-\infty ، ٣]$.

٥) بما أن دليل الجذر = ٢ (عدد زوجي). فإن مجال الاقتران عندما $٢٥ - س^{٢} \geq ٠$

نفرض هـ(س) = $٢٥ - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س = \pm ٥$

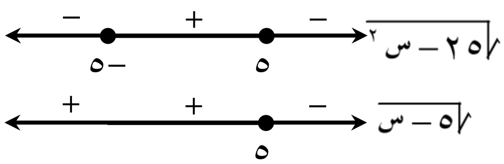


$\therefore$ مجال الاقتران ق(س) هو $[-٥ ، ٥]$

٦) $ق(س) = \dfrac{\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}{\sqrt{٥ - س}}$ ، نحدد مجال كل من البسط والمقام

مجال ق(س) = مجال البسط $\cap$ مجال المقام − {أصفار المقام}

$= [-٥ ، ٥)$



ج) الاقتران النسبي (الكسري):

هو الاقتران الذي يكون على الصورة $ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، ل(س) $\neq$ ٠

ملاحظة: في الاقتران النسبي لا يجوز أن يكون المقام = صفر، لذلك فإن أصفار المقام تكون دائمًا خارج المجال.

مثال

حدد مجال كل من الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = \frac{١}{س}$ ٢) $ق(س) = \frac{٢}{س - ١}$ ٣) $ق(س) = \frac{٤س}{س^{٢} - ٩}$

الحل:

١) أصفار المقام: س = ٠ ⟸ مجال ق هو ح − {٠}

٢) أصفار المقام: س − ١ = ٠ ⟸ س = ١ ⟸ مجال ق هو ح − {١}

٣) أصفار المقام: $س^{٢}$ − ٩ = ٠ ⟸ س = ± ٣ ⟸ مجال ق هو ح − {−٣ ، ٣}

مثال

حدد مجال كل من الاقترانات التالية:

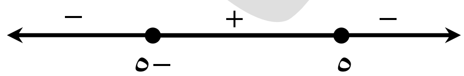
١) $ق(س) = \frac{\sqrt{س}}{س - ١}$ ٢) $ق(س) = \frac{٢س}{\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}$ ٣) $ق(س) = \frac{\sqrt{٤ - س}}{س^{٢} + ٩}$

الحل:

١) س − ١ = ٠ ⟸ س = ١ و س ≥ ٠ ، ⟸ ∴ مجال ق(س) هو [٠ ، ∞) − {١}

٢) ٢٥ − $س^{٢}$ > ٠، نفرض أن ل(س) = ٢٥ − $س^{٢}$ = ٠

⟸ س = ±٥ ∴ مجال ق = (−٥ ، ٥).



٣) ٤ − س ≥ ٠ ⟸ س ≤ ٤ .

$س^{٢}$ + ٩ = ٠ ⟸ $س^{٢}$ = −٩ .

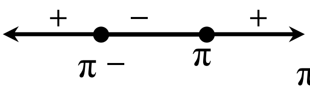
لا يوجد أصفار مقام .

∴ مجال ق = (−∞ ، ٤].

٤) ق(س) = $\sqrt{\frac{س - \pi}{س + \pi}}$ ، ندرس الإشارة

س − π = ٠ ← س = π

س + π = ٠ ← س = −π



∴ مجال ق(س) = $(-\infty, -\pi) \cup (\pi, \infty)$

د) الاقتران المتشعب:

هو الاقتران المعرف بأكثر من قاعدة كما في الامثلة التالية:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}+١ & ، \text{س} < ١ \\ ٢ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{٤-\text{س}} & ، \text{س} < ٤ \\ ٦\text{س} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{جا}\pi\text{س} & ، \text{س} \leq ٣ \\ \frac{١}{\text{س}-٢} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}-١ & ، -١ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٤ & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢}+٣ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

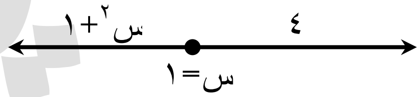
ملاحظة: دائما يمكن تمثيل الاقتران المتشعب على خط الأعداد.

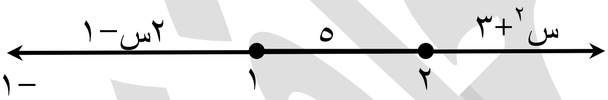
مثال

مثل الاقترانات التالية على خط الأعداد:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}+١ & ، \text{س} < ١ \\ ٤ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}-١ & ، -١ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٥ & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢}+٣ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$





ملاحظة: لإيجاد صورة عدد في الاقتران المتشعب، نحدد الفترة التي يقع فيها العدد ثم نعوضه في القاعدة المقابلة:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}+٢ & ، \text{س} < ١ \\ ٣-\text{س} & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

$\text{ق}(٠) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢$

$\text{ق}(١) = ٣ - ١ = ٢$

$\text{ق}(٤) = ٣ - ٤ = -١$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} & ، \text{س} < ١ \\ \text{س}+٣ & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ \frac{٢}{\text{س}-١} & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

$\text{ق}(٠) = \sqrt{٠} = ٠$

$\text{ق}(١) = ١+٣ = ٤$

$\text{ق}(٢) = \frac{٢}{٢-١} = ٢$

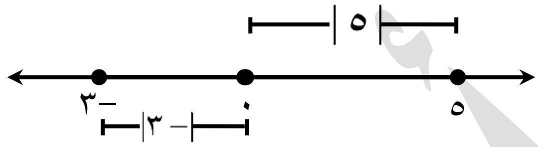
$\text{ق}(٣) = \frac{٢}{٣-١} = ١$

◘ اقتران القيمة المطلقة: ق(س) = |هـ(س)|

القيمة المطلقة للعدد هي القيمة الموجبة لذلك العدد:

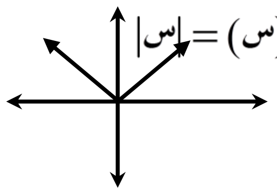
|−٣| = ٣ |٥| = ٥ |٠| = ٠ |٢ − π| = π − ٢

وهي تعني بعد العدد عن الصفر على خط الأعداد:



نلاحظ أن |س| ≥ ٠ وأن:

ق(س) = |س|



وبشكل عام

- |س| = { −س ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }
- |ق(س)| = { ق(س) ، ق(س) ≥ ٠ ؛ −ق(س) ، ق(س) < ٠ }

*** لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة نتبع ما يلي:**

١) نساوي ما داخل المطلق بالصفر. (أي نضع ق(س)=٠) ثم نجد أصفار الاقتران

٢) نعين الأصفار على خط الأعداد وندرس إشارة الاقتران.

٣) في الفترات الموجبة نأخذ القاعدة الموجبة (ق(س)).

وفي الفترات السالبة نأخذ القاعدة السالبة (− ق(س)).

مثال

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = |س + ١| ٢) ق(س) = |٤ − ٢س|

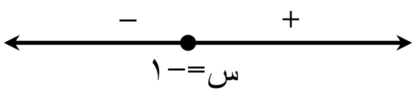
٣) ق(س) = |س^{٢} − ٩| ٤) ق(س) = |س^{٣} − ٢س^{٢}|

٥) ق(س) = |جاس| ، س ∈ [٠ ، ٢π]   ٦) ق(س) = |س + ١| + ٣|س − ٢|

الحل:

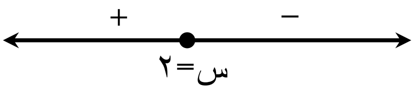
١) س + ١ = ٠ ← س = −١

ق(س) = { −(س + ١) ، س < −١ ؛ س + ١ ، س ≥ −١ }



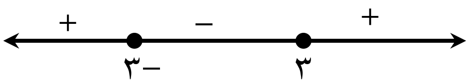
٢) $٤ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٢$

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ - ٢س &، \quad س < ٢ \\ ٢س - ٤ &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$



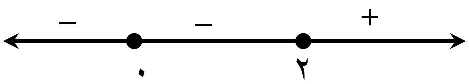
٣) $س^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow س = \pm ٣$

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٩ &، \quad س < -٢ \\ ٩ - س^{٢} &، \quad -٣ \leq س < ٣ \\ س^{٢} - ٩ &، \quad س \geq ٣ \end{cases}$$



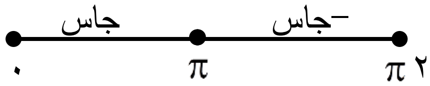
٤) $س^{٣} - ٢س^{٢} = ٠ \Leftarrow س^{٢}(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٢$

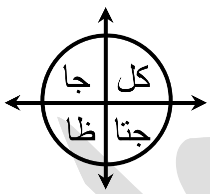
$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - س^{٣} &، \quad س < ٢ \\ س^{٣} - ٢س^{٢} &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$



٥) $جاس = ٠$

$$ق(س) = \begin{cases} جاس &، \quad ٠ \leq س < \pi \\ -جاس &، \quad \pi \leq س \leq ٢\pi \end{cases}$$



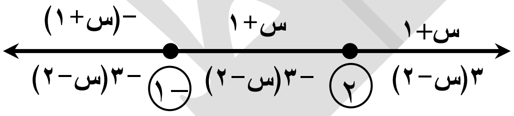


٦) $ق(س) = |س + ١| + ٣|س - ٢|$

$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$$ق(س) = \begin{cases} -٤س + ٥ &، \quad س < -١ \\ -٢س + ٧ &، \quad -١ \leq س < ٢ \\ ٤س - ٥ &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$



*** نلاحظ أنه عند إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة يصبح اقتران متشعب.**

تدريب

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = |٢س - ١|$

٢) $ق(س) = |١٢ - ٣س|$

٣) ق(س) = |١٦ − س^{٢}|

٤) ق(س) = |س^{٣} − ٤س|

٥) ق(س) = |جتاس| ، س ∈ [٠ ، π]

٦) ق(س) = ٢|س − ١| − |س + ٣| + ٤

*** خصائص اقتران القيمة المطلقة:**

١) $\sqrt{\text{ق}^{٢}(\text{س})}$ = |ق(س)|

مثال: * $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = |س| * $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}$ = $\sqrt{(\text{س} - ٢)^{٢}}$ = |س − ٢|

* $\sqrt{٩\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١}$ = $\sqrt{(٣\text{س} - ١)^{٢}}$ = |٣س − ١| * $\sqrt{١ - \text{جتا}٢\text{س}}$ = $\sqrt{٢\text{جا}^{٢}\text{س}}$ = $\sqrt{٢}$ |جاس|

تدريب

اكتب ما يلي بدلالة القيمة المطلقة

١) $\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١}$ ٢) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$

٣) $\sqrt{٢٥ - ١٠\text{س} + \text{س}^{٢}}$ ٤) $\sqrt{١ + \text{جتا}٢\text{س}}$

---

٢) |ق(س)| = ق(س) ، (ق(س) ≥ ٠)

مثال: * |س^{٢}| = س^{٢} * |س^{٢} + ١| = س^{٢} + ١   * |س^{٤}| = س^{٤}

٣) |ق(س)| = أ ⇐ ق(س) = ± أ

|ق(س)| ≤ أ ⇐ − أ ≤ ق(س) ≤ أ

|ق(س)| ≥ أ ⇐ ق(س) ≥ أ أو ق(س) ≤ − أ

مثال

حل كل من المعادلات والمتباينات التالية:

١) |س − ١| = ٢

الحل: س − ١ = ٢ ⇐ س = ٣

أو س − ١ = −٢

⇐ س = −١

٤) |٢س + ١| = |٤ − س|

الحل: ٢س + ١ = ± (٤ − س)

٢س + ١ = ٤ − س ← ٣س = ٣ ⇐ س = ١

٢س + ١ = −(٤ − س) ⇐ س = −٥

٣) |٤ − ٢س| > ٦

الحل: ٤ − ٢س > ٦ ، ٤ − ٢س < −٦

٢س < −٢ أو ٢س > ١٠

س < −١ أو س > ٥

٢) |٢س + ٣| ≤ ٥

الحل: −٥ ≤ ٢س + ٣ ≤ ٥

−٨ ≤ ٢س ≤ ٢

−٤ ≤ س ≤ ١

تدريب

أوجد حل كل من المعادلات والمتباينات التالية:

١) $|\text{س}^{٢} - ١| = ٣$　　٢) $|٧ - ٢\text{س}| < ١$　　٣) $|٣\text{س} - ٥| \geq ٤$

٤) $|\text{أ} \times \text{ب}| = |\text{أ}|.|\text{ب}|$ ، $\left|\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right| = \dfrac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$

مثال: $\dfrac{|\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤|}{|\text{س} - ١|}$

الطريقة الأولى: $= \dfrac{|(\text{س}-١)(\text{س}-٤)|}{|\text{س}-١|} = \dfrac{|\cancel{(\text{س}-١)}|\,|(\text{س}-٤)|}{\cancel{|\text{س}-١|}} = |\text{س}-٤|$

الطريقة الثانية: $= \left|\dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{\text{س} - ١}\right| = \left|\dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}\,(\text{س}-٤)}{\cancel{\text{س}-١}}\right| = |\text{س}-٤|$

هـ) اقتران أكبر عدد صحيح:

$\text{ق}(\text{س}) = [\text{هـ}(\text{س})]$

صحيح العدد هو أول عدد صحيح أقل من أو يساوي ذلك العدد

فمثلا: [٢,٣] = ٢ ، [٤,٨] = ٤ ، [٥] = ٥

[−٤] = −٤ ، [−٣,٢] = −٣ ، [−٥,٢] = −٦

أيضًا: $[\pi] = ٣$ ، $[\sqrt{٥}] = ٢$

نلاحظ أن: إذا كان س عدد صحيح فإن [س] = س

إذا كان س عدد صحيح موجب فإن [س] = |س|

*** لإعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح نتبع الخطوات التالية:**

١) نجد طول الدرجة : $\text{ل} = \dfrac{١}{|\text{أ}|}$

٢) نجد نقطة الارتكاز : $\text{أس} + \text{ب} = ٠ \leftarrow \text{س} = \dfrac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

٣) إذا كان معامل س (+) المساواة مع بداية الفترة والاقتران متزايد.

إذا كان معامل س(−) المساواة مع نهاية الفترة والاقتران متناقص.

مثال

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

١) $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}]$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٣]$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right]$ ، $١ \leq \text{س} < ٥$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = [٣ - \text{س}]$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٢)$

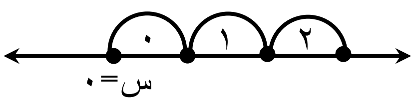
٤) $\text{ق}(\text{س}) = \left[٢ - \frac{١}{٣}\text{س}\right]$ ، $١ \leq \text{س} < ٧$

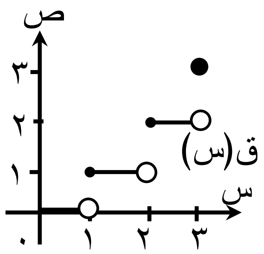
٥) $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س} - ٢,١]$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٢)$

الحل:

١) ل = ١ ، س = ٠

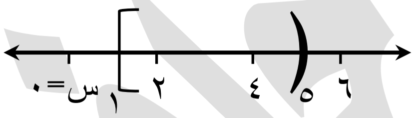
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ١ & ، \quad ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ & ، \quad ٢ \leq \text{س} < ٣ \\ ٣ & ، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$





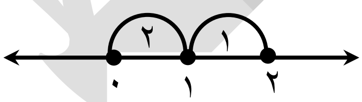
٢) ل = $\frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|}$ = ٢ ، س = ٠

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، \quad ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ & ، \quad ٢ \leq \text{س} < ٤ \\ ٣ & ، \quad ٤ \leq \text{س} < ٥ \end{cases}$$



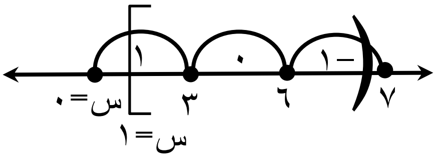
٣) ل = $\frac{١}{|-١|}$ = ١ ، س = ٠

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ & ، \quad \text{س} = ٠ \\ ٢ & ، \quad ٠ < \text{س} \leq ١ \\ ١ & ، \quad ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$



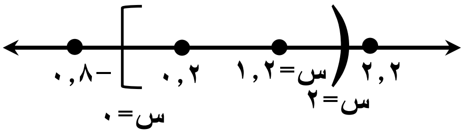
٤) ل = $\frac{١}{\left|-\frac{١}{٣}\right|}$ = ٣ ، س = ٠

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٠ & ، \quad ٣ < \text{س} \leq ٦ \\ -١ & ، \quad ٦ < \text{س} < ٧ \end{cases}$$



٥) ل = $\frac{١}{|١|}$ = ١

الارتكاز س−١,٢ = ٠ ، س=١,٢



$$ق(س) = \begin{cases} −٢ & ، \ ٠ \le س < ٠,٢ \\ −١ & ، \ ٠,٢ \le س < ١,٢ \\ ٠ & ، \ ١,٢ \le س < ٢ \end{cases}$$

نلاحظ انه عند إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح يصبح اقتران متشعب.

تدريب

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = [س+١] ، س ∈ [١ ، ٤]

٢) ق(س) = $\left[\frac{١}{٣}س + ٢\right]$ ، س ∈ [٠ ، ٨)

٣) ق(س) = [٢س+١] ، س ∈ [١ ، ٣]

٤) ق(س) = [٥ − س] ، س ∈ [١ ، ٤]

٥) ق(س) = $\left[٦ − \frac{١}{٢}س\right]$ ، س ∈ [٠ ، ٥)

*** خصائص اقتران أكبر عدد صحيح:**

١) إذا كانت أ ∈ ص فإن [س + أ] = [س] + أ

فمثلاً: [س+٢] = [س] + ٢ ، [٣س+١] = [٣س] + ١

لكن : [س + ١,٤] ≠ [س] + ١,٤ ، [٥ − س] ≠ ٥ − [س] ، $\left[\frac{١}{س}\right] \ne \frac{١}{[س]}$

٢) إذا كانت أ ∈ ص فإن [س] = أ ⟸ أ ≤ س < أ + ١

فمثلاً: [س] = ٢ ⟸ ٢ ≤ س < ٣

[٢س+١] = ٥ ⟸ ٥ ≤ ٢س + ١ < ٦

٢ ≤ س < ٢,٥

[٢ − ٣س] = ٤ ⟸ ٤ ≤ ٢ − ٣س < ٥

−١ ≤ س < $-\frac{٢}{٣}$

---

٥ < [س+١] < ٧ ⟸ [س+١] = ٦ ⟵ ٥ ≤ س < ٦

٣ ≤ [س+٢] < ٤ ⟸ [س+٢] = ٣ ⟵ ١ ≤ س < ٢

٣) نلاحظ أنه إذا كان س عدد صحيح فإن [س] = س

إذا كان [س] = |س| فإن س عدد صحيح موجب.

أي أنه [س] = س ⟸ س ∈ ص

[س] = | س | ⇐ س ∈ ص$^+$

- **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح عند نقطة.**

اقتران القيمة المطلقة

ع(س) = |هـ(س)| عندما س = أ

* نعوّض العدد، أي نجد هـ(أ)

هـ(أ) > ٠ نختار القاعدة الموجبة (هـ(س))

هـ(أ) < ٠ نختار القاعدة السالبة (−هـ(س))

هـ(أ) = ٠ نعيد التعريف حول العدد أ

مثال

أعد تعريف الاقترانات التالية عند النقطة المبينة:

١) ق(س) = |٢س+١| عندما (س=١)

٢×١ + ١ = ٣ > ٠

⇐ ق(س) = ٢س + ١

٢) ق(س) = |س−٣| عندما (س=٢): ٢−٣=−١ < ٠

ق(س) = −(س − ٣) = ٣ − س

٣) ق(س) = |س^٢ − ٩| عندما (س= ٢ ، ٤)

عندما س=٢ : ق(س) = ٩ − س^٢

عندما س=٤ : ق(س) = س^٢ − ٩

٤) ق(س) = |٢س − ٦| عندما (س= ٣)

٢×٣ − ٦ = ٠ نعيد التعريف

$$\text{ع(س)} = \begin{cases} \text{٦} - \text{٢س} & \text{، س} < \text{٣} \\ \text{٢س} - \text{٦} & \text{، س} \geq \text{٣} \end{cases}$$

٥) ق(س)= |س−١| + |س+٢| عندما (س=٠)

= −(س−١) + س + ٢ = ٣

اقتران أكبر عدد صحيح

ع(س) = [هـ(س)] عندما س = أ

* نعوّض العدد، أي نجد هـ(أ)

هـ(أ) ∈ ص نعيد التعريف حول العدد أ

هـ(أ) ∉ ص ⇐ ع(س) = [هـ(أ)]

مثال

أعد تعريف الاقترانات التالية عند النقطة المبينة:

١) ق(س) = $\left[\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \text{٢}\right]$ عندما (س=١)

٢) ق(س) = [س+١] عندما (س=٢)

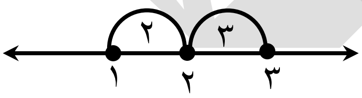
الحل:

١) $\frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٢} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٢}$ ∉ ص

∴ ق(س) = $\left[\frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٢}\right] = \text{٢}$

٢) ٢+ ١ =٣ ∈ ص ⇐ نعيد التعريف

ل = ١



$$\text{ع(س)} = \begin{cases} \text{٢} & \text{، ١} \leq \text{س} < \text{٢} \\ \text{٣} & \text{، ٢} \leq \text{س} < \text{٣} \end{cases}$$

تدريب

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية :

١) ق(س) = ٢ + | س − ١|

٢) هـ(س) = س. | س +٢ |

٣) ل(س) = | س^{٢} − ٤| + ٣س

٤) ص = | س^{٢} + ٥|

٥) ق(س) = | س^{٢} − ٦س| في الفترة [٤ ، ∞)

٦) ق(س) = $\frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س - ١}$ ، س ∈ (−∞ ، ٢) − {١}

٧) ق(س) = $\frac{|س - ٢|}{س - ٢}$ ، (س ≠ ٢)

٨) هـ(س) = $\sqrt{٤س^{٢} - ٤س + ١}$

٩) $ص = \begin{cases} |س - ١| & ، ٠ \le س < ٢ \\ س + ٤ & ، ٢ \le س \le ٦ \end{cases}$ ثم جد: ق(١) ، ق(٢) ، ق(٥)

١٠) ع(س) = ٣س + ٢ | س − ١| − | س |

تدريب

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية :

١) ق(س) = [س + ١] ، س ∈ (٠ ، ٢]

٢) ق(س) = [٢ − س] ، س ∈ [١ ، ٣]

٣) ق(س) = $\left[\frac{س}{٢} + ٣\right]$ ، س ∈ [٢ ، ٧)

٤) ق(س) = [٤ + س] − [س]

٥) ق(س) = [٤ − س] − [س] في الفترة [١ ، ٣]

٦) ق(س) = ٢س + [س] عندما (س=١)

٧) $ق(س) = س^{٢} . [س]$ عندما $(س = ٠)$

تدريب

أكتب ما يلي بدلالة القيمة المطلقة:

١) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} =$

٢) $\sqrt{س^{٣} - ٤س^{٢} + ٤س} =$

٣) $\sqrt{٩س^{٢} - ٦س + ١} =$

تدريب

أوجد مجموعة الحل في كل مما يلي:

١) $|٢س - ١| = ٥$

٢) $|٤ - ٣س| < ٢$

٣) $|٢س + ٥| \geq ٧$

٤) $[١ - س] = ٢$

٥) $٢ < [س + ١] < ٤$

ز) الاقتران الأسي:

هو الاقتران الذي يكون على الصورة

$ق(س) = أ^{هـ(س)}$ ، أ ثابت $(أ > ٠ ، أ \neq ١)$

مثال

$ق(س) = (٢)^{س}$ ، أوجد $ق(-١)$ ، $ق(٠)$ ، $ق(٣)$

الحل:

$ق(-١) = (٢)^{-١} = \frac{١}{٢}$

$ق(٠) = (٢)^{٠} = ١$

$ق(٣) = (٢)^{٣} = ٨$

مثال

$ق(س) = ٤^{٢س+١}$

الحل:

$ق(٠) = ٤$

$ق(١) = ٤^{٣} = ٦٤$

$ق(-٢) = ٤^{-٣} = \frac{١}{٦٤}$

ملاحظة: إذا كانت $أ \neq ٠$ فإن $أ^{٠} = ١$ لأي عدد حقيقي أ .

مثال

ق(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ ، أوجد ق(−٢) ، ق(٠) ، ق(١)

الحل:

ق(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س} = ٣^{-س}$

ق(−٢) = $(٣)^{٢} = ٩$

ق(٠) = $(٣)^{٠} = ١$

ق(١) = $(٣)^{-١} = \frac{١}{٣}$

مثال

ق(س) = $٥^{س^{٢}+س}$

الحل:

ق(٠) = $٥^{٠} = ١$

ق(١) = $٥^{٢} = ٢٥$

ع) الاقترانات المثلثية:

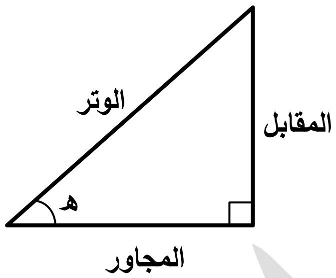
• **النسب المثلثية:**

* جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ⇐ قتاهـ = $\frac{١}{\text{جاهـ}}$

* جتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ⇐ قاهـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$

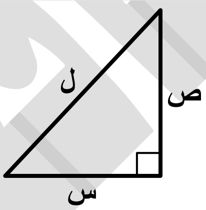
* ظاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ⇐ ظتاهـ = $\frac{١}{\text{ظاهـ}}$

*ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$



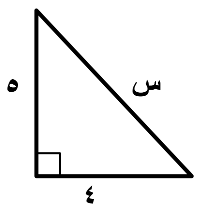
• **قانون فيثاغورس:**

$$\boxed{ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}}$$



مثال

في الشكل المجاور أوجد طول وتر المثلث:

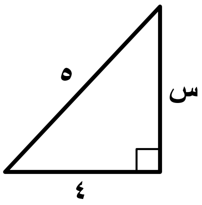


الحل:

$س^{٢} = ٢٥ + ١٦ = ٤١$ ⇐ $س = \sqrt{٤١}$

مثال

أوجد الضلع س في المثلث المجاور:



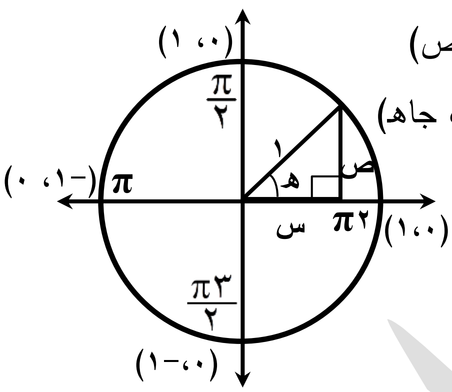
الحل:

س^{٢} + ١٦ = ٢٥ ⇐ س^{٢} = ٩ ⇐ س = ٣

- **دائرة الوحدة:**

هي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة واحدة :

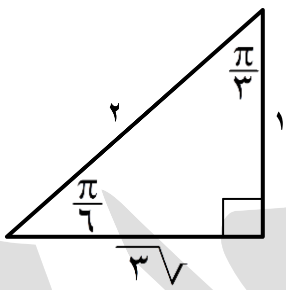
(س، ص) = (جتاهـ، جاهـ)

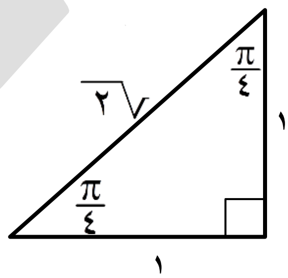


$\boxed{\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١}$

$\boxed{-١ \leq \text{جاهـ} \leq ١}$

$\boxed{-١ \leq \text{جتاهـ} \leq ١}$





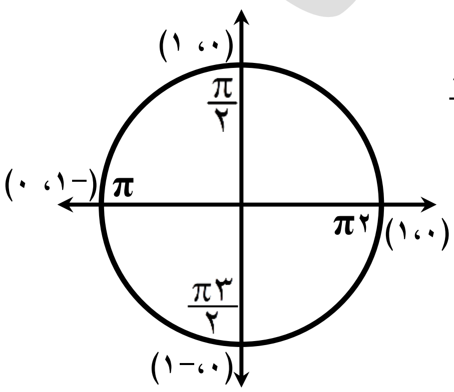
مثال

باستخدام دائرة الوحدة جد ما يلي:

١) جا$\frac{\pi}{2}$ ٢) جتاπ

٣) س حيث جاس = -١ ٤) س حيث جتاس = ٠

الحل:



١) لإيجاد جا$\frac{\pi}{2}$ من دائرة الوحدة، ننظر إلى الإحداثي الصادي للزاوية $\frac{\pi}{2}$

∴ جا$\frac{\pi}{2}$ = ١

٢) جتاπ = -١

٣) نحدد أين يكون الإحداثي الصادي = -١ ⇐ س = $\frac{3\pi}{2}$

٤) نحدد أين يكون الإحداثي السيني = صفر ⇐ س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

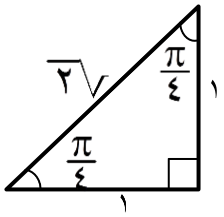
مثال

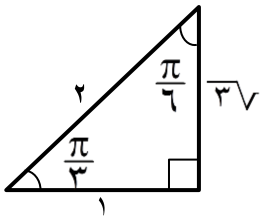
باستخدام المثلثين جد ما يلي:

١) ظا $\frac{\pi}{٤}$　　٢) جتا $\frac{\pi}{٦}$

٣) جا $\frac{\pi}{٣}$　　٤) س حيث جاس = $\frac{١}{٢}$

٥) س حيث ظاس = $\sqrt{٣}$　　٦) س حيث جتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$





الحل:

١) ظا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{١}$ = ١　　٢) جتا $\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$　　٣) جا $\frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

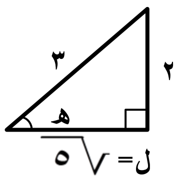
٤) س : جاس = $\frac{١}{٢}$ ، لنبحث عن زاوية الضلع المقابل لها = ١ والوتر = ٢ ⇐ س = $\frac{\pi}{٦}$

٥) س : ظاس = $\sqrt{٣}$ ، لنبحث عن زاوية الضلع المقابل لها = $\sqrt{٣}$ والمجاور = ١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٣}$

٦) س : جتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، لنبحث عن زاوية الضلع المجاور لها = ١ والوتر = $\sqrt{٢}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$

مثال

إذا كان جاهـ = $\frac{٢}{٣}$ ، أوجد جتاهـ ، ظاهـ :



الحل:

ل^٢ + (٢)^٢ = (٣)^٢

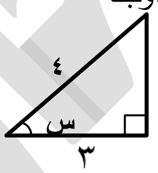
⇐ ل = $\sqrt{٥}$

جتاهـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

ظاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

مثال

إذا كان جتاس = $\frac{٣}{٤}$ أوجد جاس، ظاس. $\sqrt{٧}$



الحل:

ل^٢ + (٣)^٢ = ١٦

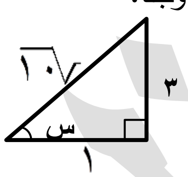
⇐ ل = $\sqrt{٧}$

جاس = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$

ظاس = $\frac{\sqrt{٧}}{٣}$

مثال

إذا كان ظاس =٣ أوجد: جاس ، جتاس



الحل:

ل^٢ = (٣)^٢ + (١)^٢

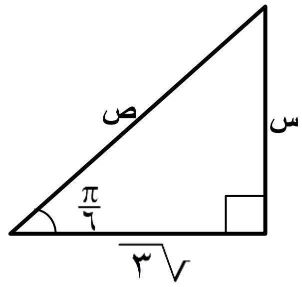
⇐ ل = $\sqrt{١٠}$

جاس = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

جتاس = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

ملاحظة: إذا علمت إحدى النسب المثلثية يمكن ايجاد النسب المثلثية الأخرى

مثال



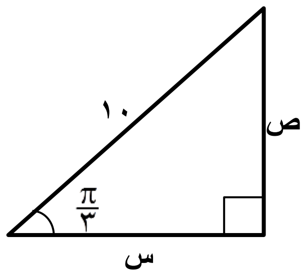
بالاعتماد على الشكل المجاور، أوجد أضلاع المثلث :

الحل:

$\text{ظا}\frac{\pi}{٦} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \Rightarrow \text{س} = ١$

$\text{ص} = \sqrt{١+٣} = \sqrt{٤} = ٢$

مثال



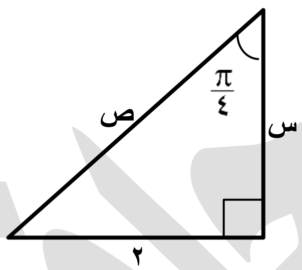
بالاعتماد على الشكل المجاور، أوجد أضلاع المثلث :

الحل:

$\text{جتا}\frac{\pi}{٣} = \frac{\text{س}}{١٠} = \frac{١}{٢} \Rightarrow \text{س} = ٥$

$\text{جا}\frac{\pi}{٣} = \frac{\text{ص}}{١٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Rightarrow \text{ص} = ٥\sqrt{٣}$

مثال



بالاعتماد على الشكل المجاور، أوجد أضلاع المثلث:

الحل:

$\text{ظا}\frac{\pi}{٤} = \frac{٢}{\text{س}} = ١ \Rightarrow \text{س} = ٢$

$\text{ص}^٢ = (٢)^٢ + (٢)^٢ = ٨ \Rightarrow \text{ص} = ٢\sqrt{٢}$

هـ° : الزاوية مقاسة بالدرجات (التقدير الستيني)

$\text{هـ}^{ء}$: الزاوية مقاسة بالراديات (وهو طول القوس المقابل للزاوية في دائرة الوحدة): (التقدير الدائري).

حيث $\text{هـ}^{ء} = \text{هـ}^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

مثال

حول الزوايا التالية من التقدير الستيني (مقاسة بالدرجات) إلى التقدير الدائري (مقاسة بالراديات):

١) $٢^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ٢^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٩٠}$

٢) $٣٠^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ٣٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٦}$

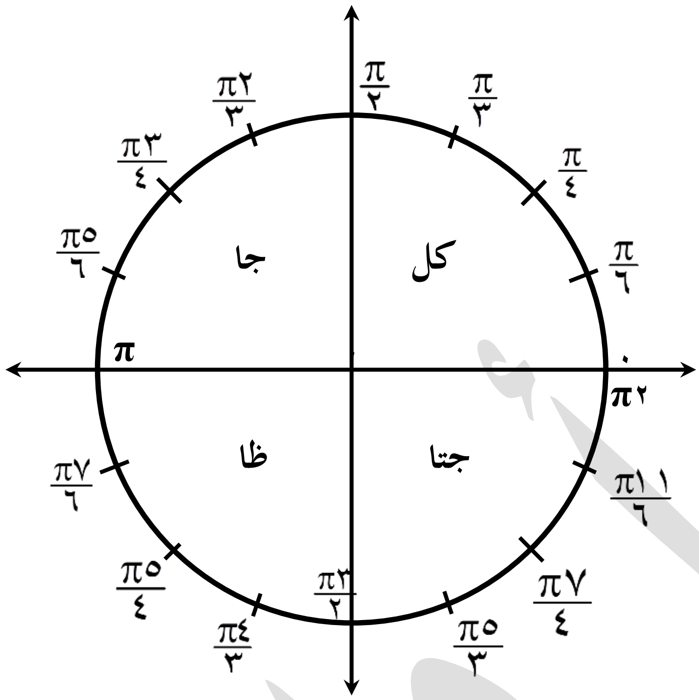
٣) $٤٥^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ٤٥^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٤}$

٤) $٦٠^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ٦٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٣}$

٥) $٩٠^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ٩٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٢}$

٦) $١٨٠^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ١٨٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \pi$

٧) $٢٧٠^{\circ} \Rightarrow \text{هـ}^{ء} = ٢٧٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{٣\pi}{٢}$



مثال

حل المعادلات المثلثية التالية:

١) ٢جاس − ١ = ٠ ، س ∈ [٠، π]

٢) جاس = جتاس ، س ∈ [٠، ٣π/٢]

٣) جاس = جا٢س ، س ∈ [٠، π]

٤) ٢جا²س = ١ ، س ∈ [π/٢، ٣π/٢]

٥) ١ + جتاس − ٢جا²س = ٠ ، س ∈ [٠، π]

الحل:

١) ٢جاس − ١ = ٠ ⟸ جاس = ١/٢

الزاوية الأساسية س = π/٦ في الربع الأول

اقتران الجيب موجب أيضًا في الربع الثاني ⟸ س = ٥π/٦

٢) جاس = جتاس (بالقسمة على جتـاس)

ظاس = ١ ⟸ س = π/٤ ، ٥π/٤

٣) جاس = جا٢س $\Leftarrow$ جاس = ٢جاس جتاس

٢جاس جتاس − جاس = ٠

جاس(٢جتاس − ١) = ٠

جاس = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠ ، π

جتاس = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٣}$

---

٤) ٢جا^{٢}س = ١ $\Leftarrow$ جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ جاس = $\pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow$ س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

---

٥) ١+جتاس − ٢جا^{٢}س = ٠ $\Leftarrow$ ١+جتاس − ٢(١ − جتا^{٢}س) = ٠

٢جتا^{٢}س + جتاس − ١ = ٠ $\Leftarrow$ (٢جتاس − ١)(جتاس + ١) = ٠

جتاس = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٣}$

جتاس = −١ $\Leftarrow$ س = π

تدريب

حل كل من المعادلات المثلثية التالية:

١) قا^{٢}س = ٢ ، س $\in$ [٠ ، π]

٢) جاس − $\sqrt{٣}$ جتاس = ٠ ، س $\in$ $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right)$

٣) جا٢س = جتاس ، س $\in$ [٠ ، ٢π]

٤) جا^{٢}س + ٢جتا^{٢}س = ٤

٥) جا^{٢}س = ٢جاس + ٣ ، س $\in$ [٠ ، π]

٦) ٢جتا٢س + ٢جا^{٢}س = جتاس ، س $\in$ [٠ ، ٢π]

٧) جتا^{٢}س + جاس = −١ ، س $\in$ [π ، ٢π]

مثال

جد قيمة كل مما يلي:

١) جا($\frac{٢\pi}{٣}$) ٢) جتا($\frac{٧\pi}{٦}$) ٣) ظا($\frac{٣\pi}{٤}$)

الحل:

١) الزاوية الأساسية (الزاوية في الربع الأول) = $\frac{\pi}{٣}$

جا($\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الزاوية ($\frac{٢\pi}{٣}$) تقع في الربع الثاني والجيب في الربع الثاني موجب

$\therefore$ جا$(\frac{٢\pi}{٣}) = + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

---

٢) الزاوية الأساسية = $\frac{\pi}{٦}$

جتا$(\frac{\pi}{٦}) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الزاوية ($\frac{٧\pi}{٦}$) تقع في الربع الثالث وجيب التمام في الربع الثالث سالب.

$\therefore$ جتا$(\frac{٧\pi}{٦}) = - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

---

٣) الزاوية الأساسية = $\frac{\pi}{٤}$

ظا$(\frac{\pi}{٤}) = ١$

الزاوية ($\frac{٣\pi}{٤}$) تقع في الربع الثاني والظل في الربع الثاني سالب.

$\therefore$ ظا$(\frac{٣\pi}{٤}) = -١$

ملاحظة

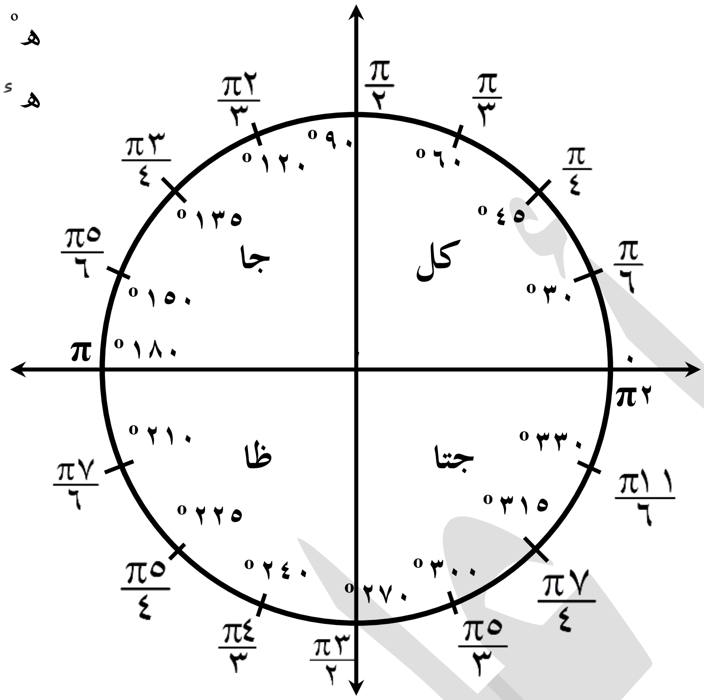
- **مجال ق(س) = جـاس ، ق(س) = جـتاس هو ح**
- **مجال ق(س) = ظـاس، ق(س) = قـاس هو ح – { $\frac{ن\pi}{٢}$: ن عدد فردي}**
- **مجال ق(س) = ظـتاس ، ق(س) = قـتاس هو ح – { $ن\pi$: ن عدد صحيح}**

المتطابقات المثلثية

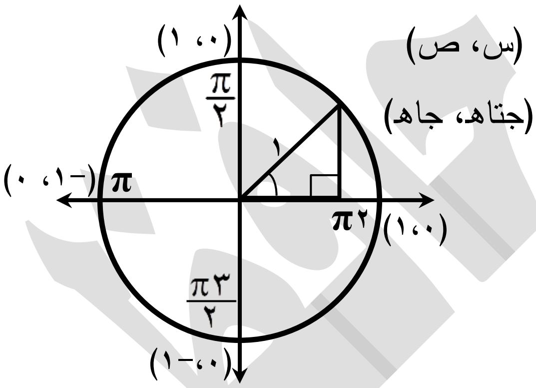
- **دائرة الوحدة:** هي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة واحدة

ه° : الزاوية مقاسة بالدرجات

ه ء : الزاوية مقاسة بالراديات

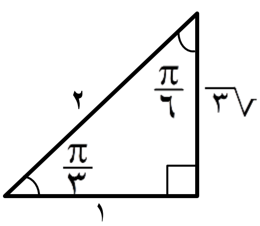


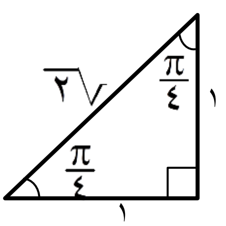
* للتحويل من درجة إلى راديان: ه ء = ه° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$



ه°	٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
ه ء	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{\pi٣}{٢}$	$\pi٢$
جا ه	٠	١	٠	١-	٠
جتا ه	١	٠	١-	٠	١
ظا ه	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

ه°	٣٠°	٤٥°	٦٠°
ه ء	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$
جا ه	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا ه	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$
ظا ه	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$





- **متطابقات فيثاغورس:**

جا² هـ + جتا² هـ = ١ / ١ + ظا² هـ = قا² هـ / ١ + ظتا² هـ = قتا² هـ

- **متطابقات ضعف الزاوية (٢س):**

جا٢س = ٢جاس جتاس / جتا٢س = ٢جتا² س − ١

= ١ − ٢جا² س

= جتا² س − جا² س

- **متطابقات نصف الزاوية $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$:**

١ − جتاس = ٢جا² $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$ / ١ + جتاس = ٢جتا² $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

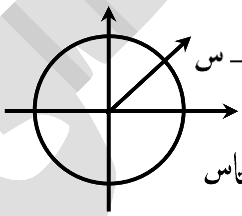
- **متطابقات مجموع زاويتين (س ± ص)**

جا(س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص / جتا(س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص

ظا(س ± ص) = $\frac{\text{ظاس} \pm \text{ظاص}}{١ \mp \text{ظاس ظاص}}$

- **متطابقات المتممة والمكملة:**

* **المتممة:** $\frac{\pi}{٢}$ − س

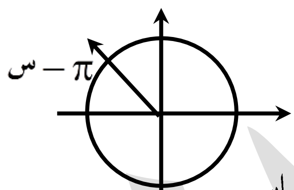


جا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = جتاس

جتا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = جاس

ظا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = ظتاس

* **المكملة:**



جا(π − س) = جاس

جتا(π − س) = − جتاس

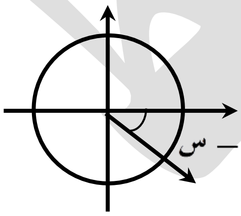
ظا(π − س) = − ظاس

- **متطابقات سالب الزاوية (-س):**

جا(−س) = − جاس

جتا(−س) = جتاس

ظا(−س) = − ظاس



- **متطابقات مجموع/ الفرق بين مثلثين:**

جاس − جاص = ٢جتا$\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)$ جا$\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$ / جتاس − جتاص = −٢جا$\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)$ جا$\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$

جاس + جاص = ٢جا$\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)$ جتا$\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$ / جتاس + جتاص = ٢جتا$\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)$ جتا$\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$

٥) نظرية الباقي ونظرية العامل:

أ) نظرية الباقي: باقي قسمة كثير الحدود ق(س) على كثير الحدود هـ(س)= س − أ يساوي ق(أ)

وبشكل عام، باقي قسمة كثير الحدود ق(س) على كثير الحدود هـ(س)= أس + ب يساوي ق($\frac{-ب}{أ}$)

ب) نظرية العامل: (س − أ) عامل من عوامل كثير الحدود ق(س) إذا وفقط إذا كان ق(أ)= صفر

أي أن ق(س) يقبل القسمة على (س − أ) بدون باقي.

مثال

ق(س) = ٣س^{٢} − ٨س + ٩

هـ(س) = س − ٢، جد باقي قسمة ق على هـ.

الحل:

حسب نظرية الباقي: باقي القسمة = ق(٢) = ٥

مثال

بيّن أن ل(س) = س − ١ من عوامل الاقتران ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + ١

الحل:

ق(١) = صفر ∴ ل(س) من عوامل ق(س) حسب نظرية العامل.

مثال

إذا كان ل(س) = س − ١ من عوامل ق(س) = س^{٤} − ٣س^{٢} + أس − ٦. جد قيمة أ.

الحل:

ق(١) = صفر ⇐ ١ − ٣ + أ − ٦ = ٠ ⇐ أ = ٨

مثال

إذا كان باقي قسمة ق(س) = أس^{٢} + (أ+١) س + ٣ على هـ(س)= س − ٢ يساوي ٩ . جد أ

الحل:

حسب نظرية الباقي: ق(٢) = ٩ ⇐ ٤أ + ٢أ + ٢ + ٣ = ٩ ⇐ أ = $\frac{٢}{٣}$

٦) تحليل المقادير الجبرية:

١) أخذ عامل مشترك:

مثال: * ٢س − ٤ = ٢(س − ٢)

* س^{٢} − ٣س = س(س − ٣)
* ٢س^{٣} + ٦س = ٢س(س^{٢}+٣)
* ١٢س^{٢} − ٨س^{٣} = ٤س^{٢}(٣ − ٢س)

مثال: * ٣$^{س+١}$ − ٣ = ٣ . ٣^{س} − ٣ = ٣(٣^{س} − ١)

* ٢٥^{س} − ٥^{س} = (٥^{٢})^{س} − ٥^{س} = (٥^{س})^{٢} − ٥^{س} = ٥^{س} (٥^{س} −١)

---

٢) تحليل المربع الكامل:

$\boxed{\text{(أ+ب)}^{٢} = \text{أ}^{٢} + ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}}$

مثال: (س+١)^{٢} = س^{٢} + ٢س + ١

(٢س − ٣)^{٢}= ٤س^{٢} − ١٢س + ٩

٣) الفرق بين مربعين:	٤) مجموع مربعين:
أ^{٢} − ب^{٢} = (أ − ب) (أ + ب) • س^{٢} − ١= (س − ١) (س + ١) • س^{٢} − ١٦= (س − ٤) (س + ٤) • ٤س^{٢} − ٩= (٢س − ٣) (٢س + ٣)	أ^{٢} + ب^{٢} لا يحلل • (س^{٢} + ١) لا يحلل • (س^{٢} + ١٦) لا يحلل • (٤س^{٢} + ٩) لا يحلل
• (٢س+١)^{٢} − ٢٥= (٢س + ١ −٥) (٢س + ١+٥) = (٢س − ٤) (٢س + ٦)	• ((٢س + ١)^{٢} + ٢٥) لا يحلل
• ٩ − (٢س −١)^{٢} = (٣− (٢س−١)) (٣+(٢س− ١)) = (٤ − ٢س) (٢س + ٢)	• (٩ + (٢س − ١)^{٢}) لا يحلل
• (س^{٢}+١)^{٢}−٢٥= (س^{٢}+١−٥) (س^{٢}+١+٥) = (س^{٢} − ٤) (س^{٢} + ٦) = (س−٢) (س+٢) (س^{٢}+٦) • ٩^{س} −١= (٣^{٢})^{س} − ١ =(٣^{س})^{٢} − ١=(٣^{س}+١)(٣^{س} −١)	• ((س^{٢} + ١)^{٢} + ٢٥) لا يحلل

٥) الفرق بين مكعبين:

أ^{٣} − ب^{٣} = (أ − ب) (أ^{٢} + أب + ب^{٢})

- س^{٣}−١ = (س−١) (س^{٢} + س + ١)
- ٨س^{٣} − ٢٧ = (٢س−٣) (٤س^{٢} +٦س + ٩)
- (٢س+١)^{٣} −٦٤ =
((٢س+١)−٨) ((٢س+١)^{٢} +٨(٢س+١) +٦٤)

٦) مجموع مكعبين:

أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب) (أ^{٢} − أب + ب^{٢})

- س^{٣} + ٨ = (س+٢) (س^{٢} − ٢س + ٤)
- ٢٧س^{٣} + ١ = (٣س+١) (٩س^{٢}−٣س+١)
- ١٢٥+ (٣س−٢)^{٣} =
((٥+(٣س−٢)) (٢٥−٥(٣س−٢)+(٣س−٢)^{٢})

- س^{٦} − ١ = (س^{٣}−١) (س^{٣}+١) = (س−١) (س^{٢}+س+١) (س+١) (س^{٢}−س+١)
= (س^{٢}−١) (س^{٤} + س^{٢} + ١) = (س−١) (س+١) (س^{٤}+ س^{٢} +١)

س^{ن} − ص^{ن} = (س − ص) (س$^{ن−١}$ + س$^{ن−٢}$ص + ... + س ص$^{ن−٢}$ + ص$^{ن−١}$)

مثال : * س^{ن} − ٢^{ن} = (س − ٢) (س$^{ن−١}$ + ٢س$^{ن−٢}$ + ... + (٢)$^{ن−٢}$ + (٢)$^{ن−١}$)

* س^{٦} − ١ = س^{٦} − ١^{٦} = (س − ١) (س^{٥} + س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س + ١)

* ص^{٥} − ٣٢ = ص^{٥} − (٢)^{٥} = (ص − ٢) (ص^{٤} + ٢ص^{٣} + ٤ص^{٢} + ٨ص + ١٦)

٧) تحليل العبارة التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ ؛ (أ ≠ ٠)

(١) إذا كانت (جـ = ٠) نحلل العبارة بإخراج عامل مشترك.

س^{٢} + ٢س = س (س + ٢)

٣س^{٢} − ٦س = ٣س (س − ٢)

(٢) إذا كانت (ب = ٠) فإن العبارة إما أن تكون:

فرق بين مربعين (جـ < ٠)

س^{٢} − ٤ = (س−٢) (س+٢)

٢س^{٢}−١٨ = ٢(س^{٢} − ٩)

= ٢ (س−٣) (س+٣)

أو

مجموع مربعين (جـ > ٠)

(س^{٢}+٤) لا تحلل

(٢س^{٢} + ١٨) لا تحلل

(٣) تحليل ثلاثي الحدود: أس^{٢} + ب س + جـ ؛ (أ ≠ ٠)

نجد حاصل ضرب أ × جـ ثم نحلل العدد الناتج.

ثم نستخدم تغيير الإشارات بحيث يكون ناتج جمع القريبين مع البعيدين = الحد الأوسط.

مثال

حلل العبارات التربيعية التالية:

١) س^{٢} + ٥س +٦ = (س+٢) (س+٣)

٢) س^{٢} − ٢س − ١٥ = (س−٥) (س+٣)

٣) س^{٢} − ٣س + ٢ = (س−٢) (س−١)

٤) ٢س^{٢} + ٥س −٣ = (٢س−١) (س+٣)

٥) ٣س^{٢} − س − ٢ = (س−١) (٣س+٢)

٦) ٥س^{٢} + ٢س − ٣ = (س+١) (٥س − ٣)

٧) ٦س^{٢} + س − ٢ = (٢س − ١) (٣س + ٢)

تدريب

حلل العبارات التربيعية التالية:

١) ٢س^{٢} + ٧س + ٣

٢) ٦س^{٢} + س − ٢

٣) ٣س^{٢} − ٢س − ٨

٤) س^{٢} − س − ١٢

وإذا لم تنطبق الطرق السابقة في حل المعادلة التربيعية نلجأ للمميز والقانون العام:

ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ؛ (أ $\neq$ ٠)

المميز Δ = ب^{٢} - ٤ أجـ

- المميز > ٠ ⟸ يوجد للمعادلة حلان مختلفان
- المميز = ٠ ⟸ يوجد للمعادلة حلان متساويان
- المميز < ٠ ⟸ لا يوجد للمعادلة حلول.

في حالة المميز $\geq$ ٠ نجد أصفار الاقتران باستخدام القانون العام:

$$\boxed{س_{١،٢} = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}}$$ حيث Δ = المميز

مثال

استخدم القانون العام لحل كل من المعادلات الآتية:

١) س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠   المميز = ٤ ⟸ س$_{١،٢}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{٤}}{٢}$ = ٣ ، ١

٢) س^{٢} − س − ٦ = ٠   المميز = ٢٥ ⟸ س$_{١،٢}$ = $\frac{١ \pm \sqrt{٢٥}}{٢}$ = ٣ ، −٢

٣) س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠   المميز = صفر ⟸ س$_{١،٢}$ = $\frac{٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$ = ٣

٤) س^{٢} + ٢س − ١ = ٠   المميز = ٨ ⟸ س$_{١،٢}$ = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٨}}{٢}$ = −١ ± $\sqrt{٢}$

٥) ٢س^{٢} − ٥س + ٣ = ٠   المميز = ١ ⟸ س$_{١،٢}$ = $\frac{٥ \pm ١}{٢ \times ٢}$ = ١ ، $\frac{٣}{٢}$

٨) تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فصاعداً :

حسب نظرية الأصفار النسبية فإن الأصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي عوامل الحد المطلق ونحصل على القوس الآخر باستخدام القسمة التركيبية

مثال

حل كل من المعادلات التالية:

١) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤

٢) ق(س) = س^{٤} + ٢س^{٣} + ٣س − ٦

٣) ق(س) = س^{٣} − ٥س^{٢} + ٨س − ٤

٤) ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٢} − ٣

الحل: ١) الأصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي: ±١ ، ±٢ ، ±٤

بالتجريب ق(−١) = ٠

∴ (س+١) من العوامل

ق(س) = (س+١) (س^{٢} − ٤س + ٤)

= (س+١) (س−٢)^{٢}

	س^{٣}	س^{٢}	س	ثابت
$\boxed{-١}$	١	−٣	٠	٤
		−١	٤	−٤
	١	−٤	٤	٠

٢) الأصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي: ±١ ، ±٢ ، ±٣ ، ±٦

بالتجريب ق(١) = ٠

∴ (س−١) من العوامل

ق(س) = (س−١) (س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ٦)

	س^{٤}	س^{٣}	س^{٢}	س	ثابت
$\boxed{١}$	١	٢	٠	٣	−٦
		١	٣	٣	٦
	١	٣	٣	٦	٠

٣) الأصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي: ±١ ، ±٢ ، ±٤

بالتجريب ق(٢) = ٠

∴ (س−٢) من العوامل

ق(س) = (س−٢) (س^{٢} − ٣س + ٢)

= (س−٢) (س−٢) (س−١)

= (س−٢)^{٢}(س−١)

	س^{٣}	س^{٢}	س	ثابت
$\boxed{٢}$	١	−٥	٨	−٤
		٢	−٦	٤
	١	−٣	٢	٠

٤) الأصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي: ±١ ، ±٣

بالتجريب ق(−١) = ٠

∴ (س+١) من العوامل

ق(س) = (س+١) (س^{٤} − س^{٣} + س^{٢} + ٣س − ٣)

	س^{٥}	س^{٤}	س^{٣}	س^{٢}	س	ثابت
$\boxed{−١}$	١	٠	٠	٤	٠	−٣
		−١	١	−١	−٣	٣
	١	−١	١	٣	−٣	٠

تدريب

حل كل من المعادلات التالية:

١) ق(س) = س^{٣} + ٢س − ١٢

٢) ق(س) = س^{٤} − ٨س^{٣} + ٢س − ٧

٣) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٦

٤) ق(س) = س^{٥} + ٣س + ٤

تدريب

حل كل من المعادلات التالية بطريقة المعادلة التربيعية، ثم جد قيم س:

١) س^{٤} − ١٤س^{٢} + ٤٥ = ٠

٢) س^{٦} − ٧س^{٣} − ٨ = ٠

٣) س^{٤} − ٣س^{٢} − ٤ = ٠

٤) س − ٤ $\sqrt{\text{س}}$ + ٣ = ٠

٥) (٤)$^{\text{س}}$ − ٣(٢)$^{\text{س}+٢}$ + ٣٢ = ٠

٦) −٢جا^{٢}س + جتاس + ١ = ٠

٧) حل نظام معادلات بالحذف أو التعويض

مثال

حل نظام كل من المعادلات التالية:

س + ٢ص = ٥

٣س − ص = ١

تدريب

حل نظام كل من المعادلات التالية:

٢أ + ٣ب = ٤

−أ + ب = ٣

الحل:

س + ٢ص = ٥ ⟸ س + ٢ص = ٥

(٣س − ص = ١) × ٢   ٦س − ٢ص = ٢   ⊕

٧س = ٧ ⟸ س = ١ ، ص = ٢

مثال

حل النظام المكون من ثلاث معادلات خطية

أ + ب + جـ = ٠

٢أ + ٣ب + ٢جـ = ٣

−أ + ٢ب − ٣جـ = −١

الحل:

نحذف جـ من المعادلتين الأولى والثانية

(أ + ب + جـ = ٠) ×٢   ٢أ + ٢ب + ٢جـ = ٠

٢أ + ٣ب + ٢جـ = ٣   ٢أ + ٣ب + ٢جـ = ٣   ⊖

−ب = ٣ ⟸ ب = −٣

الآن

أ + جـ = ٣

−أ − ٣جـ = ٥   ⊕

−٢جـ = ٨ ⟸ جـ = −٤ ، أ = ٧

تدريب

حلل النظام المكون من ثلاث معادلات خطية

٢س + ص − ع = ١

٥س − ٢ص + ٣ع = ٣

س = ص + ٢ع − ٤

- **حل نظام المعادلات غير خطية:**

مثال

حل نظام المعادلتين التاليتين:

س^{2} + ص^{2} = ٢٥

س − ص = ١

الحل:

س^{2} + ص^{2} = ٢٥	س − ص = ١	س^{2} + (س−١)^{2} = ٢٥
س − ص = ١	ص = س −١	س^{2} − س − ١٢ = ٠
		(س − ٤) (س + ٣) = ٠

⇐ س = ٤ ، −٣

⇐ عندما س = ٤ ⇐ ص = ٣

⇐ عندما س = −٣ ⇐ ص = −٤

⇐ هناك حلان: (٤ ، ٣) (−٣ ، −٤)

تدريب

حل نظام المعادلتين التاليتين:

س ص = ٢

س^{٢} + ص^{٢} = ٥

مثال

حل نظام المعادلتين التاليتين:

س^{٢} − ص^{٢} = ٥

س^{٢} + ٢ص^{٢} = ١٧

الحل:

(س^{٢} − ص^{٢} = ٥)×−١

س^{٢} + ٢ص^{٢} = ١٧

−س^{٢} + ص^{٢} = −٥

س^{٢} + ٢ص^{٢} = ١٧ ⊕

٣ص^{٢} = ١٢

ص^{٢} = ٤ ⇐ ص = ± ٢

⇐ عندما ص = ٢ ⇐ س = ±٣

⇐ عندما ص = −٢ ⇐ س = ±٣

⇐ هناك (٤) حلول : (−٣ ، −٢) (−٣ ، ٢) (٣ ، −٢) (٣ ، ٢)

تدريب

حل نظام المعادلتين التاليتين

$\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} = \frac{١}{٤}$

س ص = ٨

٨) المضاعف المشترك الأصغر:

لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو مقدارين جبريين نقوم بالتحليل ثم نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة بأصغر أُس.

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد	المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية
مثال: ٤ ، ٦ $\Leftarrow$ $٤ = \boxed{٢} \times ٢$ $٦ = \boxed{٢} \times ٣$ م.م.أ $= ٢ \times ٢ \times ٣ = ١٢$	مثال: $\text{س}^{٢} - ٤$ ، $\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ $\text{س}^{٢} - ٤ = \boxed{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)$ $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} = \text{س}\boxed{(\text{س} - ٢)}$ م.م.أ $= \text{س}\,(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)$
مثال: ٢، ٣، ٤ $\Leftarrow$ $٢ = \boxed{٢}$ $٣ = ٣$ $٤ = \boxed{٢} \times ٢$ م.م.أ $= ٢ \times ٣ \times ٢ = ١٢$	مثال: $\text{س}^{٢} - ١$ ، $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦$ $\text{س}^{٢} - ١ = \boxed{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ١)$ $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦ = \boxed{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ٦)$ م.م.أ $= \text{س}\,(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س} + ٦)$

• توحيد المقامات:

لتوحيد المقامات نأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامين كما في الامثلة التالية:

١) $$\frac{\text{س}+٣}{\text{س}+٢} + \frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٣} = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)+(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)} = \frac{٢\text{س}^{٢}-١٣}{\text{س}^{٢}-\text{س}-٦}$$

٢) $$\left(\frac{\text{س}^{٢}+١٢}{\text{س}^{٢}-٤} - \frac{\text{س}+٢}{\text{س}-٢}\right) = \frac{\text{س}^{٢}+١٢-(\text{س}+٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}$$

$$= \frac{٨-٤\text{س}}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)} = \frac{-٤}{(\text{س}+٢)}$$

$$\text{س}^{٢}-٤ = \boxed{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)$$
$$(\text{س}-٢) = \boxed{(\text{س}-٢)}$$
$$(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)$$

٣) $$\left(\frac{٢}{\text{س}-٥} - \frac{١٢}{\text{س}^{٢}-٤\text{س}-٥}\right) = \frac{٢(\text{س}+١)-١٢}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)} = \frac{٢}{(\text{س}+١)}$$

$$\text{س}-٥ = \boxed{\text{س}-٥}$$
$$\text{س}^{٢}-٤\text{س}-٥ = \boxed{(\text{س}-٥)}(\text{س}+١)$$
$$(\text{س}-٥)(\text{س}+١)$$

٩) خاصية التوزيع في حالة الجذور والكسور:

١) $\sqrt{أ+ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

٢) $\sqrt{أ \cdot ب} = \sqrt{أ} \cdot \sqrt{ب}$

٣) $\frac{أ+ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ}$

٤) $\frac{جـ}{أ+ب} \neq \frac{جـ}{أ} + \frac{جـ}{ب}$

٥) $\frac{أ\times ب}{جـ} = أ \times \frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} \times ب$

٦) $\frac{أ\times ب}{جـ^{٢}} = \frac{أ}{جـ} \times \frac{ب}{جـ}$

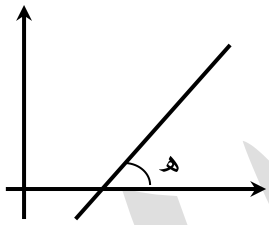
١٠) معادلة الخط المستقيم:

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ هي:

$ص - ص_١ = م\ (س - س_١)$

حيث م = الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

أيضا م = ظاهـ، حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



مثال

١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين: (−١ ، ٢) ، (١ ، ٦)

٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) وزاوية ميله تساوي ٤٥°

الحل:

١) نجد الميل $م = \frac{٦-٢}{١-(-١)} = \frac{٤}{٢} = ٢$

المعادلة : ص − ٢ = ٢(س+١)

$\Leftarrow$ ص = ٢س + ٤

٢) الميل م = ظا٤٥° = ١

المعادلة ص − ٣ = ١(س − ٢)

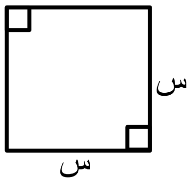
$\Leftarrow$ ص = س + ١

المساحات والحجوم

• مربع:

المحيط = ٤س

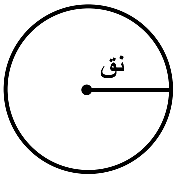
المساحة = س^{٢}



• الدائرة:

المحيط ل= ٢πنق

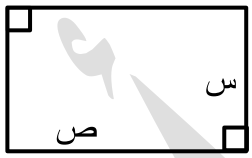
المساحة م= πنق^{٢}



• مستطيل:

المحيط = ٢ (س+ص)

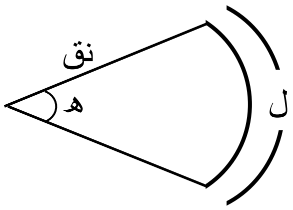
المساحة = س ص



• قطاع دائري:

ل = نق × هـ

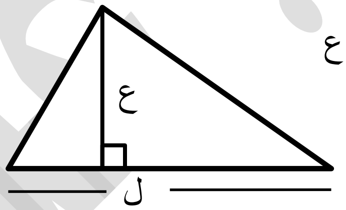
م = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ



• مثلث:

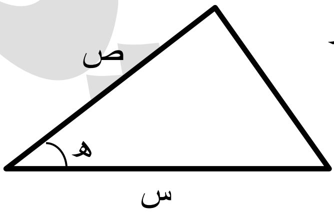
م = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ل × ع



م= نصف حاصل ضرب ضلعين×جيب الزاوية المحصورة بينهما

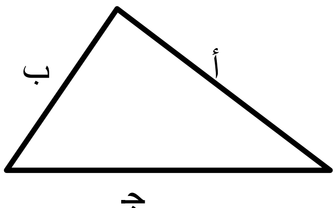
م = $\frac{١}{٢}$ س ص جا هـ



* مساحة المثلث بدلالة اطوال أضلاعه الثلاث

م = $\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-جـ)}$

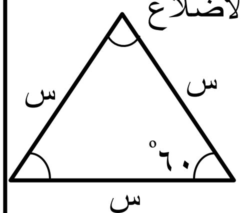
ح = $\frac{أ+ب+جـ}{٢}$



* مساحة المثلث المتساوي الاضلاع

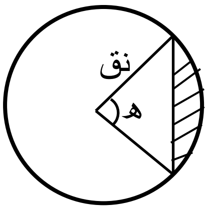
م = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (طول الضلع)^{٢}

م = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢}



• قطعة دائرية:

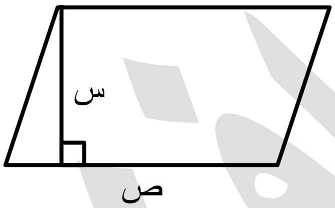
م = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ − جا هـ)



• متوازي الاضلاع:

م = القاعدة × الارتفاع

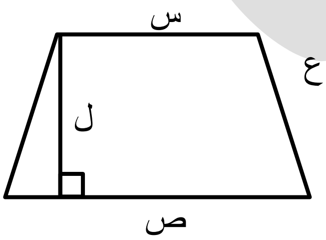
= س×ص



• شبه منحرف:

م = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع

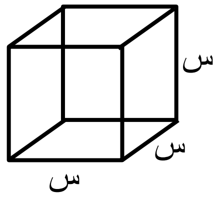
= $\frac{١}{٢}$ (س + ص) × ل



• المكعب:

المساحة السطحية = ٦س^{٢}

الحجم = س^{٣}



• المخروط:

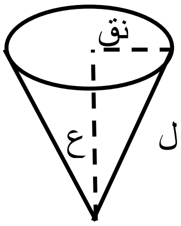
المساحة السطحية =

المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

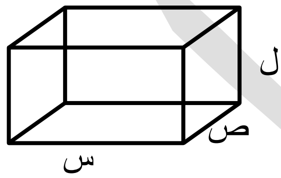
= π نق ل + π نق^{٢}

ل = $\sqrt{\text{نق}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

الحجم = $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ع



• متوازي المستطيلات:



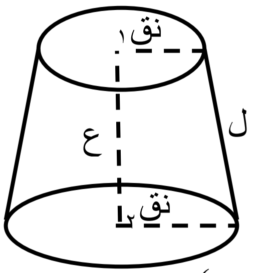
المساحة الكلية=

المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢(س + ص) ل + ٢س ص

الحجم = س × ص × ل

• المخروط الناقص:



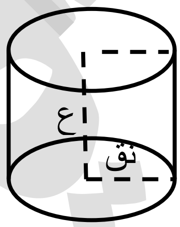
المساحة الجانبية:

م = π ل (نق$_{١}$+نق$_{٢}$)

الحجم:

ع = $\frac{\pi}{٣}$ ع (نق$_{١}^{٢}$ + نق$_{٢}^{٢}$ + نق$_{١}$ نق$_{٢}$)

• الاسطوانة:



المساحة السطحية=

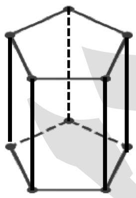
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢π نق ع + ٢π نق^{٢}

الحجم = π نق^{٢} ع

• المنشور:

هو مجسم له وجهان مضلعان متطابقان ومتوازيان، والأوجه الجانبية مستطيلات.

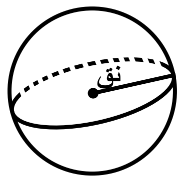


المساحة الجانبية=

م= محيط القاعدة × الارتفاع

الحجم: ح= مساحة القاعدة × الارتفاع

• الكرة:



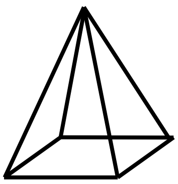
المساحة السطحية =

م = ٤π نق^{٢}

الحجم: ح = $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^{٣}

• الهرم:

هو مجسم قاعدته مضلع والأوجه الجانبية مثلثات.

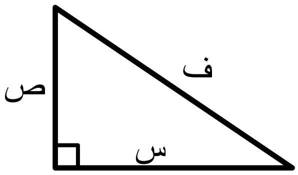


المساحة الجانبية

م= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

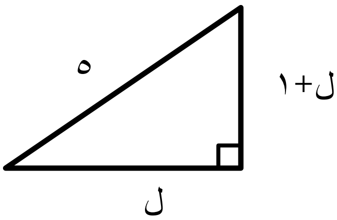
علاقات مساعدة



• قانون فيثاغورس:

$$\boxed{ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}}$$

مثال: في الشكل المجاور، أوجد طولي ضلعي القائمة



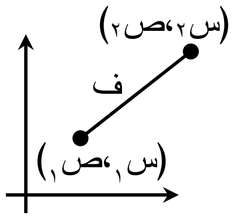
الحل: ل^{٢} + (ل+١)^{٢} = ٢٥

٢ل^{٢} + ٢ل +١ = ٢٥

ل^{٢} + ل −١٢ = ٠ ← (ل+٤) (ل−٣) = ٠

← ل= −٤ (تهمل) ، ل= ٣.

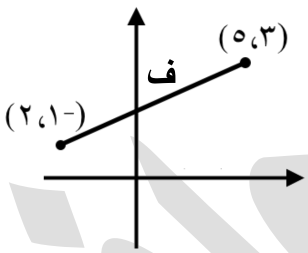
• قانون المسافة بين نقطتين



$$ف = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

مثال

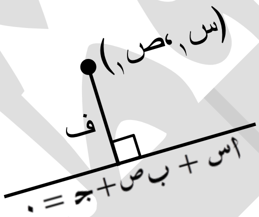
جد المسافة بين النقطتين (−١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)



الحل:

$$ف = \sqrt{(٥-٢)^{٢} + (٣+١)^{٢}} = ٥$$

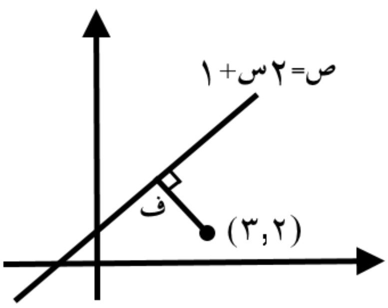
• المسافة بين نقطة وخط مستقيم:



$$ف = \frac{|أس_{١} + ب ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$$

مثال

جد المسافة بين النقطة (٢ ، ٣) والمستقيم: ص= ٢س+١



الحل:

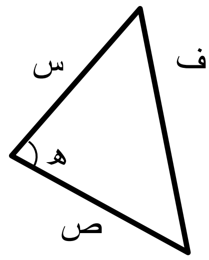
ص = ٢س+١

ص − ٢س − ١ = صفر

$$ف = \frac{|١\times٣ - ٢\times٢ - ١|}{\sqrt{١+٤}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$$

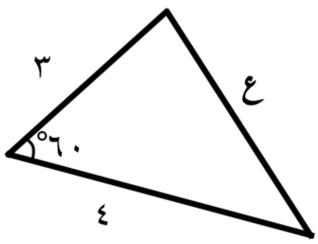
• قانون جيب التمام:

$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\,\text{س ص جتا هـ}$$



مثال

باستخدام قانون جيب التمام جد طول الضلع (ع)



الحل:

$$\text{ع}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\,\text{س ص جتاهـ}$$

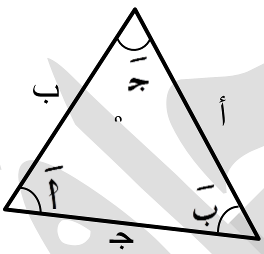
$$= (3)^2 + (4)^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \text{جتا}\,60$$

$$= 9 + 16 - 12 = 13$$

$$\text{ع} = \sqrt{13}$$

• قانون الجيب:

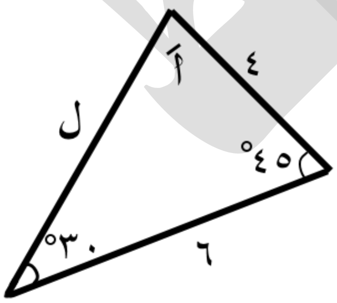
$$\frac{\text{أ}}{\text{جاأَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جابَ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جاجَ}}$$



مثال

باستخدام قانون الجيوب، أوجد:

١) جيب الزاوية أَ ٢) الضلع ل



الحل:

١) $\frac{6}{\text{جاأَ}} = \frac{4}{\text{جا}\,30°} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \leftarrow \text{جاأَ} = \frac{3}{4}$

٢) $\frac{4}{\text{جا}\,30°} = \frac{\text{ل}}{\text{جا}\,45°} \leftarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftarrow \text{ل} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

- **المسافة = السرعة × الزمن.**

مثال: إذا سار جسم بسرعة ٣ م/ث لمدة ٥ ثواني فإن المسافة التي يقطعها الجسم = السرعة × الزمن = ٣ × ٥ = ١٥م/ث

- **الربح = سعر البيع (الإيرادات) – التكاليف.**

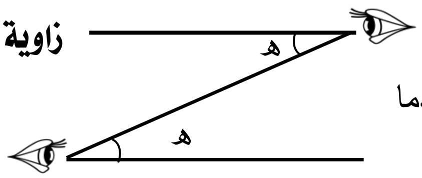
مثال: مصنع ينتج (س) من السلع يوميًا بسعر (ص) دينار للسلعة الواحدة، إذا كانت تكاليف الإنتاج تساوي (ت) فإن

الربح = سعر البيع (إيرادات) – التكاليف

ر = س × ص – ت

• زاوية الارتفاع و الانخفاض:

زاوية الانخفاض : هي الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي لمستوى العين عندما ينظر المشاهد لأسفل.



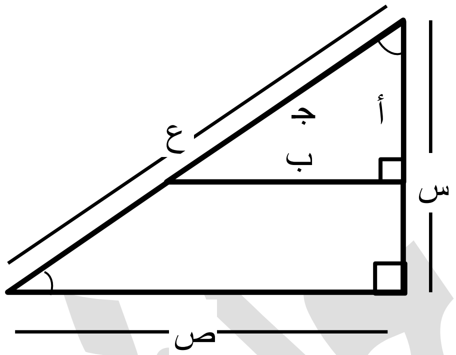
زاوية الارتفاع : هي الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي لمستوى العين عندما ينظر المشاهد لأعلى

• تشابه المثلثات:

إذا كانت الزوايا المتناظرة متساوية

فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة:

$$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}}$$



مثال

انظر الشكل المجاور:

باستخدام تشابه المثلثات جد الضلعين س ، ص

الحل:

باستخدام تشابه المثلثين

أ ب جـ ، أ و ع

$$\frac{\text{٣}}{\text{ص}} = \frac{\text{٣}+\text{٦}}{\text{٦}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \Leftarrow \text{ص} = \text{٢}$$

أيضًا $\frac{\text{٢}+\text{س}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢}}{\text{٢}} = \text{١} \Leftarrow \text{٢}+\text{س} = \text{٦} \Leftarrow \text{س} = \text{٤}$