الاقتران اللوغاريتمي والاسي الطبيعي :

تمهيد :

أ^ب = جـ ⟸ أ لوب=جـ

حيث أن أ ، ب أعداد حقيقية حيث أ≠ صفر

مثال : ٢ لو١٦=٤⟸ ٢ ^٤ = ١٦

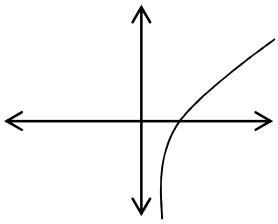
الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي :

ص=هـلو (ق(س))

مجاله ق(س)> صفر ومداه الأعداد الحقيقية وأساسه العدد النيبيري (هـ ≈ ٢،٧)

مثال :

ق(س)=هـلو س



خواص اللوغاريتمات :

١) هـلو١=صفر

٢) هـلوهـ =١

٣) هـلوس^ن = ن هـلوس

٤) هـلوس×ص = هـلوس+ هـلوص

٥) هـلو س/ص = هـلوس- هـلوص

٦) هـلوهـ^ق(س) = ق(س)

مشتقة الإقتران اللوغارتمي :

ق(س) = هـلوم(س) = هـلو(ماداخل اللو)

قَ(س)= م.ماداخل اللو / ما داخل اللو = مَ(س) / م(س)

أسئلة :

جد قَ(س) في كل مما يلي :

١) ق(س)= هـلوس

الحل : قَ(س)= ١/س

---

٢) ق(س)=هـلو(س^٣+١)

الحل : قَ(س)= ٣س^٢ / س^٣+١

---

٣) ق(س) = هـلو(س+١)^٢

الحل : ق(س)=٢هـلو(س+١)

قَ(س)= ٢/(س+١)

---

٤) ق(س)= هـلو(جا^٢س)

الحل : ق(س)= ٢هـلو(جاس)

قَ(س)= ٢جتاس/جاس

---

٥) ق(س)= هـلوهـ^جاس

الحل : ق(س)= جاس

قَ(س) = جتاس

---

٦) ق(س)= هـلو(س جاس)

الحل : ق(س)= هـلوس+هـلوجاس

قَ(س)= ١/س + جتاس/جاس

---

٧) ق(س)= هـلو((س^٢+١)/(٢س-٧))

الحل: ق(س)= هـلو(س^٢+١)- هـلو(٢س-٧)

قَ(س)= ٢س/(س^٢+١) + ٢/(٢س-٧)

SALEM ALSATEB

٨) ق(س)= س^{٢} لوس$_{هـ}$

الحل : قَ(س)=س^{٢} × $\frac{١}{س}$ +لوس$_{هـ}$×٢س

---

٩) ق(س)=لو$_{هـ}$(لوس)

الحل: قَ(س)= $\frac{\frac{١}{س}}{لوس_{هـ}}$ = $\frac{١}{س لوس_{هـ}}$

---

١٠) ق(س)=(لوس$_{هـ}$)^{٣}

الحل : قَ(س) = ٣(لوس$_{هـ}$)^{٢} ($\frac{١}{س}$)

---

١١) ق(س)= $\sqrt[٢]{لوس_{هـ}}$

الحل: قَ(س)= $\frac{\frac{١}{س}}{\sqrt[٢]{لوس_{هـ}}}$ = $\frac{١}{٢س\sqrt[٢]{لوس_{هـ}}}$

---

١٢)ق(س)=لو$_{هـ}$ |س|

الحل : قَ(س)= $\frac{١}{س}$

---

١٣) ق(س)= لو$_{هـ}$ |جتاه٥س|

الحل :قَ(س)= $\frac{-جاه٥س×٥}{جتاه٥س}$ =-٥ظاه٥س

---

١٤) ق(س)=لو$_{هـ}$(س+ $\sqrt[٢]{س^{٢}+٧}$)

الحل : قَ(س)= $\frac{١+\frac{٢س}{٢\sqrt[٢]{س^{٢}+٧}}}{س+\sqrt[٢]{س^{٢}+٧}}$

---

١٥) ق(س) = لو$_{هـ}$ $\left(\frac{ظاس×قا^{٢}س}{س^{٣}+١}\right)^{٧}$

الحل:

ق(س) = ٧ (لو$_{هـ}$ ظاس+ لو$_{هـ}$ قا^{٢}س- لو$_{هـ}$ (س^{٣} +١))

= ٧ (لو$_{هـ}$ ظاس+ ٢لو$_{هـ}$ قاس- لو$_{هـ}$ (س^{٣} +١))

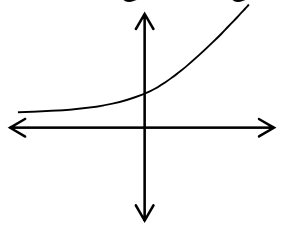
ق$'$(س)= ٧ ($\frac{قا^{٢}س}{ظاس}$ + $\frac{٢قاس ظاس}{قاس}$ - $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+١}$)

الاقتران الأسي الطبيعي:

ص=هـ$^{ق(س)}$ هو اقتران اساسة العدد النيبيري (هـ) ومجاله جميع الاعداد الحقيقية(ح) و مداه ح$^{+}$.

مثال :

ق(س)=هـ^{س}



قوانين الاسس :

١) هـ^{س}×هـ^{ص}=هـ$^{س+ص}$

٢) (هـ^{س})^{ص}=هـ$^{س×ص}$

٣) $\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}}$ = هـ$^{س-ص}$

٤) $\frac{١}{هـ^{س}}$ =هـ$^{-س}$

٥) $\sqrt[ص]{هـ^{س}}$ = $هـ^{\frac{س}{ص}}$

اشتقاق الاقتران الاسي :

ق(س)=هـ$^{م(س)}$

قَ(س)=هـ$^{م(س)}$×مَ(س)=نفسة ×م.الأس

أسئلة : جد قَ(س) في كل مما يلي :

١) ق(س)=هـ^{س}

الحل: قَ(س)=هـ^{س}×١

---

٢) ق(س)=هـ$^{س^{٢}}$

الحل: قَ(س) =هـ$^{س^{٢}}$×٢س

---

٣) ق(س)= هـ$^{٣س^{٢}+٤س}$

الحل : قَ(س)=هـ$^{٣س+٤س}$×^{٢}(٦س+٤)

---

٤) ق(س) = هـ $^{\sqrt[٢]{٢س+١}}$

الحل: قَ(س)= هـ $^{\sqrt[٢]{٢س+١}}$ $\frac{٢}{٢\sqrt[٢]{٢س+١}×}$

SALEEM ALSATEB

٥) ق(س)=هـ^جاس

الحل : قَ(س)=هـ^جاس×جتاس

---

٦)ق(س)= $\sqrt{هـ^{٢س}+١}$

االحل: قَ(س)= $\frac{٢\times هـ^{٢س}}{٢\sqrt{هـ^{٢س}+١}}$

---

٧)ق(س)= $\frac{هـ^{٢س}+١}{هـ^{٣س}}$

الحل:

قَ(س)= $\frac{(هـ^{٣س})(هـ^{٢س}\times٢)-(هـ^{٢س}+١)(هـ^{٣س}\times٣)}{(هـ^{٣س})^{٢}}$

العلاقة بين اللوغاريتمات والاقترانات الأسية :

*إذا كان الأساس ليس هـ فإننا ندخل اللوغاريتمات على طرفين المعادلة إذا طلب المشتقة .

قاعدة:

إذا كان ص=أ^ق(س) فإن :

$\frac{ء ص}{ء س}$=أ^ق(س)×قَ(س)×هـلوأ

البرهان :

هـلوص=هـلوأ^ق(س)=ق(س)هـلوأ

نشتق ضمنياً

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ = قَ(س)×لوأ

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص×قَ(س)×هـلوأ = أ^ق(س)×قَ(س)×هـلوأ

أسئلة : جد $\frac{ء ص}{ء س}$ في كل مما يلي :

١)ص=٣^س

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$=٣^س×١×هـلو٣

---

٢) ص=٥^حاس

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$= ٥^حاس×جتاس×هـلو٥

---

٣) ص= π^ظتاس

الحل: $\frac{ء ص}{ء س}$= π^ظتاس×-قتا^٢س× هـلو π

---

٤) ص=س^س

الحل : هـلوص=هـلوس^س=سهـلوس

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ =س× $\frac{١}{س}$ +هـلوس×١

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص(س× $\frac{١}{س}$ +هـلوس×١)

---

٥) ص=س^جاس

الحل:هـلوص=هـلوس^جاس=جاس×هـلوس

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ = (جاس)($\frac{١}{س}$)+(هـلوس)(جتاس)

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص((جاس)($\frac{١}{س}$)+(هـلوس)(جتاس))

---

٦)ص=(س^٢ +٣)^هـلوس

الحل : هـلوص = هـلو(س^٢ +٣)^هـلوس=هـلوس×هـلو(س^٢+٣)

$\frac{\frac{ء ص}{ء س}}{ص}$ =(هـلوس)($\frac{٢س}{س^{٢}+٣}$)+(هـلو(س^٢+٣))($\frac{١}{س}$)

$\frac{ء ص}{ء س}$=ص((هـلوس)($\frac{٢س}{س^{٢}+٣}$)+(هـلو(س^٢+٣))($\frac{١}{س}$))

أسئلة عامة :

١) ص=هـ^٢س+لو(٢س)

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$= هـ^٢س+لو(٢س)(٢+ $\frac{٢}{٢س}$)

---

٢) ص= هـ^س^٢ ×هـلوس^٣

الحل : $\frac{ء ص}{ء س}$= هـ^س^٢ × $\frac{٣}{س}$ +هـلوس^٣ × هـ^س^٢ ×٢س

---

٣) لو ص^٢ =س^٣ جد $\frac{ء ص}{ء س}$ بدلالة س .

الحل : هـ^لوص^٢ = هـ^س^٣

ص^٢ = هـ^س^٣ ⇐ ص= هـ^$\frac{س^{٣}}{٢}$

$\frac{ء ص}{ء س}$= هـ^$\frac{س^{٣}}{٢}$ × $\frac{٣ س^{٢}}{٢}$

SALEM ALSATEB

٤) إذا كان هـ^{س}=هـ ، ص=س لـو س ، جد $\frac{ع ص}{ع س}$.

الحل : $\frac{ع ص}{ع س}$= س× $\frac{١}{س}$ +لـو س ×١

عندما هـ^{س} =هـ ⟸ س= ١

$\frac{ع ص}{ع س}$= ١ ×١ + لـو١×١=١+٠ = ١

---

٥) إذا كان ص^{٣}=٥س^{٢}+لـو ص +٧س-٧ ،جد $\frac{ع ص}{ع س}$.

الحل :

٣ص^{٢} $\frac{ع ص}{ع س}$=١٠س+ $\frac{\frac{ع ص}{ع س}}{ص}$ +٧

$\frac{ع ص}{ع س}$(٣ص^{٢}-$\frac{١}{ص}$) = ١٠س+٧

$\frac{ع ص}{ع س}$= $\frac{١٠س+٧}{٣ص^{٢}+\frac{١}{ص}}$

---

٦) لـو (س + ص) =هـ^{ص} جد $\frac{ع ص}{ع س}$.

الحل : $\frac{١+\frac{ع ص}{ع س}}{س+ص}$ = هـ^{ص} $\frac{ع ص}{ع س}$

١+$\frac{ع ص}{ع س}$ =(س+ص)هـ^{ص} $\frac{ع ص}{ع س}$

(س+ص)هـ^{ص} $\frac{ع ص}{ع س}$ – $\frac{ع ص}{ع س}$ = ١

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١}{(س+ص)هـ^{ص}-١}$

---

٧) ص=هـ^{٢س} ، أثبت أن صً +٢صَ – ٨ص = ٠

الحل :

صَ=هـ^{٢س}×٢

صً=هـ^{٢س}×٤

⟸صً +٢صَ – ٨ص=٤هـ^{٢س}+٢هـ^{٢س}×٢-٨هـ^{٢س} =٠.

---

٨) إذا كان ص^{ص} = هـ^{س} أثبت أن $\frac{ع ص}{ع س}$= $\frac{ص}{س+ص}$

الحل : لـو ص^{ص} =هـ لو هـ^{س}

ص لـو ص =س ⟸ ص×$\frac{\frac{ع ص}{ع س}}{ص}$ +لـو ص×$\frac{ع ص}{ع س}$=١

$\frac{ع ص}{ع س}$(١+لـو ص) = ١ ⟸ $\frac{ع ص}{ع س}$= $\frac{١}{١+لـو ص}$

---

٩) إذا كان هـ$^{س ص}$ = س + ص أثبت أن

$\frac{د ص}{د س}$ = - ($\frac{ص^{٢}+س ص-١}{س^{٢}+س ص - ١}$)

الحل : نشتق ضمنيا

هـ$^{س ص}$ (س $\frac{د ص}{د س}$ + ص) = ١ + $\frac{د ص}{د س}$

⟸هـ$^{س ص}$ س $\frac{د ص}{د س}$ + ص هـ$^{س ص}$ = ١ + $\frac{د ص}{د س}$

⟸س هـ$^{س ص}$ $\frac{د ص}{د س}$ - $\frac{د ص}{د س}$ = ١ –ص هـ$^{س ص}$

$\frac{د ص}{د س}$ (س هـ$^{س ص}$ – ١) = ١ –ص هـ$^{س ص}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١-ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص}-١}$

= $\frac{١-ص (س+ص)}{س (س+ص) – ١}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = - ($\frac{ص^{٢}+س ص-١}{س^{٢}+س ص – ١}$)

---

١٠) إذا كان ص = حا (لـو س^{٢}) أثبت أن

س^{٢} صً + س صَ + ٤ ص = ٠ .

الحل : صَ = جتا (لـو س^{٢}) ×$\frac{٢}{س}$

صً = جتا (لـو س^{٢}) ×$\frac{-٢}{س}$ + $\frac{٢}{س}$ × - جا (لـو س^{٢}) ×$\frac{٢}{س}$

صً = $\frac{-٢}{س^{٢}}$ جتا (لـو س^{٢}) - $\frac{٤}{س^{٢}}$ جتا (لـو س^{٢})

نعوض في المعادلة :

س^{٢}($\frac{-٢}{س^{٢}}$جتا (هـلو س^{٢}) - ٤ جا (هـلو س^{٢})) + س(جتا (هـلو س^{٢}) ×$\frac{٢}{س}$) + ٤ × جا (هـلو س^{٢})

= -٢ جتا (هـلو س^{٢}) – ٤ (هـلو س^{٢}) + ٢ جتا (هـلو س^{٢})+٤جا (هـلو س^{٢})

= صفر #

SALEEM ALSATEB

١١) إذا كان ص=هˢجاس فأثبت أن :

صً-٢صَ+٢ص=صفر

الحل:

صَ=هˢجتاس +جاس ×هˢ

صً=هˢجتاس -جاس ×هˢ+هˢجتاس +جاس ×هˢ

صً=٢هˢجتاس

نعوض بالمعادلة :

صً-٢صَ+٢ص

=٢هˢجتاس-٢(هˢجتاس +جاس ×هˢ)+٢هˢجاس

=٢هˢجتاس-٢هˢجتاس -٢جاس ×هˢ+٢هˢجاس=صفر#

---

١٢) إذا كان ص=هˣ جد قيمة (أ) بحيث أن :

صً -٤ص = صفر

الحل: صَ = أ هˣ

صً = أ² هˣ

نعوض في المعادلة :

أ² هˣ -٤ هˣ = صفر ⇐ هˣ (أ² -٤) = صفر

بما أن هˣ ≠ صفر ⇐ أ² -٤ = .

∴ أ = ± ٢

---

١٣) اذا كان ص = هˣ جد قيم أ التي تجعل

ص /// - ٧ ص / + ٦ ص = .

الحل:

ص = هˣ

ص / = هˣ × أ

ص // = أ² هˣ

ص /// = أ³ هˣ

ص /// - ٧ ص / + ٦ ص = .

أ³ هˣ - ٧ أ هˣ + ٦ هˣ = .

هˣ (أ³ – ٧أ +٦) = . ⇐ هˣ ≠ .

(أ³ – ٧أ +٦) = .

(أ-١)(أ² + أ -٦)=. ⇐ (أ-١) (أ +٣) (أ – ٢) =.

اما أ=١ او أ = -٣ او أ = ٢

---

١٤) ص = أهˢ² + جا (لـو س)
هـ

وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$ = هˢ + ١ جد قيمة الثابت(أ).

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ أ هˢ² + جتا (لـو س) × $\frac{١}{س}$
هـ

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$ = ٢ أ هˢ² + جتا (لـو ١) ×١
هـ

= ٢ أهˢ² + ١ = هˢ + ١ ⇐ أ= $\frac{هـ}{٢}$

---

١٥) ق(س) = $\frac{١}{هـ^{س}}$ + ألـو $\sqrt{س}$ وكان قَ (١) = هـ
هـ

جد قيمة الثابت "أ" .

الحل :

قَ (س) = $هـ^{\frac{١}{س}} \times \frac{-١}{س^{٢}} + \frac{أ}{٢س}$

قَ (١) = $هـ^{١}$ × -١ + $\frac{أ}{٢}$ = هـ ⇐ أ = ٤ هـ

---

١٦) ص = $هـ^{أ جتا س}$ + لـو حا س
هـ

وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}}$ = -٢ جد قيمة الثابت "أ"

الحل :

$\frac{د ص}{د س}$ $هـ^{أ جتا س}$ × -أ جا س + $\frac{جتا س}{حا س}$

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}}$ = $هـ^{٠}$ × -أ + ٠ = -٢ ⇐ أ = ٢

---

١٧) ص = $هـ^{طاس}$ + ألـو جتا س
هـ

وكان $\left|\frac{ء ص}{ء س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢ هـ + ١ جد قيمة (أ)

الحل : $\frac{د ص}{د س}$ = $هـ^{طاس}$ × قا²س + أ × $\frac{-حا س}{جتا س}$

$\left|\frac{ء ص}{ء س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = $هـ^{١}$ × ٢ + أ × -١ = ٢هـ + ١ ⇐ أ = - ١ #

SALEM ALSATEB

١٨) إذا كان ص^{٢} = لـو$_{هـ}$ س ص -هـ$^{س^{٢}}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

ص^{٢} = لـو$_{هـ}$ س+لـو$_{هـ}$ ص -هـ$^{س^{٢}}$

٢ص $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{س}$ + $\frac{\frac{د ص}{د س}}{ص}$ -٢س هـ$^{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ ٢ص $\frac{د ص}{د س}$ - $\frac{\frac{د ص}{د س}}{ص}$ = $\frac{١}{س}$ -٢س هـ$^{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س}$ (٢ص - $\frac{١}{ص}$) = $\frac{١}{س}$ -٢س هـ$^{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{\frac{١}{س} - ٢س هـ^{س^{٢}}}{٢ص - \frac{١}{ص}}$

معكوس المشتقة :

* يقال لـ م(س) أنه معكوس المشتقة لـ ق(س)

الشروط :- أ) ق(س) متصل على مجاله

ب) مَ(س) = ق(س)

أسئلة:- بين أن م (س) هو معكوس المشتقة لـ ق(س):-

١) م(س) = س^{٣} + ٢ و ق(س) = ٢س

الحل:- ق(س) متصل على مجاله

مَ(س)= ٢س = ق(س)

∴ م(س) يمثل معكوس المشتقة

---

٢) م(س)= س^{٢} + ٦س+٩ ، ق(س)= ٢س+٦

الحل:- (س) متصل على مجاله

مَ(س) = ٢س+٦ = ق(س)

∴ م(س) يمثل معكوس المشتقة

---

٣) جد معكوس المشتقة لـ ق(س) = جتا س

الحل:- ق(س) متصل على مجاله

نخمن الاقتران الذي مشتقته (جتاس)

نجد أن (جاس)$'$ =جتاس

∴ م(س) = جاس معكوس مشتقة لـ ق(س)

---

٤) جد معكوس المشتقة لـ ق(س) = ٣س^{٢} +قا^{٢} س

الحل:- ق(س) متصل على مجاله

تخمن الاقتران الذي مشتقته (٣س^{٢} +قا^{٢} س)

نجد أن (س^{٣} +طاس)$'$ = ٣س^{٢} +قا^{٢} س

∴ م(س) = س^{٣} +طاس معكوس مشتقة لـ ق(س)

---

*ملاحظة :الفرق بين أي معكوسا مشتقة هو عدد ثابت

أسئله:

١)إذا كان م(س) = س^{٣}-٥س+١ هو معكوسا مشتقة للإقتران ق(س) فجد ق(٢).

الحل :

مَ(س)= ق(س)=٣س^{٢}-٥

ق(٢) =١٢-٥=٧

SALEM ALSATEB

٢) كان م(س) هو معكوس مشتقة للاقتران
ق(س)= حاس +٣س – ٥ ،فجد مً(π).
الحل :
مَ(س)=ق(س)=حاس+٣س-٥
مً(س)=جتاس + ٣
مً(π) =جتا(π) + ٣ = ٢

---

٣) إذا كان م(س) معكوس مشتقة لـ ق(س) حيث
م(س) =س^{٣} +أس^{٢}+٧ وكان ق(١)=١٣ فجد قيمة الثابت أ.
الحل :
مَ(س)=ق(س)=٣س^{٢}+٢أس
ق(١)=٣ +٢أ=١٣ ⟸ أ=٥

---

٤)إذا كان م(س) ،ل(س) هما معكوسا مشتقة للاقتران ق(س) ، وكان ل(س) = س^{٢} -٣س+٧، م(٥)=١٦ ،فجد م(س)
الحل:
الفرق بين م(س) و ل(س) هو الثابت
م(س) = س^{٢} -٣س+ جـ ⟸م(٥) = ٢٥-١٥+جـ = ١٦
⟸ جـ = ٦⟸ م(س) = س^{٢} -٣س+ ٦

---

٥) إذا كان ق(س)=أس+ب وكان م(س) معكوس مشتقة للإقتران ق(س) حيث مَ(١)=٤،مً(١)=٥ ، فجد قيمة { أ،ب }
الحل: من شروط معكوس المشتقة .
م$^{/}$(س) = ق(س)
م$^{/}$(١) = ق(١) = أ + ب = ٤ ------ (١)
م$^{//}$(س) = ق$^{/}$(س)
م$^{//}$(١) = ق$^{/}$(١) = أ = ٥
بتعويض قيمة أ في المعادلة ١ ⟸ ٥ + ب = ٤ ⟸ ب = -١
القاعدة : ق(س) = ٥س – ١

تعريف :

إذا كان م معكوس مشتقة للاقتران ق على [أ ، ب] فإن الصورة العامة لقاعدة معكوس المشتقة للإقتران ق هي:
م(س) + جـ حيث جـ ثابت وذلك لأن
$\frac{د}{دس}$(م(س)+جـ) =مَ(س)=ق(س)
ويسمى معكوس المشتقة بالتكامل غير المحدود
ل ق(س) بالنسبة إلى س ويرمز له على النحو التالي :
∫ ق(س).د س = م (س) + جـ

التكامل : هي العملية العكسية للمشتقة
هنالك أسئلة يصعب تخمين معكوس المشتقة وكان الحل هو إيجاد قواعد سمية بقواعد التكامل
يرمز للتكامل بالرمز (∫ ق(الحرف). ﻫ الحرف)
ﻫ الحرف تعني المتغير الذي نكامل له هو (الحرف)

نشتق ←
م(س) ↔ ق(س)↔ قَ(س) ↔قًَ(س)
→ نكامل

SALEM ALSATEB

قـــــــواعد التكامـــــــــل

١) $\int أ \, .دس = أ س + جـ$

٢) $\int س^{ن} .دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$

٣) $\int (أس + ب)^{ن} .د س = \frac{(أس+ب)^{ن+١}}{(ن+١) \times أ} + جـ$

٤) $\int هـ^{أس+ب} .دس = \frac{هـ^{أس+ب}}{أ} + جـ$

٥) $\int \frac{١}{أس+ب} .دس = \frac{١}{أ}$ لـو$_{هـ}$ |أس+ب|+جـ

تكامل المثلثيات :

١) $\int جا(أس+ ب) .د س = \frac{-جتا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٢) $\int جتا(أس + ب) .د س = \frac{جا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٣) $\int قا^{٢} (أس + ب) .دس = \frac{ظا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٤) $\int قتا^{٢}(أس + ب) .د س = \frac{-ظتا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٥) $\int قا(أس + ب)ظا(أس + ب) .د س = \frac{قا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

٦) $\int قتا(أس + ب)ظتا(أس + ب) .ى س = \frac{-قتا(أ س+ب)}{أ} + جـ$

قاعدة :-

١) $\int$ ف أ (س) .ى س = ف $\int$ أ(س) .ى س

٢) $\int$ ف (س)± هـ(س) .ى س = $\int$ ف (س) $\int$ ±هـ(س) .ى س

*يوزع التكامل على (+ ، -) ولا يوزع على (× ، ÷)

محرمات

سؤال سريع :- جد قيمة التكاملات التالية :-

١) $\int ٦ .ى س = ٦س + جـ$

٢) $\int ى س = \frac{١}{٣} س + جـ$

٣) $\int -٢ .أى = -٢ أ + جـ$

٤) $\int س^{٢} .ى س = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

٥) $\int س^{\frac{١}{٢}} .ى س = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٦) $\int س^{-٣} .ى س = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$

٧) $\int (٢س+ ١)^{٤} .ى س = \frac{(٢س+١)^{٥}}{٢ \times ٥} + جـ$

٨) $\int (١ - ٣س)^{٣} .ى س = \frac{(١-٣س)^{٤}}{-٣ \times ٤} + جـ$

٩) $\int (٣س-٤)^{\frac{١}{٢}} .ى س = \frac{(٣س-٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times \frac{٣}{٢}} + جـ$

١٠) $\int هـ .ى س = هـ س + جـ$

١١) $\int هـ^{س} .ى س = هـ^{س} + جـ$

١٢) $\int هـ^{٢س} .ى س = \frac{هـ^{٢س}}{٢} + جـ$

١٣) $\int هـ^{-٥س+٧} .ى س = \frac{-هـ^{-٥س+٧}}{٥} + جـ$

١٤) $\int \frac{١}{س} .ى س = لـو_{هـ} |س| + جـ$

١٥) $\int \frac{١}{٢س+٧} .ى س = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} |٢س+٧| + جـ$

١٦) $\int \frac{١}{٦-٥س} .ى س = \frac{-١}{٥} لـو_{هـ} |٦-٥س| + جـ$

١٧) $\int حاس .ى س = -$ جتاس + جـ

SALEEM ALSATEB

١٨) ∫جتا(٢س – ١) .ء س= جا(٢س – ١)/٢ +جـ

١٩) ∫قا٢ (٣س+ ٢) .ء س= ظا(٣س+٢)/٣ + جـ

٢٠) ∫قتا٢(٤س – ٥).ء س= - ظتا(٤س – ٥)/٤ +جـ

٢١) ∫قا(٤- ٢س)طا(٤ – ٢س).ء س= قا(٤-٢س)/-٢ + جـ

٢٢)∫قتا (٤-٢س)ظتا(٤-٢س) .ءس = قتا(٤-٢س)/٢ +جـ

٢٣) ∫٣س٢ – ٢س+٤ .ءس = س٣ –س٢ +٤س+جـ

٢٤) ∫٢س – حا(٣س)+(٢س -١)٤ .ءس

= س٢ + حتا(٣س)/٣ +(٢س -١)٥/٢×٥ +جـ

٢٥) ∫٢(١-٤س)٢ – قتا٢ (١+٢س).ءس

= ٢(١-٤س)٣/٣× - ٤ + طتا(١+ ٢س)/٢ + جـ

٢٦) ∫ ٧هـ٢س +٧/س –طا٥س قا٥س .ءس

=٧/٢ هـ٢س +٧لو|س|- ١/٥ قا٥س +جـ

٢٧) ∫ قا٢(٣س) + ١/(س+هـ) - هـ٣س+١ .ءس

= ظا٣س/٣ + لـو|س+ هـ|- ١/٣ هـ٣س+١ + جـ

ملاحظة :-

إذا كان الشكل المعطى في السؤال لا نعرفه فإننا نحتاج الى ترتيب ما داخل التكامل.

قواعد الترتيب :-

١) كل جذر يحول الى قوة كسرية

٢) التخلص من الاقواس

٣) التخلص من المقام عن طريق رفعها بالقوة السالبة مع مراعات :-

أ) أن لا تكون القوة (-١)

ب) ترفع المثلثيات بقيمها وليس بقواها السالبة

٤) إذا كان البسط يحتوي على جمع وطرح فإننا نوزع البسط على المقام.

- تذكر أن إذا تساوت الاساسات فإن الاسس تجمع في حالة الضرب ⟸ س^م × س^ن = س^(م+ن)
- الزوايا يجب أن تكون وحده "نفسها"
- لاننسى استخدام المتطابقات.

قوانين توحيد الزوايا :-

١) حاس ×حاص = ١/٢ (جتا (س-ص) – جتا(س+ص)).

٢) جتاس×جتاص= ١/٢(جتا(س-ص)+جتا(س+ص))

٣) جاس×جتاص = ١/٢(حا(س-ص)+ حا(س+ص))

٤) جا(أ+ب)= جاأ جتاب + جتاأ جاب

٥) جا(أ-ب)= جاأ جتاب - جتاأ جاب

٦) جتا(أ+ب)= جتاأ جتاب - جاأ جاب

٧) جتا(أ-ب)= جتاأ جتاب + جاأ جاب

المتطابقات المثلثية :-

١) جا٢ س +جتا٢ س =١ ..... المتطابقة الأم

٢) طا٢ س = قا٢ س – ١

٣) طتا٢ س = قتا٢ س – ١

٤) جا ٢س = ٢ حاس جتاس

٥) جتا ٢س = جتا٢ س – جا٢ س

٦) جتا ٢س = ٢جتا٢ س – ١

٧) جتا ٢س = ١ – ٢ جا٢ س

٨) حا٢ = ١/٢(١ – جتا ٢س)

٩) جتا٢ س = ١/٢(١ + جتا ٢س)

SALEM ALSATEB

ملاحظات على المثلثيات :-

١) إذا وجدنا (١- جتا^{٢} س) ، (١- جا^{٢} س)
فإننا نرجع الى المتطابقة الأم.

٢) إذا وجد لدينا (جا^{٢} س) ، (جتا^{٢} س)
أو مضاعفاتها من القوى الزوجية (لوحدها) نستخدم متطابقة رقم (٨) ، (٩)

٣) إذا وجد لدينا (طا^{٢} س) ، (طتا^{٢} س)
لوحدها فإننا نستخدم المتطابقة (٢)،(٣)

٤) إذا كان لدينا (١ ± جتا س) ، (١ ± حاس) في المقام فإننا نضرب بالمرافق.

تذكر أن :-

١) طاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}}$ ٣) قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$

٢) طتاس= $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ٤) قتاس= $\frac{١}{\text{حاس}}$

** لا ننسى التشبيه على المتطابقات

أسئلة :- جد كل من التكاملات التالية :

١) $\int \sqrt{س} - \sqrt[٣]{٢س+١}\ .د س$

$= \int س^{\frac{١}{٢}} - (٢س+١)^{\frac{١}{٣}}\ .د س$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٣(٢س+١)^{\frac{٤}{٣}}}{٨} + جـ$

---

٢) $\int \sqrt{٧س}\left(\sqrt{٧س} - \frac{٧}{\sqrt{س}}\right)\ .د س$

$= \int ٧س - ٧\ .د س$

$= \frac{٧س^{٢}}{٢} - ٧س + جـ$

---

٣) $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{٧س}}\ .د س$

$= \int ٧^{-\frac{١}{٣}} س^{-\frac{١}{٣}}(س-١)\ .د س$

$= \int ٧^{-\frac{١}{٣}} س^{\frac{٢}{٣}} - ٧^{-\frac{١}{٣}} س^{-\frac{١}{٣}}\ .د س$

$= \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٢}{٣}٧^{-\frac{١}{٣}} س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

---

٤) $\int \frac{٢س^{٢} - ٣س}{\sqrt{٧س}}\ .د س$

$= \int ٧^{-\frac{١}{٢}} س^{-\frac{١}{٢}}(٢س^{٢} - ٣س)\ .د س$

$= \int ٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}}\ .د س$

$= \frac{٤}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - ٢س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

---

٥) $\int س(س^{٢} - ١)^{٢}\ .د س$

$= \int س(س^{٤} - ٢س^{٢} + ١)\ .د س$

$= \int س^{٥} - ٢س^{٣} + س\ .د س$

$= \frac{س^{٦}}{٦} - \frac{س^{٤}}{٢} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

٦) $\int \frac{س^{٢} - ٤س - ١٢}{س - ٦}\ .د س = \int \frac{(س-٦)(س+٢)}{س-٦}\ .د س$

$= \int س + ٢\ .د س = \frac{س^{٢}}{٢} + ٢س + جـ$

---

٧) $\int (س^{٢} - ٦س + ٩)^{٥}\ .د س$

$= \int ((س-٣)^{٢})^{٥}\ .د س = \int (س-٣)^{١٠}\ .د س$

$= \frac{(س-٣)^{١١}}{١١} + جـ$

---

٨) $\int \frac{\sqrt[٣]{س^{٤} - ٢س^{٣}}}{س}\ .د س$

$= \int \frac{س\sqrt[٣]{س - ٢}}{س}\ .د س$

$= \int (س-٢)^{\frac{١}{٣}}\ .د س$

$= \frac{٣(س-٢)^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + جـ$

---

٩) $\int \sqrt[٣]{هـ^{٢س}}\ .د س$

$= \int هـ^{\frac{٢}{٣}س}\ .د س = \frac{٣هـ^{\frac{٢}{٣}س}}{٢} + جـ$

---

١٠) $\int هـ^{٢س}(هـ^{٥س} + هـ^{٨س})\ .د س$

SALEM ALSATEB

= ∫(هˢ^٧+هˢ^١٠) .ﻫس

= هˢ^٧/٧ + هˢ^١٠/١٠ +جـ

---

١١) ∫ (هˢ^٢+١ + ٧)/هˢ^٥ .ﻫس

= ∫هˢ^-٥(هˢ^٢+١ +٧) .ﻫس

= ∫(هˢ^-٣+٧هˢ^-٥) .ﻫس

= هˢ^-٣+١/-٣ + ٧هˢ^-٥/-٥ + جـ

---

١٢) ∫ ٢/√(هˢ^١٠+١٥)^٥ .ﻫس

= ∫ ٢/هˢ^٢+٣ .ﻫس = ∫ ٢هˢ^-٢-٣ .ﻫس = - هˢ^-٢-٣ + جـ

---

١٣) ∫ س هˢ لو(٥س^٣+٢) .ﻫس

= ∫س(٥س^٣ + ٢) .ﻫس = ∫(٥س^٤ + ٢س) .ﻫس

= س^٥ + س^٢ + جـ

---

١٤) ∫ هˢ^٢+لو(٣س^٢+١) .ﻫس

= ∫ هˢ^٢ × هˢ لو(٣س^٢+١) .ﻫس = ∫ هˢ^٢ ×(٣س^٢+١) .ﻫس

= هˢ^٢ ×(س^٣ + س) + جـ

---

١٥) ∫ جاˢ^٢س +جتاˢ^٢ س .ﻫس

= ∫ ١ .ﻫس = س + جـ

---

١٦) ∫جاس ظتاس.ﻫس

= ∫جاس × جتاس/جاس .ﻫس = ∫ جتاس .ﻫس = جاس + جـ

---

١٧) ∫جتاس طاس.ﻫس

= ∫جتاس × جاس/جتاس .ﻫس = ∫ جاس .ﻫس = -جتاس +جـ

---

١٨) ∫ ٥/قتاس .دس

= ∫ ٥جاس.دس = -٥جتاس + جـ

---

١٩) ∫ ٣/جتاˢ^٢س .دس

= ∫ ٣قاˢ^٢س.دس = ٣ظاس +جـ

---

٢٠) ∫ ١/جاˢ^٢٥س .دس

= ∫قتاˢ^٢ ٥س .دس = -١/٥ ظتا٥س +جـ

---

٢١) ∫ جاس/جتاˢ^٢س .دس

= ∫ظاس قاس .دس = قاس + جـ

---

٢٢) ∫ جتاس/جاˢ^٢س .دس

= ∫ظتاس قتاس .دس = -قتاس + جـ

---

٢٣) ∫ ٢/جتا٥س ظتا٥س .دس

= ∫٢قا٥س ظا٥س .دس

= ٢/٥ قا٥س + جـ

---

٢٤) ∫قاس(قاس+ظاس).دس

= ∫قاˢ^٢س + ظاس قاس.دس = ظاس +قاس +جـ

---

٢٥) ∫جاس جتاس .دس

= ∫ ١/٢ جا٢س.دس = -١/٤ جتا٢س +جـ

---

٢٦) ∫ (جاس + جتاس)ˢ^٢ .دس

= ∫جاˢ^٢س +٢جاس جتاس +جتاˢ^٢س.دس = ∫١+جا٢س .دس

= س - ١/٢ جتا٢س +جـ

---

٢٧) ∫ ظاˢ^٢س .دس

= ∫قاˢ^٢س -١ .دس = ظاس – س +جـ

---

٢٨) ∫(قتاس +ظتاس)ˢ^٢ .دس

= ∫ قتاˢ^٢س + ٢ظتاس قتاس +ظتاˢ^٢س.دس

= ∫ قتاˢ^٢س + ٢ظتاس قتاس +قتاˢ^٢س – ١ .دس

= -٢ ظتاس –٢قتاس – س + جـ

---

٢٩) ∫ جاˢ^٢س .دس

= ∫ ١/٢ (١-جتا٢س) .دس = ١/٢(س - ١/٢ جا٢س) + جـ

SALEM ALSATEB

٣٠) $\int$ جتا^{٢}س.دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (١+جتا٢س) .دس $= \frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$جاس) + جـ

---

٣١) $\int$ جا^{٤}س.دس

$= \int (\frac{١}{٢}$ (١- جتا٢س))^{٢}.دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١- ٢جتا٢س+جتا^{٢} ٢س) .دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١- ٢جتا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (١+جتا٤س)) .دس

$= \frac{١}{٤}$ (س - جا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (س+$\frac{١}{٤}$جا٤س)) + جـ

---

٣٢) $\int$ جتا^{٤}س.دس

$= \int (\frac{١}{٢}$ (١+جتا٢س))^{٢}.دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١+٢جتا٢س+جتا^{٢} ٢س) .دس

$= \int \frac{١}{٤}$ (١+٢جتا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (١+جتا٤س)) .دس

$= \frac{١}{٤}$ (س + جا٢س+ $\frac{١}{٢}$ (س+$\frac{١}{٤}$جا٤س)) + جـ

---

٣٣) $\int$ جتا ٣س جتا٨س .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(٣س- ٨س) +جتا(٣س+٨س)).دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(-٥س) +جتا(١١س)).دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{-١}{٥}$ جا(-٥س) + $\frac{١}{١١}$ جا(١١س)) +جـ

---

٣٤) $\int$ جا ٣س جا٨س .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(٣س- ٨س) - جتا(٣س+٨س)).دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جتا(-٥س) - جتا(١١س)).دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{-١}{٥}$ جا(-٥س) - $\frac{١}{١١}$ جا(١١س)) +جـ

---

٣٥) $\int$ جا ٣س جتا٨س .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جا(٣س- ٨س) +جا(٣س+٨س)).دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جا(-٥س) +جا(١١س)).دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{-١}{٥}$ جتا(-٥س) + $\frac{-١}{١١}$ جتا(١١س)) +جـ

---

٣٦) $\int \frac{١}{١+جا\ س}$. دس

$= \int \frac{١}{١+جا\ س} \times \frac{١-جا\ س}{١-جا\ س}$.دس $= \int \frac{١-جاس}{١-جا^{٢}س}$. دس

$= \int \frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{١}{جتا^{٢}س} - \frac{جا\ س}{جتا\ س \times جا\ س}$.دس

$= \int$ قا^{٢}س - قا س طا س . د س = طا س – قا س + جـ

---

٣٧) $\int \frac{١}{١+جتا\ س}$. دس

$= \int \frac{١}{١+جتا\ س} \times \frac{١-جتا\ س}{١-جتا\ س}$.دس $= \int \frac{١-جتاس}{١-جتا^{٢}س}$. دس

$= \int \frac{١-جتاس}{جا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{١}{جا^{٢}س} - \frac{جتا\ س}{جا\ س \times جا\ س}$.دس

$= \int$ قتا^{٢}س - قتا س طتا س . د س

$=$ - طتا س + قتا س + جـ

---

٣٨) $\int \frac{جاس}{١+جا\ س}$. دس

$= \int \frac{جاس}{١+جا\ س} \times \frac{١-جا\ س}{١-جا\ س}$.دس $= \int \frac{جاس-جا^{٢}س}{١-جا^{٢}س}$. دس

$= \int \frac{جاس-جا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{جاس}{جتا^{٢}س} - \frac{جا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$.دس

$= \int$ قاس ظاس –ظا^{٢}س .دس

$= \int$ قاس ظاس –(قا^{٢}س – ١) .دس

$=$ قاس – (ظاس –س) +جـ

---

٣٩) $\int \frac{١}{١+جتا\ ٢س}$. دس

$= \int \frac{١}{٢جتا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{١}{٢}$ قا^{٢}س . دس $= \frac{١}{٢}$ظاس + جـ

حل اخر:

$\int \frac{١}{١+جتا٢س} \times \frac{١-جتا٢س}{١-جتا٢س}$. دس

$\int \frac{١-جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$. دس $= \int \frac{١}{جا^{٢}٢س} - \frac{جتا٢س}{جا^{٢}٢س}$. دس

$= \int$ قتا^{٢}٢س - قتا٢س ظتا٢س . دس

$= -\frac{ظتا٢س}{٢} + \frac{قتا٢س}{٢}$ + جـ

حل اخر:

$= \int \frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س}{١+جتا^{٢}س-جا^{٢}س}$. دس $= \int \frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س}{٢جتا^{٢}س}$. دس

$= \frac{١}{٢} \int \frac{جا^{٢}س}{جتا^{٢}س} + \frac{جتا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$. دس $= \frac{١}{٢} \int$ ظا^{٢}س + ١ .دس

$= \int \frac{١}{٢}$ قا^{٢}س . دس $= \frac{١}{٢}$ظاس + جـ

SALEM ALSATEB

٤٠) $\int \frac{\text{جا}^3 س - ١}{١ - \text{جتا}^2 س}$. دس

$= \int \frac{\text{جا}^3 س - ١}{\text{جا}^2 س}$. دس $= \int \frac{\text{جا}^3 س}{\text{جا}^2 س} - \frac{١}{\text{جا}^2 س}$.دس

$= \int$ جاس – قتا^2 س .دس =- جتاس + ظتاس +جـ

---

٤١) $\int \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س}$.دس

$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{(\text{جاس جتاس})^2}$.دس$= \int \frac{\text{جتا}٢س}{\left(\frac{\text{جا}٢س}{٢}\right)^2}$. دس

$= \int ٤$قتا٢س ظتا٢س.دس =-٢قتا٢س +جـ

---

٤٢) $\int \frac{١ - \text{جا}^2 س}{\text{جا}^2\left(\frac{س}{٢}\right)\text{جتا}^2\left(\frac{س}{٢}\right)}$.دس

$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\left(\text{جا}\left(\frac{س}{٢}\right)\text{جتا}\left(\frac{س}{٢}\right)\right)^2}$.دس$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\left(\frac{\text{جاس}}{٢}\right)^2}$.دس

$= \int ٤$ ظتا^2 س.دس =٤$\int$قتا^2 س – ١ .دس

= ٤(- ظتاس – س) +جـ

---

٤٣) $\int \frac{\text{جا}^2 س}{١ - \text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س}{١ - \text{جتاس}} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$.دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س(١ - \text{جتاس})}{١ - \text{جتا}^2 س}$. دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س(١ - \text{جتاس})}{\text{جا}^2 س}$. دس $= \int ١ -$ جتاس .دس

=س – جاس + جـ

---

٤٤) $\int \frac{\text{جا}٢س}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{٢ \text{ جاس جتاس}}{\text{جتاس}}$. دس $= \int ٢$جاس . دس=-٢جتاس+جـ

---

٤٥) $\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتاس}}$. دس

الحل :

$\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتاس}}$. دس $= \int \frac{\text{جتا}(س+٢س)}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جتاس جتا}٢س - \text{جاس جا}٢س}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جتاس جتا}٢س - ٢\text{جا}^2 س \text{جتاس}}{\text{جتاس}}$. دس

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}(\text{جتا}٢س - ٢\text{جا}^2 س)}{\cancel{\text{جتاس}}}$. دس

$= \int$ جتا ٢س - ٢ جا^2 س . دس

$= \int$ جتا٢س – (١-جتا٢س) .دس

$= \int$ ٢جتا٢س -١.دس = جا٢س – س + جـ

---

٤٦) $\int \frac{\text{جا}٣س}{\text{جاس}}$. دس

الحل :

$\int \frac{\text{جا}٣س}{\text{جاس}}$. دس $= \int \frac{\text{جا}(س+٢س)}{\text{جاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جاس جتا}٢س + \text{جتاس جا}٢س}{\text{جاس}}$. دس

$= \int \frac{\text{جاس جتا}٢س + ٢\text{جاس جتا}^2 س}{\text{جاس}}$. دس

$= \int \frac{\cancel{\text{جاس}}(\text{جتا}٢س + ٢\text{جتا}^2 س)}{\cancel{\text{جاس}}}$. دس

$= \int$ جتا ٢س + جتا^2 س . دس

$= \int$ جتا٢س + (١+جتا٢س) .دس

$= \int$ ٢جتا٢س +١.دس = جا٢س + س + جـ

---

٤٧) $\int \frac{٢ + ٢\text{جتا}^3 س}{١ - \text{جا}^2 س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{٢ + ٢\text{جتا}^3 س}{\text{جتا}^2 س}$. دس

$= \int \frac{٢}{\text{جتا}^2 س} + ٢$ جتاس . دس

$= \int ٢$ قا^2 س + ٢جتاس . دس = ٢ظاس + ٢جاس + جـ

---

٤٨) $\int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتا س}}$. دس

$= \int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتا س}} \times \frac{١ - \text{جتا س}}{١ - \text{جتا س}}$.دس$= \int \frac{(١ - \text{جتاس})^2}{١ - \text{جتا}^2 س}$. دس

SALEEM ALSATEB

$= \int \frac{1-2جتاس+جتا^2 س}{جا^2 س} \ .دس$

$= \int \frac{1}{جا^2 س} - 2\frac{جتا س}{جا س \times جا س} + \frac{جتا^2 س}{جا^2 س} .دس$

$= \int قتا^2 س - 2قتاس\ ظتاس + ظتا^2 س \ .دس$

$= \int قتا^2 س - 2قتاس\ ظتاس + قتا^2 س - ١ \ .دس$

$= \int 2قتا^2 س - 2قتاس\ ظتاس - ١ \ .دس$

$= -2ظتاس + 2قتاس - س + جـ$

---

٤٩) $\int \frac{1-جا2س}{جاس-جتاس} .دس$

$= \int \frac{جا^2 س - 2جاس جتاس + جتا^2 س}{جاس-جتاس} .دس = \int \frac{(جاس-جتاس)^2}{جاس-جتاس} .دس$

$= \int جاس - جتاس \ .دس = -جتاس - حاس + جـ$

---

٥٠) $\int \frac{1}{جتا^2 س - جتا^4 س} .دس$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س(1-جتا^2 س)} .دس = \int \frac{جا^2 س + جتا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{جا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} + \frac{جتا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} .دس$

$= \int قا^2 س + قتا^2 س \ .دس = ظاس - ظتاس + جـ$

حل اخر:

$\int \frac{1}{جتا^2 س - جتا^4 س} .دس$ | $جا2س = 2جاس\ جتاس$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س(1-جتا^2 س)} .دس$ | $\left(\frac{جا2س}{2}\right)^2 = جا^2 س\ جتا^2 س$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س \times جا^2 س} .دس = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2} جا2س\right)^2} .دس$

$= 4\int \frac{1}{جا^2 2س} .دس = 4\int قتا^2 2س \ .دس$

$= -4\frac{ظتا2س}{2} + جـ$

حل اخر:

$\int \frac{1}{جتا^2 س - جتا^4 س} .دس$

$= \int \frac{1}{جتا^2 س(1-جتا^2 س)} .دس = \int \frac{1}{جتا^2 س \times جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{جا^2 س + جتا^2 س}{جتا^2 س جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{\cancel{جا^2 س}}{جتا^2 س \times \cancel{جا^2 س}} + \frac{\cancel{جتا^2 س}}{\cancel{جتا^2 س} \times جا^2 س} .دس$

$= \int قا^2 س + قتا^2 س \ .دس = ظاس - ظتاس + جـ$

---

٥١) $\int 2حاس\ لو_{هـ}^{جتاس} .دس$

$= \int 2حاس\ جتاس \ .دس = \int جا2س \ .دس = -\frac{1}{2} جتا2س + جـ$

---

٥٢) $\int قا^2 س\ جا^2 س .دس$

$= \int \frac{جا^2 س}{جتا^2 س} .دس = \int ظا^2 س \ .دس = \int قا^2 س - 1 \ .دس$

$= ظاس - س + جـ$

---

٥٣) $\int (قتاس + جاس)^2 .دس$

$= \int قتا^2 س + 2قتاس\ جاس + جا^2 س \ .دس$

$= \int قتا^2 س + 2 + \frac{1}{2}(1-جتا2س) \ .دس$

$= -ظتاس + 2س + \frac{1}{2}(س - \frac{1}{2}جاس) + جـ$

---

٥٤) $\int \frac{قا^2 س - ظا^2 س}{جا^2 5س} .دس$

الحل :

$= \int \frac{1}{جا^2 5س} .دس = \int قتا^2 5س \ .دس$

$= -\frac{1}{5} ظتا\ 5س + جـ$

---

٥٥) $\int \frac{1}{1+قتا س} .دس$

الحل:

$= \int \frac{1}{\frac{1}{جاس}+1} .دس = \int \frac{جاس}{1+جا س} .دس$

$= \int \frac{جاس}{1+جا س} \times \frac{1-جا س}{1-جا س} .دس = \int \frac{جاس - جا^2 س}{1-جا^2 س} .دس$

$= \int \frac{جاس - جا^2 س}{جتا^2 س} .دس = \int \frac{جاس}{جتا^2 س} - \frac{جا^2 س}{جتا^2 س} .دس$

$= \int قاس\ ظاس - ظا^2 س \ .دس$

$= \int قاس\ ظاس - (قا^2 س - 1) \ .دس$

$= قاس - (ظاس - س) + جـ$

SALEEM ALSATEB

٥٦) ∫٢جتاس جتا٣س – جتا٤س . دس

الحل:

= ∫٢ × $\frac{١}{٢}$ (جتا(س-٣س) +جتا(س+٣س)) – جتا٤س . دس

= ∫ جتا(-٢س) .دس = - $\frac{١}{٢}$ جا(-٢س) +جـ

---

٥٧) ∫جتا^{٤}س-جا^{٤}س.دس

الحل :

= ∫ (جتا^{٢}س-جا^{٢}س)(جتا^{٢}س+جا^{٢}س).دس

= ∫جتا٢س . دس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س + جـ

---

٥٨) أثبت أن :

∫ جتاس جتا٣س.دس = جاس جتا^{٣}س + جـ

الحل:

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (جتا(س-٣س)+جتا(س+٣س)).دس

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (جتا(-٢س) +جتا٤س) .دس

= $\frac{١}{٢}$ ∫ جتا(٢س) + جتا (٤س) .دس

= $\frac{١}{٢}$ $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ + $\frac{\text{جتا٤س}}{٤}$ + جـ

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{جاسجتاس}}{}$ + $\frac{\text{جا٢سجتا٢س}}{٢}$ + جـ

= $\frac{١}{٢}$ (جاس جتاس + $\frac{\text{جاسجتاس}(\text{جتا}^{٢}\text{س-جا}^{٢}\text{س})}{}$) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ جاس جتاس (١+ جتا^{٢} س – جتا ^{٢}س) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ جاس جتاس (جتا^{٢} س + جتا ^{٢}س) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ × جاس جتاس × ٢جتا^{٢} س + جـ

=جاس جتا^{٣}س + جـ

---

٥٩) ∫ $\frac{(٢-\text{س})^{٣}}{\text{س}}$. دس

= ∫ $\frac{٨-١٢\text{س}+٦\text{س}^{٢}-\text{س}^{٣}}{\text{س}}$.دس

= ∫ $\frac{٨}{\text{س}}$ - ١٢ + ٦س – س^{٢} .دس

=٨لوس – ١٢س +٣س^{٢} - $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ +جـ

٦٠) ∫ $\frac{\text{جتا٢س}}{\text{جتاس–جاس}}$.دس

الحل:

= ∫ $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س–جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس–جاس}}$ دس

= ∫ $\frac{\cancel{(\text{جتاس–جاس})}\ (\text{جتاس–جاس})}{\cancel{\text{جتاس–جاس}}}$ دس

= ∫جتاس + جاس دس = جاس – جتاس +جـ

---

٦١) إذا كان م(س)= ٤س^{٣} -٢س^{٢} هو معكوس مشتقة للإقتران ق فجد ∫ق(س)-٢ .دس

الحل :

∫ ق(س) – ٢ .دس = م(س) – ٢س + جـ

= ٤س^{٣} -٢س^{٢} -٢س +جـ

SALEEM ALSATEB

التكامل المحدود :

التكامل المحدود للاقتران ق (س) في الفترة [أ ، ب] هو :

$\int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot د س = ق(س)]_{أ}^{ب}$

= ق (ب) – ق (أ)

لإيجاد التكامل المحدود نقوم بإيجاد التكامل بصورة عادية ثم نعوض الحدود:

(تعويض الحد العلوي) – (تعويض الحد سفلي)

أسئلة :جد قيمة كل من التكاملات التالية :

١) $\int_{١}^{٣} (٢س + ١) \cdot د س$

$= س^{٢} + س]_{١}^{٣} = (٩ + ٣) - (١ - ١) = ١٠$

---

٢) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} \cdot د س$

$= \int_{١}^{٢} س^{-٢} \cdot د س = -س^{-١}]_{١}^{٢} = \frac{-١}{س}]_{١}^{٢} = \frac{-١}{٢} + ١ = \frac{١}{٢}$

---

٣) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{س} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٨} س^{\frac{١}{٣}} \cdot دس = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}}]_{١}^{٨} = \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}}]_{١}^{٨} = \frac{٣}{٤} \times ١٦ - \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٤٥}{٤}$

---

٤) $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{س}} \cdot دس$

$= \int_{١}^{٤} س^{-\frac{١}{٢}} \cdot دس = ٢س^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{٤} = ٢\sqrt{س}]_{١}^{٤} = ٤ - ٢ = ٢$

---

٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا س \cdot د س$

$= -جتا س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = -جتا \frac{\pi}{٢} + جتا ٠ = ٠ + ١ = ١$

---

٦) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} قتاس طتا س \cdot د س$

$= -قتا س]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} = -قتا \frac{\pi}{٣} + قتا \frac{\pi}{٦} = -\frac{٢}{\sqrt{٣}} + ٢$

---

٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢} س \cdot دس$

$= ظا س]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = ظا \frac{\pi}{٤} - ظا ٠ = ١ - ٠ = ١$

---

٨) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{جا^{٢} س} \cdot د س$

$= \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} قتا س ظتا س \cdot دس = -قتا س]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= -قتا \frac{\pi}{٢} + قتا \frac{\pi}{٦} = -١ + ٢ = ١$

---

٩) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتا س - جا س \cdot د س$

$= جا س + جتا س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (جا \frac{\pi}{٢} + جتا \frac{\pi}{٢}) - (جا ٠ + جتا ٠)$

$= (١ + ٠) - (٠ + ١) = ٠$

---

١٠) $\int_{١}^{هـ} \frac{١}{س} \cdot دس = لو_{هـ} |س|]_{١}^{هـ} = لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} ١ = ١ - ٠ = ١$

---

١١) $\int_{٠}^{هـ} \frac{١}{س+هـ} \cdot دس = لو_{هـ} |س+هـ|]_{٠}^{هـ}$

$= لو_{هـ} ٢هـ - لو_{هـ} هـ = لو_{هـ} ٢ + ١ - ١ = لو_{هـ} ٢$

---

١٢) $\int_{٠}^{١} ٢هـ^{٢س+١} \cdot دس$

$= هـ^{٢س+١}]_{٠}^{١} = هـ^{٣} - هـ$

---

١٣) $\int_{٠}^{٢} \frac{١ - هـ^{٣س}}{هـ^{س-١}} \cdot دس$

$= \int_{٠}^{٢} هـ^{١-س} (١ - هـ^{٢س}) \cdot دس$

$= \int_{٠}^{٢} هـ^{١-س} - هـ^{س+١} \cdot دس$

$= -هـ^{١-س} - هـ^{س+١}]_{٠}^{٢} = (-هـ^{-١} - هـ^{٣}) - (-هـ^{١} - هـ)$

$= -هـ^{-١} - هـ^{٣} + ٢هـ$

SALEM ALSATEB

١٤) $\int_{0}^{\ln 2} (9e^{x} - 4e^{x}).dx$

الحل :

$= \int_{0}^{\ln 2} 9e^{x} - 4e^{2x} \, . \, dx$

$= [9e^{x} - 2e^{2x}]_{0}^{\ln 2}$

$= (9e^{\ln 2} - 2e^{2\ln 2}) - (9e^{0} - 2e^{0})$

$(18-8)-(9-2)=3$

قاعدة سريعة :

$\int_{أ}^{آ}$ جـ . د س = جـ (ب – أ) : حيث جـ = ثابت

أمثلة :

١) $\int_{1}^{أ}$ ٨ . د س = ٨ (٥ – ١) = ٣٢

٢) $\int_{1}^{أ}$ -٥ . دس = -٥ (٣ – ١) = -١٠

ملاحظة على إيجاد الثوابت :

١) إذا طلب منا السؤال إيجاد قيمة الثابت نكامل ثم نعوض الحدود

٢) قاعدة كثير الحدود من الدرجة الاولى :

ق (س) = أس + ب

قاعدة كثير الحدود من الدرجة الثانية :

ق (س) = أس^{٢} + ب س + جـ

أسئلة : جد قيمة الثابت (أ) في كل من ما يلي :

١) $\int_{1}^{أ^{٢}}$ ٣ . د س = ٩

الحل :

$\int_{1}^{أ^{٢}}$ ٣ . د س= ٣ (٢ أ – ١) = ٩ ⟸ ٢ أ – ١ = ٣

⟸ أ =٢

٢) $\int_{ب}^{أ}$ أ . د س = ٤

الحل :

$\int_{ب}^{أ}$ أ . د س = أ (أ – ٠) = ٤ ⟸ أ^{٢} = ٤ ⟸ أ = ± ٢

٣) $\int_{أ}^{٢}$ ٢أ . د س = -٣٠

الحل :

$\int_{أ}^{٢}$ ٢أ . د س =٢ أ (٢- أ) = -٣٠

٤أ-٢أ^{٢}=-٣٠⟸٢ آ^{٢} -٤آ-٣٠=٠.

أ^{٢} -٢أ-١٥=٠⟸(أ-٥)(أ+٣)=٠.

⟸أ=٥ ، أ=-٣

٤) $\int_{٢أ^{٢}}^{٣+٤أ}$ ٨.دس=٥٦

الحل :

$\int_{٢أ^{٢}}^{٣+٤أ}$ ٨.دس=٨(٣+٤أ-(٢+٢أ))=٥٦

⟸٨(١+٢أ)=٥٦⟸١+٢أ=٧⟸أ=٣

٥) $\int_{1}^{أ}$ (٣س^{٢}+٦س).دس=صفر

الحل :

$\int_{1}^{أ}$ ٣س^{٢}+٦س.دس=س^{٣}+٣س^{٢}]$_{1}^{أ}$

= أ^{٣} +٣أ^{٢}-(١+٣)=٠.

⟸أ^{٣}+٣أ^{٢}-٤=٠⟸(أ-١)(أ+٢)(أ+٢)=٠.

⟸ أ=١ ، -٢

٦) $\int_{أ}^{0}$ ٣أ.دس=١٨

الحل:

$\int_{أ}^{0}$ ٣أ.دس=٣أ(٥-أ)=١٨

⟸١٥أ-٣أ^{٢}-١٨=٠⟸أ^{٢}-٥أ+٦=٠.

⟸(أ-٢)(أ-٣)=٠⟸أ=٢، ٣

SALEM ALSATEB

٧) $\int_{٢}^{٣}$ ٥.دس = $\int_{٠}^{١}$ ٢س+٦.دس، فجد قيمة الثابت جـ .

الحل :

٥(جـ - ٢) =$س^{٢}$ + ٦س]$_{٠}^{١}$ = (١+٦)-(٠+٠) =٧

٥جـ-١٠=٧ ⟸ جـ = $\frac{١٧}{٥}$

---

٩) اذا كان ق(٣) = ٧ ، ق(١) = ٢ و كان

$\int_{١}^{٣}$ أ ق/س + ٢س.دس =٣ ، جد قيمة الثابت أ.

الحل:

$\int_{١}^{٣}$ أ ق/س + ٢س.دس = أ ق(س) + $س^{٢}$]$_{١}^{٣}$

= (أق(٣) +٩) – (أ ق(١) + ١)

= (٧أ + ٩) – ٢أ – ١ = ٥أ – ٨ = ٢٣ ⟸ $\frac{٥أ}{٥}$ = $\frac{١٥}{٥}$

أ = ٣

---

١٠) اذا كان $\int_{١}^{٣}$ ٢س + أ .دس = ٨ ، جد قيمة أ.

الحل:

$\int_{١}^{٣}$ ٢س + أ .دس = $س^{٢}$ + أس]$_{١}^{٣}$

= (٩ +٣أ) – (١ + أ) = ٨ + ٢أ = ١٨

٢أ = ١٠ ⟸ أ = ٥

---

١١) $\int_{١}^{جـ}$ ٣ $س^{٢}$ – ٢ س – ٤ . دس = صفر ،جد قيمة جـ

الحل :

$\int_{١}^{جـ}$ ٣$س^{٢}$ – ٢ س – ٤ . دس = $س^{٣}$ – $س^{٢}$ – ٤س]$_{١}^{جـ}$

= $جـ^{٣}$ – $جـ^{٢}$ -٤ جـ + ٤ = ٠ .

⟸ (جـ - ١) ($جـ^{٢}$ – ٤) = ٠ ⟸ جـ = { ١ ، ٢ ،-٢}

---

١٢) إذا كان أ عدد صحيح موجب فما مجموع قيم أ التي

تجعل $\int_{-١}^{١}$ $س^{أ}$. دس = $\int_{٠}^{١}$ ٢ $س^{أ}$.د س صحيحة .

الحل :]$_{-١}^{١}$ $\frac{س^{أ+١}}{أ+١}$=]. $\frac{٢س^{أ+١}}{أ+١}$

$\frac{١^{أ+١}}{أ+١}$ - $\frac{(-١)^{أ+١}}{أ+١}$ = $\frac{٢(١)^{أ+١}}{أ+١}$ - $\frac{٢(٠)^{أ+١}}{أ+١}$

$\frac{١}{أ+١}$ - $\frac{(-١)^{أ+١}}{أ+١}$ = $\frac{٢}{أ+١}$ نضرب ب (أ + ١)

١ –(-١)$^{أ+١}$ = ٢ ⟸ (-١)$^{أ+١}$ = -١

⟸ أ + ١ = عدد فردي ⟸أ = عدد زوجي

---

١٣) إذاكان ل ، م هما معكوسا مشتقة للإقتران ق وكان

$\int_{-١}^{٢}$ (ل(س) – م(س)) .دس =١٢ فجد قيمة

$\int_{١}^{٨}$ (م(س) – ل(س)) .دس ؟

الحل :

ل(س) – م(س) = أ

$\int_{-١}^{٢}$ أ .دس = أ(٢+١) = ٣أ=١٢ ⟸ أ= ٤

$\int_{١}^{٨}$ (م(س) – ل(س)) .دس= $\int_{١}^{٨}$ -٤.دس =-٤(٨-١)=-٣٢

أسئلة على إيجاد قواعد الاقتران كثير الحدود :

قواعد كثير الحدود:

❖ الدرجة الاولى :

ق(س) = أس +ب

ق/(س) = أ = ثابت

❖ الدرجة الثانية :

ق(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ

ق/(س) = ٢أس +ب

ق//(س) = ٢أ = ثابت

SALEM ALSATEB

١) جد قاعده كثير حدود من الدرجة الأولى حيث

$\int_{-1}^{1}$ ق(س).دس=٤ ، $\int_{1}^{3}$ ق(س).دس=٢

الحل:

ق(س)=أس+ب

$\int_{-1}^{1}$ أس+ب.دس = $\frac{أس^{٢}}{٢}$ +ب س]$_{-1}^{1}$

=($\frac{أ}{٢}$ + ب) – ($\frac{أ}{٢}$ - ب)

=٢ب=٤⟸ب=٢

$\int_{1}^{3}$ أس+٢.دس = $\frac{أس^{٢}}{٢}$ +٢ س]$_{1}^{3}$

=($\frac{٩أ}{٢}$ + ٦) – ($\frac{أ}{٢}$ +٢)

= ٤أ +٤ = ٢

٤أ = -٢ ⟸ أ = - $\frac{١}{٢}$

∴ ق(س) = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢

---

٢)جد قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الاولى إذا

علمت أن $\int_{1}^{2}$ ق (س) .د = ٨ ، ق (٠) = ٣ .

الحل : ق (س) = أ س + ب

ق (٠) = أ × ٠ + ب = ٣ ⟸ ب = ٣

$\int_{1}^{2}$ أ س + ٣ . د س = $\frac{أ}{٢}$ س^{٢} + ٣س]$_{1}^{2}$

= (٢ أ + ٦) – ($\frac{أ}{٢}$ + ٣) = ٨ ⟸ $\frac{٣أ}{٢}$ - ٣ = ٨

$\frac{٣أ}{٢}$ ⟸ = ٥ ⟸أ = $\frac{١٠}{٣}$

∴ ق (س)= $\frac{١٠}{٣}$س + ٣

---

٣)جد قاعدة الاقتران كثير الحدود إذا علمت أن

ق (٠) = ٥ ، قً (س) = ٤ ، $\int_{0}^{1}$ قَ(س) .د س = ٣ .

الحل :

ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

ق(٠) = أ × ٠ + ب × ٠ + جـ = ٥

⟸ جـ = ٥

قَ (س) = ٢أ س +ب

قً (س) = ٢ أ = ٤

⟸أ = ٢

$\int_{0}^{1}$ ٤س + ب . دس = ٢ س^{٢} +ب س]$_{0}^{1}$

= (٢ + ب) – (٠ + ٠) = ٣

⟸ ب = ١

∴ق(س) = ٢ س^{٢} +س + ٥

SALEEM ALSATEEB

خواص التكامل المحدود :

١) $\int_{أ}^{أ}$ ق (س) . د س = صفر

٢) الخواص الخطية :

أ) $\int_{أ}^{آ}$ جـ ق (س) – د س = جـ $\int_{أ}^{آ}$ ق (س) . دس

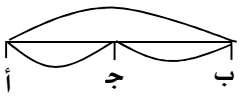
ب) $\int_{أ}^{آ}$ ق (س) ± هـ (س) . د س

= $\int_{أ}^{آ}$ ق (س) .دس ± $\int_{أ}^{آ}$ هـ (س) . د س

٣) خاصية القلب عكس الحدود :

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س) . دس = - $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) .دس

٤) خاصية الاضافة :



$\int_{أ}^{آ}$ق(س) . د س = $\int_{أ}^{ج}$ ق(س) . د س + $\int_{ج}^{آ}$ق(س) . د س

٥) خاصية المقارنة:

أ) ق (س) ≥ صفر حيث س [∋ أ ، ب]

$\int_{أ}^{آ}$ ⇐ ق (س) . دس ≥ صفر

ب) ق (س) ≤ صفر حيث س [∋أ ، ب]

$\int_{أ}^{آ}$ ⇐ق (س) . دس ≤ صفر

جـ) ق (س) ≤ هـ (س) حيث س [∋أ ، ب]

$\int_{أ}^{آ}$ ⇐ق (س) . دس ≤ $\int_{أ}^{آ}$ هـ (س) . د س

أسئلة :

١) $\int_{٣}^{٣}$ ٢ س^{٢} + ٤ س + ٥ .د س = صفر

---

٢) $\int_{٣}^{٣}$ $\frac{قا^{٢}س - ظا^{٢}س}{جا^{٢}٥س}$ + س^{٢} – ٥هـ$^{٢س+١}$.دس = صفر

---

٣) $\int_{ب}^{٢}$ ($\int_{١}^{٣}$ ٣س^{٢} .دس –س+ $\int_{٢}^{٢}$ هـ(س).دس).دس

الحل :

$\int_{ب}^{٢}$ (٢٦–س+ ٠).دس = ٢٦س- $\frac{س^{٢}}{٢}$]$_{ب}^{٢}$ = (٢-٥٢)-(٠-٠)=٥٠

---

٤) $\int_{١}^{٢}$ ٢ ق (س). دس = ٤ ، جد $\int_{١}^{٢}$ ٥ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{١}^{٢}$ ٢ ق (س) . د س = ٢ $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس = ٤

$\int_{١}^{٢}$ ق (س) . د س = ٢

المطلوب :

$\int_{١}^{٢}$ ٥ ق (س) . د س = ٥ $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس

= ٥ × ٢ = ١٠

---

٥) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٢ ق (س) . د س = ١٠ فجد

$\int_{١}^{٢}$(ق (س) + ٦) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{١}^{٢}$٢ق(س). دس= ٢ $\int_{١}^{٢}$ق(س).دس=١٠ ⇐ $\int_{١}^{٢}$ق(س).دس =٥

المطلوب

$\int_{١}^{٢}$(ق (س) + ٦) . دس

= $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس + $\int_{١}^{٢}$ ٦ . دس

= ٥ + ٦ (٢ + ١) = ٥ + ٦ = ١١

---

٦) $\int_{ب}^{٢}$ق (س) -٢س . دس = ٢ فجد

$\int_{ب}^{٢}$ ٣ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{ب}^{٢}$ ق (س) -٢س . دس

= $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس + $\int_{ب}^{٢}$ - ٢ س . دس

= $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس – ٤ = ٢ ⇐ $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس = ٦

المطلوب

$\int_{ب}^{٢}$ ٣ ق (س) . دس = ٣ $\int_{ب}^{٢}$ ق (س) . دس = ٣ × ٦ = ١٨

SALEEM ALSATEB

٧) إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ ٢ق (س) +٢ . د س = ٨ فجد

$\int_{٢}^{٤}$ ٢س – ٣ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٢}^{٤}$ ٢ ق (س) +٢ . د س

= ٢ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س).دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٢ . دس

=٢ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . د س + ٤ = ٨

$\Leftarrow$ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . د س = ٢

المطلوب :

$\int_{٢}^{٤}$ ٢س – ٣ ق (س) . دس =

$\int_{٢}^{٤}$ ٢س.دس – ٣ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس

= س^{٢}]$_{٢}^{٤}$ - ٣ × ٢ = ١٢ – ٦ = ٦

---

٨) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ق (س) . دس = ٥ ،

فجد $\int_{٤}^{١}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{٤}^{١}$ ق (س) . دس = - $\int_{١}^{٤}$ ق (س) . دس = -٥

---

٩) إذا كان $\int_{٠}^{٢}$ ٢ ق (س) -٤ . دس = -٢ ، جد

$\int_{٠}^{٢}$ ٣ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ق (س) -٤ . دس = ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س).دس- $\int_{٠}^{٢}$ ٤ . دس

= ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس -٤ (٢-٠) = -٢

$\Leftarrow$ ق (س) . دس =٣

المطلوب

$\int_{٠}^{٢}$ ٣ ق (س) . دس = -٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) دس = -٩

١٠) $\int_{٠}^{٢}$ ٢س + ٣ ق (س) . د س = ١٦ فجد

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ + ٢ ق (س) . د س

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٠}^{٢}$ ٢س + ٣ ق (س) . د س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢ س . دس + ٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس

= ٤ + ٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . د س = ١٦

$\Leftarrow$ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس = ٤

المطلوب

$\int_{٠}^{٢}$ ٢ + ٢ ق (س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢. د س – ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس

= -٤ - ٢ × ٤ = - ١٢

---

١١) إذا كان $\int_{-١}^{٣}$ ($\int_{١}^{٢}$ ق(س) . دس).دس = ٢٤

فجد $\int_{٢}^{١}$ق(س) . دس .

الحل:

$\int_{١}^{٢}$ ق(س) . دس = أ

$\int_{-١}^{٣}$ أ.دس = أ(٣+١)=٤أ=٢٤ $\Leftarrow$ أ= ٦

$\int_{٢}^{١}$ق(س) . دس = -٦

SALEEM ALSATEB

خاصية الإضافة :

بتعرف أنه السؤال على خاصية الاضافة إذا كان لدينا ٣ تكاملات داخلها ق (س)

خطوات الحل :

١) نرتب المعطيات نجعل داخل التكامل ق (س) لوحدها وحدود التكامل مرتبة

٢) نكتب القانون ونعوض ونجد المفقود

٣) لا تنسى المطلوب من السؤال

أسئلة :

١) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . د س = ٢ ،

$\int_{٣}^{٧}$ ق (س) . د س= ٤ ، جد $\int_{١}^{٧}$ ق (س) . دس

الحل : $\int_{١}^{٧}$ ق (س) . دس

= $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس + $\int_{٣}^{٧}$ ق (س) . دس = ٢+٤=٦

---

٢) $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس = ٥ ، $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس = ٤

فجد $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس = $\int_{١}^{٢}$ ق (س) . دس + $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

٤ = ٥ + $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

$\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس = -١

---

٣) $\int_{-١}^{٠}$ ق (س) . دس = ٤ ، $\int_{٣}^{٠}$ (ق (س) +٢). دس = ٩

فجد : $\int_{-١}^{٣}$ (٤ق (س) +٧). دس .

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٣}^{٠}$ ق (س) +٢. دس = $\int_{٣}^{٠}$ ق (س) . دس + $\int_{٣}^{٠}$ ٢. دس

$\int_{٣}^{٠}$ ق (س) . دس +٢(٥-٣) = ٩

⇐ $\int_{٣}^{٠}$ ق (س) . دس = ٥

⇐ $\int_{-١}^{٠}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٣}$ ق (س). دس + $\int_{٣}^{٠}$ ق (س) .دس

⇐٤ = $\int_{-١}^{٣}$ ق (س). دس +٥

⇐ $\int_{-١}^{٣}$ ق (س). دس = -١

المطلوب

$\int_{-١}^{٣}$ ٤ ق (س) + ٧ . دس

= ٤ $\int_{-١}^{٣}$ ق (س). دس + $\int_{-١}^{٣}$ ٧ . دس

= ٤ × -١ + ٧ (١+٣) = ٢٤

---

٤) إذا كان $\int_{٤}^{٢}$ ق (س). دس = ٤ ، $\int_{٢}^{٧}$ $\frac{ق(س)}{٣}$. دس = ٢،

جد $\int_{٧}^{٤}$ ٢ق (س). دس

الحل : نرتب المعطيات

$\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس = -٤ ، $\int_{٢}^{٧}$ ق (س). دس = ٦

$\int_{٢}^{٧}$ ق (س). دس = $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس+ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس

⇐٦ = -٤ + $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس

⇐ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس = ١٠

المطلوب

$\int_{٧}^{٤}$ ٢ق (س). دس = -٢ $\int_{٤}^{٧}$ ق (س). دس

= -٢ × ١٠ = -٢٠

---

٥) $\int_{-١}^{٢}$ (٣ق (س) -٤) . دس = ٣ ،

$\int_{٤}^{٢}$ ق (س). دس = ٦

جد $\int_{-١}^{٤}$ (ق (س) +٢س) . دس

الحل : ترتيب المعطيات

$\int_{-١}^{٢}$ ٣ق (س) – ٤ . دس

= ٣ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس - $\int_{-١}^{٢}$ ٤ دس = ٣

SALEM ALSATEB

$= ٣ = \int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس -١٢ = ٣

$\Leftarrow \int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس = ٥

$\int_{٤}^{٢}$ ق (س). دس = ٦ $\Leftarrow \int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس = -٦

$\int_{-١}^{٤}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس + $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس

= ٥ + -٦ = -١

المطلوب

$\int_{-١}^{٤}$ ق (س)+٢س . دس

= $\int_{-١}^{٤}$ ق (س). دس + $\int_{-١}^{٤}$ ٢س. دس = -١ + س$^{٢}]_{-١}^{٤}$ = -١ +

١٥ = ١٤

---

٦) إذا كان قابلا للتكامل تنتمي لها الاعداد أ ، ب ، جـ فإن :

$\int_{أ}^{جـ}$ ق (س). دس - $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس =

أ) $\int_{جـ}^{آ}$ ق (س). دس ب) $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س). دس

جـ) $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س). دس د) $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

الحل :

$\int_{أ}^{جـ}$ ق (س). دس - $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس

= $\int_{أ}^{جـ}$ ق (س). دس + $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

= $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س). دس $\Leftarrow$ الجواب (ب)

---

٧) إذا كان $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس - $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس

= $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس ، جد قيمة {أ ، ب}

الحل :

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٢}$ ق (س). دس + $\int_{٢}^{٤}$ ق (س). دس

= $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس = $\int_{-١}^{٤}$ ق (س). دس

$\Leftarrow$ قيمة {أ ، ب } = { -١ ، ٤ }

٨)إذا كان $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس =٣،جد

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس - $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

الحل :

$\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس - $\int_{ب}^{أ}$ ق (س). دس

= $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس + $\int_{أ}^{آ}$ ق (س). دس = ٣ + ٣ = ٦

SALEEM ALSATEEB

خاصية المقارنة :

هناك أربعة أنواع من الأسئلة

النوع الأول :

يطلب منا تحديد إشارة التكامل تحدد إشارة الاقتران ومنها نحدد إشارة التكامل

أمثلة : دون إجراء عملية التكامل

ما إشارة كل من التكاملات التالية :

١) $\int_{١}^{٢} س^{٢} . دس$

الحل : $س^{٢} > ٠$ حيثس $\in [١ ، ٢]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} س^{٢} . دس > ٠ \Leftarrow \int_{١}^{٢} س^{٢} . دس$= موجب

---

٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا \sqrt{س} . دس$

الحل :

جتا $\sqrt{س} \leq ٠$ حيثس $\in [٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا \sqrt{س} . دس \leq ٠ \Leftarrow \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا \sqrt{س} . دس$ = موجب

---

٣) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} طا س . دس$

الحل :

طا $س \geq ٠$ حيث س $\in [\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} طا س . دس \geq ٠ \Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} طا س . دس$ = سالب

---

٤) $\int_{-١}^{٠} \frac{س}{س^{٢}+١} . دس$

الحل :

$\frac{س}{س^{٢}+١} \geq ٠$ حيث س $\in [-١ ، ٠]$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٠} \frac{س}{س^{٢}+١} . دس \geq ٠$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٠} \frac{س}{س^{٢}+١} . دس$ =سالب

النوع الثاني :

يعطينا تكاملين ويطلب تحديد أيها أكبر نحدد أي الإقترانات أكبر بالتعويض

ملاحظة : في الفترة [٠ ، ١] يكون الجذور أكبر من القوى الصحيحة كما ان الجذور الأكبر تكامله أكبر.

أسئلة : حدد أي التكاملات التالية أكبر دون إجراء عملية التكامل :

١) $\int_{٠}^{١} س . دس$ ، $\int_{٠}^{١} س^{٢} . دس$

الحل :

$س \geq س^{٢}$ س $\in [٠ ، ١]$

$\Leftarrow \int_{٠}^{١} س . دس \geq \int_{٠}^{١} س^{٢} . دس$

---

٢) $\int_{٠}^{٢} س^{٢} + ٢ س . دس$ ، $\int_{٠}^{٢} س^{٢} - ١ . دس$

الحل :

$س^{٢} + ٢س \geq س^{٢} - ١$ حيث س $\in [٠ ، ٢]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{٠}^{٢} س^{٢} + ٢س . دس \geq \int_{٠}^{٢} س^{٢} - ١ . دس$

---

٣) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جتا س . دس$ ، $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جا س . دس$

الحل :

جتا $س \geq$ جا س س $\in [\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ بالتعويض

$\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جتا س.دس \geq \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} جا س . دس$

---

٤) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س} .دس$ ، $\int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{س} .دس$ ، $\int_{٠}^{١} س^{٥}.دس$

الحل :

$\sqrt[٣]{س} \leq \sqrt{س} \leq س^{٥}$ حيث س $\in [٠ ، ١]$

$\int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{س} .دس \leq \int_{٠}^{١} \sqrt{س} .دس \leq \int_{٠}^{١} س^{٥}.دس$

SALEM ALSATEB

النوع الثالث : يعطينا الاقتران محصور فإن التكامل يوزع على المتباينة

أسئلة :

١) إذا كان ق (س) ≤ ٣ حيث س ∈ [١ ،٣] ، جد أقل قيمة لـ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{١}^{٣}$ ٣. دس

⟸ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) . دس ≤ ٦

---

٢) ٢ ≤ ق (س) ≤ ٥ حيث س ∈ [-١ ،٢] جد أكبر وأقل قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) . دس

الحل :

$\int_{-١}^{٢}$ ٢ . دس ≤ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ ٥ $\int_{-١}^{٢}$. دس

⟸ ٦ ≤ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ ١٥

∴ أكبر قيمة ١٥ و أقل قيمة ٦

---

٣) إذا كان ٢ ≤ ق (س) – ٣ ≤ ٥ حيث س ∈ [-٢ ، ٢] ، جد أكبر وأقل قيمة لـ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . دس

الحل : نرتب المعطيات

٦ ≤ ٢ ق (س) ≤ ٨ ⟸ ٣ ≤ ق (س) ≤ ٤

$\int_{-٢}^{٢}$ ٣ . دس ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ٤ . دس

١٢ ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ ١٦

⟸ أكبر قيمة (١٦) ، أصغر قيمة (١٢)

---

٤) إذا كان -١ ≤ ق (س) ≤ ٢ حيث ∈ [٢ ، ٥] فجد أقل وأكبر قيمة لـ $\int_{٢}^{٥}$ ٤ – ٢ ق (س) . دس

الحل :

-١ ≤ ق (س) ≤ ٢ ⟸ ٢ ≤ -٢ ق (س) ≤ -٤

⟸ ٦ ≤ ٤ – ٢ ق (س) ≤ ٠

$\int_{٢}^{٥}$ ٦ . دس ≤ $\int_{٢}^{٥}$ ٤ – ٢ ق (س) . دس ≤ $\int_{٢}^{٥}$ ٠ . دس

١٨ ≤ $\int_{٢}^{٥}$ ٤ – ٢ ق (س) . دس ≤ ٠

⟸ أكبر قيمة (١٨) و أقل قيمة (٠)

النوع الرابع :

عندما يكون الاقتران غير محصور ويطلب من أعلى قيمة وأقل قيمة " خطوات الحل "

١) نشق ونساوي المشتقة بالصفر

٢) نجد القيم الحرجة

٣) نجد صور القيم الحرجة

٤) نحص الاقتران وندخل التكامل

أسئلة :

١) ق (س) = $س^{٢}$ -٢س +٤ جد اكبر قيمة وأقل قيمة لـ $\int_{٠}^{١}$ ق (س) . دس

الحل :

قَ (س) = ٢ س – ٢ = ٠ ⟸ س = ١

الأطراف ⟸ س = ٠ ، ٢

ق(١) = ٣ ، ق(٠) = ٤ ، ق(٢) = ٤

٣ ≤ ق (س) ≤ ٤

٣ $\int_{٠}^{٢}$ دس ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ٤ . دس

٦ ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) . دس ≤ ٨

SALEM ALSATEB

٢) ق(س) = $\sqrt{١-س^{٢}}$ فأثبت أن

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س).دس ≥ ٢

الحل :

قَ(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{١-س^{٢}}}$ = صفر

أصفار البسط ⟸ س = ٠

أصفار المقام ⟸ س = ١ ، -١

الأطراف ⟸ س = ١ ، -١

ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(-١) = ٠

⟸ ٠ ≤ ق(س) ≤ ١ حيث س ∈ [-١ ، ١]

⟸ $\int_{٠}^{٢}$ ٠ .دس ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) .دس ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ١ .دس

⟸ ٠ ≤ $\int_{٠}^{٢}$ ق(س).دس ≤ ٢ وهو المطلوب

---

٣) ق (س) جتا س فجد الفترة التي ينحصر بها

$\int_{٠}^{\pi}$ ٢ – ٣ ق (س) . دس

الحل :

قَ (س) =- جا س = ٠

أصفار المشتقة ⟸ س = ٠ ، π

الأطراف ⟸ س = ٠ ، π

ق(٠) = ١ ، ق(π) = -١

⟸ -١ ≤ ق (س) ≤ ١ حيث س ∈ [٠ ، π]

⟸ ٣ ≤ -٣ ق (س) ≤ ٣

⟸ ٥ ≤ ٢ – ٣ ق (س) ≤ -١

$\int_{٠}^{\pi}$ ٥ . د س ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ ٢ – ٣ ق (س) . دس ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ -١ . دس

٥ π ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ ٢ – ٣ ق (س) . دس ≤ - π

---

٤) ق (س) = جا س حيث س ∈ [٠ ، π]

جد الفترة التي يتخصر بها $\int_{٠}^{\pi}$ جا س . دس

الحل : قَ (س) = جتا س = ٠

أصفار المشتقة ⟸ س= $\frac{\pi}{٢}$

الأطراف ⟸ س = ٠ ، π

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ١ ، ق(٠) = ٠ ، ق(π) = ٠

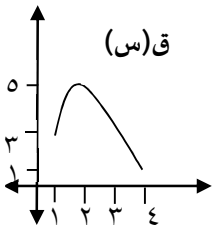
⟸ ٠ ≤ ق (س) ≤ ١ حيث س ∈ [٠ ، π]

⟸ $\int_{٠}^{\pi}$ ٠ . دس ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ ق (س) . دس ≤ $\int_{٠}^{\pi}$ ١ . دس

⟸ ٠ ≤ ق (س) . دس ≤ π

---

٥) بالإعتماد على الرسم المجاور لمنحنى ق المعرف على الفترة [١ ، ٤]جد أعلى قيمة وأقل قيمة لـ $\int_{١}^{أ}$ ق(س).دس



الحل :

١≤ق(س) ≤ ٥

$\int_{١}^{أ}$ ١.دس ≤ $\int_{١}^{أ}$ ق(س) .دس ≤ $\int_{١}^{أ}$ ٥ .دس ⟸ ٣≤ $\int_{١}^{أ}$ ق(س) .دس≤١٥

SALEEM ALSATEEB

تكامل الاقتران المتشعب

- نستخدم هنا خاصية الاضافة
- المطلق وأكبر عدد صحيح تعيد تعريفها

مثال :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & ، \ ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢\text{س} - ٢ & ، \ ١ \leq \text{س} \leq ٤ \\ ٤ & ، \ ٤ \leq \text{س} \leq ٦ \end{cases}$$

فجد :

أ) $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس

ب) $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس

جـ) $\int_{٠}^{٤}$ ق (س) . دس

د) $\int_{٠}^{٦}$ ق (س) . دس

هـ) $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) . دس

و) $\int_{١}^{٥}$ ق (س) . دس

ز) $\int_{٠}^{٤}$ ٢ق (س)− ٧ . دس

ح) $\int_{١}^{٥}$ ٣ق (س) + ٤س . دس

الحل :

أ) $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) . دس = $\int_{٠}^{٢}$ ٣س^{٢} . دس = س^{٣}]$_{٠}^{٢}$

=(٨) − ٠ = ٨

ب) $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس = $\int_{٢}^{٤}$ ٢س-٢ . دس = س^{٢} − ٢س]$_{٢}^{٤}$

= (١٦-٨) − (٤ -٤) = ٨

جـ) $\int_{٠}^{٤}$ ق(س) . دس = $\int_{٠}^{٢}$ ق (س). دس+ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ٣س^{٢} . دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٢س-٢ . دس= س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + س^{٢} − ٢س]$_{٢}^{٤}$

= (٨) − ٠ + (١٦-٨) − (٤ -٤) = ٨ + ٨ = ١٦

د) $\int_{٠}^{٦}$ ق (س) . دس=

= $\int_{٠}^{٢}$ ق (س). دس+ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس+ $\int_{٤}^{٦}$ ق (س). دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ٣س^{٢} . دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٢س-٢ . دس + $\int_{٤}^{٦}$ ٤ . دس

=س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + س^{٢} − ٢س]$_{٢}^{٤}$ + ٤س]$_{٤}^{٦}$

=(٨) − ٠ + (١٦-٨) − (٤ -٤) + (٢٤) +(١٦) =٢٤

هـ) $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ق (س). دس+ $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ٣س^{٢} . دس + $\int_{٢}^{٣}$ ٢س-٢ . دس

= س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + س^{٢} − ٢س]$_{٢}^{٣}$

= (٨) − ٠ + (٩-٦) − (٤ -٤) = ٨ + ٣ = ١١

و) $\int_{١}^{٥}$ ق (س) . دس =

= $\int_{١}^{٢}$ ق (س). دس+ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) . دس+ $\int_{٤}^{٥}$ ق (س). دس

= $\int_{١}^{٢}$ ٣س^{٢} . دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٢س-٢ . دس + $\int_{٤}^{٥}$ ٤ . دس

=س^{٣}]$_{١}^{٢}$ + س^{٢} − ٢س]$_{٢}^{٤}$ + ٤س]$_{٤}^{٥}$

=(٨) − (١) + (١٦-٨) − (٤ -٤) + (٢٠) +(١٦) =١٩

ز) $\int_{٠}^{٤}$ ٢ق (س)− ٧ . دس

= ٢ $\int_{٠}^{٤}$ ق (س). دس - $\int_{٠}^{٤}$ ٧ . دس

= ٢ × ١٦ − ٧(٤-٠) = ٤

ح) $\int_{١}^{٥}$ ٣ق (س) + ٤س . دس

=-٣ $\int_{١}^{٥}$ ق (س) . دس + $\int_{١}^{٥}$ ٤س . دس

=-٣×١٩ + ٢س^{٢}]$_{١}^{٥}$ = -٥٧ +٥٠-٢ = -١٠٥

الاقتران المطلق " إعادة التعريف "

١) نساوي ما داخل المطلق بالصفر

٢) نعين الاصفار على خط الأعداد ونفحص إشارة ما داخل القيمة المطلقة

٣) المنطقة الموجبة تأخذ ما دخل المطلق نفسه ، المنطقة السالبة نضرب ما داخل المطلق بـ (- ١)

٤) إذا كان لدينا ضيوف نعيد التعريف ثم ندخل الضيوف على الاقتران

٥) لا تنسى طفل المطلق

$\int_{١}^{ن}$ | ق (س) | دس = $\int_{١}^{ن}$ ق(س) دس + $\int_{١}^{ن}$ -(ق(س)) دس ن : عدد زوجي

SALEEM ALSATEB

إقتران أكبر عدد صحيح " إعادة التعريف "

١) نجد طول الفقرة " ل " = $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$

٢) نجد نقطة البداية نساوي ما داخل [ ] بالصفر

٣) نضع خط الأعداد ونضيف ونطرح طول الدرجة (ل)، ونلتزم بالفترة (أطراف التكامل)

٤) نضع المساواة بحيث :

- معامل موجب ⟵ بداية

ب- معامل سالب ⟵ نهاية

- إذا كان لدينا [ ] و || فإننا نعيد تعريف الصحيح ثم نعيد تعريف المطلق .
- [س+أ] = [س] + أ

مشان ابلش خط الاعداد من الصفر دائما

أسئلة :

جد قيمة التكاملات التالية :

١) $\int_{٠}^{٨}$ | س – ٦ | . دس

الحل : س – ٦ = ٠ ⟸ س = ٦

ق (س)= { ٦ – س ، ٠ ≤ س ≤ ٦ ؛ س – ٦ ، ٦ ≤ س ≤ ٨ }

$\int_{٠}^{٨}$ ق (س) . دس = $\int_{٠}^{٦}$ ٦ – س . دس + $\int_{٦}^{٨}$ س – ٦.دس

= [٦ س – $\frac{س^{٢}}{٢}$]$_{٠}^{٦}$ + [$\frac{س^{٢}}{٢}$ - ٦ س]$_{٦}^{٨}$

= (١٨ – ٠) + (-١٦ + ١٨) = ٢٠

---

٢) $\int_{٠}^{٤}$ | ١٢ – ٣س^{٢} | . د س

الحل : ١٢ – ٣ س^{٢} = ٠ ⟸ س = ± ٢

ق (س) = { ١٢ – ٣ س^{٢} ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣ س^{٢} -١٢ ، ٢ ≤ س ≤ ٤ }

$\int_{٠}^{٤}$ ق (س) . دس

= $\int_{٠}^{٢}$ ١٢ – ٣ س^{٢} . دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٣س^{٢} -١٢. دس

= [١٢ س – س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + [س^{٣} – ١٢ س]$_{٢}^{٤}$

= (١٦ - ٠) + (١٦ + ١٦) = ٤٨

---

٣) $\int_{-٤}^{٢}$ $\sqrt{س^{٢}+٤س+٤}$. دس

الحل :

= $\int_{-٤}^{٢}$ $\sqrt{(س+٢)^{٢}}$. دس = $\int_{-٤}^{٢}$ | س + ٢ | . دس

س + ٢ = ٠ ⟸ س = -٢

ق(س) = { - س -٢ ، -٤ ≤ س ≤ -٢ ؛ س +٢ ، -٢ ≤ س ≤ ٢ }

$\int_{-٤}^{٢}$ ق (س) . دس = $\int_{-٤}^{-٢}$ - س -٢ . دس+ $\int_{-٢}^{٢}$ س + ٢ . دس

= [$\frac{-س^{٢}}{٢}$ -٢س]$_{-٤}^{-٢}$ + [$\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٢س]$_{-٢}^{٢}$

= (٢ – ٠) + (٦ + ٢) = ١٠

---

٤) $\int_{٠}^{\pi}$ $\sqrt{١-جا^{٢}س}$.دس

الحل :

$\int_{٠}^{\pi}$ $\sqrt{جتا^{٢}س}$. دس = $\int_{٠}^{\pi}$ | جتا س | . دس

جتا س = ٠ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$

ق(س) = { جتا س ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{٢}$ ؛ - جتا س ، $\frac{\pi}{٢}$ ≤ س ≤ π }

$\int_{٠}^{\pi}$ ق (س) . دس = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا س . دس+ $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ - جتا س . دس

= [جا س]$_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ - [جا س]$_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$

= (١ – ٠) – (-١ – ٠) = ٢

SALEM ALSATEB

٥) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\text{جتا}2س}$. دس

جتا٢س = ٢ جتا^{٢}س -١

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+2\text{جتا}^{٢}س}$. دس

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{2\text{جتا}^{٢}س}$. دس

نعيد التعريف

$= \sqrt{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\ .\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتاس}\ .\text{دس}\right)$

$= \sqrt{2}\left[\text{جاس}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\text{جاس}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}) = \sqrt{2}((١-٠)-(٠-١))$

$= ٢\sqrt{2}$

---

٦) $\int_{0}^{٣} |س٣ س - ٦|$. دس

الحل : ٣س – ٦ = ٠ == س = ٢

ق(س) = { ٦ س – ٣س^{٢} ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ; ٣ س^{٢} -٦س ، ٢ ≤ س ≤ ٣ }

$\int_{0}^{٣}$ ق (س) . دس

$= \int_{0}^{٢}$ ٦ س – ٣ س^{٢} .دس + $\int_{0}^{٢}$ ٣س^{٢} -٦ س . دس

= ٣ س^{٢} – س^{٣}]$_{٠}^{٢}$ + س^{٣} – ٣ س^{٢}]$_{٢}^{٣}$

= (٤ - ٠) + (٠ + ٤) = ٨

---

٧) $\int_{١}^{٤}$ [س + ١] . دس

الحل : ل = ١ ⟸ س+ ١ = ٠ ⟸ س = -١

ق(س) = { ٢ ، ١ ≤ س < ٢ ; ٣ ، ٢ ≤ س < ٣ ; ٤ ، ٣ ≤ س < ٤ }

$\int_{١}^{٤}$ ق(س) . دس = $\int_{١}^{٢}$ ٢ . د س + $\int_{٢}^{٣}$ ٣ . دس+ $\int_{٣}^{٤}$ ٤ . دس

=٢ + ٣ + ٤ = ٩

---

٨) $\int_{0}^{٣}$ [$\frac{١}{٢}$ س + ٤] . دس

الحل : ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢ ⟸ س + ٤ = ٠ ⟸ س = -٨

ق(س) = { ٤ ، ٠ ≤ س < ٢ ; ٥ ، ٢ ≤ س < ٣ }

$\int_{0}^{٣}$ ق(س) . دس = $\int_{0}^{٢}$ ٤ . د س + $\int_{٢}^{٣}$ ٥ . دس

= ٨ + ٥ = ١٣

---

٩) $\int_{0}^{٢}$[٢–٢س] . دس

الحل : ل = $\frac{١}{|-٢|}$ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ ٢ - ٢س = ٠ ⟸ س = ١

ق(س) = { ١ ، ٠ < س ≤ $\frac{١}{٢}$; ٠ ، $\frac{١}{٢}$ < س ≤ ١ ; -١ ، ١ < س ≤ $\frac{٣}{٢}$; -٢ ، $\frac{٣}{٢}$ < س ≤ ٢ }

$\int_{0}^{٢}$ ق(س) . دس

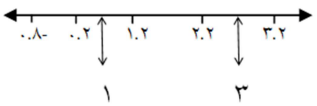
$= \int_{0}^{\frac{١}{٢}}$ ١ . د س + $\int_{\frac{١}{٢}}^{١}$ ٠ . دس + $\int_{١}^{\frac{٣}{٢}}$ ١ . دس+ $\int_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$ -٢ . دس

$= \frac{١}{٢} + ٠ + -\frac{١}{٢} + -١ = -١$

---

١٠) $\int_{١}^{٣}$[س+٠.٨] . دس

الحل: ل = ١ ، س + ٠.٨ = ٠ ⟸ س = - ٠.٨



ق(س) = { ١ ، ٠.٢ ≤ س < ١.٢ ; ٢ ، ١.٢ ≤ س < ٢.٢ ; ٣ ، ٢.٢ ≤ س < ٣.٢ }

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) .دس = $\int_{١}^{١.٢}$ ١ . دس + $\int_{١.٢}^{٢.٢}$ ٢ . دس + $\int_{٢.٢}^{٣}$ ٣ . دس

= ٠.٢ + ٢ + ٢.٤ = ٤.٦

SALEEM ALSATEB

١١) $\int_{-١}^{٢}$ [١ – س] | س | . دس

الحل : نعيد تعريف [١ – س]

ل = $\frac{١}{|-١|}$ = ١ ⟸ س = ١

ق (س) = { | س | × ١ ، -١ < س ≤ ٠ ; | س | × ٠ ، ٠ < س ≤ ١ ; | س | × -١ ، ١ < س ≤ ٢

نعيد تعريف | س | ⟸ س = ٠

ق (س) = { - س ، -١ < س ≤ ٠ ; صفر ، ٠ < س ≤ ١ ; - س ، ١ < س ≤ ٢

$\int_{-١}^{٢}$ ق(س).د س

= $\int_{-١}^{٠}$ - س. د س + $\int_{٠}^{١}$ ٠ .. د س + $\int_{١}^{٢}$ - س . د س

= - [$\frac{س^٢}{٢}$]$_{-١}^{٠}$ + [٠]$_{٠}^{١}$ + - [$\frac{س^٢}{٢}$]$_{١}^{٢}$

= (٠ + $\frac{١}{٢}$) + (-٢ + $\frac{١}{٢}$) = -١

---

١٢) إذا كان م(س) اقتران بدائي للاقتران ق(س) المتصل على مجاله، وكان م(س) يمر بالنقطتين (-١،٣) ، (٠، ١)،فجد

$\int_{-١}^{١}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ - | س |) . دس

الحل :

$\int_{-١}^{١}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ + س) . دس = [$\frac{م(س)}{٢}$ + $\frac{س^٢}{٢}$]$_{-١}^{١}$

= ($\frac{م(٠)}{٢}$ + ٠) – ($\frac{م(-١)}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ - ($\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$)

= $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٤}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

إيجاد الثوابت في الاقتران المتشعب :

- إذا كان لدينا قيمة مطلقة نعيد التعريف .
- إذا كان لدينا] [وطلب منا السؤال إيجاد ثابت فإن الحل بالتجريب إذا كانت الفترة غير معلومة.
- في ثوابت المتشعب يجب معرفة الفترة لمعرفة الاقترانات التابعة للتكامل .

أسئلة :

١) إذا كان $\int_{٠}^{جـ}$ | ٢س – ٢ | . د س = ٥ ، جـ > ١

جد قيمة الثابت جـ

الحل : ٢س – ٢ = ٠ ⟸ س = ١

$\int_{٠}^{جـ}$ | ٢س – ٢| .د س

= $\int_{٠}^{١}$ ٢- ٢س. د س + $\int_{١}^{جـ}$ ٢ س – ٢ . د س

=٢س- س^٢]$_{١}^{١}$ + س^٢- ٢ س]$_{١}^{جـ}$

= ١ + جـ^٢- ٢جـ + ١ = ٥ ⟸ جـ^٢ – ٢ جـ -٣ = ٠

⟸ (جـ - ٣) (جـ + ١) = ٠ ⟸ جـ = ٣ ، جـ = -١ تهمل

---

٢) $\int_{١}^{أ}$ [$\frac{١}{٣}$ س + ١] . د س = ١٢ جد قيمة الثابت

جـ : جـ > ١

الحل : نعيد التعريف

ل =٣ ⟸ $\frac{١}{٣}$ س + ١ = ٠ ⟸ س = - ٣

ق (س)= { ١ ، ٠ ≤ س < ٣ ; ٢ ، ٣ ≤س< ٦ ; ٣ ، ٦ ≤ س < ٩

التجريب :

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ١ . د س = ٢

$\int_{١}^{٦}$ ق(س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ١ . د س + $\int_{٣}^{٦}$ ٢ . د س = ٢ + ٦ = ٨

$\int_{١}^{٩}$ ق(س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ١ . د س + $\int_{٣}^{٦}$ ٢ . د س + $\int_{٦}^{٩}$ ٣ . د س

= ٢ + ٦ + ٩ = ١٧

⟸ جـ ∈ (٦ ، ٩)

SALEM ALSATEB

$\int_{1}^{3}$ ق(س) . د س = $\int_{1}^{3}$ ١ . د س + $\int_{3}^{6}$ ٢ . د س + $\int_{6}^{7}$ ٣ . د س

= ٢ + ٦ + ٣ جـ - ١٨ = ١٢ ⟸ جـ = $\frac{٢٢}{٣}$

---

٣) $\int_{2}^{7}$ [$\frac{س}{٢}$ - ١] . د س = ٤ جد قيمة الثابت جـ

الحل : ل = ٢ ⟸ س = ٢

ق (س)= { ٠ ، ٢ ≤ س < ٤ ؛ ١ ، ٤ ≤ س < ٦ ؛ ٢ ، ٦ ≤ س < ٨

$\int_{2}^{4}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س = صفر

$\int_{2}^{6}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س + $\int_{4}^{6}$ ١ . د س = ٠ + ٢ = ٢

$\int_{2}^{8}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س + $\int_{4}^{6}$ ١ . د س + $\int_{6}^{8}$ ٢ . د س = ٦

⟸ جـ ∈ (٦ ، ٨)

$\int_{2}^{7}$ ق(س) . د س = $\int_{2}^{4}$ ٠ . د س + $\int_{4}^{6}$ ١ . د س + $\int_{6}^{7}$ ٢ . د س

= ٠ + ٢ + ٢جـ - ١٢ = ٢ جـ - ١٠ = ٤

⟸ جـ = ٧

---

٤) $\int_{1}^{4}$ [س + ن] . د س = ١٢

جد قيمة الثابت ن حيث ن ∈ الأعداد الصحيحة .

الحل :

$\int_{1}^{4}$ [س + ن] . د س = $\int_{1}^{4}$ [س] + ن . د س

نعيد التعريف

ل = ١ ⟸ س = ٠

ق (س)= { ١+ ن ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٢ + ن ، ٢ ≤ س<٣ ؛ ٣ + ن ، ٣ ≤ س <٤

$\int_{1}^{4}$ [س + ن] . د س

= $\int_{1}^{2}$ ١ +ن. د س + $\int_{2}^{3}$ ٢+ن. د س + $\int_{3}^{4}$ ٣+ن . د س

= ١ +ن + ٢+ن +٣ + ن =٣ن+٦ = ١٢ ⟸ ن = ٢

S A L E M A L S A T E B

اشتقاق التكامل :

قواعد اشتقاق التكامل :

١) إذا كان ص = $\int_{أ}^{آ}$ ق(س).د س

فإن صَ = صفر

٢) إذا كان ص = $\int_{أ}^{آ}$ ق(س).د س

فإن صَ = ق(س)

أسئلة:

١) جد $\frac{د}{د س}$ ($\int_{1}^{س}$ س٢+٤س+١.دس)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ ($\int_{1}^{س}$ س٢+٤س+١.دس) = س٢+٤س+١

---

٢) جد $\frac{د}{د س}$ ($\int_{1}^{س}$ جتا ٢س+٤س٢+١.دس)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ ($\int_{1}^{س}$ جتا ٢س+٤س٢+١.دس)= صفر

---

٣) اذا كان $\int_{1}^{س}$ س٢ + ق(س).دس = ٣س+١ جد ق (س)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ $\int_{1}^{س}$ س٢+ق (س).دس = $\frac{د}{د س}$ (٣س+١)

⟸ س٢ + ق(س)=٣ ⟸ ق(س) =٣- س٢

---

٤) إذا كان $\int_{ظا}^{قا}$ (ظا٢ س – قا٢ س) ق(س).دس = س٢

جد ق (س) .

الحل:

$\frac{د}{د س}$ $\int_{ظا}^{قا}$ (طا٢ س – قا٢ س) ق(س).دس = $\frac{د}{د س}$ (س٢)

(طا٢س – قا٢ س) ق (س) = ٢س (من المطابقة)

⟸ ق(س) =٢س ⟸ ق(س)=-٢س ⟸ ق(٣)=-٦

٥) إذا كان $\int$ ق(س).دس =جا^{٢} ٢س + ظاس + جـ فجد

قَ($\frac{\pi}{٤}$)

الحل :

$\frac{د}{د س}$($\int$ ق(س).دس) = $\frac{د}{د س}$ (جا^{٢} ٢س + ظاس + جـ)

ق(س) = ٢جا٢س جتا٢س×٢ + قا^{٢}س

ق(س)= ٢جا٤س + قا^{٢}س

قَ(س)=٨جتا٤س + ٢قا^{٢}س ظاس

ق($\frac{\pi}{٤}$)=٨جتا π +٢قا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$ظا$\frac{\pi}{٤}$

= -٨ +٤ = -٤

---

٦) إذا كان ص= $\int$ $\sqrt[٣]{س^{٢}+٣س+٥}$.دس

فجد $\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=-١}$.

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٣]{س^{٢}+٣س+٥}$

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=-١}$ = $\sqrt[٣]{٣}$

---

٧) إذا كان $\int$ ق(س).دس =جاس- جتاس +٢ اثبت أن

ق($\frac{\pi}{٢}$)- قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

الحل : نشتق الطرفين

ق(س)= جتاس +جاس ⟸ ق($\frac{\pi}{٢}$)= ١

قَ(س)=-جاس +جتاس ⟸ قَ($\frac{\pi}{٢}$) = -١

∴ ق($\frac{\pi}{٢}$)- قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ١- -١ = ٢

---

٨) إذا كان $\int$(قَ(س) – س) .دس

= $_{هـ}$لو|قتاس+ظتاس|-٢ فأثبت أن قَ(س)=س-قتاس

الحل : نشتق الطرفين

قَ(س)-س = $\frac{-قتاس ظتاس-قتا^{٢}س}{قتاس+ظتاس}$ = $\frac{-قتاس(ظتاس+قتاس)}{قتاس+ظتاس}$

⟸قَ(س) = س – قتاس

---

٩) إذا كان $\int$ ق(س).دس = $هـ^{س^{٢}}$ +$_{هـ}$لو جاس + جـ ،

فجد قَ(س) .

الحل : نشتق الطرفين

ق(س) = $هـ^{س^{٢}}$×٢س + $\frac{جتاس}{جاس}$

قَ(س) = ($هـ^{س^{٢}}$)(٢)+(٢س)($هـ^{س^{٢}}$ ×٢س) + $\frac{جا^{٢}س-جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$

قَ(س)= ٢$هـ^{س^{٢}}$ +٤س^{٢}$هـ^{س^{٢}}$ - قتا^{٢}س

---

١٠) إذا كان $\int$ ق(س) . دس= ٨ + س^{٢}،فجد $\int_{-١}^{٢}$ قَ(س) . دس

الحل :

($\int$ق(س) . دس) $'$ = (٨ + س^{٢})$'$

⟸ ق(س) = ٢س

$\int_{-١}^{٢}$ قَ(س) . دس = ق(٢) – ق(-١) = ٤ + ٢ = ٦

---

١١) إذا كان ق(س) = س $_{هـ}$لو س، فما قيمة $\int_{١}^{هـ}$ ق$''$(س) . دس

الحل :

ق(س)$'$ = س × $\frac{١}{س}$ + $_{هـ}$لو س × ١

= ١ + لو س

المطلوب : $_{هـ}$

$\int_{١}^{هـ}$ ق$''$(س) . دس = ق$'$(س)]$_{١}^{هـ}$ = ق$'$(هـ) – ق$'$(١)

= (١ + لو هـ) – (١ + لو ١) = ٢ – ١ = ١

---

١٢) إذا كان ص= $هـ^{أجتاس}$ +$_{هـ}$لو جاس + $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ $\frac{دس}{٢+جاس}$

وكان صَ =-٢ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

صَ= $هـ^{أجتاس}$ ×-أجاس + $\frac{جتاس}{جاس}$

صَ= $هـ^{أجتاس}$ ×-أجاس + ظتاس

نعوض س= $\frac{\pi}{٢}$

صَ= $هـ^{٠}$×-أ + ٠ =-٢ ⟸ أ=٢

SALEM ALSATEB

١٣) إذا كان ص= هـ$^{\text{ظاس}}$ +أ ∫$_{\text{ب}}^{\pi}$ لو جتاس + $\frac{١}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}$.دس

وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$ =٢هـ + ١ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{ظاس}}$ ×قا^{٢}س - أ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{ظاس}}$ ×قا^{٢}س - أ ظاس

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$ =هـ^{١}×٢ - أ =٢هـ +١ ⟸ أ = -١

---

١٤) اذا كان ∫ ٢ق$'$(س).دس = ٢س+جاس- ∫ جتاس ق$'$(س). دس

فجد ق$'$(٠) .

الحل:

٢ق$'$(س) = ٢ + جتاس – جتاس ق$'$(س)

٢ق$'$(٠) = ٢ + ١ – ١ ق$'$(٠)

= ٣ ق$'$(٠) = ٣ ⟸ ق$'$(٠) = ١

SALEEM ALSATEEB