المتميز في الرياضيات

الاستاذ

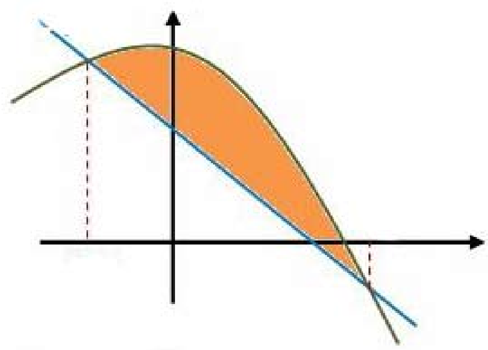
محمود الجزار   مصطفى المصري

هذه الدوسية تحتوي على

شرح وافي للمستوى الرابع

اسئلة مقترحة في نهاية كل وحدة

نماذج اسئلة امتحانات وزارة لسنوات سابقة



المستوى الرابع

الأدبي - الشرعي - الأدارة معلوماتية - التعليم صحي

٠٧٨٦٩٠٩١٢١ - ٠٧٩٧٢٦٦٣٩٩
٠٧٩٩١٧١٥٣٥ - ٠٧٨٨٨٩٩٧٨٣

الوحدة الرابعة

التكامل

التكامل

هو العملية العكسية للمشتقة

ويرمز له بالرمز ∫ ق(س) . دس

ويقرأ تكامل ق(س) دال س

قواعد التكامل غير المحدود

∫ أ . دس = أ س + جـ ، أ ثابت

∫ $\text{س}^{\text{ن}}$. دس = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + جـ

∫ جاس . دس = − جتاس + جـ

∫ جتاس . دس = جاس + جـ

∫ قا^2س . دس = ظاس + جـ

∫ $\text{هـ}^{\text{س}}$. دس = $\text{هـ}^{\text{س}}$ + جـ

∫ $\frac{1}{\text{س}}$. دس = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ |س| + جـ

امثلة

(١) ∫ س^2 دس

الحل: ∫ س^2 . دس = $\frac{\text{س}^3}{3}$ + جـ

(٢) ∫ ٢س . دس

الحل: ∫ ٢س . دس = $\frac{2\text{س}^2}{2}$ + جـ = س^2 + جـ

(٣) ∫ ٥ . دس

الحل: ∫ ٥ . دس = ٥ س + جـ

(٤) ∫ دس

الحل: ∫ دس = س + جـ

(٥) ∫ (قا^2س + ١) . دس

الحل: = ظاس + س + جـ

(٦) ∫ جاس . دس

الحل: = − جتاس + جـ

(٧) ∫ ٦ س^5 . دس

الحل: = $\frac{6\,\text{س}^6}{6}$ + جـ = س^6 + جـ

(٨) ∫ (٢س + ٣) . دس

الحل:

= $\frac{2\text{س}^2}{2}$ + ٣س + جـ = س^2 + ٣س + جـ

(٩) ∫ (٤ قا^2س + ٤ جاس) . دس

الحل:

= ٤ ظاس + ٤ × − جتاس + جـ

= ٤ ظاس − ٤ جتاس + جـ

١٠ $\int (\text{٥س}^{٤} - ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ١)\,.\,\text{دس}$

الحل، يجب التجهيز

$\int (\text{٥س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{\frac{١}{٣}} + ١)\,.\,\text{دس}$

$\frac{\text{٥س}^{٥}}{٥} - ٢\,\frac{\text{س}^{\frac{١}{٣}+\frac{٣}{٣}}}{\frac{١}{٣}+\frac{٣}{٣}} + \text{س} + \text{ج}$

$= \text{س}^{٥} - ٢\,\frac{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{س} + \text{ج} = \text{س}^{٥} - \frac{٦\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}}{٤} + \text{س} + \text{ج}$

١١ $\int \frac{\text{س}^{٢}+٣}{\text{س}^{٥}}\,.\,\text{دس} \quad , \quad \text{س} \neq ٠$

الحل: نوزع البسط على المقام

$\int (\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٥}} + \frac{٣}{\text{س}^{٥}})\,\text{دس} = \int (\text{س}^{-٣} + ٣\,\text{س}^{-٥})\,.\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + ٣\,\frac{\text{س}^{-٤}}{-٤} + \text{ج}$

١٢ $\int (\text{٥هـ}^{\text{س}} - \frac{٢}{\text{٣س}})\,.\,\text{دس}$

الحل: $\int (\text{٥هـ}^{\text{س}} - \frac{٢}{٣}\,\frac{١}{\text{س}})\,.\,\text{دس}$

$= \text{٥هـ}^{\text{س}} - \frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ج}$

١٣ $\int (\text{٥س} + ٣)(\text{س} - ١)\,.\,\text{دس}$

الحل: يجب فك الاقواس قبل التكامل

$\int (\text{٥س}^{٢} - \text{٢س} - ٣)\,.\,\text{دس}$

$= \frac{\text{٥س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{٢س}^{٢}}{٢} - \text{٣س} + \text{ج}$

$= \frac{٥}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - \text{٣س} + \text{ج}$

١٤ $\int (\text{٢جتا س} + \text{٢س}^{٢})\,.\,\text{دس}$

الحل: $\text{٢جاس} + \frac{\text{٢س}^{٣}}{٣} + \text{ج}$

١٥ $\int (\text{٤قا}^{٢}\text{س} + \text{٤جاس})\,.\,\text{دس}$

الحل: $= \text{٤ظاس} - \text{٤جتاس} + \text{ج}$

١٦ $\int \text{ل}\,.\,\text{دس}$ ل: عدد ثابت

الحل: $\int \text{ل}\,.\,\text{دس} = \text{لس} + \text{ج}$

١٧ $\int (\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}})\,.\,\text{دس}$

الحل: متطابقة $= \text{قا}^{٢}\text{س} \leftarrow \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,.\,\text{دس} = \text{ظاس} + \text{ج}$

١٨ $\int (\frac{٤}{\text{جتا}^{٢}\text{س}})\,.\,\text{دس}$

الحل: $\int \text{٤ قا}^{٢}\text{س}\,.\,\text{دس} = \text{٤ظاس} + \text{ج}$

ايجاد قاعدة الاقتران

ميل المماس = قَ(س) ، المشتقة.

$\int \text{قَ(س)} = \text{ق(س)}$

$\int$ التسارع = السرعة

$\int$ السرعة = المسافة

هنا نريد ايجاد الاقتران الاصلي من المشتقة وذلك عن طريق المشتقة

امثلة

(١) اذا كان قَ(س) = ٣س^{٢} − ١٠س نجد قاعدة الاقتران ق، علماً بأن النقطة (٢، ٣) تقع على منحنى الاقتران ق.

الحل: قَ(س) = ٣س^{٢} − ١٠س بإجراء التكامل

∫ قَ(س).دس = ∫(٣س^{٢} − ١٠س).دس

ق(س) = ٣س^{٣}/٣ − ١٠س^{٢}/٢ + جـ

نعوض (٢، ٣) (س، ق(س)) لإيجاد قيمة جـ.

ق(٢) = ٢^{٣} − ٥×٢^{٢} + جـ

٣ = ٨ − ٢٠ + جـ

٣ = −١٢ + جـ ⟸ جـ = ١٥

ق(س) = س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٥

(٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) يساوي (٣س^{٢} + ٨س + ٥) نجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى ق يمر بالنقطة (−٢، ٠).

الحل: ميل المماس = قَ(س)

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٨س + ٥ بإجراء التكامل

∫ قَ(س).دس = ∫(٣س^{٢} + ٨س + ٥).دس

ق(س) = ٣س^{٣}/٣ + ٨س^{٢}/٢ + ٥س + جـ

ق(س) = س^{٣} + ٤س^{٢} + ٥س + جـ

نعوض (−٢، ٠) (س، ق(س)) لإيجاد قيمة جـ

ق(−٢) = (−٢)^{٣} + ٤(−٢)^{٢} + ٥(−٢) + جـ

٠ = −٨ + ١٦ − ١٠ + جـ

٠ = −٢ + جـ ⟸ جـ = ٢

ق(س) = س^{٣} + ٤س^{٢} + ٥س + ٢

(٣) يتحرك جسيم بسرعة في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاة بالعلاقة ع(ن) = (٣ن^{٢} + ٢ن + ٤) م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣ ث) من بدء الحركة علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ٥م.

الحل: ع(ن) = (٣ن^{٢} + ٢ن + ٤) بإجراء التكامل

∫ع(ن) = ∫(٣ن^{٢} + ٢ن + ٤).دن

ف(ن) = ٣ن^{٣}/٣ + ٢ن^{٢}/٢ + ٤ن + جـ

ف(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + جـ

٥ = جـ

ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢} + ٤ن + ٥

ف(٣) = ٣^{٣} + ٣^{٢} + ٤×٣ + ٥

= ٢٧ + ٩ + ١٢ + ٥ = ٥٣م

(٤) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت(ن) = ١٢م/ث^{٢} جد سرعتها بعد مرور ن ثانية علماً بأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٧م/ث، ثم جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

الحل: ت(ن) = ١٢ بإجراء التكامل

∫ت(ن).دن = ∫١٢.دن

ع(ن) = ١٢ن + جـ

ع(٠) = ٧ ⟸ ع(٠) = ٠ + جـ

٧ = جـ

ع(ن) = ١٢ن + ٧

ع(٢) = ١٢×٢ + ٧

ع(٢) = ٢٤ + ٧

ع(٢) = ٣١م/ث

٥ إذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت(ن) = ٦ن جد سرعة الجسيم بعد (٥ ثوانٍ) من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية ع(٠) = ٢

٦ إذا كان ميل المماس لـ ق(س) يساوي (٤س^{٣} − ٦س) جد قاعدة الاقتران ق (علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ٥).

الحل: ميل المماس = قَ(س)

قَ(س) = ٤س^{٣} − ٦س بإجراء التكامل

∫ قَ(س).دس = ∫(٤س^{٣} − ٦س).دس

ق(س) = س^{٤} − ٣س^{٢} + جـ

(٢، ٥) ⟸ ق(٢) = ٢^{٤} − ٣×٤ + جـ

٥ = ١٦ − ١٢ + جـ

٥ = ٤ + جـ ⟸ جـ = ٥ − ٤

جـ = ١

ق(س) = س^{٤} − ٣س^{٢} + ١

٧ إذا كان تسارع جسيم يعطى ت(ن) = ٨ن م/ث^{٢}، جد السرعة التي يقطعها الجسيم، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٣ م/ث.

الحل: ت(ن) = ٨ن بإجراء التكامل

∫ ت(ن).دن = ∫ ٨ن .دن

ع(ن) = $\frac{٨ن^{٢}}{٢}$ + جـ

ع(٠) = ٤×٠^{٢} + جـ = ٣

جـ = ٣

ع(ن) = ٤ن^{٢} + ٣

إذا كان ميل المماس يساوي (٣س − ٢)(س + ٥) جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٢) = −٣

٨ إذا كان تسارع جسيم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت(ن) = ٦ن جد المسافة، علماً بأن السرعة الابتدائية ع(٠) = ٢، موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥

الحل: ∫ ت(ن) = ∫(٦ن).دن

ع(ن) = $\frac{٦ن^{٢}}{٢}$ + جـ

ع(٠) = ٣×٠ + جـ = ٢ ⟸ جـ = ٢

∫ ع(ن) = ∫ ٣ن^{٢} + ٢ بإجراء التكامل

ف(ن) = $\frac{٣ن^{٣}}{٣}$ + ٢ن + جـ

ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن + جـ

ف(٠) = ٠ + ٠ + جـ

٥ = جـ

ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن + ٥

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي هـ^{٣س} فاكتب قاعدة الاقتران علماً بأنه يمر بالنقطة (٠، ١).

الحل: قَ(س) = هـ^{٣س}

∫ قَ(س) = ∫ هـ^{٣س}.دس

ق(س) = $\frac{هـ^{٣س}}{٣}$ + جـ

ق(٠) = $\frac{هـ^{٠}}{٣}$ + جـ

١ = $\frac{١}{٣}$ + جـ ⟸ جـ = (١ − $\frac{١}{٣}$)

جـ = $\frac{٢}{٣}$

ق(س) = $\frac{هـ^{٣س}}{٣}$ + $\frac{٢}{٣}$

اختبر نفسك عزيزي الطالب

١) $\int (\text{س}^2+1)\,.\,\text{دس}$

٢) $\int (2\text{س}-1)(\text{س}^2+5)\,.\,\text{دس}$

٣) $\int (3\,\text{هـ}^{\text{س}} - \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\text{س}})\,.\,\text{دس}$

٤) $\int (1-\text{جتا س})\,.\,\text{دس}$

٥) $\int \text{س}^2(8\text{س}+3)\,.\,\text{دس}$

٦) $\int (3-2\text{س})\,.\,\text{دس}$

٧) $\int (\text{جتا س}-2)\,.\,\text{دس}$

٨) $\int (6\text{س}^2-2\text{س})\,.\,\text{دس}$

٩) $\int (3\text{س}^2-2\text{س})\,.\,\text{دس}$

١٠) $\int (4\text{س}^3+2\text{س})\,.\,\text{دس}$ جد ق(١)

١١)

١٢) $\int (\sqrt{\text{س}}+\text{س})\,.\,\text{دس}$

١٣) اذا كان $\text{ق(س)} = \int \text{س}^2\,.\,\text{دس}$ جد $\text{ق}'\text{(س)}$

١٤) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) هو (٦ - ٢س) جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ع(٠) = ٧ م/ث.

١٥) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن) = ١٢ م/ث² جد سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم هي ع(٠) = ٣٧ م/ث

١٦) $\int (\text{قا}^2\text{س}+\frac{3}{\text{س}})\,.\,\text{دس}$

١٧) $\int \sqrt[3]{\text{س}^2}\,.\,\text{دس}$

١٨) $\int (-\text{جا س}+1)\,.\,\text{دس}$

١٩) $\int (\text{س}^5+\frac{2}{\text{س}}+\text{هـ}^{\text{س}})\,.\,\text{دس}$

٢٠) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}}$

قواعد التكامل المحدود

$\int_{أ}^{ب} \text{ج}\,.\,\text{د س} = \text{ج}(\text{ب} - \text{أ})$

$\int_{أ}^{ب} \text{س}^{ن}\,.\,\text{د س} = \left[\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}\right]_{أ}^{ب} = \frac{\text{ب}^{ن+١}}{ن+١} - \frac{\text{أ}^{ن+١}}{ن+١}$

$\int_{أ}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = \text{صفر}$ بداية=نهاية

$\int_{أ}^{ب} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = -\int_{ب}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}$

$\int_{أ}^{ج} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = \int_{أ}^{ب} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_{ب}^{ج} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}$

امثلة

١) $\int_{٠}^{٢} ٣\,.\,\text{د س}$

الحل: $[٣\text{س}]_{٠}^{٢} = (٣×٢) - (٣×٠)$
$= ٦ - ٠ = ٦$

٢) $\int_{٠}^{٢} (\text{س} + ١)\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int_{٠}^{٢} (\text{س} + ١)\,.\,\text{د س}$

$\left[\frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{س}\right]_{٠}^{٢} = (\frac{٢^٢}{٢} + ٢) - (\frac{٠^٢}{٢} + ٠)$
$= ٢ + ٢ = ٤$

٣) $\int_{٠}^{٣} (٣\text{س}^٢ + ٤\text{س})\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int_{٠}^{٣} (٣\text{س}^٢ + ٤\text{س})\,.\,\text{د س}$

$\left[\frac{\cancel{٣}\text{س}^٣}{\cancel{٣}} + \frac{\cancel{٤}^{٢}\text{س}^٢}{\cancel{٢}}\right]_{٠}^{٣}$

$(٣^٣ + ٢×٣^٢) - (٠)$

$= ٢٧ + ١٨ = ٤٥$

٤) $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^٢ + ١)\,.\,\text{د س}$

الحل: $\left[\frac{\text{س}^٣}{٣} + \text{س}\right]_{-٢}^{٢}$

$(\frac{٢^٣}{٣} + ٢) - (\frac{(-٢)^٣}{٣} + -٢)$

$\frac{٨}{٣} + ٢ - (\frac{-٨}{٣} - ٢) = \frac{٨}{٣} + ٢ + \frac{٨}{٣} + ٢$

$= \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{١٦}{٣} + \frac{١٢}{٣} = \frac{٢٨}{٣}$

٥) $\int_{١}^{٣} (٤\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}} - ٢)\,.\,\text{د س}$

الحل: $[٤\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\,\text{لو}|\text{س}| - ٢\text{س}]_{١}^{٣}$

$(٤\text{هـ}^٣ + ٣\,\text{لو}|٣| - ٦) - (٤\text{هـ}^١ + ٣\,\text{لو}|١| - ٢)$

$= ٤\text{هـ}^٣ + ٣\,\text{لو}٣ - ٦ - ٤\text{هـ} - ٠ + ٢$

$= ٤\text{هـ}^٣ + ٣\,\text{لو}٣ - ٤ - ٤\text{هـ}$

٦) $\int_{-٢}^{٢} (٦\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٣)\,.\,\text{د س}$

$= \left[\frac{\cancel{٦}^{٢}\text{س}^٣}{\cancel{٣}} - \frac{\cancel{٨}^{٤}\text{س}^٢}{\cancel{٢}} + ٣\text{س}\right]_{-٢}^{٢}$

$(٢×٢^٣ - ٤×٢^٢ + ٣×٢) - (٢×-٢^٣ - ٤×-٢^٢ - ٣×٢) = ٦ - -٣٨ = ٤٤$

٧) اذا كان $\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س}) = ٦$ فجد $\int_{٥}^{٢} \text{ق}(\text{س})$

الحل: $\int_{٥}^{٢} \text{ق}(\text{س}) = -\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س}) = -٦$

٨) جد $\int_{٥}^{٥} (٢\text{س} - ٣)\,.\,\text{د س}$ دون اجراء التكامل

الحل: $\int_{٥}^{٥} (٢\text{س} - ٣)\,.\,\text{د س} = \text{صفر}$

٩) $\int_{٤}^{٤} (\text{س}^٣ + \sqrt{\text{س}} + ٢)\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int_{٤}^{٤} (\text{س}^٣ + \sqrt{\text{س}} + ٢)\,.\,\text{د س} = \text{صفر}$

١٠) اذا علمت ان $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = ٦$
$\int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = ٢$ فجد قيمة $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$

الحل: $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_{٣}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$

$= ٦ + (-٢) = ٤$

(١١) $\int_{٢}^{٢} (٣س^٢ - ٢س + ٥) . دس$

(١٢) إذا علمت أن $\int_{م}^{ب} ق(س) . دس = ٨$

فإن $\int_{ب}^{م} ٢ق(س) . دس$ تساوي .

(١٣) $\int_{٠}^{١} (٤س^٣ - ٢\sqrt{س}) . دس$

(١٤) $\int_{١}^{ج} (٢س + ٣) . دس = ٦$ جد قيمة ج

الحل: $\int_{١}^{ج} (٢س + ٣) . دس = ٦$

$\left[\frac{٢س^٢}{٢} + ٣س\right]_{١}^{ج} = ٦$

$(ج^٢ + ٣ج) - (١^٢ + ٣ \times ١) = ٦$

$ج^٢ + ٣ج - ٤ = ٦$

$ج^٢ + ٣ج - ١٠ = ٠$

$(ج + ٥)(ج - ٢) = ٠$

$ج = -٥ \qquad ج = ٢$

(١٥) إذا كان $\int_{١}^{٢} ٣ق(س) . دس = ١٢$

فجد $\int_{٢}^{١} ق(س) . دس$

(١٦) $\int_{٠}^{لـ٤} هـ^{س} . دس = صفر$ جد قيمة لـ٤

الحل: لـ٤ = ١

(١٦) $\int_{-٢}^{ج} ٧ . دس = ٤٢$ جد قيمة ج

الحل: $[٧س]_{-٢}^{ج} = ٤٢$

$٧ج - (-١٤) = ٤٢$

$٧ج + ١٤ = ٤٢ \Leftarrow ٧ج = ٢٨$

$ج = ٤$

(١٧) $\int_{١}^{٣} (٣س^٢ + ٥) . دس$

الحل: $\left[\frac{٣س^٣}{٣} + ٥س\right]_{١}^{٣}$

$(٢٧ + ١٥) - (١ + ٥) = ٤٢ - ٦ = ٣٦$

(١٨) $\int_{-٢}^{١} \frac{١}{٨} . دس$

(١٩) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤س - ٢ ، & -١ \le س \le ٢ \\ ٣س^٢ - ٦ ، & ٢ < س \le ٣ \end{cases}$

جد $\int_{-١}^{٣} ق(س) . دس$

الحل: $\int_{-١}^{٣} ق(س) . دس = \int_{-١}^{٢} (٤س - ٢) . دس + \int_{٢}^{٣} (٣س^٢ - ٦) . دس$

$= \left[\frac{٤س^٢}{٢} - ٢س\right]_{-١}^{٢} + \left[\frac{٣س^٣}{٣} - ٦س\right]_{٢}^{٣}$

$= \left[٢س^٢ - ٢س\right]_{-١}^{٢} + \left[س^٣ - ٦س\right]_{٢}^{٣}$

$(٨ - ٤) - (٢ + ٢) + (٢٧ - ١٨) - (٨ - ١٢)$

$٤ - ٤ + ٩ - -٤ = ١٣$

(٢٠) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤ ، & ٠ \le س \le ٢ \\ ٢س ، & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

أوجد $\int_{٠}^{٤} ق(س) . دس$

(٢١) $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{س^2} + \sqrt{س}\right) . دس$ تجهين

الحل: $\int_{1}^{4} \left(س^{-2} + س^{\frac{1}{2}}\right) . دس$

$= \left[\frac{س^{-1}}{-1} + \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} = \left[\frac{-1}{س} + \frac{2}{3}\sqrt{س^3}\right]_{1}^{4} = \left(\frac{-1}{4} + \frac{2}{3}\times 8\right) - \left(-1 + \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{65}{12}$

(٢٢) $\int_{1}^{2} (6س - 5) . دس$

(٢٣) اذا علمت ان $\int_{1}^{3} ق(س) . دس = 4$

$\int_{5}^{3} ق(س) . دس = 1$ ، فإن $\int_{1}^{5} ق(س) . دس =$

(٢٤) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} 2س + 3 & ، \ 0 \le س \le 2 \\ 3س^2 - 1 & ، \ 2 < س < 5 \end{cases}$

نجد $\int_{0}^{5} ق(س) . دس$

(٢٥) $\int_{1}^{هـ} 3س^2 . دس = 8$ نجد قيمة هـ

(٢٦) $\int_{-1}^{2} (3س^2 - 1) . دس$

(٢٧) $\int_{2}^{جـ} 7 . دس = 42$ نجد قيمة جـ

(٢٨) إذا علمت ان $\int_{1}^{2} ق(س) . دس = 4$

فإن $\int_{1}^{2} (6 - ق(س)) . دس$ تساوي

(٢٩) $\int_{1}^{3} (3س^2 + 5) . دس$

(٣٠) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، \ 1 \le س \le 3 \\ 2س + 4 & ، \ 3 < س \le 5 \end{cases}$

نجد $\int_{1}^{5} ق(س) . دس$

الحل:

$\int_{1}^{5} ق(س) . دس = \int_{1}^{3} ق(س) . دس + \int_{3}^{5} ق(س) . دس$

$= \int_{1}^{3} (س^2 + 1) . دس + \int_{3}^{5} (2س + 4) . دس$

$= \left[\frac{س^3}{3} + س\right]_{1}^{3} + \left[\frac{\cancel{2}س^2}{\cancel{2}} + 4س\right]_{3}^{5}$

$= \left(\frac{27}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) + (25 + 20) - (9 + 12)$

$= (9 + 3) - \frac{4}{3} + 45 - 21$

$= 12 - \frac{4}{3} + 24 = 36 - \frac{4}{3} = \frac{104}{3}$

(٣١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 2س + 1 & ، \ -1 \le س < 0 \\ 3س^2 - 8 & ، \ 0 \le س \le 2 \end{cases}$

نجد $\int_{-1}^{2} ق(س) . دس$

التكامل في حالة

ما داخل القوس خطي ، الزاوية خطية، الاس خطي ، المقام خطي

(١) $\int (\text{٢س}+١)^{٢} \,.\, \text{دس}$

الحل: $= \dfrac{(\text{٢س}+١)^{٣}}{٢\times٣} = \dfrac{(\text{٢س}+١)^{٣}}{٦} + \text{ج}$

معامل س

(٢) $\int (\text{٤س}-٣)^{٥} \,.\, \text{دس}$

الحل: $\dfrac{(\text{٤س}-٣)^{٦}}{٤\times٦} + \text{ج} = \dfrac{(\text{٤س}-٣)^{٦}}{٢٤} + \text{ج}$

(٣) $\int_{٢}^{٢} ٣(\text{٣س}-٦)^{٣} \,.\, \text{دس}$

الحل: $\dfrac{\cancel{٣}(\text{٣س}-٦)^{٤}}{\cancel{٣}\times٤} + \text{ج} = \dfrac{(\text{٣س}-٦)^{٤}}{٤} + \text{ج}$

(٤) $\int_{٢}^{٥} \text{هـ}^{\text{٢س}} \,.\, \text{دس}$

الحل: $\left[\dfrac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{٢}\right]_{٢}^{٥} \quad \dfrac{\text{هـ}^{٢\times٥}}{٢} - \dfrac{\text{هـ}^{٢\times٢}}{٢}$

معامل س

$\dfrac{\text{هـ}^{١٠}}{٢} - \dfrac{\text{هـ}^{٤}}{٢}$

(٥) $\int \text{جتا}(\text{٢س}+٦) \,.\, \text{دس}$

$= \dfrac{\text{جا}(\text{٢س}+٦)}{٢\times٢} + \text{ج}$

معامل س

$= \dfrac{\text{جا}(\text{٢س}+٦)}{٤} + \text{ج}$

(٦) $\int ٥\,\text{هـ}^{\text{٥س}} \,.\, \text{دس}$

الحل: $\dfrac{٥\,\text{هـ}^{\text{٥س}}}{٥} + \text{ج} = \text{هـ}^{\text{٥س}} + \text{ج}$

معامل س

(٧) $\int \dfrac{٣}{\text{٣س}-١} \,.\, \text{دس}$

الحل: $\dfrac{\cancel{٣}\,\text{لو}|\text{٣س}-١|}{\cancel{٣}} + \text{ج}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٣س}-١| + \text{ج}$

(٨) $\int (١-\text{س})^{٣} \,.\, \text{دس}$

الحل: $\dfrac{(١-\text{س})^{٤}}{-١\times٤} + \text{ج}$

$= \dfrac{(١-\text{س})^{٤}}{-٤} + \text{ج}$

(٩) $\int \text{جتا}\left(\dfrac{\text{س}}{٣}\right) \,.\, \text{دس}$

الحل: $\dfrac{\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٣}\right)}{\frac{١}{٣}} + \text{ج} = ٣\,\text{جا}\left(\dfrac{\text{س}}{٣}\right) + \text{ج}$

(١٠) $\int \sqrt[٥]{(٥-\text{٣س})^{٣}} \,.\, \text{دس}$

الحل: نجهز اولاً

$\int (٥-\text{٣س})^{\frac{٣}{٥}} \,.\, \text{دس}$

$= \dfrac{(٥-\text{٣س})^{\frac{٣}{٥}+\frac{٥}{٥}}}{-٣\times(\frac{٣}{٥}+\frac{٥}{٥})} + \text{ج}$

$= \dfrac{(٥-\text{٣س})^{\frac{٨}{٥}}}{-٣\times\frac{٨}{٥}} + \text{ج} = \dfrac{\sqrt[٥]{(٥-\text{٣س})^{٨}}}{\frac{-٢٤}{٥}} + \text{ج}$

$= \dfrac{٥\sqrt[٥]{(٥-\text{٣س})^{٨}}}{-٢٤} + \text{ج}$

التكامل بالتعويض

نستخدم هذه الطريقة في الاقترانات المركبة $(ق(س))^ن$ بحيث يكون ق(س) اقتران غير خطي

وذلك بفرض ص بدلاً من جزء من السؤال وغالباً يكون الاقتران غير الخطي، المركب، الاس، الزاوية أو المقام "

اسس اختيار الفرض

- اقتران × مركب، نفرض ص ما داخل المركب وبدون قوة
- اقتران × مثلثي، نفرض ص زاوية المثلثي
- اقتران × أسي، نفرض ص قوة الاسي
- اذا كانت زاوية المثلثي خطية نقسم على معامل س
- اذا كانت درجة الاسي خطية نقسم على معامل س
- اذا كان ما داخل المركب خطي أو المقام خطي نقسم على معامل س

امثلة

(١) $\int ٣س^٢(س^٣+٤)^٥ . دس$

نفرض
$ص = س^٣ + ٤$
$\frac{دص}{دس} = ٣س^٢$
$دس = \frac{دص}{٣س^٢}$

الحل: $\int \cancel{٣س^٢}(ص)^٥ . \frac{دص}{\cancel{٣س^٢}}$

$= \int ص^٥ . دص$

$= \frac{ص^٦}{٦} + جـ$

= نستبدل $\frac{(س^٣+٤)^٦}{٦} + جـ$

(٢) $\int \frac{٤س - ٦}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٣س + ١}} . دس$

$ص = س^٢ - ٣س + ١$
$\frac{دص}{دس} = ٢س - ٣$
$دس = \frac{دص}{٢س - ٣}$

الحل: $\int \frac{٢\cancel{(٢س-٣)}}{\sqrt[٣]{ص}} \times \frac{دص}{\cancel{٢س-٣}}$

$٢\int ص^{-\frac{١}{٣}} . دص$

$= \frac{٢ص^{-\frac{١}{٣}+\frac{٣}{٣}}}{-\frac{١}{٣}+\frac{٣}{٣}} + جـ = \frac{\cancel{٢}ص^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{\cancel{٢}}{٣}} + جـ$

$٣\sqrt[٣]{ص^٢} + جـ = ٣\sqrt[٣]{(س^٢-٣س+١)^٢} + جـ$

(٣) $\int ٤س \times هـ^{س^٢} . دس$

نفرض
$ص = س^٢$
$\frac{دص}{دس} = ٢س$
$دس = \frac{دص}{٢س}$

الحل: $\int \cancel{٤س} \times هـ^ص . \frac{دص}{\cancel{٢س}}$

$٢\int هـ^ص . دص$

$٢هـ^ص + جـ$

$= ٢هـ^{س^٢} + جـ$

٤

$$\int_{-1}^{1} (\text{٤س} - 1)\sqrt[3]{\text{٢س}^2 - \text{س} - 2}\ .\ \text{د س}$$

نفرض

$\text{ص} = \text{٢س}^2 - \text{س} - 2$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٤س} - 1$

$\int_{-1}^{1} \Rightarrow \int_{1}^{-1}$

الحل: $\int_{1}^{-1} \cancel{(\text{٤س}-1)}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}} . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٤س}-1}}$

$\left[\frac{\text{ص}^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_{1}^{-1}$

$= \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{\text{ص}^4}\right]_{1}^{-1} = \left[\frac{\text{٣ص}^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_{1}^{-1}$

$\frac{3}{4}(1) - \frac{3}{4}(1) = \text{صفر}$

٥

$$\int_{1}^{2} \frac{\text{س} + 1}{(\text{س}^2 + \text{٢س} + 1)^2}\ .\ \text{د س}$$

$\text{ص} = \text{س}^2 + \text{٢س} + 1$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢س} + 2$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢س} + 2}$

$\int_{1}^{2} \Rightarrow \int_{4}^{9}$

الحل:-

$\int_{4}^{9} \frac{\cancel{\text{س}+1}}{\text{ص}^2} . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س}+2}}$

$\frac{1}{2}\int_{4}^{9} \text{ص}^{-2} . \text{د ص}$

$\frac{1}{2}\left[\frac{\text{ص}^{-1}}{-1}\right]_{4}^{9}$

$= \left[\frac{-1}{\text{٢ص}}\right]_{4}^{9} = \frac{-1}{9\times 2} - \left(\frac{-1}{2\times 4}\right)$

$= \frac{-1}{18} + \frac{1}{8}$

٦

$$\int_{1}^{3} \text{٦ س هـ}^{\text{س}^2-1}\ .\ \text{د س}$$

نفرض

$\text{ص} = \text{س}^2 - 1$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢ س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}}$

$\int_{1}^{3} \Rightarrow \int_{0}^{8}$

الحل:

$\int_{0}^{8} \cancel{\text{٦س}}\ \text{هـ}^{\text{ص}} . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$3\left[\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{0}^{8}$

$= \text{٣هـ}^8 - 3\times\text{هـ}^0$

$= \text{٣هـ}^8 - 3$

٧

$$\int_{0}^{2} \text{س}^2(\text{س}^3 - 5)^2\ .\ \text{د س}$$

$\text{ص} = \text{س}^3 - 5$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٣س}^2$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٣س}^2}$

$\int_{0}^{2} \Rightarrow \int_{-5}^{3}$

الحل: $\int_{-5}^{3} \cancel{\text{س}^2}(\text{ص})^2 . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٣س}^2}}$

$\frac{1}{3}\int_{-5}^{3} \text{ص}^2 . \text{د ص}$

$\frac{1}{3}\left[\frac{\text{ص}^3}{3}\right]_{-5}^{3}$

$\frac{1}{9}\left[\text{ص}^3\right]_{-5}^{3} = \left(\frac{1}{9}\times 27\right) - \left(\frac{1}{9}\times -125\right)$

$= \frac{27}{9} + \frac{125}{9} = \frac{152}{9}$

٨

$$\int \text{٢س جا}(\text{س}^2)\ .\ \text{د س}$$

$\text{ص} = \text{س}^2$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

الحل:- $\int \cancel{\text{٢س}}\ \text{جا ص} . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$-\text{جتا ص} + \text{جـ}$

$-\text{جتا}(\text{س}^2) + \text{جـ}$

٩

$$\int \frac{\text{١٠س} - 5}{(\text{س}^2 - \text{س} + 5)^3}\ .\ \text{د س}$$

$\text{ص} = \text{س}^2 - \text{س} + 5$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢س} - 1$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢س} - 1}$

الحل $\int \frac{\cancel{\text{١٠س} - 5}\ 5}{\text{ص}^3} . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س} - 1}}$

$\int \text{٥ ص}^{-3} . \text{د ص}$

$= \frac{\text{٥ ص}^{-2}}{-2} + \text{جـ} = \frac{-5}{\text{٢ص}^2} + \text{جـ} = \frac{-5}{2(\text{س}^2 - \text{س} + 5)^2} + \text{جـ}$

١٠

$$\int \text{٦ س جا س}^2\ .\ \text{د س}$$

$\text{ص} = \text{س}^2$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

الحل: $\int \cancel{\text{٦س}}^{\,3}\ \text{جا ص} . \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$\int \text{٣جا ص} . \text{د ص}$

$= -3\ \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -3\ \text{جتا}(\text{س}^2) + \text{جـ}$

(١١) $\int_{0}^{1} س\, هـ^{س^٢} .\, د س$

$ص = س^٢$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س$

$د س = \frac{د ص}{٢س}$

$\int_{0}^{1} \Leftarrow \int_{0}^{1}$

الحل: $\int_{0}^{1} \cancel{س}\, هـ^{ص} .\, \frac{د ص}{٢\cancel{س}}$

$\frac{١}{٢} \left[هـ^{ص} \right]_{0}^{1}$

$= \frac{١}{٢} هـ^{١} - \frac{١}{٢} هـ^{0}$

$= \frac{١}{٢} هـ - \frac{١}{٢}$

(١٢) $\int س\, جتا(س^٢+٧) .\, د س$

$ص = س^٢+٧$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س$

$د س = \frac{د ص}{٢س}$

الحل: $\int \cancel{س}\, جتا ص .\, \frac{د ص}{٢\cancel{س}}$

$\frac{١}{٢} \int جتا ص .\, د ص$

$= \frac{١}{٢}\, جا ص + حـ$

$= \frac{١}{٢}\, جا(س^٢+٧) + حـ$

(١٣) $\int ٢س^٢\, قا^٢(س^٣-١) .\, د س$

$ص = س^٣-١$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢$

$د س = \frac{د ص}{٣س^٢}$

الحل: $\int ٢\cancel{س^٢}\, قا^٢ص .\, \frac{د ص}{٣\cancel{س^٢}}$

$= \frac{٢}{٣} \int قا^٢ص .\, د ص$

$\frac{٢}{٣}\, ظا ص + حـ$

$\frac{٢}{٣}\, ظا(س^٣-١) + حـ$

(١٤) $\int س\, جا(س^٢-٣) .\, د س$

(١٥) $\int (س+٣)(س^٢+٦س-٥)^٤ .\, د س$

(١٦) $\int هـ^{س^٢-س} \times (٢س-١) .\, د س$

(١٧) $\int (٢س^٣+٣)\, قا^٢(\frac{س^٤}{٢}+٣س) .\, د س$

١٨ $\int \frac{٢س}{جتا^{٢}(س^{٢}+٣)} \, .دس$

١٩ $\int \frac{٢س+١}{(س^{٢}+س)^{٢}} \, .دس$

٢٠ $\int_{٠}^{٢} ق(س).دس = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} ٦ق(س).دس = ١٨$

فإن $\int_{٠}^{٣} ق(س).دس$ يساوي :

٢١ اذا كان $\int_{١}^{٢} ٣ق(س).دس = ١٢$

فجد $\int_{٢}^{١} -٢ق(س).دس$

٢٢ $\int_{٠}^{١} ٢س \, هـ^{س^{٢}} .دس$

٢٣ $\int (س-١)(٢س^{٢}-٤س+٣)^{٥} .دس$

٢٤ $\int_{٣}^{٥} (س^{٢}-١)^{٤}(٢س) \, .دس$

٢٥) $\int (٢\text{س}+١)\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}-٥}\ .\ \text{دس}$

٢٦) $\int \text{س}\ \text{قا}^٢(\text{س}^٢+٨)\ .\ \text{دس}$

٢٧) $\int \frac{٢\text{س}}{٣\text{س}^٢+١}\ .\ \text{دس}$

٢٨) $\int_{١}^{٢} \text{س}^٢(\text{س}^٣-٥)^٢\ .\ \text{دس}$

٢٩) $\int_{١}^{٢} ٦\text{س}\ \text{هـ}^{(\text{س}^٢-٥)}\ .\ \text{دس}$

٣٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي $(٤\text{س}-٢)^٣$ فاكتب قاعدة الاقتران ق علماً بأنه يمر بالنقطة (١، ٨)

٣١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة $\text{ع}(\text{ن}) = ٣(\text{ن}+١)^٢$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١م.

تطبيقات اقتصادية ، النمو والاضمحلال

تطبيقات اقتصادية

$\int$ الايراد الحدي = الايراد الكلي

قانون فائض المستهلك

$ف_ع = \int_{٠}^{س_١} ق(س) . دس - س_١ ع_١$

قانون فائض المنتج

$ف_ح = س_١ ع_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س) . دس$

$س_١$: كمية التوازن بين العرض والطلب

$ع_١$: سعر التوازن

ق(س) : اقتران " السعر – الطلب "

هـ(س) : اقتران " السعر – العرض "

امثلة

(١) اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع س لعبة من لعب الاطفال التي ينتجها مصنع هو $دَ(س) = ٣س^٢ - ٨س + ٢$ ديناراً نجد الايراد الكلي الناتج عن بيع صفر اللعب

الحل: $\int دَ(س) = د(س)$

$\int دَ(س) = \int (٣س^٢ - ٨س + ٢) . دس$

$د(س) = \frac{٣س^٣}{٣} - \frac{٨س^٢}{٢} + ٢س + ج$

$د(س) = س^٣ - ٤س^٢ + ٢س + ج$

دائماً ج = صفر

$د(س) = س^٣ - ٤س^٢ + ٢س$

(٢) اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع حقائب مدرسية هو $دَ(س) = س^٢ - ٢س + ٧$ نجد الايراد الكلي لبيع ٦ حقائب .

الحل: $\int دَ(س) . دس = \int (س^٢ - ٢س + ٧) . دس$

$د(س) = \frac{س^٣}{٣} - \frac{٢س^٢}{٢} + ٧س + ج$

$د(س) = \frac{س^٣}{٣} - س^٢ + ٧س$

$د(٦) = \frac{٦^٣}{٣} - ٦^٢ + ٧ \times ٦$

$= ٧٢ - ٣٦ + ٤٢ = ٣٦ + ٤٢$

$= ٧٨$ دينار

(٣) اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع س لعبة من لعب الاطفال التي ينتجها مصنع هو $دَ(س) = ٣س^٢ - ٨س + ٢$ نجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٥) لعب .

(٤) اذا كانت $ع = ق(س) = ٧٠ - ٤س$ يمثل اقتران (السعر – الطلب) ، حيث (ع) السعر بالدنانير (س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $ع_١ = ١٠$ نجد قيمة فائض المستهلك

الحل: عندما $ع_١ = ١٠$ نجد قيمة $س_١$

$ع_١ = ١٠ = ٧٠ - ٤س_١$

$١٠ - ٧٠ = -٤س_١$

$-٤س_١ = -٦٠$

$س_١ = ١٥$

$ف_ع = \int_{٠}^{س_١} ق(س) . دس - ع_١ \times س_١$

$ف_ع = \int_{٠}^{١٥} (٧٠ - ٤س) - ١٠ \times ١٥$

$\left[٧٠س - \frac{٤س^٢}{٢} \right]_{٠}^{١٥} - ١٥٠$

$(٧٠ \times ١٥) - (٢ \times ١٥^٢) - (٠) - ١٥٠$

$١٠٥٠ - ٤٥٠ - ١٥٠ = ٤٥٠$ دينار

٥) إذا كان ع = ق(س) = ١٦ − $\frac{س}{٤}$ يمثل اقتران (السعر – الطلب) حيث ع السعر بالدنانير، (س) عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتاً عنده ع$_١$ = ١٢ جد قيمة فائض المستهلك

الحل:

$ف_ك = \int_{٠}^{س_١} ق(س)\,دس - س_١ ع_١$

$= \int_{٠}^{١٦} (١٦ - \frac{س}{٤})\,دس - ١٦ \times ١٢$

$= [١٦س - \frac{س^٢}{٨}]_{٠}^{١٦} - ١٩٢$

$(١٦ \times ١٦ - \frac{١٦^٢}{٨}) - ٠ - ١٩٢$

$٢٥٦ - ٣٢ - ١٩٢$

= ٣٢ دينار

$ع_١ = ١٢$

$١٢ = ١٦ - \frac{س_١}{٤}$

$١٢ - ١٦ = -\frac{س_١}{٤}$

$-٤ = -\frac{س_١}{٤}$

$س_١ = ١٦$

٧) إذا كان ع = ق(س) = ٩ − $\frac{س}{٢}$، ع$_١$ = ٢ جد فائض المستهلك لاقتران (السعر – الطلب)

٦) جد فائض المستهلك لاقتران (السعر – الطلب) ع = ق(س) = ٢٥ − ٣س، ع$_١$ = ٧

الحل:

$ف_ك = \int_{٠}^{س_١} ق(س)\,دس - س_١ \times ع_١$

$ف_ك = \int_{٠}^{٦} (٢٥ - ٣س)\,دس - ٦ \times ٧$

$= [٢٥س - \frac{٣س^٢}{٢}]_{٠}^{٦} - ٤٢$

$= (٢٥ \times ٦ - \frac{٣ \times ٦^٢}{٢}) - (٠) - ٤٢$

$١٥٠ - ٥٤ - ٤٢ = ٥٤$ دينار

$ع_١ = ٧$

$٧ = ٢٥ - ٣س_١$

$٧ - ٢٥ = -٣س_١$

$-١٨ = -٣س_١$

$س_١ = ٦$

٨) إذا كان اقتران (السعر – العرض) لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ١٨ + ٤س حيث ع$_١$ = ٣٠ جد فائض المنتج.

الحل

$ف_ج = ع_١ \times س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)\,دس$

$ف_ج = ٣٠ \times ٣ - \int_{٠}^{٣} (١٨ + ٤س)\,دس$

$= ٩٠ - [(١٨س + \frac{٤س^٢}{٢})]_{٠}^{٣}$

$= ٩٠ - [(١٨ \times ٣ + ٢ \times ٣^٢) - ٠]$

$= ٩٠ - [٥٤ + ١٨]$

$٩٠ - ٧٢ = ١٨$ دينار

$ع_١ = ٣٠$

$٣٠ = ١٨ + ٤س_١$

$٣٠ - ١٨ = ٤س_١$

$١٢ = ٤س_١$

$س_١ = ٣$

٩ إذا كان اقتران (السعر-العرض) لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ٥ + ٣س²، حيث ع$_1$ = ٥٣ جد فائض المنتج.

الحل:

ف$_ح$ = ع$_1$ × س$_1$ − $\int_{0}^{س_1}$ هـ(س) . دس

ف$_ح$ = ٥٣ × ٤ − $\int_{0}^{٤}$ (٥ + ٣س²) . دس

= ٢١٢ − [٥س + $\frac{\cancel{٣}س^٣}{\cancel{٣}}$]$_{0}^{٤}$

= ٢١٢ − [(٥×٤ + ٦٤) − ٠]

= ٢١٢ − [٨٤]

= ١٢٨ دينار

ع$_1$ = ٥٣

٥٣ = ٥ + ٣س²

٥٣ − ٥ = ٣س²

٤٨ = ٣س²

١٦ = س²

س = ± ٤ تهمل

١٠ جد فائض المنتج لاقتران السعر-العرض ع = هـ(س) = $\frac{٢}{٣}$ س + ١٥، ع$_1$ = ١٧

الحل:

ف$_ح$ = س$_1$ × ع$_1$ − $\int_{0}^{س_1}$ هـ(س) . دس

ف$_ح$ = ٣ × ١٧ − $\int_{0}^{٣}$ ($\frac{٢}{٣}$ س + ١٥) . دس

ف$_ح$ = ٥١ − [$\frac{\cancel{٢}س^٢}{٣ × \cancel{٢}}$ + ١٥س]$_{0}^{٣}$

= ٥١ − [($\frac{٩}{٣}$ + ١٥×٣) − ٠]

= ٥١ − [٣ + ٤٥]

٥١ − ٤٨ = ٣ دينار

ع$_1$ = ١٧

١٧ = $\frac{٢}{٣}$ س$_1$ + ١٥

١٧ − ١٥ = $\frac{٢}{٣}$ س$_1$

٢ = $\frac{٢}{٣}$ س$_1$

س$_1$ = $\cancel{٢}$ × $\frac{٣}{\cancel{٢}}$

س$_1$ = ٣

١١ جد فائض المنتج لاقتران (السعر-العرض) ع = هـ(س) = ٣س² + ٦، ع$_1$ = ٥٤.

الحل:

ف$_ح$ = ع$_1$ × س$_1$ − $\int_{0}^{س_1}$ هـ(س) . دس

ف$_ح$ = ٤ × ٥٤ − $\int_{0}^{٤}$ (٣س² + ٦) . دس

٢١٦ − [$\frac{\cancel{٣}س^٣}{\cancel{٣}}$ + ٦س]$_{0}^{٤}$

٢١٦ − [٤³ + ٦×٤ − ٠]

٢١٦ − [٦٤ + ٢٤]

٢١٦ − ٨٨ = ١٢٨ دينار

ع$_1$ = ٥٤ .

٥٤ = ٣س$_1$² + ٦

٥٤ − ٦ = ٣س$_1$²

٤٨ = ٣س$_1$²

س² = ١٦

س$_1$ = ± ٤ لـ تهمل

١٢ جد فائض المستهلك لاقترانات (السعر-الطلب) عند ع$_1$ = ٧

ع = ق(س) = ٢٥ − ٣س

١٣ اذا كان اقتران (السعر- الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٣٦ - ٢س وكان اقتران (السعر- العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ١٢ + ٦س جد:

١- كمية التوازن

٢- سعر التوازن

٣- فائض المستهلك عند سعر التوازن

٤- فائض المنتج عند سعر التوازن

الحل:

١- كمية التوازن ، $س_١$ نجدها بمساواة الاقترانين

ق(س) = هـ(س)

٣٦ - ٢س = ١٢ + ٦س

٣٦ - ١٢ = ٢س + ٦س

٢٤ = ٨س

س = ٣

٢- سعر التوازن ، ع ، نجده بتعويض س في احد الاقترانين

ع = هـ(٨) = ١٢ + ٦ × ٣

= ١٢ + ١٨ = ٣٠

٣- $ف_{ك} = \int_{٠}^{س_١} ق(س) . دس - ع_١ × س_١$

$= \int_{٠}^{٣} (٣٦ - ٢س) . دس - ٣٠ × ٣$

$= [٣٦س - \frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}}]_{٠}^{٣} - ٩٠$

= (١٠٨ - ٩) - (٠) - ٩٠

= ٩ دنانير

٤- $ف_{ج} = ع_١ × س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س) . دس$

$ف_{ج} = ٣٠ × ٣ - \int_{٠}^{٣} (١٢ + ٦س) . دس$

$= ٩٠ - [١٢س + \frac{س^٢}{٢}]_{٠}^{٣}$

= ٩٠ - [٣٦ + ٢٧ - ٠]

= ٩٠ - ٦٣ = ٢٧

١٤ اذا كان اقتران (السعر- الطلب) لمنتج معين هو ع = ق = ٤٨ - ٣س وكان اقتران (السعر- العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ٢س + ١٣ ، جد:

١- كمية التوازن

٢- سعر التوازن

٣- فائض المستهلك عند سعر التوازن

٤- فائض المنتج عند سعر التوازن

الحل:

١- كمية التوازن $س_١$

ق(س) = هـ(س)

٤٨ - ٣س = ٢س + ١٣

٤٨ - ١٣ = ٢س + ٣س

٣٥ = ٥س

س = ٧

٢- سعر التوازن ع

ع = ق(٧) = ٤٨ - ٣ × ٧

$= ٤٨ - (٢١) = ٢٧$

٣- $ف_{ك} = \int_{٠}^{س_١} ق(س) . دس - ع_١ × س_١$

$= \int_{٠}^{٧} (٤٨ - ٣س) . دس - ٢٧ × ٧$

$= [٤٨س - \frac{٣س^٢}{٢}]_{٠}^{٧} - ١٨٩$

$= (٤٨ × ٧ - \frac{٣ × ٧^٢}{٢}) - ١٨٩$

$٣٣٦ - \frac{١٤٧}{٢} - ١٨٩$

$\frac{٦٧٢}{٢} - \frac{١٤٧}{٢} - ١٨٩$

$\frac{٥٢٥}{٢} - \frac{٣٧٨}{٢} = \frac{١٤٧}{٢}$

٤- $ف_{ج} = ٢٧ × ٧ - \int_{٠}^{٧} ٢س + ١٣$

$١٨٩ - [\frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} + ٣س]_{٠}^{٧}$

١٨٩ - [٤٩ + ٢١]

١٨٩ - ٧٠ = ١١٩ دينار

(١٥) اذا كان اقتران (السعر- الطلب) لمنتج معين معطى بالعلاقة ع = ق(س) = ٤٠ - ٢س وكان إقتران (السعر- العرض) معطى بالعلاقة ع = هـ(س) = ٦س أوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن

(١٦) اذا كان منحنى (السعر- الطلب) لمنتج معين معطى بالعلاقة ع = ق = ١٠٠ - ٨س ومنحنى (السعر- العرض) معطى بالعلاقة ع = هـ(س) = ٤٠ + ٢س أوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن .

(١٧) اذا كان إقتران (السعر- الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٣ - ٤س وكان إقتران (السعر- العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = س + ٤ جد

أ- كمية التوازن
ب- سعر التوازن
جـ- فائض المستهلك عند سعر التوازن .
د- فائض المنتج عند سعر التوازن

الحل:

النمو و الاضمحلال

قانون النمو والاضمحلال

$ص = ع(ن) = ع_. \times هـ^{ن م}$

هـ ≃ ٢,٧ العدد النيبيري .

ع. = القيمة الابتدائية .

ن = الزمن .

م = معامل النمو ، الزيادة .
معامل الاضمحلال ، النقصان .

ع(ن) القيمة بعد ن من الزمن

امثلة

١) اذا كان النمو السكاني في قرية ما يخضع لقانون النمو ، وكان عدد سكان هذه القرية عام ٢٠٠٠م قد بلغ ٣٠٠٠ نسمة وإذا كان عدد السكان يزداد بشكل منتظم بمعدل ٤٪ سنوياً جد عدد سكان هذه القرية عام ٢٠٢٥م .
الحل:

$ع_. = ٣٠٠٠ ، م = ٤٪ = \frac{٤}{١٠٠}$

$ن = ٢٥$ سنة

$ع(٢٥) = ٣٠٠٠ \times هـ^{\frac{٤}{١٠٠} \times ٢٥}$

$= ٣٠٠٠ \times ٢,٧^{١} = ٨١٠٠$ نسمة

٢) إذا كان تكاثر البكتيريا يخضع لقانون النمو وإذا عدد البكتيريا يزداد بشكل منتظم يبلغ ٢٠٠٪ في الساعة ، جد عدد البكتيريا بعد مرور نصف ساعة إذا كان عددها الأصلي يبلغ ٥٠٠٠ .
الحل:

$ع_. = ٥٠٠٠ ، م = ٢٠٠٪ = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$

$ن = \frac{١}{٢}$

$ع(\frac{١}{٢}) = ٥٠٠٠ \times هـ^{٢ \times \frac{١}{٢}}$

$= ٥٠٠٠ \times ٢,٧^{١} = ١٣٥٠٠$

٣) تتحلل مادة مشعة بشكل منتظم بمرور الزمن و يخضع تحللها لقانون الاضمحلال إذا كان معدل التناقص لهذه المادة يبلغ ٠,٠٠٢ سنوياً ، جد الكمية المتبقية من المادة بعد مرور ٣٠٠٠ سنة ، علماً بأن كتلة المادة الأصلية تبلغ ٥٠ غراماً
الحل: $ع_. = ٥٠ ، ع(ن) = ؟؟ ، ن = ٣٠٠٠$ سنة

$م = -٠,٠٠٢ = \frac{-٢}{١٠٠٠}$ اضمحلال

$ع(٣٠٠٠) = ٥٠ \times هـ^{\frac{-٢}{١٠٠٠} \times ٣٠٠٠} = ٥٠ \times هـ^{-٦}$

$= \frac{٥٠}{هـ^{٦}} = \frac{٥٠}{(٢,٧)^{٦}}$

٤) يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن وبشكل منتظم ، و يخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال فإذا كان ثمن العقار الأصلي ٥٤٠٠٠ دينار وكان معدل التناقص يساوي ٢٪ سنوياً جد ثمن العقار بعد مرور ٥٠ عاماً .

٥) يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن وبشكل منتظم ويخضع لقانون الاضمحلال فإذا كان ثمنها (١٠٠٠٠) دينار ومعدل التناقص في ثمنها ٥٪ سنويًا، جد ثمن السيارة بعد مرور ٢٠ سنة.

الحل:-

$\text{ع}_. = ١٠٠٠٠$ ، $\text{م} = -٥\% = \frac{-٥}{١٠٠}$

$\text{ن} = ٢٠$ سنة

$\text{ع}(٢٠) = ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{\frac{-٥}{١٠٠}\times ٢٠}$

$\text{ع}(٢٠) = ١٠٠٠٠ \times ٢,٧^{-١}$

$= \frac{١٠٠٠٠}{٢,٧}$

$\text{ع}(٢٠) = ٣٧٠٣$ دينار

٦) إذا كان عدد السكان في بلدة ما يخضع لقانون النمو حيث يزداد العدد بشكل منتظم وبمعدل ٥٪ سنويًا وبلغ عدد السكان في هذه البلدة في سنة ما (٥٠٠٠ نسمة) جد عدد السكان بعد مرور ٢٠ عامًا.

الحل:

٧) إذا كان النمو السكاني في منطقة ما يخضع لقانون النمو والاضمحلال وكان عدد سكان هذه المنطقة عام ٢٠٠٠م قد بلغ (٢٧٠٠٠) نسمة إذا كان عدد السكان يزداد بشكل منتظم بمعدل ٤٪ سنويا فكم كان عدد سكان هذه المنطقة عام ١٩٧٥م؟

الحل:- $\text{ع}(٢٥) = ٢٧٠٠٠$ ، $\text{م} = \frac{٤}{١٠٠}$

$\text{ع}(٢٥) = \text{ع}_. \times \text{هـ}^{\text{م}\times\text{ن}}$

$٢٧٠٠٠ = \text{ع}_. \times (٢,٧)^{\frac{٤}{١٠٠}\times ٢٥}$

$\frac{٢٧٠٠٠}{٢,٧} = \frac{\text{ع}_. \times \cancel{٢,٧}}{\cancel{٢,٧}}$

$\text{ع}_. = ١٠٠٠٠$ نسمة

٨) يتناقص سعر سيارة بمعدل يبلغ ٤٪ سنويًا ويخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال فإذا اشترى هاشم سيارة بمبلغ (٨٠٠٠) دينار أوجد سعر السيارة بعد مرور (٢٥ سنة)

الحل: $\text{م} = \frac{-٤}{١٠٠}$ ، $\text{ع}_. = ٨٠٠٠$ ، $\text{ن} = ٢٥$

$\text{ع}(٢٥) = \text{ع}_. \times \text{هـ}^{\text{م}\times ٢٥}$

$\text{ع}(٢٥) = ٨٠٠٠ \times ٢,٧^{\frac{-٤}{١٠٠}\times ٢٥}$

$= ٨٠٠٠ \times ٢,٧^{-١}$

$= \frac{٨٠٠٠}{٢,٧} \simeq ٢٩٦٣$

(٩) إذا كان عدد السكان في بلدة ما يخضع لقانون النمو حيث يزداد بشكل منتظم وبمعدل ٥٪ سنويًا وبلغ عدد السكان في هذه القرية في سنة ما (١٥٠٠٠ نسمة) جد عدد السكان بعد مرور ٢٠ عامًا.

الحل :-

م = ٥٪ = ٥ / ١٠٠ ، ع. = ١٥٠٠٠ ، ن = ٢٠

ع(ن) = ع. × هـ^(م ن)

ع(٢٠) = ١٥٠٠٠ × (٢,٧)^(٢٠ × ٥ / ١٠٠)

= ١٥٠٠٠ × ٢,٧^١

= ١٥٠٠٠ × ٢,٧ = ٤٠٥٠٠ نسمة

(١٠) يتناقص سعر سيارة بمعدل منتظم يبلغ ٤٪ سنويًا ويخضع هذا التناقص لقانون الإضمحلال فإذا اشترى هاشم سيارة بمبلغ (٨٠٠٠) دينار أوجد سعر السيارة بعد مرور (٢٥ سنة)

الحل:

(١١) مادة مشعة كتلتها (٥٤ غم) تتحلل بشكل منتظم وفقًا لقانون الاضمحلال إذا كان معدل التناقص للمادة يبلغ (٠,٠٢) جد الكمية المتبقية من المادة المشعة بعد مرور (٥٠ سنة)

الحل :

(١٢) يزيد سعر الأرض بمرور الزمن وتخضع هذه الزيادة لقانون النمو فإذا إشترى فراس قطعة أرض بمبلغ ٤٠٠٠ دينار وبعد ٣ سنوات أصبح سعرها ٤٨٠٠ دينار نجد سعر الأرض بعد مرور ٦ سنوات

الحل: ع(٣) = ع. × هـ^(م × ن)

٤٨٠٠ / ٤٠٠٠ = ٤٠٠٠ / ٤٠٠٠ × ٢,٧^(٣ × م)

١,٢ = ٢,٧^(٣م)

ع(٦) = ع. × هـ^(م ن)

ع(٦) = ٤٠٠٠ × هـ^(٦م)

ع(٦) = ٤٠٠٠ × $\boxed{هـ^{٣م × ٢}}$ ← ١,٢

ع(٦) = ٤٠٠٠ × (١,٢)^٢

ع(٦) = ٤٠٠٠ × ١,٤٤ = ٥٧٦٠

ايجاد المساحة بالتكامل

خطوات حل المسألة

١- نعين المستقيمات س = ٩ وتعتبر حدود التكامل وتسمى اعمدة.. اشهرها محور الصادات س = ٠.

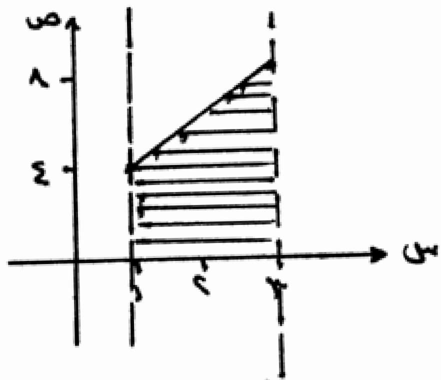
٢- نعين الاقترانات واشهرها محور السينات ق(س) = صفر

٣- نقوم باجراء التكامل تحت القيمة المطلقة وتسمى المساحة ويجب ان تكون موجبة.

امثلة

١) احسب المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س + ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٣

الحل



$$\text{م} = \left| \int_{1}^{3} \text{٢س} + \text{٢} \;.\; \text{دس} \right|$$

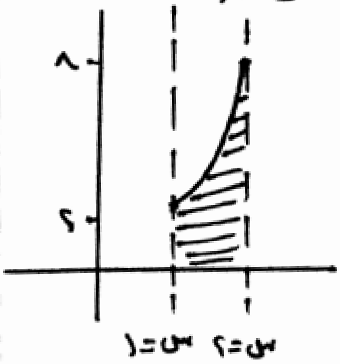
$$\text{م} = \left| \left[\frac{\cancel{\text{٢}}\text{س}^2}{\cancel{\text{٢}}} + \text{٢س} \right]_{1}^{3} \right|$$

$$= \left| (\text{١٥}) - (\text{٣}) \right| = \text{١٢}$$

وحدة مربعة

٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س² ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٢

الحل:



$$\text{م} = \left| \int_{1}^{2} \text{٢س}^2 \;.\; \text{دس} \right|$$

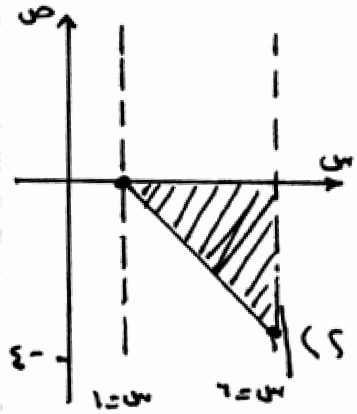
$$= \left| \left[\frac{\text{٢س}^3}{\text{٣}} \right]_{1}^{2} \right|$$

$$= \left| \left(\text{٨} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\right) - \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \right|$$

$$= \frac{\text{١٤}}{\text{٣}}$$ وحدة مربعة

٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢ - س ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٦

الحل:



$$\text{م} = \left| \int_{2}^{6} (\text{٢} - \text{س}) \;.\; \text{دس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left[\text{٢س} - \frac{\text{س}^2}{\text{٢}} \right]_{2}^{6} \right|$$

$$\text{م} = \left| (\text{١٢} - \text{١٨}) - (\text{٤} - \text{٢}) \right|$$

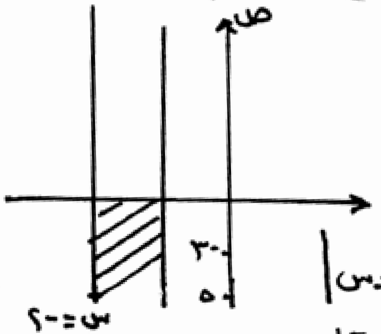
$$= \left| -\text{٦} - \text{٢} \right|$$

$$= \left| -\text{٨} \right|$$

$$= \text{٨}$$

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س − ١ ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = −١

الحل:



$$م = \left| \int_{-2}^{-1} (2س - 1)\,دس \right|$$

$$م = \left| \left[\frac{\cancel{2}س^2}{\cancel{2}} - س \right]_{-2}^{-1} \right|$$

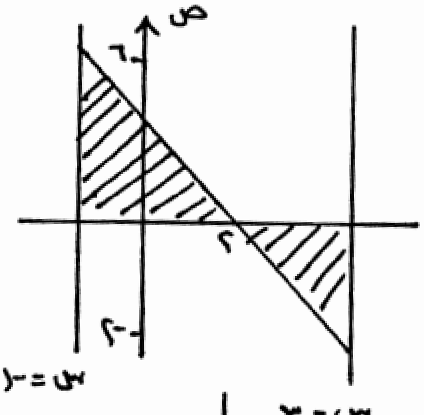
$$م = \left| (1 + 1) - (4 + 2) \right|$$

$$م = \left| 2 - 6 \right|$$

$$م = 4$$

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ − ٢س ومحور السينات في الفترة [−١ ، ٣] .

الحل:



٤ − ٢س = ٠

٤ = ٢س

س = ٢

$$م = م_1 + م_2$$

$$م = \left| \int_{-1}^{2} 4 - 2س \right| + \left| \int_{2}^{3} 4 - 2س \right|$$

$$م = \left| \left[4س - \frac{\cancel{2}س^2}{\cancel{2}} \right]_{-1}^{2} \right| + \left| \left[4س - \frac{\cancel{2}س^2}{\cancel{2}} \right]_{2}^{3} \right|$$

$$م = \left| (4) - (-5) \right| + \left| (3) - (4) \right|$$

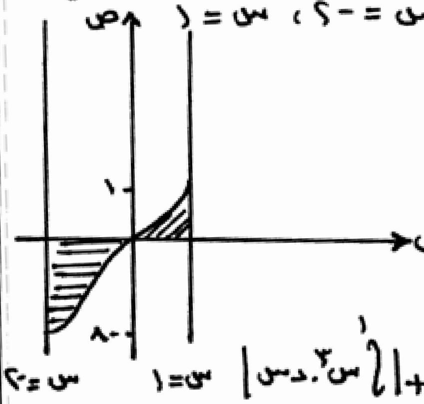
٩ + ١ = ١٠ وحدات مربعة

(٦) إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س³ ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ١

الحل

س³ = ٠

س = ٠



$$م = م_1 + م_2$$

$$م = \left| \int_{-2}^{0} س^3\,دس \right| + \left| \int_{0}^{1} س^3\,دس \right|$$

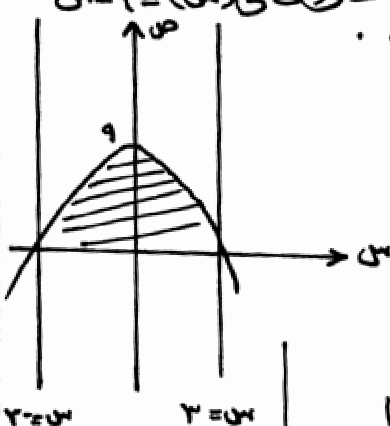
$$= \left| \left[\frac{س^4}{4} \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{س^4}{4} \right]_{0}^{1} \right|$$

$$= \left| (0) - (4) \right| + \left| \left(\tfrac{1}{4}\right) - (0) \right|$$

٤ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{17}{4}$ وحدة مربعة

(٧) إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٩ − س² ومحور السينات .

الحل:



٩ − س² = ٠

س² = ٩

س = ± ٣

$$م = \left| \int_{-3}^{3} 9 - س^2 \right|$$

$$= \left| \left[9س - \frac{س^3}{3} \right]_{-3}^{3} \right|$$

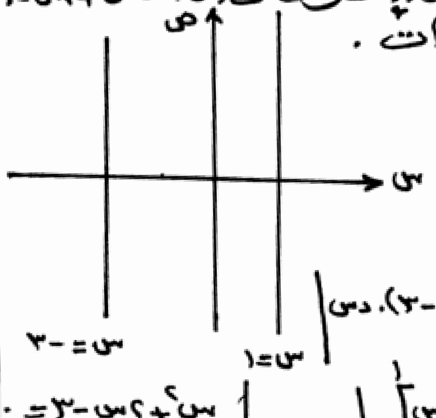
$$= \left| (27 - 9) - (-27 + 9) \right|$$

$$= \left| 18 - -18 \right|$$

= ٣٦ وحدة مربعة

٨ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + 2\text{س} - 3$ ومحور السينات.

الحل:



$\text{م} = \left| \int_{-3}^{1} (\text{س}^2 + 2\text{س} - 3)\,.\,\text{د س} \right|$

$\text{م} = \left| \left[\frac{\text{س}^3}{3} + \text{س}^2 - 3\text{س} \right]_{-3}^{1} \right|$

$= \left| (\frac{1}{3} + 1 - 3) - (-9 + 9 + 9) \right|$

$= \left| \frac{1}{3} - 2 - 9 \right|$

$= \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

$\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0$

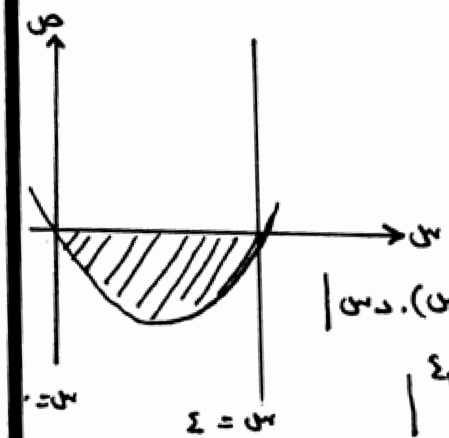
$(\text{س} + 3)(\text{س} - 1) = 0$

$\text{س} = -3$

$\text{س} = 1$

٩ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - 4\text{س}$ ومحور السينات

الحل:



$\text{م} = \left| \int_{0}^{4} (\text{س}^2 - 4\text{س})\,.\,\text{د س} \right|$

$= \left| \left[\frac{\text{س}^3}{3} - \frac{\cancel{4}\text{س}^2}{\cancel{2}} \right]_{0}^{4} \right|$

$= \left| (\frac{64}{3} - 32) - (0) \right|$

$= \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

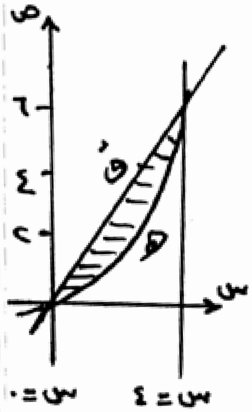
$\text{س}^2 - 4\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 4) = 0$

$\text{س} = 0 \,،\, \text{س} = 4$

١٠ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{1}{2}\text{س}^2$ والاقتران $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}$.

الحل:



$\text{م} = \left| \int_{0}^{4} (2\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2)\,.\,\text{د س} \right|$

$\text{م} = \left| \left[\frac{\cancel{2}\text{س}^2}{\cancel{2}} - \frac{\text{س}^3}{6} \right]_{0}^{4} \right|$

$\text{م} = \left| (16 - \frac{64}{6}) - (0) \right|$

$\text{م} = \left| 16 - \frac{32}{3} \right|$

$= \left| \frac{48}{3} - \frac{32}{3} \right|$

$= \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

$\text{ق} = \text{هـ}$

$2\text{س} = \frac{1}{2}\text{س}^2$

$4\text{س} = \text{س}^2$

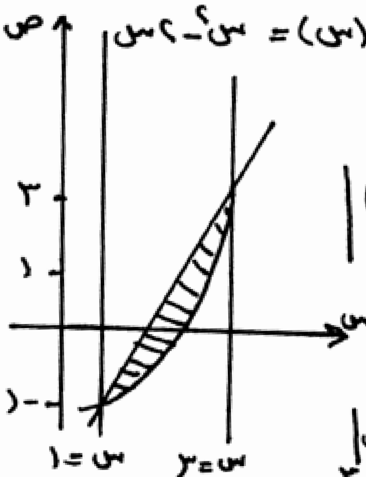
$\text{س}^2 - 4\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 4) = 0$

$\text{س} = 0 \,،\, \text{س} = 4$

١١ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س} - 3 \,،\, \text{ع}(\text{س}) = \text{س}^2 - 2\text{س}$

الحل:



$\text{م} = \left| \int_{1}^{3} (\text{س}^2 - 2\text{س}) - (2\text{س} - 3) \right|$

$\text{م} = \left| \int_{1}^{3} \text{س}^2 - 2\text{س} - 2\text{س} + 3 \right|$

$\text{م} = \left| \int_{1}^{3} (\text{س}^2 - 4\text{س} + 3)\,.\,\text{د س} \right|$

$\text{م} = \left| \left[\frac{\text{س}^3}{3} - \frac{\cancel{4}\text{س}^2}{\cancel{2}} + 3\text{س} \right]_{1}^{3} \right|$

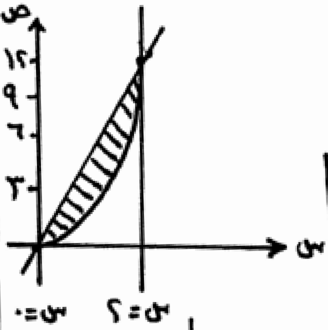
$= \left| (\frac{27}{3} - 18 + 9) - (\frac{1}{3} - 2 + 3) \right|$

$= \left| 0 - (\frac{1}{3} + 1) \right|$

$= \left| 1 - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$ وحدة مربعة

١٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٦س ، هـ(س) = ٣س²

الحل:



$م = \left|\int_{٠}^{٢} (٦س - ٣س^{٢})\,.\,دس\right|$

$م = \left|\left[\cancel{٦}\frac{س^{٢}}{\cancel{٢}} - \cancel{٣}\frac{س^{٣}}{\cancel{٣}}\right]_{٠}^{٢}\right|$

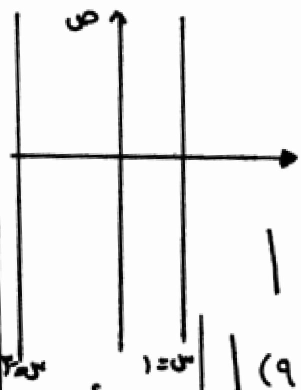
$= \left|(١٢ - ٨) - (٠)\right|$

= ٤ وحدات مربعة

٣س² = ٦س
٣س² − ٦س = ٠
س(س − ٢) = ٠
س = ٠
س = ٢

١٣ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ٣ − س² ، هـ(س) = ٢س

الحل:



$م = \left|\int_{-٣}^{١} (٣ - س^{٢} - ٢س)\,.\,دس\right|$

$م = \left|\left[٣س - \frac{س^{٣}}{٣} - \cancel{٢}\frac{س^{٢}}{\cancel{٢}}\right]_{-٣}^{١}\right|$

$م = \left|(٣ - \frac{١}{٣} - ١) - (-٩ + ٩ - ٩)\right|$

$م = \left|٣ - \frac{١}{٣} + ٩\right|$

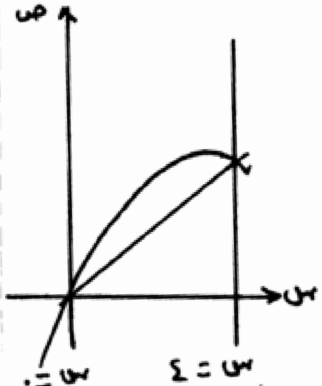
$م = \left|١١ - \frac{١}{٣}\right|$

م = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

٣ − س² = ٢س
س² + ٢س − ٣ = ٠
(س + ٣)(س − ١) = ٠
س = −٣
س = ١

١٤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٦س − س² ، هـ(س) = ٢س

الحل:-



$م = \left|\int_{٠}^{٤} (س^{٢} - ٤س)\,.\,دس\right|$

$م = \left|\left[\frac{س^{٣}}{٣} - \cancel{٤}\frac{س^{٢}}{\cancel{٢}}\right]_{٠}^{٤}\right|$

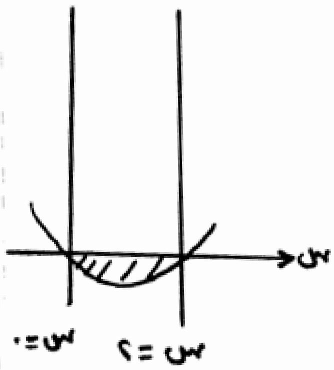
$= (\frac{٦٤}{٣} - ٣٢) - (٠)$

$م = \frac{٣٢}{٣}$

٢س = ٦س − س²
س² − ٦س + ٢س = ٠
س² − ٤س = ٠
س(س − ٤) = ٠
س = ٠
س = ٤

١٥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٢س ومحور السينات

الحل:-



$م = \left|\int_{٠}^{٢} (س^{٢} - ٢س)\,.\,دس\right|$

$م = \left|\left[\frac{س^{٣}}{٣} - \cancel{٢}\frac{س^{٢}}{\cancel{٢}}\right]_{٠}^{٢}\right|$

$م = \left|(\frac{٨}{٣} - ٤) - (٠)\right|$

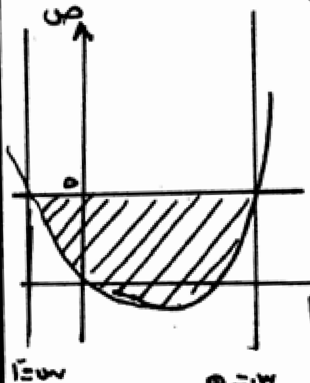
$م = \left|- \frac{٤}{٣}\right|$

$م = \frac{٤}{٣}$

س² − ٢س = ٠
س(س − ٢) = ٠
س = ٠ ، س = ٢

(١٦) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س٢ − ٤س والمستقيم ص = ٥ .

الحل:-



م = | ∫ من ١- إلى ٥ (س٢ − ٤س − ٥) دس |

= | [س٣/٣ − ٤س٢/٢ − ٥س] من ١- إلى ٥ |

= | (١٢٥/٣ − ٥٠ − ٢٥) − (١-/٣ − ٢ + ٥) |

= ٣٦ وحدة مربعة

س٢ − ٤س = ٥

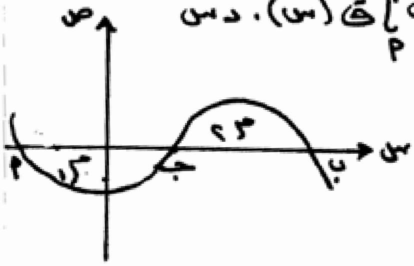
س٢ − ٤س − ٥ = ٠

(س − ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ ، س = ١-

(١٨) يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت أن مساحة م١ تساوي (٨) وحدات مربعة ومساحة م٢ تساوي (٥) وحدات مربعة فاحسب ∫ من أ إلى ب ق(س) . دس

الحل:-



∫ من أ إلى ب ق(س) . دس

= م١ + م٢

= −٨ + ٥ = −٣

(١٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س٢ ، والمستقيم ص = ٢س + ٣

(١٩) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = س٢ + ٢ والمستقيم ص = ٣

٢٠) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = $س^٣$، والمستقيم س=٢ ومحور السينات .

٢١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٦س ، هـ(س) = $٣س^٢$.

٢٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $س^٢$ ، هـ(س)=٣س

٢٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س)=س ، هـ(س) = $٢س^٢$.

تمارين متنوعة على وحدة التكامل

(١) جد $\int \frac{س^2 + 7س}{\sqrt{س^3}} . دس$

توضيح

(٢) $\int (2س - 1)(س^2 + 5) . دس$

(٣) $\int (4س + \frac{1}{س^2} + 2) . دس$

(٤) $\int \frac{-3}{(2س - 1)^4} . دس$

(٥) $\int \frac{دس}{\sqrt[3]{2س + 5}}$

(٦) $\int_{2}^{6} (\frac{2}{1 + 2س}) . دس$

(٧) $\int_{0}^{1} س (هـ)^{3س^2} . دس$

(٨) $\int_{1}^{ج} (2س + 3) . دس = صفر$

جد قيمة ج

(٩) $\int_{0}^{3} (جس^2 - 9) . دس = -15$

جد قيمة ج

(١٠) اذا كان الاقتران الايراد الحدي $دَ(س) = 120 - 6س^2 - 2س + 50$ جد الايراد الكلي عن بيع ٣ اجهزة.

(١١) يتناقص سعر بيت بمعدل منتظم يبلغ ٢٪ سنويا ويخضع لقانون الاضمحلال فاذا اشترت دعاء هذا البيت بمبلغ ٤٠٠٠٠ دينار جد سعر البيت بعد ١٠ سنوات

(١٢) $\int 3س^2 (س^3 - 4س + 5) . دس$

(١٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين $ص = س^2 + 2$ ، $ص = 5 - 2س$

(١٤) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س^2 - 3س$ والمستقيمين $س = 1$ ، $س = 5$

(١٥) $\int_{4}^{-1} (\frac{ق(س)}{2} + 3س^2)$ علماً بأن $\int_{4}^{-1} ق(س) . دس = 2$

(١٦) $\int_{-1}^{2} ق(س) . دس$ اذا علمت ان $\int_{2}^{-1} 2ق(س) . دس = 12$

(١٧) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند اي نقطة (س، ص) يساوي $(2س - 1)(س + 5)$ جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن $ق(2) = -3$.

١٨) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{٩-س}\ .\ دس$

١٩) $\int جا(٤-٣س)\ .\ دس$

٢٠) اذا كان الايراد الحدي لمنتج معين هو $د'(س) = س^٢ + ١٢٠$ دينار
جد الايراد الكلي الناتج عن بيع ٦ قطع

٢١) $\int \frac{٤س-٦}{\sqrt[٣]{س^٢-٣س+١}}\ .\ دس$

٢٢) $\int ٢س^٢(س^٣+٦)^٦\ .\ دس$

٢٣) $\int ٢س \times هـ^{٦س^٢}\ .\ دس$

٢٤) $\int_{٣}^{٥} \frac{٢}{٢س-٤}\ .\ دس$

٢٥) $\int \frac{٣}{٣س-١٢}\ .\ دس$

٢٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات والمستقيمين
$س = -٢$ ، $س = ٥$

٢٧) إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٥ - ٥س^٢$
ومحور السينات

٢٨) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين $ق(س) = ١٦ - ٤س^٢$
والمستقيم $ص = ٠$

٢٩) $\int جا(٤-٣س)\ .\ دس$

٣٠) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{٩-س}\ .\ دس$

٣١) اذا علمت ان $ص = \int_{١}^{٣}(٦س^٢+٢س)\ .\ دس$
جد $\frac{دص}{دس}$

٣٢) اذا كان اقتران السعر – الطلب لمنتج معين $ق = ١٤ - ٢س$ واقتران السعر والعرض لهذا المنتج $ع = هـ^{س} + ٢$ جد سعر التوازن

٣٣) اذا كان $ع = ق = ٢٠ - س^٢$ (السعر – الطلب)
$ع = هـ^{س} = س^٢ + ٢$ (السعر – العرض)
جد كمية التوازن ، سعر التوازن
فائض المستهلك ، فائض المنتج

٣٤) وضع مبلغ ١٢٠٠ دينار في بنك بحساب الربح المركب المستمر علماً بأن حساب جملة المبلغ يخضع لقانون النمو وبنسبة فائدة منتظمة مقدارها ١٠٪ سنوياً
جد مقدار الربح المتحقق بعد مرور
٢٠ عاماً