

4.500

MATHEMATICS

المنهاج الجديد

الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي و الصناعي - الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثالثة :

تطبيقات التفاضل

2018/19



إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١



مكتبة الوسام

ALWESAM

tawjihi center & service store

الصف الثاني عشر
الفرعين العلمي والصناعي
الوحدة الثالثة
تطبيقات التفاضل

- ١- تطبيقات هندسية
- ٢- تطبيقات فيزيائية
- ٣- المعدلات المرتبطة بالزمن
- ٤- النقط الحرجة
- ٥- التزايد والتناقص
- ٦- القيم القصوى
- ٧- التقعر
- ٨- تطبيقات القيم القصوى
- ٩- اسئلة الوحدة وحلولها
- ١٠- حلول جميع تدريبات واسئلة الكتاب
- ١١- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨-٢٠١٨) مع الحلول النموذجية
- ١٢- ورقة عمل على كل درس مع الحلول النموذجية

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

المعلم : ناجح الجمزاوي

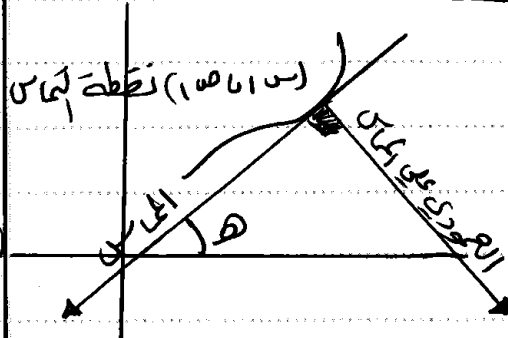


المعلم : ناجح الجمزاوي

تطبيقات هندسية

التفسير الهندسي للمشتقة

ملاحظات هامة



تفسر المشتقة لأدوى عند النقطة (س، ف(س)) على أنها ميل المماس لمنحنى ف(س) عند تلك النقطة

أي أن المماس هو الخط المستقيم الذي لمس أو يقطع منحنى ف(س) في نقطة تسمى نقطة المماس (س، ف(س))
 ميل المماس = ميل المنحنى = ف'(س)
 = ظا هـ

حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات الموجب (الاتجاه الموجب)

ميل المماس عند (س، ف(س)) = م = ف'(س)
 معادلة المماس عند نقطة المماس (س، ف(س))

ص - ف(س) = م(س - س)
 معادلة العمودي على المماس عند (س، ف(س))

ص - ف(س) = $\frac{1}{م} (س - س)$

① ميل المستقيم المار بالنقطتين (س، ف(س)) و (س، ف(س))
 $\frac{ف(س) - ف(س)}{س - س} = م$ (س، ف(س))
 يساوي م

② إذا توازي مستقيمان كان ميلهما مساوي
 م = م

③ إذا تقاطع مستقيمان فإن
 $م \times م = -١$
 $\frac{١}{م} = -م$

④ المستقيم الذي يوازي محور السينات ليس مستقيماً أفقياً ويكون ميله يساوي صفر (المشتقة = صفر)

⑤ ميل المستقيم على الصورة ص = م + ب يساوي م = معامل ب

⑥ ميل المستقيم الذي على الصورة ص = م + ب + ج يساوي م = معامل ب
 $\frac{م}{ب} = \frac{م}{ب}$

⑦ المستقيم الذي يوازي محور السينات ميله غير معروف = ظا هـ

أولاً

إيجاد معادلة التماس والعمودي
إذا علمت نقطة التماس

لأيجاد معادلة التماس يلزم
النقطة (نقطة) التماس (س، ص) والميل
وإذا علمت س، ص، فالميل
إيجاد ص، س بحوضين (س، ص) في (س، ص)

④ لإيجاد نقطة تقاطع إفتران
مع محور السينات نضع $y=0$
أو $x=0$

لإيجاد نقطة تقاطع إفتران
مع محور إصدات نضع $x=0$

لإيجاد نقطة (نقط) إلتقاط
بين إفتري اثنين نأويهما معاً
(س، ص) = (س، ص)

مثال ①

أوجد معادلة التماس والعمودي للنقطة
الإفتران (س، ص) = $3 + 4 = 7$ عند
النقطة (٣، ٤)

لإيجاد تقاطع علاقيتين ضميمين
نعوض إحداهما في الأخرى

الحل

(س، ص) = (٣، ٤) نقطة التماس
الميل = $ص = (س) = ٤ = ٣ + ١$
 $ص = (س) = ٣ = ٤ - ١$ = صفر

مثال
جد نقط إلتقاط بين علاقيتين
 $س = ٣ - ٤ = ١$ ، $٤ = ٣ + ١ = ٤$

الكل

$س + ٣ = ٤ = ٣ = ٣$
نعوضها في الأولى

$٩ = ٣ - (٣) = ٠$
 $٩ = ٣ - (٣ + ١) = ٠$
 $٩ = ٣ - ٤ = ٠$
 $٣ = ٣ = ١٨ = ٣$

معادلة التماس هي

$٣ - ٤ = ١ = ٣ - (٣ - ١)$
 $٣ - ٤ = ٣ - (٣) = ٠$
 $٣ - ٤ = ٣ - ٤ = ٠$
 $٣ = ٤ = ٣$

معادلة العمودي
 $٣ - ٤ = ٣ - (٣) = ٠$ يتاوي
 $٣ = ٤ = ٣ - ٤ = ٠$

$٣ - ٣ = ٠$
النقطة (٣، ٤)

سؤال ٦
 اوجد معادلة المماس لمخمس الاقتران
 م(س) اذا كان $m = 3 - 6c + 5c^2$
 ع = $5c^2 + 1$ عند $c = 0$ = صفر

الحل

$$c = 0 \Rightarrow m(0) = 1$$

عند $c = 0$ ، $c = 1$ وعند $c = 1$ فان $m = 3 - 6(1) + 5(1)^2 = 2$

نقطة المماس هي $(0, 1)$
 ميل المماس : نستخدم قاعدة المشتقة

$$\frac{dm}{dc} = \frac{10c}{5c^2} = \frac{2}{c}$$

$$2 \times (0 - 1) = -2$$

$$-2 = -2 \times (0 - 1) = 2$$

$c = 1$
 معادلة المماس هي

$$-2 = 0 - 2 \Rightarrow 2 = 0 - 2$$

$$2 = 0 - 2 \Rightarrow 2 = -2$$

$$0 + 2 = 2$$

$$\text{ميل المماس} = -\frac{1}{0} = \text{مائل العمودي} = \frac{0}{\infty}$$

معادلة المماس

$$0 - 1 = \frac{1}{0} (0 - 1)$$

معادلة العمودي

$$0 - 1 = \frac{0}{\infty} (0 - 1)$$

سؤال ٧

أثبت ان المماس لمخمس الاقتران
 م(س) = $3 - 6c + 5c^2$ عند نقطة $(1, 2)$
 يقطع محور السينات عند النقطة $(\frac{1}{5}, 0)$

الحل

خذ معادلة المماس

$$m - 2 = c(3 - 6c + 5c^2) - 2$$

$$m - 2 = 0$$

نقطة المماس هي $(1, 2)$

معادلة المماس هي

$$m - 2 = c(3 - 6c + 5c^2) - 2$$

ولايجاد نقطة التقاطع مع محور

السينات نضع $m = 0$

$$0 - 2 = c(3 - 6c + 5c^2) - 2$$

$$-2 = 3c - 6c^2 + 5c^3 - 2$$

$$0 = 3c - 6c^2 + 5c^3$$

$$0 = 3c(1 - 2c + \frac{5}{3}c^2)$$

$$0 = 3c(1 - 2c + \frac{5}{3}c^2)$$

$$0 = 3c(1 - 2c + \frac{5}{3}c^2)$$

$$0 = 3c(1 - 2c + \frac{5}{3}c^2)$$

$$0 = 3c(1 - 2c + \frac{5}{3}c^2)$$

سؤال ٨

اوحد معادلة المماس لمخني العلاقة
 $x^2 + y^2 = 1$ عند النقطة
 (٠.٦.٠)

اكل

نقطة المماس (٠.٦.٠)
 شئقة

$$2x + 2y = 1 \Rightarrow 2(0.6) + 2y = 1 \Rightarrow 1.2 + 2y = 1 \Rightarrow 2y = -0.2 \Rightarrow y = -0.1$$

نعوض (٠.٦.٠)

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (0.6)^2 + (-0.1)^2 = 1 \Rightarrow 0.36 + 0.01 = 1 \Rightarrow 0.37 = 1$$

$$1 - 0.37 = 0.63$$

$$معادلة المماس هي: $1 - 0.37 = 0.63$$$

سؤال ٩

اوحد معادلة المماس لمخني العلاقة
 $x^2 + y^2 = 9$ عند النقطة
 (١.٥.٠) التي تقع على مخني العلاقة

اكل

نعوض (١.٥.٠) في العلاقة

$$9 = x^2 + y^2 = (1.5)^2 + 0^2 = 2.25$$

$$9 - 2.25 = 6.75 = 1.5^2 + 0^2$$

$$1.5^2 + 0^2 = 2.25$$

نقطة المماس هي (١.٥.٠)

نجد الميل بالاشتقاق ضمنيًا

$$2x + 2y = 0 \Rightarrow 2(1.5) + 2y = 0 \Rightarrow 3 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -1.5$$

نعوض النقطة (١.٥.٠) يتبع كل

سؤال ٧

اوحد معادلة المماس والعمودي
 لمخني الأفتان $(x, y) = \frac{c}{1+x^2}$
 عند $x = \frac{\pi}{2}$

الحل

$$عند $x = \frac{\pi}{2}$ فانه $y = \frac{c}{1+(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{c}{1+\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4c}{4+\pi^2}$$$

$$r = \frac{c}{1+\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4c}{4+\pi^2}$$

نقطة المماس $(\frac{\pi}{2}, \frac{4c}{4+\pi^2})$

ميل المماس $-\frac{c}{1+x^2}$

$$-\frac{c}{1+(\frac{\pi}{2})^2} = -\frac{4c}{4+\pi^2}$$

$$\frac{4c}{4+\pi^2}$$

$$\frac{1 \times c}{1+\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\frac{\pi}{2} \times c}{1+\frac{\pi^2}{4}}$$

$$r =$$

معادلة المماس

$$y - \frac{4c}{4+\pi^2} = -\frac{4c}{4+\pi^2} (x - \frac{\pi}{2})$$

معادلة العمودي

$$y - \frac{4c}{4+\pi^2} = \frac{1}{4} (x - \frac{\pi}{2})$$

مسألة ١١

إذا كان هو (٢) = ٥ و (٥) = ٤
 (٥) = ٨ فما وجد معادلة
 المماس لمخني هو (س) عند س = ٢

الحل

نقطة المماس هي (٢ و ٥)
 = (٥ و ٢)

ميل المماس = هو (٢)

هو (٥) = (٢) هو (٢) × هو (٢)

٨ = هو (٥) × هو (٢)

٨ = ٤ - × هو (٢)

٢ - = $\frac{٨}{٤-}$ = هو (٢) ←

معادلة المماس هي

٥ - = ٥ - (س - ٢)

ملاحظة

ميل الخط المستقيم

٥ - = ٥ + ٥ + ٥

ساي = $\frac{٥-}{٥}$ = معامل س

معامل س

٤ - ١ = (١ + ١) ٣ + (١ - ٥) =

٤ - ٥ + ١ = (١ - ٥) =

٤ - ٥ + ١ = ٤ - ٥ =

٤ - ٥ = ٤ - ٥ = $\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس هي

٥ + ١ = $\frac{١}{٤}$ (س - ١)

مسألة ١٠

إذا كانت = ٥ - ٣ = ٥ هي معادلة

العمودي عند النقطة (١ و ٢) وجد

مسا Δ هو (س) عند س = ٢

س ← ٥

الحل

بما أن = ٥ - ٣ = ٥ هي معادلة

العمودي ميل العمودي = ٣ (مستقيم)

← ميل المماس = $\frac{١}{٣}$ عند النقطة

(١ و ٢)

وعليه فإن مسا Δ هو (س) = هو (٢)

س ← ٥

١ - = $\frac{١}{٣}$

سؤال ١٣

اذا كان $v = c + s + 3$ ليس
 الأفتران $v = (s)$ $p = s + c + 1$
 عند $s = 1$ فأوجد قيمة p, c, v ؟

الحل

عند $s = 1$

① الصورة = الصورة

$v(1) = c(1)$

$3 + 1 \times c = 1 + 1 \times v + 1$

$0 = 1 + v + p$

① $0 = v + p$

② المشتقة = المشتقة

$v'(1) = c'(1)$

$v + s - p = c$

$c = v$

$c = v + 1 \times p$

② $c = v + p$

نحل المطاولتين

$0 = v + p$ بالطرح

$c = v + p$

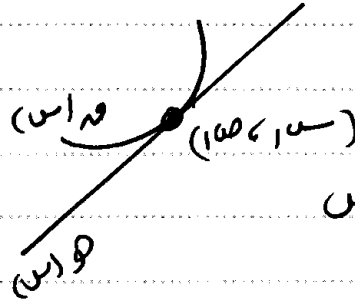
$v = p \iff v - = p - \iff$

نحوض $v = p$ في المطاوله ①

$0 = v + v$

$12 = v$

ملاحظة هامة جداً



عند نقطة التماس

$(1, 100)$

يتحقق شرطان

① $v(1) = c(1)$

② $v'(1) = c'(1)$

أي أن

الصورة = الصورة

المشتقة = المشتقة

سؤال ١٤

أوجد قيمة الثابت j في الأفتران
 $v = (s) = s + j$ والذي يجعل
 المستقيم $v = c = s$ مماساً لـ

الحل

عند نقطة التماس $v(1) = c(1)$

$c = 1 \iff c = 1$

$v(1) = c(1)$

$c \times c = p + c$

$c = p \iff 1 = p + 1$

نلاحظ $v(1) = c(1)$

الصورة = الصورة

ثانياً

معادلة المماس والعمودي اذا كانت نقطة المماس مبرهولة

لأيجاد نقطة المماس

① نجد ميل المماس

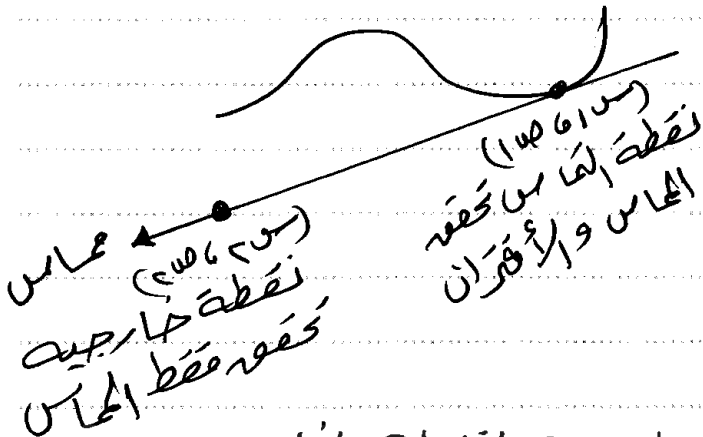
② نجد عمده (س)

③ نضع عمده (س) = ميل المماس

و نضعها في معادله الأفتزان

لأيجاد عمده

ملاحظة هامة



في حالة النقطة الخارجيه

كالنقطة (س, ص) فهي لا تحققه

فتن الأفتزان و (س) لكنها تحققه

معادلة المماس فقط

← ميل المماس = المشتقة

ن $\frac{ص - س}{س - س} = \frac{ص - س}{س - س}$

مثال ١٤

جد قيمة الثابت ج الذي يجعل المستقيم

المار بالنقطتين (١, ٥) و (٥, ٢) مماساً لمنحنى الأفتزان

$$ص = س = \frac{ص}{س + ١}$$

الحل

ميل المماس $١ - = \frac{٥ - ٢}{١ - ٥} = \frac{٣ - ٥}{١ - ٥} = \frac{٣ - ٥}{١ - ٥}$

معادلة المماس هي

$$ص - ٥ = ٣(س - ١)$$

$$ص - ٥ = ٣س - ٣$$

عند نقطة المماس (س, ص)

① $ص = ٣س - ٣$

$$٣س - ٣ = \frac{ص}{س + ١}$$

② $٣(س + ١) = ص(س + ١)$

③ $ص = ٣$

$$١ - = \frac{٣ - ٥}{س + ١}$$

④ $٣(س + ١) = ص(س + ١)$

⑤ $٣(س + ١) = ٣(س + ١)$

⑥ $٣(س + ١) = ٣(س + ١)$

القسمه على س + ١

$$٣س - ٣ = ٣س - ٣$$

$$٣ = ٣$$

التوضيح في ③

$$٣ = ٣(١) = ٣$$

① $15c = \frac{c+100}{15}$ ←

وبكسر النقطة (100, 15) تقع على
مخمس عداس) ← تحقده معادلاته

② $100 = 15c + c$ ←
لتحول 100 في معادلة ①
 $\frac{c+c+100}{15} = \frac{15c}{15}$

$15c = 15c + c$ ← $15c = c$
 $15 = 1$ ← $15 = 1$
عندما $15 = 1$ ← $15 = 1$
نقطة التماس الأولى (15, 1)

عندما $15 = 1$ ← $15 = 1$
نقطة التماس الثانية هي (-15, 1)

③ (15, 1)

ميل التماس = $15 = 15 \times 1 = 15$
معادلة التماس $15 = 15 - 15 = 0$

④ (-15, 1)

ميل التماس = $15 = 15 \times (-1) = -15$

معادلة التماس $15 = 15 - 15 = 0$

مثال ①

جد معادلة التماس والعمودي للنحن
الأعقران (100, 15) = $15c - c^2 + 1$
حيث ان التماس يصنع زاوية
مقدارها 45° مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات

الحل

ميل التماس = $15 = 15c - 2c^2$
 $15 = 15c - 2c^2$
 $15c - 2c^2 = 15$
 $15c = 15 + 2c^2$
لتعويضها في معادلاته لاجاد 100
وهي $100 = 15c - c^2 = 15 + 2c^2 - c^2 = 15 + c^2$
نقطة التماس هي (15, 1)

ميل التماس = 1
معادلة التماس $15 = 15 + 100 = 115$
معادلة العمودي $15 = 1 + 100 = 105$

مثال ②

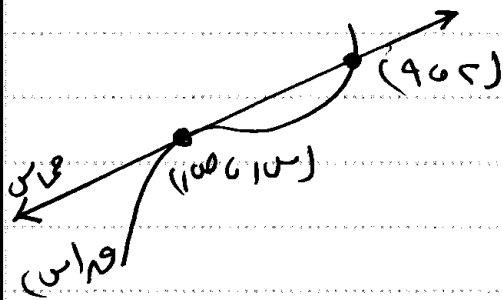
اذا رسم من النقطة (15, 1)
مماسان للنحن عداس) = $15c - c^2 + 1$
فجد معادلات التماس للنحن عداس)

الحل

نفرض ان نقطة التماس
هي (100, 15)
ميل التماس = $15 = 15c - 2c^2$
 $15c - 2c^2 = 15$

سؤال ٣

رسم محاسن لمنحنى الأفتقران
 (١٥٠٠, ١) عند النقطة (١٥٠٠, ١)
 قطع المنحنى في نقطة ثانية هي
 (٩٥٢) جد معادلة هذا المحاسن



الحل

ميل المحاسن = ميل المنحنى

$$\frac{1 - 952}{1500 - 952} = \frac{1 - 1}{1500 - 1}$$

ولكن $1 - 952 = 1500 - 1$

$$\frac{1 - 952}{1500 - 952} = \frac{1 - 1}{1500 - 1} \leftarrow$$

$$\frac{1 - 952}{1500 - 952} = \frac{1 - 1}{1500 - 1}$$

$$\frac{1 - 952}{1500 - 952} = \frac{1 - 1}{1500 - 1}$$

بالقسمة التي ليست بحزب لطافلات
 للعدد ٤ (١-١) الجذر

٤	٣	١
٤	١	
٤	٤	١

$$= (1 + s)(s - 4 + 4 + 1) = (1 + s)(s - 3)$$

$$= (1 + s)(s - 3)(s - 3)$$

$$\leftarrow 1 - 1 = 0 \quad 1 - 1 = 0$$

عندما $1 - 1 = 0$ فان $1 - 1 = 0$

$$9 = 1 + 2 = 1 \leftarrow 2 = 1$$

(٩٥٢) تحويل
 معادلة المحاسن

$$1 - 952 = 1500 - 1$$

$$3 + 3 = 3$$

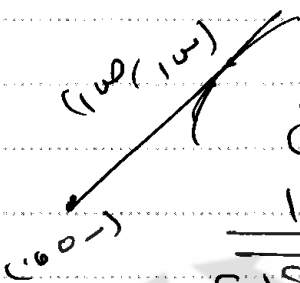
سؤال ٤

جد معادلة المحاسن المرسوم من
 النقطة (٠, ٥٥) لمنحنى الأفتقران
 و (١٥٠٠, ١)

الحل

نفرض ان نقطة المحاسن هي

$$(1500, 1)$$



ميل المحاسن = ميل المنحنى

$$\frac{1 - 55}{1500 - 0} = \frac{1 - 55}{1500 - 0}$$

$$\frac{1 - 55}{1500 - 0} = \frac{1 - 55}{1500 - 0}$$

$$\frac{1 - 55}{1500 - 0} = \frac{1 - 55}{1500 - 0}$$

$$\frac{1 - 55}{1500 - 0} = \frac{1 - 55}{1500 - 0}$$

$$\frac{1 - 55}{1500 - 0} = \frac{1 - 55}{1500 - 0}$$

ضرب بيادوي \leftarrow لتبع

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

نقطة التماس (162)

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

معادلة العودي

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

سؤال 6

جد جميع النقط الواقعة على منحنى

العلاقة $c = 1 - \frac{1}{x}$ بين x و c هي $x = 1$.

التي يمر المماس المرسوم لمنحنى العلاقة

عند كل منها بالنقطة (164)

الحل

نظرن ان نقط التماس هي (164, 1)

ميل المماس = ميل المنحنى

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$c = (c+1) \cdot \frac{1}{c} = \frac{c+1}{c}$$

$$c = \frac{c+1}{c} \Rightarrow c^2 = c+1 \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0$$

$$c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$c = 1$$

نقطة التماس هي (164)

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

معادلة المماس

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

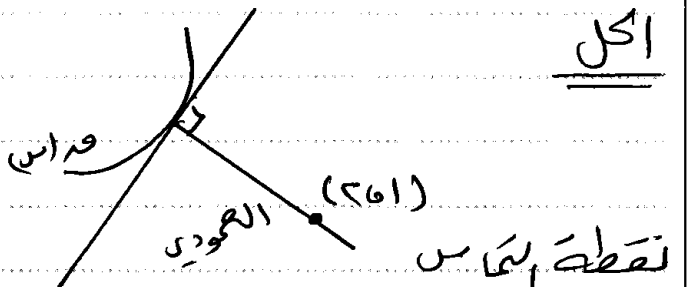
سؤال 7

اذا كان $c = \frac{1}{x}$ وكان

العمودي على المنحنى عند النقطة

(164) فأوجد معادلة العمودي

الحل



نقطة التماس

(164, 1)

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

$$\frac{c-1}{1-c} = \frac{c-1}{1-c}$$

ثبته ضمناً

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

و كما نرى (س١، س٢) تحقق معني العلاقة

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

بكونين معادلة ١ في معادلة ٢

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

بكونين في معادلة ٢

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

النقطة هي (٣، ٥) و (٣، ٥)

مثال ٧

جد معادلة التماس الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويكون مماساً على المنحنى

$$y = x^2 - x + 2$$

الحل

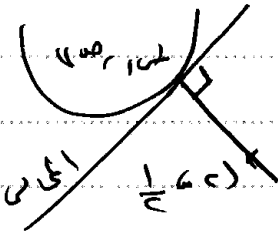
نضرب ان نقطة تماس (س١، س٢)

$$y = x^2 - x + 2$$

$$y = x^2 - x + 2$$

ايضاً ميل المماس

$$y = x^2 - x + 2$$



$$y = x^2 - x + 2$$

$$y = x^2 - x + 2$$

$$y = x^2 - x + 2$$

$$y = x^2 - x + 2$$

النقطة هي (١، ١)

$$y = x^2 - x + 2$$

معادلة المماس

$$y = x^2 - x + 2$$



سؤال ١٠

أثبت أن $(س)$ = $٣س^٢ + ٥س + ٥$
 عند النقطة $(١-٢٦١)$ هي مماسية
 عند النقطة $(١-٢٦١)$

الحل

عند النقطة $(١-٢٦١)$ يجب التحقق
 من الشرطية

١) $١-٢٦١ = (١-١)$ هو

$٣(١-١)^٢ + ٥(١-١) + ٥ = ٥$

$٣ = ٣$ تحقق

٢) $١-٢٦١ = (١-١)$ هو

$٥ + ٥(١-١) = ٥$

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ٣(١-١)^٢ + ٥(١-١) - ٢ = ٣ - ٢ = ١$

$١-٢٦١ = ٥ + ١ - ٢ = ٤$

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ٣(١-١)^٢ + ٥(١-١) - ٢ = ٣ - ٢ = ١$

$١ = ١$

تحقق $١-٢٦١ = (١-١)$ هو

عند $(١-٢٦١)$

سؤال ١١

حدد معادلة المماس للأقتران
 $(س)$ = $٣س^٢ + ٥س + ٥$ عند النقطة
 تقاطعه مع محور السينات

الحل

عند النقطة تقاطعه مع محور السينات
 لو وضع $٥ = ٠$

$١-٢٦١ = ٣س^٢ + ٥س + ٥$

$١-٢٦١ = ٣س^٢ + ٥س + ٥$

التقط $(١-٢٦١)$

ميل المماس = $٣س$ عند $س = ١$

$٣ = (١-١)$

معادلة المماس $٣س = ٥ + ٥(١-١)$

سؤال ١٢

حدد جميع النقاط الواقعة على منحنى
 العلاقة $٣س^٢ + ٥س - ٢ = ١-٢٦١$
 والتي يكون ميل المماس لهذا المنحنى
 عند كل منها يساوي ٤ ؟

الحل

نقرض ان النقطة $(س، ١-٢٦١)$ نقطة
 المماس

بإستعمال المعادلة ضئياً

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ١-٢٦١$

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ١-٢٦١$

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ١-٢٦١$

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ١-٢٦١$

ميل المماس $٣س = ٤$

$٣س = ٤$

$٣س = ٤$

$٣س = ٤$

لكن $(س، ١-٢٦١)$ تحقق معادلة المنحنى

$٣س^٢ + ٥س - ٢ = ١-٢٦١$

بتعويض $٣س = ٤$ في (١) نستخرج ان

يستخرج كل

$$\frac{1}{3} = c \leftarrow 1 - c = \frac{2}{3}$$

$$\text{نجد } s = 1 - c = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

نقطة التقاطع هي $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

نجد ميل المماس عند نقطة ضيقاً

$$c = c + c = 2c$$

$$c \times \frac{1}{3} \times c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times c$$

$$\frac{c}{3} = \frac{1}{3} + \frac{c}{3}$$

$$\frac{c}{3} = \frac{1}{3} + \frac{c}{3} \leftarrow$$

$$\frac{c}{3} = \frac{1}{3} \leftarrow c = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس هي

$$c - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} (c - \frac{1}{3})$$

$$77 = 100c - 100 + 100c + 100c - 16$$

$$77 = 100c - 100 + 100c + 100c - 16$$

$$= 77 - 16 + 100c - 100 + 100c$$

$$= 61 - 100c + 100c + 100c$$

بالقسمة على 100

$$= 0.61 - c + c + c$$

$$= (1 + 100c)(0.61 - c)$$

$$1 - c = 0.61 + 100c$$

التعويض في معادلة ①

$$c = 1 \leftarrow 3 - 4 = 100c - 4$$

$$1 - c =$$

$$100c - 4 = 100 \leftarrow 1 - c =$$

$$1 - c =$$

$$\text{المعادلة } (1 - 0.61) = (300 - 100c)$$

سؤال ١٤

اثبت ان المماسين المرسومين للمنحنى
العلاقين

$$c + s = 1 \leftarrow 6.40 = 6.40 - c + c = 0$$

عند نقطة تقاطع المنحنى في
الربع الأول يكونان مماسين

الحل

نجد نقطة التقاطع للمماسين أو
التعويض

← ليضع

سؤال ١٣

اوجد معادلة المماس للمنحنى العلاقة

$$s + c = 1 \leftarrow \text{عند نقطة}$$

تقاطع المنحنى مع المستقيم

$$c + s + 1 = 1 \leftarrow \text{في الربع الثاني}$$

الحل

$$s = 1 - c \leftarrow \text{نعوضها بدل } s$$

$$\text{في العلاقة } s + c = 1 \leftarrow c = 1 - c$$

$$(1 - c) + c = 1 \leftarrow c = 1 - c$$

$$c + 1 + c = 1 \leftarrow c = 1 - c$$

سؤال (١٥)

اوجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع العلاقة $ص = ٤ - ٥س + س٢$ مع محور الصادات.

الحل

نعوض $ص = ٤ - ٥س + س٢$ في معادلة المماس.

$$ص = ٤ - ٥س + س٢$$

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

نقط التقاطع $(٠, ٤)$ و $(٤, ٠)$ نسبة العلاقة ضمنيًا

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

① عند النقطة $(٤, ٠)$

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

معادلة المماس

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

$$ص = ٤$$

② عند النقطة $(٠, ٤)$

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

معادلة المماس هي

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

$$ص = ٤$$

$$ص - ٤ = -٥س + س٢$$

← تابع اكل

رتب المعادلة الثانية

$ص = ٤ + ٥س - س٢$ ونعوضها في الأولى

$$٤٠ = ٤ + ٥(٤) - ٤٠$$

$$٤٠ = ٤ + ٢٠ - ٤٠$$

$$٤٠ = ٢٤$$

$$٤٠ = ٢٤$$

نأخذ $ص = ١$ في الربع الأول

نجد من التعويض في المعادلة الثانية

$$ص = ٤ - ٥س + س٢$$

$$١ = ٤ - ٥س + س٢$$

وفي الربع الأول $ص = ٣$

← نقطة التقاطع والمماس هي

$$ص = ٣$$

نسبة المعادلة ضمنيًا

$$ص - ٣ = ٨س - ١٨س٢$$

نعوض النقطة $(١, ٣)$

$$ص - ٣ = ٨س - ١٨س٢$$

$$٤ - ٣ = ٨(١) - ١٨(١)٢$$

$$١ = ٨ - ١٨$$

نسبة الثانية

$$ص - ٣ = ٨س - ١٨س٢$$

$$ص - ٣ = ٨س - ١٨س٢$$

$$ص - ٣ = ٨س - ١٨س٢$$

$$ص - ٣ = ٨س - ١٨س٢$$

المماسان هما

ثالثاً

التوازي والتعاقد

سؤال ①

جد معادلة المماس للأقتران
 و (س) = س^٢ + ٤س + ٣
 اذا كان المماس يوازي المستقيم
 ص = ٦ - س - ٥

الحل

و (س) = س^٢ + ٤س + ٦
 المماس // المستقيم
 و (س) = ص

ص = ٦ - س - ٥ = س^٢ + ٤س + ٦
 ص = ٦ - س - ٥ = ١

و (١) = ١ = ٣ + ٤س + س^٢
 نقطة المماس (١ | ٨)
 ميل المماس = ٦

معادلة المماس ص = ٨ - ٦(س - ١)

سؤال ②

اذا كان و (س) = س^٢ + ١
 معادلة المماس للأقتران و (س)
 اذا كان المماس يعاقد ص = ١ + س
 ← اكل

الحل

و (س) = س^٢ + ١
 ميل المماس = ميل المستقيم = ١

و (س) = س^٢ + ١
 ميل المماس = ١

١ = ٢س

س = ١/٢
 و (١/٢) = ١ + ١/٤ = ٥/٤

و (٢) = ٤ + ١ = ٥

نقطة المماس هي (٢ | ٥)

ميل المماس = ميل المستقيم = ٥ - ٢ = ٣
 معادلة المماس هي

ص = ٥ - ٣(س - ٢)

سؤال ③

جد النقطة على منحني الاقتران
 و (س) = ظاس التي يكون عندها
 المماس موازياً للمستقيم
 ص = ٢س
 حيث س ∈ [٠ | π/٦]

الحل

و (س) = ظاس
 ميل المماس = ميل المستقيم = ٢

ظاس = ٢س

ظاس = ٢س
 ٢س = ٢س

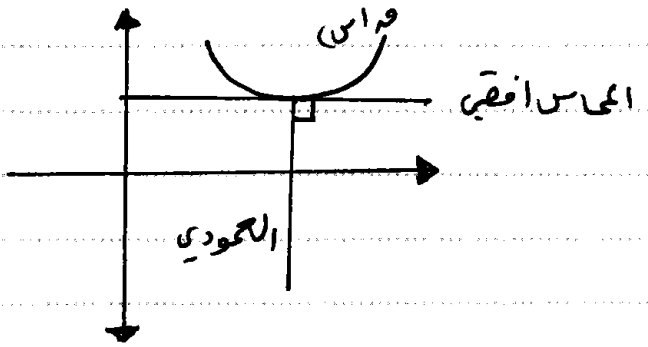
لكن س ∈ [٠ | π/٦]

ظاس = ٢س = ٢(١) = ٢

و (١) = ٢
 النقطة هي (١ | ٢)

ملاحظة هامة

① اذا كان العمودي على المحاس يوازي محور إصداوات فان المحاس يوازي محور السينات (المحاس افقي)



② تكون النقطة (سا، صا) نقطة تقاطع منحنيين ه، ه، يجب توفر شرطين

③ ميل ه لا ميل ه = 1

④ ه (سا) = ه (صا)

(سا، صا) نقطة مشتركة نقطة تقاطع

مثال

ه نقطة تقاطع منحنيين الاقترانين
ه (سا) = ه (صا) ، ه (سا) = ه (صا) + 1

الحل

لتكن (سا، صا) نقطة التماس
ه (سا) = ه (صا)
صا = ه (سا) = ه (صا) + 1
ه (سا) = ه (صا) + 1
صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

صا = ه (سا) = ه (صا) + 1

أمثلة وتطبيقات هندسية متنوعة

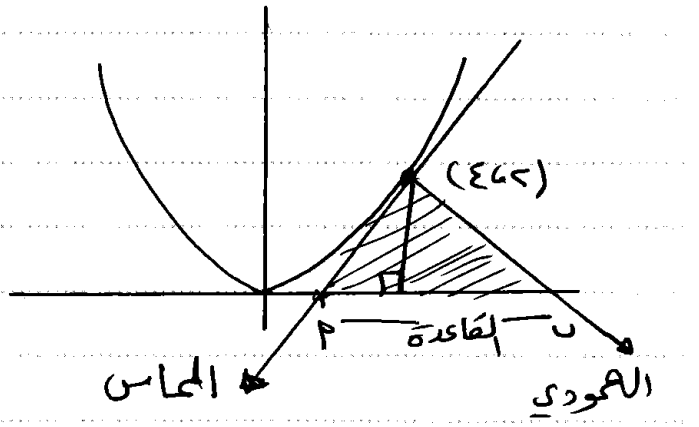
$18 = 5 \leftarrow 2 - 3 = 16 \leftarrow$
 النقطة (٠, ١٨) = ب
 طول القاعدة = $5 - 18 = 13$
 الارتفاع = ٤
 مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$34 = 4 \times 17 \times \frac{1}{2} =$

مثال ٥ من كتاب
 اوجد مساحة المثلث المكون من المماس
 المرسوم من النقطة (١٠, ٠) لمخني
 الأفتزان (داس) = $3 + 3$ والمحمودي
 على المماس عند نقطة التماس
 واستقيم $ص = ١$

الحل
 لكننا نقدر المماس (داس) $١٥٠, ١٥٠$
 فد (داس) = $3 + 3 = 6$ ميل المماس
 $3 + 3 = 6$
 ميل المماس = $\frac{١ - ١٥٠}{١ - ١٥٠} = ١$ لكنه $١٥٠, ١٥٠$
 $3 + 3 = 6$
 ميل المماس = $\frac{١ - ١٥٠}{١ - ١٥٠} = ١$
 تسع اكل

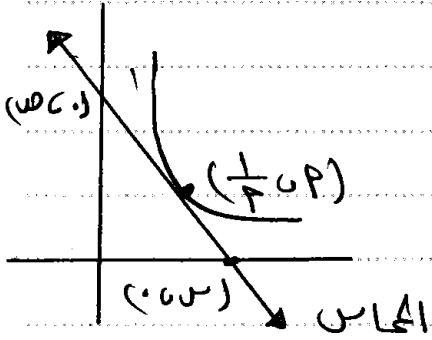
مثال ١
 اوجد مساحة المثلث المكون
 من المماس والمحمودي على المماس
 ومحور السينات للأفتزان
 فد (داس) = ٤٤٢ عند النقطة (٤, ٤)



خذ معادلة المماس والمحمودي
 فد (داس) = ٤ ميل المماس = فد (داس) = ٤
 معادلة المماس $٤ - ٤ = ٤ - ٤$
 خذ نقطة تقاطع المماس مع محور السينات
 بوضع $ص = ٠$ $\leftarrow ٤ - ٤ = ٤ - ٤$
 $\leftarrow ١ - ٤ = ٤ - ٤$
 النقطة (٠, ٤) = النقطة P
 معادلة المحمودي $٤ - ٤ = ٤ - ٤$
 خذ نقطة تقاطع المحمودي مع محور السينات
 فد = ٠ $\leftarrow ٤ - ٤ = ٤ - ٤$

مسألة (٣)

أثبت أن مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى $y = \frac{1}{x}$ عند النقطة $(\frac{1}{p}, p)$ والمحورين x و y مربعه



الحل

$y = \frac{1}{x}$

ميل المماس عند النقطة $(\frac{1}{p}, p) = -\frac{1}{p^2}$

معادلة المماس $y - p = -\frac{1}{p^2}(x - \frac{1}{p})$

نجد نقطة التقاطع مع محور السينات

$\frac{1}{p} + p \frac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 0$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \frac{2}{p} = 0 \Rightarrow p = 2$

$p = 2$

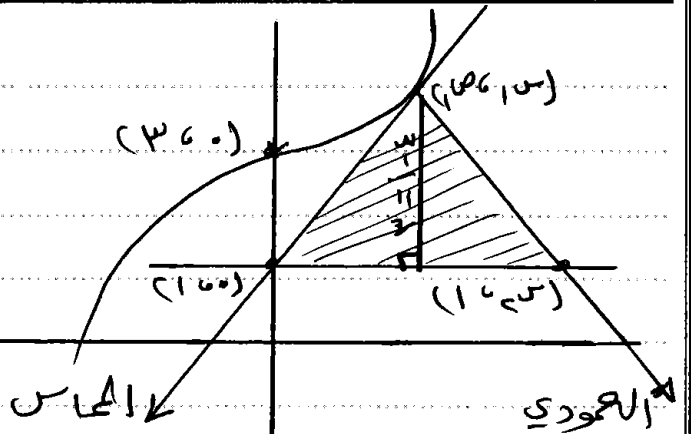
نجد نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات

$y - p = -\frac{1}{p^2}(x - \frac{1}{p})$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \frac{2}{p} = 0 \Rightarrow p = 2$

مساحة المثلث

$S = \frac{1}{2} \times p \times \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$



$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \frac{2}{p} = 0 \Rightarrow p = 2$

$2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \Rightarrow p = 1$

$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \Rightarrow p = 2$

$2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \Rightarrow p = 1$

نقطة المماس $(\frac{1}{p}, p) = (1, 1)$

ميل المماس $= -1$

ميل العمودي $= 1$

معادلة المماس $y - 1 = -1(x - 1)$

$1 + x = y$

معادلة العمودي $y - 1 = x - 1$

$y = x$

$\frac{1}{x} + x = 1$

$1 + x = x + 1 \Rightarrow x = 1$

النقطة هي $(1, 1)$

القاعدة $= 1$

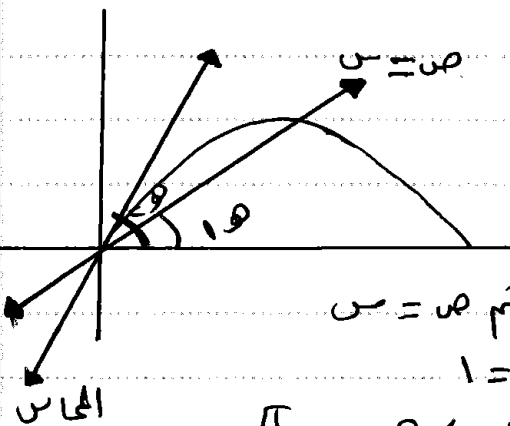
الارتفاع $= 1 - 1 = 0$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} =$

مسألة ٤

من الشكل المجاور، أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المتيقمتين $ص=س$ ومماس منحنى الأقطران $ص=س$ عند النقطة (٠,٦).



ميل المتيقمة $ص=س$ تباوي = ١

ظاها = ١ ← هـ = $\frac{\pi}{3}$

عد (س) = $\sqrt{3} - س$

عد (س) = $\sqrt{3} - س$

ميل المماس = عد (س) = $\sqrt{3}$

← ظاها = $\sqrt{3} = هـ = \frac{\pi}{3}$

الزاوية المحصورة = $هـ - هـ = ١$

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} =$

الحل
ميل المماس = $\frac{\text{مماس لـ}}{\text{مماس هـ}} = \frac{١}{٤} = ٢$

لتكن (س, ٦) نقطة المماس
ميل المماس = ميل المنحنى

عد (س) = $\frac{٣}{١} - س = ٨ - س$

عد (س) = $\frac{٣}{١} - س = ٨ - س$

عد (س) = $\frac{٣}{١} + \frac{٣}{١} = \frac{٦}{١}$

عد (س) = $\frac{٣}{١} + \frac{٣}{١} = \frac{٦}{١}$

$\frac{١}{١} = \frac{٦}{١} \leftarrow ٢ = \frac{٦}{١} + \frac{٣}{١}$

← $\sqrt{3} = ٨ - س \leftarrow ٦ = ٨ - س$

← $٦ = ٨ - س \leftarrow ٢ = ٨ - س$

$٢ = ٨ - س = \frac{١}{٤} - ٤ \times \frac{٣}{١} = ١$

نقطة المماس هي (٢, ٦)

التقطه تحققه معادلة المماس

$٠ = ٥ + ٢ \times ٤ - ٤ \times ٨$

← $٢٤ = ٥ \leftarrow ٠ = ٢ + ٨ - ٣٠$

مسألة ٥

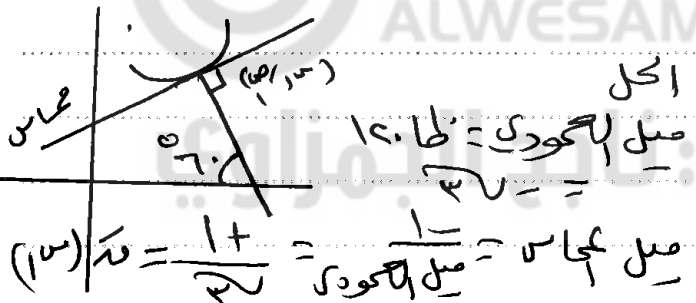
إذا كان المتيقمة $ص=س$ $٤ + ٥ = ٨$ عين منحنى الأقطران

عد (س) = $\frac{٣}{١} - س = \frac{١}{١}$

قيمة ج ؟

مسألة ٦

من الشكل المجاور، أوجد عد (س)



ميل المماس = $\frac{١}{١} = \frac{١}{١}$

سؤال ٩

إذا كانت معادلة المماس لمخني
 (س) عند س = ٣ هي $ص + ٥س = ١١$
 وكانت معادلة العمودي على المماس
 لمخني (س) عند س = ٣ هي
 $٤ص + ٥س = ١٥$ وكانت
 ل (س) = (س) = (س) \times (س) فأوجد
 ل (٣)

الحل

نجد كل من (س) و (ص) و (س) و (ص) و (س) و (ص)
 المماس لمخني (س) هو $ص + ٥س = ١١$
 و (٣) = ٣ \times ٣ = ٣ \times ٣
 $٥ = ١١ + ٥ \times ٣ =$

و (٣) = ٣ \times ٣ = ٣ \times ٣
 $٥ = ١١ + ٥ \times ٣ =$
 $٣ = ١١ + ٥ \times ٣ =$
 $٣ = ١١ + ٥ \times ٣ =$
 $٣ = ١١ + ٥ \times ٣ =$

ل (س) = (س) = (س) \times (س) + (س) \times (س)
 ل (٣) = (٣) = (٣) \times (٣) + (٣) \times (٣)
 $٣ = ٣ \times ٣ + ٤ \times ٥ =$
 $١٤ = ٦ - ٩ =$

سؤال ٧

إذا كانت معادلة المماس لمخني
 $٣ص = \frac{(س) - (س)}{٢ - س}$
 $٢ \leftarrow ٣$
 فأوجد قياس زاوية ميل المماس
 المرسوم لمخني (س) عند النقطة
 (س) و (س)

الحل

ميل المماس = $\tan^{-1} \left(\frac{٣}{٣} \right)$
 مع (س) = $\frac{٣}{٣} = ١$
 $\leftarrow \tan^{-1} ١ = ٤٥^\circ$
 $١٠ = ٦ - ١٨ = ١٠$

سؤال ٨

إذا كان ميل المماس لمخني (س) عند س = ٣ هو ١
 وكان ميل العمودي على المماس
 لمخني (س) عند س = ٣ هو $\frac{١}{٥}$
 فأوجد قيمة ثابت P؟

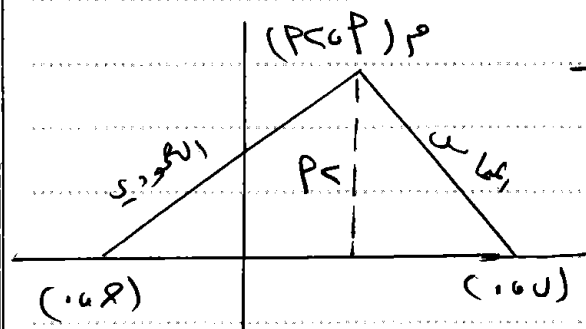
الحل

ميل المماس = $\frac{١}{٥}$
 ميل العمودي = ٥
 $٥ = \frac{١}{٥} \times ٥ = ١$
 ميل المماس عند (س) = $\frac{١}{٥} = \frac{١}{٥}$
 $٥ = ١ - ٣ = ٥$
 $٥ = ١ - ٣ = ٥$
 $١ = ٥ - ٣ = ٥$

مسألة ١١

إذا قطع المماس والعمودي لمنحنى
 في النقطة P عند النقطة (P, P)
 محور السينات في نقطتين U و V
 على وتر سيب مساحة مثلث UPV

الحل



$$U = \frac{P \times P}{P^2 + P^3} = \frac{P^2}{P^2 + P^3}$$

$$V = \frac{P^2 - P^2}{P^2 + P^3} = \frac{0}{P^2 + P^3} = 0$$

مساحة المثلث $UPV = 1$
 أيضاً $UPV = \frac{1}{2} \times (U - V) \times P = 1$

مساحة المثلث $UPV = 1$
 أيضاً $UPV = \frac{1}{2} \times (U - V) \times P = 1$

مساحة المثلث $UPV = 1$
 أيضاً $UPV = \frac{1}{2} \times (U - V) \times P = 1$

مساحة المثلث $UPV = 1$
 أيضاً $UPV = \frac{1}{2} \times (U - V) \times P = 1$

مساحة المثلث $UPV = 1$
 أيضاً $UPV = \frac{1}{2} \times (U - V) \times P = 1$

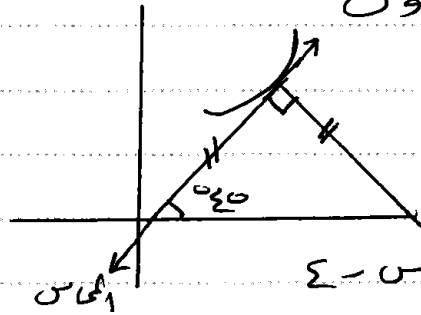
مساحة المثلث $UPV = 1$
 أيضاً $UPV = \frac{1}{2} \times (U - V) \times P = 1$

مسألة ١٠

أوجد قيم U و V على المنحنى
 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$
 والتي يصنع كل من المماس والعمودي
 على المماس عندهما مع محور السينات
 مثلث متساوي الساقين

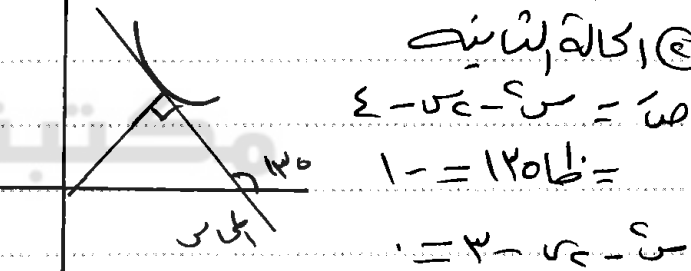
الحل

يوجد حالتان
 الحالة الأولى



$$U = \frac{y}{y'} = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$V = \frac{y}{-y'} = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1}{-x^2 + 2x - 1}$$



الحالة الثانية

$$U = \frac{y}{y'} = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٥٩

حدد معادلة المماس والعمودي على المماس
لمنحنى الأفتقران $(س)$ عند النقطة $(١, ٢)$

نقطة التقاطع هي
 $(س, ٢) = (س, ٢)$
 $\frac{٤}{س} = ٢ \Rightarrow س = ٢$
 $\frac{٤}{س} = ٢ \Rightarrow س = ٢$
 عند $س = ٢$ $٢ = ٢$
 $س = ٢$ $٢ = ٢$

ميل $(س) = ٢ = ٢$
 $\frac{٤}{س} = ٢$
 $١ = \frac{٤}{٢} = ٢$
 ميل $(س) = ١$
 ميلي $١ \times ١ = ١$
 معادلة المماس
 ميل $(س) = ٢$ عند $س = ٢$
 $١ = \frac{٤}{٢} = ٢$

ميل $١ \times ١ = ١$
 معادلة المماس

الحل

ميل المماس = $٢ (١)$
 $\frac{١}{٢ + س}$

$\frac{١}{٢} = ٢ (١) \Rightarrow \frac{١}{٢} = ٢$

معادلة المماس هي

$$٢ - ٢ = \frac{١}{٢} - (س - ١)$$

معادلة العمودي هي

$$٢ - ٢ = ٢ (س - ١)$$

تدريب ② ص ١٦٠

بين ان مماس منحنى الأفتقران
 $(س) = \frac{٤}{س}$ و $(س) = ٢$ مماس منحنى الأفتقران
 عند نقطة $(١, ٢)$ تقاطعها

تدريب ٣) ص ١٦١

بين ان لمخنف الأفتان
 هـ (س) = حاس مماثلاً افصياً في
 القرة [π، ٥]

الحل

المماس الافصى هـ (س) = حـ

هـ (س) = حاس حباس = .
 هـ حاس = . متطابقة

س = س ، أو $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = \pi$

تدريب ٤) ص ١٦٢

اذا كانت هـ (س) = حـ + س + س + س
 وكان قياس زاوية ميل المماس لمخنف
 الأفتان هـ عند النقطة (٥، ٥)
 هو ٥١,٣٥ ، فجد قيمة الثابت جـ

الحل

ميل المماس = هـ (س)

لما ١٣٥ = هـ (٥)

١ - ٥ + ٥ + ٥ = ١ - ٢ = ٥

١ - ٥ = ٥ + ٥ + ٥

١ - ٥ = ٥ + ٥ + ٥

تدريب ٥) ص ١٦٣

بين ان لمخنف الأفتان هـ (س)
 هـ (س) = ح - س - س - س
 مرسومين من النقطة (٥، ٣)

الحل

نقصد نقطة المماس (س، هـ)

ميل المماس = هـ (س)

$\frac{٥ - س}{١} = \frac{٥ - س}{٣ - س}$

٥ - س = ٥ - س + س - س

٥ - ٥ = ٥ - ٥

٥ - س = ٥ - س + س - س

٥ - س = ٥ - س + س - س

٥ - س = ٥ + س - س

٥ - س = (٥ - س) (١ - س)

٥ - س = ٥ - س + س - س

(٤، ٥) المماس الأول

٥ - س = ٥ - ٥ = ٥ - ٥

(٥، ٥) المماس الثاني

مصادلة المماس الأول (٤ - ٥) = ٥ - (٥ - ٥)

مصادلة المماس الثاني (٥ + ٥) = ٥ - (٥ - ٥)

تمارين ومسائل

صفحة (١٦٤)

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}$$

$$= (s-2)(s^2 + 2s + 3)$$

$$s = 2$$

$$s = 3 \Rightarrow s = 1$$

النقطة (١, ٢)

$$s = 3 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

١) جد ميل المماس لمخمس الأضلاع
 عند النقطة (١, ٢)
 $s^2 + 2s + 3 = 0$

الحل

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

مماس عند النقطة (١, ٢)
 $s = 1 \Rightarrow s = 2$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

٣) جد النقط الواقعة على منحني

$$s^2 + 2s + 3 = 0$$

التي يصنع عندها المماس زاوية

قياسها 30° مع الاتجاه الموجب

للمحور السيني

الحل

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

٥) جد معادلة المماس لمنحني الأضلاع

$$s^2 + 2s + 3 = 0$$

عند النقطة (١, ٢) مع الاستقيم

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

الحل

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 1$$

(٤) جد النقط لواقعه على منحني
العلاقة $(ص - ٤) = س^٢$
التي يكون عندها المماس موازيًا
للتقيم الذي معادلته $٣س + ٤ص = ٠$

الحل

ص = التقيم = ميل العلاقة

$$\begin{aligned} ٣ + ٦ص = ٠ \Rightarrow ٦ص = -٣ \Rightarrow ٣ \\ \frac{٣}{٦} = -١ \end{aligned}$$

ميل العلاقة

$$\begin{aligned} ٢(ص - ٤) \times ١ = ١ \\ \frac{٢ص}{٢} = \frac{١}{٢(ص - ٤)} \Rightarrow ٢ص = \frac{١}{ص - ٤} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٢ص(ص - ٤) = ١ \\ ٢ص^٢ - ٨ص = ١ \end{aligned}$$

$$٢ص^٢ - ٨ص - ١ = ٠$$

$$ص = ٤ \Rightarrow ١ = ٤ - ٤ = ٠$$

$$٣ = ٤ \Rightarrow ٣ = ٤ - ٣ = ١$$

$$١ = ٣ \Rightarrow ١ = ٣ + ٤ = ٧$$

النقط هي (٣، ١)

$$١ = ص \times (٤ - ص) = ٤ص - ص^٢$$

$$٤ص - ص^٢ = ١ \Rightarrow ٤ص - ص^٢ - ١ = ٠$$

$$٢ = ٤ص$$

$$١ = ٢ص = ٤$$

$$١ = (٤ - ص) \times \frac{١}{٢}$$

$$١ = ٢ - ص \Rightarrow ٢ - ١ = ص$$

$$٢ = ١ \Rightarrow ٢ = ٤ - ١ = ٣$$

$$٣ = ٤ - ٣ = ١$$

النقط هي (٣، ١)
معادلة المماس هي $٣س + ٤ص = ٠$

(٦) جد معادلة المماس والعمودي

على المماس لمنحني للاقعة عند

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

الحل

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

معادلة المماس

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

معادلة العمودي

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

(٥) جد معادلة المماس لمنحني للاقعة عند

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

$$٢ = ٤ - ٣ \Rightarrow ٢ = ٤ - ٣ = ١$$

$$س = ١ \quad س = ١ \pm$$

$$عند س = ١ \quad كاس هـ = ٥ + ٥ = ١٠$$

$$الصورة هـ = ٥$$

$$\frac{٢-}{١} = ٥ + ١ \times ٢$$

$$\boxed{٤ - ٥ = ١}$$

$$عند س = ١ -$$

$$\frac{٢-}{١} = ٥ + ١ - ٢$$

$$٢ + ٥ = ٥ + ٢ -$$

$$\boxed{٤ = ٥}$$

٩) عند صاطبي المماسين لمخني لعلاقة
 $س = ص - ع$ عند تقاطع كفاطع
 صفاها مع هو لصاد =

تقط لبقاطع مع هو لصاد = س =
 $ص = ع - ص$ عند ص = ص (٥٠٠)
 $ص = ع$ عند ص = ص (٤٥٠)
 عند (٥٠٠) م = م

$١ = ع$ عند ص = ص
 $\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤ - ٤ \times ٢}$ صاطولة المماس هي
 $ص = ع = ٤ = \frac{١}{٤} (س -)$
 عند (٥٠٠) $١ = ٤ - ٤ \times ٢$
 $\frac{١}{٤} = ص$
 صاطولة المماس هي $ص = \frac{١}{٤} (س -)$
 $ص = \frac{١}{٤}$

٧)

حد قيمة كل من التابطين لـ و لـ للبين
 خطان مستقيم لذي صاطولة ص = ٢ - س
 مماس لمخني هـ (س) = س + س + ٥
 عند النقطة (٢٥٠)

الحل

ص = س + ٢ = ص
 $١ = ٢ + س$ عند س =
 $١ = ٤ + س$

هـ (٥٠٠) $٢ = ٥$
 هـ (س) $٥ + س + ٢ =$
 هـ (٥٠٠) $٢ = ٥ + ٢$
 $٢ = ٥$

٨)

اذا كان المستقيم س = ٥ + ٥
 عين مخني الأفتان هـ (س) =
 عند النقطة (٥٠٠) حد قيمة
 التابطين؟

الحل

ع = ص =
 المستقيم = المستقيم
 $٢ = ص + ٢$
 $\frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤}$

١٠) جد قياس الزاوية التي يصنعها المحاس

صحن العلاقة

ص = ٢ + ٣ + ٤ + ٥ - ٦ + ٧ + ٨ = ١٠ عند التقاطع (١-٥) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

قانونية المحاس = ص على المحور السيني

$$\begin{aligned} 10 &= 2 + 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 \\ 10 &= 2 + 3 + (7 + 8) \\ 10 &= 2 + 3 + 15 \\ 10 - 15 &= 2 + 3 \end{aligned}$$

$$10 - 15 = 2 + 3 \Rightarrow -5 = 5 \Rightarrow 1 = 1$$

الزاوية = ١

$$90^\circ = 0$$

١١) جد معادلة المحاس والعمودي على

المحاس لمحني الأفتزان

مح (س) = ٣ لمماس + قاس عند

$$\frac{\pi}{2} = ٥$$

مح (س) = ٣ - قاس + قاس قاس

$$\frac{\pi}{2} = (3 - \cos) + \cos$$

$$\frac{\pi}{2} = 3 - \cos + \cos \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 3$$

عند ما س = $\frac{\pi}{2}$

$$٥ = ٣ + (\frac{\pi}{2}) + ٤$$

$$٥ = ٣ + ١ + (\frac{\pi}{2})$$

$$٥ = ٤ + ١ + \frac{\pi}{2}$$

$$١ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = ١$$

المماس

$$(١ - ٥) = (٥ - ٥) \Rightarrow (١ - ٥) = ٠$$

العمودي

$$(١ - ٥) \cdot \frac{1}{٢} = (٥ - ٥) \Rightarrow \frac{١ - ٥}{٢} = ٠$$

١٢) جد معادلة المحاس لمحني الأفتزان

مح (س) = ١ عند تقاطع محاس

مع محني الأفتزان

$$١ = ٣ - ٤ + ٥ + \frac{٣}{٢}$$

مح المحاس

$$١ = (٥) = (٥)$$

$$\frac{1}{٤} = \frac{٣}{٢} - ٤$$

$$\frac{1}{٤} = (\frac{٣}{٢} - ٤)$$

$$\frac{1}{٤} = \frac{٣}{٢} - ٤ \Rightarrow \frac{1}{٤} + ٤ = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{1}{٤} + ٤ = \frac{٣}{٢} \Rightarrow \frac{1 + 16}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{17}{٤} = \frac{٣}{٢} \Rightarrow 17 = 6$$

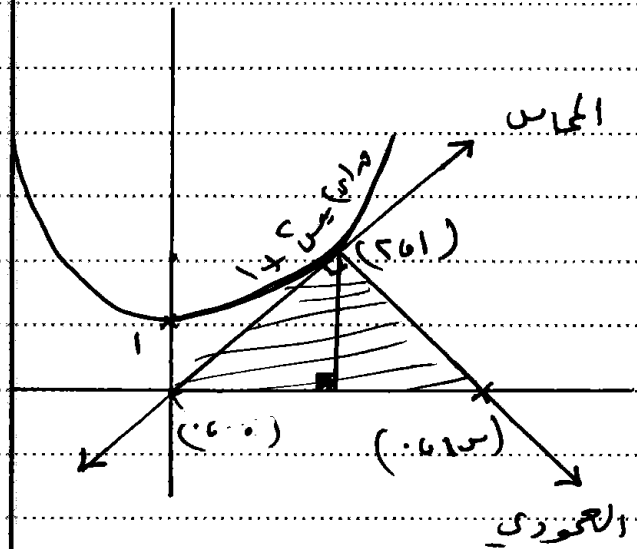
$$17 = 6 \Rightarrow 1 = 1$$

$$17 = 6 \Rightarrow 1 = 1$$

قسمه كالتالي
يتبع الحل

١٤

جد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع
محور السينات والمحاس والعمودي
على المحاس لمنحنى الأفتوان
عند النقطة (٢,١)



$$\text{ميل المحاس} = \text{ميل عمدة س} = 1$$

$$c = 1 \times c = c$$

$$\text{ميل العمودي} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\text{ميل العمودي} = -\frac{c}{1-c} = -\frac{c}{1-c}$$

$$-1 = -\frac{c}{1-c} \Rightarrow 1-c = c \Rightarrow 1 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

أسئلة الوزارة

معادلة المماس $ص - ٤ = ٤ - (س - ١)$
 عند $س = ١ \leftarrow$ $ص = ٤ = (١ - ١)$
 $ص = ٤ = (١ - ١)$
 معادلة المماس $ص - ٤ = ٤ - (س + ١)$

٥) وزارة (٢٠٠٨) صيف

١) إذا كان منحنى الأفتزان $ص$ يمر بالنقطة (١٦٢) ، وكان المماس لـ $ص$ عند $س = ٤$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فاوجد $ص$ عند $س = ٤$.

الحل

$$\frac{ص - ٤}{٤ - ٤} = \frac{ص - ٤}{٤ - ٤} = \frac{ص - ٤}{٤ - ٤}$$

$$\frac{ص - ٤}{٤ - ٤} = \frac{ص - ٤}{٤ - ٤} = \frac{ص - ٤}{٤ - ٤}$$

٢) إذا كان استقيم المماس بالنقطة (٦٠٠) عند $س = ٦$ ، والأفتزان $ص$ عند $س = ٦$ ، فاوجد $ص$ عند $س = ٦$.

الحل

$$\frac{ص - ٦}{٦ - ٦} = \frac{ص - ٦}{٦ - ٦} = \frac{ص - ٦}{٦ - ٦}$$

١) وزارة (٢٠٠٨) صيفية
 حد معادلة المماس لمنحنى الأفتزان $ص = ٣ + ٤س$ إذا كان العمودي على هذا المماس يمر بالنقطة $(٩/٢)$.

الحل

نضرب نقطة المماس $(س، ص)$
 ميل المماس = $٤ = ص - ٣$
 ميل العمودي $ص - ٣ = ٤$

$$\frac{ص - ٣}{٤} = \frac{٤ - ٣}{٤ - ٣} = \frac{١}{١} = ١$$

$$\frac{ص - ٣}{٤} = ١ \Rightarrow ص - ٣ = ٤ \Rightarrow ص = ٧$$

$$\begin{aligned} ٧ - ٣ &= ٤ \\ ٤ &= ٤ \\ ٤ &= ٤ \end{aligned}$$

$ص = ٧$
 عند $س = ٦$ ، $ص = ٣ + ٤(٦) = ٢٧$
 ميل المماس = ٤

معادلة المماس $ص - ٢٧ = ٤(س - ٦)$
 عند $س = ٦$ ، $ص = ٢٧$
 عند $س = ٦$ ، $ص = ٢٧$

$$E \text{ من } \frac{\pi}{3} \text{ و } \frac{\pi}{3}$$

$$S \text{ من } \frac{\pi}{12} \text{ و } \frac{\pi}{12}$$

خذ معادلة المماس عند $S = \frac{\pi}{12}$

$$E \text{ من } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \times 4 - \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} = S$$

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفيه

إذا كان منحنيًا الأقرانين

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S$$

هو $S = S^3 - S^2 - S + 1$ فما هو

عند النقطة (-0.6) نجد

① قيمة كل من التوانيت P, S, E

② معادلة المماس لـ S عند النقطة

الأقرانين E هو عند النقطة (-0.6)

الحل

هو يمر بالنقطة (-0.6)

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$\text{① } S = S^3 - S^2 - S + 1 \rightarrow S = (-0.6)^3 - (-0.6)^2 - (-0.6) + 1 = 1$$

هو يمر بالنقطة (-0.6)

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$\boxed{E = 1}$$

← يسبق الحل

ميل المماس = ميل المتيقم

$$E = S + S^2 + S^3$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

خذ معادلة المتيقم

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

$$E \text{ من } S = S^3 + S^2 + S \rightarrow E \text{ من } (-0.6) = (-0.6)^3 + (-0.6)^2 + (-0.6) = -0.6$$

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

إذا كان $E \text{ من } S = S^3 - S^2 - S + 1$

حيث $S \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ نجد مجموع قيم

S التي يكون عندها المماس على

المماس لـ S موازيًا لمحور الصادات

ثم جد معادلة احد هذه المماسات

قطرًا

الحل

المماس يوازي الصادات ←

المماس يوازي الصادات ←

وهو $S = 0$

وهو $S = 0$

$$E \text{ من } S = S^3 - S^2 - S + 1 \rightarrow E \text{ من } 0 = 0^3 - 0^2 - 0 + 1 = 1$$

$$E \text{ من } S = S^3 - S^2 - S + 1 \rightarrow E \text{ من } 0 = 0^3 - 0^2 - 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned}
 & \text{س} - \text{ع} = ١ \\
 & \text{س} = ١ + \text{ع} \\
 & \text{بحوض س} = ١ \text{ و } \text{ع} = ١ \Rightarrow ١ - ٣ + ٤ = ٠ \\
 & \text{نقطة التماس (١, ١)} \\
 & \text{ميل المماس} = \text{ع} - ١ = ٤ - ١ = ٣ \\
 & \text{معادلة المماس} \\
 & \text{ص} - ١ = ٣(\text{س} - ١) \\
 & \text{ص} = ٣\text{س} - ٢
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ع} - \text{س} = ١ \\
 & \text{ع} = ١ + \text{س} \\
 & \text{ع} - ٣ = ١ - \text{س} \\
 & \text{ع} = ١ - \text{س} + ٣ = ٤ - \text{س} \\
 & \text{ع} = ٤ - \text{س} \\
 & \text{ع} = ٤ - \text{س} \leftarrow \text{ع} = ٤ - \text{س} \\
 & \text{و بالتعويض} \\
 & ١ = ٥ + ٦ - ١ \\
 & ٠ = ٦ + ١ - ٥ \\
 & \text{ع} = ٥ + ٦ + ٥ = ١٦ \\
 & \text{ع} = ١٦ \\
 & \text{ع} = ١٦ + ٣ = ١٩ \\
 & \text{ع} = ١٩ + ٣ = ٢٢ \\
 & \text{المماس} \\
 & \text{ص} - ٠ = ٤(\text{س} + ١) \\
 & \text{ص} = ٤\text{س} + ٤
 \end{aligned}$$

٦) وزارة (٢, ١, ٠) صيفية

جد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمخمس الأقطار في و(٢, ١, ٠) = س + ع - ١ عند س = ٣

٥) وزارة (٢, ١, ٠) شتوية

جد معادلة المماس لمخمس الأقطار في و(٢, ١, ٠) = س - ع + ٣ حيث يكون المماس عند نقطة التماس عمودياً على المستقيم ٦ = ٣ - س - ٥ = ٠

الحل

$$\begin{array}{r}
 \text{س} - \text{ع} \\
 \underline{\text{ع} - \text{س}} \\
 \hline
 ٢
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ع} - \text{س} = ٢ \\
 & \text{ع} = ٢ + \text{س} \\
 & \text{ع} - ٣ = ٢ + \text{س} - ٣ \\
 & \text{ع} = ٢ + \text{س} - ١ = ١ + \text{س} \\
 & \text{معادلة المماس} \\
 & \text{ص} - ١ = ١(\text{س} - ٢) \\
 & \text{ص} = \text{س} - ١
 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 & \text{ع} - \text{س} = ٢ \\
 & \text{ع} = ٢ + \text{س} \\
 & \text{ع} - ٣ = ٢ + \text{س} - ٣ \\
 & \text{ع} = ٢ + \text{س} - ١ = ١ + \text{س} \\
 & \text{معادلة المماس} \\
 & \text{ص} - ١ = ١(\text{س} - ٢) \\
 & \text{ص} = \text{س} - ١
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ص} - ١ = ١(\text{س} - ٢) \\
 & \text{ص} = \text{س} - ١ \\
 & \text{المحور} \\
 & \text{ص} - ١ = ١(\text{س} - ٢)
 \end{aligned}$$

٨) وزارة (٢٠١١) صيف

إذا كان المتقيم $0 = P + 6 + 3 + 2$
 ليس متخني الأفتراين
 $0 = P + 6 + 3 + 2$
 حد قيمة الثابت P ؟

الحل

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(٤٦٨)

بالعوض في المتقيم

$$3c - = P \leftarrow 0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$c = \frac{1-c}{3} = (٤-) \leftarrow ٤ - = ٤ - = \frac{1-c}{3}$$

النقطة (٤, ٤)

بالعوض في معادلة المتقيم

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$P = -11$$

٩) وزارة (٢٠١١) صيف

حد نقطة تقاطع متخني الأفتراين
 $0 = P + 6 + 3 + 2$
 مع معادلة المماس لمتخني الأفتراين
 عند تلك النقطة

الحل

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

تعمل لأنها

ليست لقط تقاطع

حد (١١)

نقطة التقاطع (١٦١)

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس

$$0 = P + 6 + 3 + 2$$

١. وزارة (٢٠١٢) صفيك

جد النقطة التي يكون عندها المحاس
 لتحن لعلاته $(٣-٥) = ٢ = ٣ + ٥$
 صوارياً المتقيم $٣ + ٥ = ١ + ٥ = ٦$

اكل

$$\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤}$$

لثقة لعلاته

$$١ = ٣ \times (٣-٥)$$

$$\frac{١}{(٣-٥)٢} = ٣$$

المتقيم // المحاس

$$١ = ٣ - ٥ \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{١}{(٣-٥)٢}$$

$$٣ = ٥ \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{١}{(٣-٥)٢}$$

$$٤ + ٥ = (٣-٢)$$

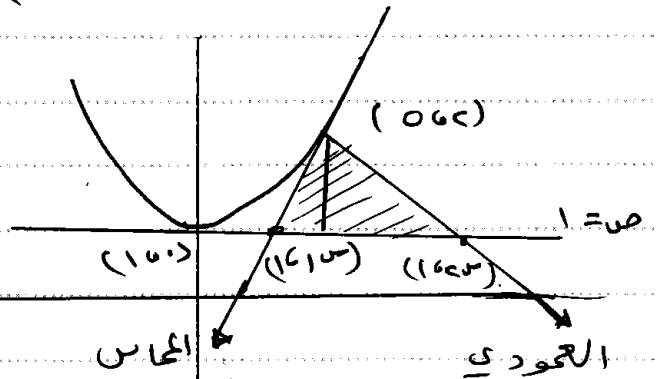
$$٤ + ٥ = ١$$

$$٣ = ٥ \leftarrow$$

النقطة (٢٥٣)

٤. وزارة (٢٠١٢) شوية

جد مساحة المثلث المكون من المحاس
 والعمودي على المحاس لتحن الأقتران
 $٣ + ٥ = ١ + ٥ = ٦$ عند النقطة
 (٥٤٢) ، والمتقيم $٣ = ١$ علماً
 بان مساحة العمودي $٥ = ١ - ٣ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$



$$٤ = ٥ = ٣ \leftarrow ٣ = ١$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

$$٤ = \frac{١-٥}{٣-٢} = \frac{١-٥}{١} = ١-٥ = ٤$$

$$١ = ٥ \leftarrow ٤ = ١ \leftarrow ٤ = ١$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{١-٥}{٣-٢} = \frac{١-٥}{١} = ١-٥ = ٤$$

$$١٨ = ٢ \leftarrow$$

$$١٧ = ١ - ١٨ = ١ - ١٨ = ١٧$$

الارتفاع = ١ - ٥ = ٤
 مساحة المثلث

$$٣٤ = ٤ \times ١٧ \times \frac{١}{٢} =$$

١٤) وزارة (٢٠١٣) صفيّة

جد النقطة الواقعة على منحنى
العلاقة $(٤-٥٥)^٢ = ٣ + ٥ + ٢$ والتي
عدها المحاور يوازي المستقيم
الذي صادته $٣ + ٥ + ٢ = ١٠$

اكل

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{1} = \text{ميل المستقيم}$$

ميل المحاور (نقطة ضمنيًا)

$$٣(٤-٥٥) = ١$$

$$\frac{1}{(٤-٥٥)٣} = ٥٥$$

المستقيم // المحاور

$$\frac{1}{٣} = \frac{1}{(٤-٥٥)٣}$$

$$٣ = (٤-٥٥)٣$$

$$٣ = ٥٥ - ١ \Rightarrow ٤ = ٥٥$$

نعوضها في العلاقة

$$٣ + ٥ = (٤-٣)$$

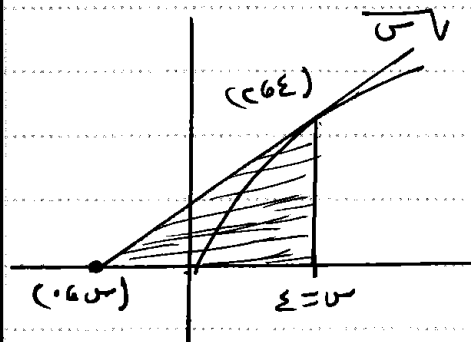
$$٣ + ٥ = ١$$

$$١ - ٣ = ٥$$

النقطة $(٣, ١)$

١١) وزارة (٢٠١٣) متّوية

جد مساحة المثلث القائم الزاوية
المكون من المحاور المرسوم لمنحنى
العلاقة $٥٥ = ٣ + ٥$ والتي
عدها النقطة $(٤, ٣)$ ومحور
السيارة والمستقيم $٥ = ٣$



$$\frac{1}{٤} = \frac{1}{٤ \times ٣} = \frac{1}{٣ \times ٤}$$

$$\frac{١-٣}{٣-٤} = \text{انزياح ميل المحاور}$$

$$\frac{1}{٤} = \frac{٣}{٣-٤} \Rightarrow ٣-٤ = ١٢$$

$$\boxed{٤ = ٣}$$

$$١٢ = ٤ + ٤ = \text{القاعدة}$$

$$٣ = \text{الارتفاع}$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times ١٢ \times ٣ = ١٨$$

$$١٨ =$$

١٤) وزارة (٢٠١٤) صيف

بين ان لمخني الاقتران
 و(اس) = س + ع + ح
 مرسوم من النقطة (١٥١)

اكل

نفر من نقطة بحماس (س، ص)

$$\text{ميل بحماس} = \frac{ص - ١}{١ - س}$$

$$\frac{٣ + س}{١ - س} = \frac{١ - ع + س}{١ - س}$$

$$\text{ميل المخني و(اس)} = س$$

$$\text{و(اس)} = \text{ميل بحماس}$$

$$\frac{٣ + س}{١ - س} = س$$

$$٣ + س = س - س$$

$$٣ = س - س$$

$$٣ = (س - ١)(٣ - س)$$

$$٣ = س \iff (س - ١)(٣ - س) = ٤ + ٤ = ١٣$$

$$(١٣, ٣)$$

$$٥ = س \iff ١ - (١ - س) = ٥$$

$$(٥, ١)$$

محاسن مرسوم

١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان المستقيم س - ص + ع = صفر
 يمس مخني الاقتران و(اس) = $\frac{ع - س}{س}$
 عند النقطة (س، ص) ≠ ٠
 الواقعة على منحناه مرسوم ثانياً؟

اكل

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{ع - س}{س} = س$$

$$\frac{ع + س}{س} = \text{و(اس)}$$

$$\text{و(اس)} = ص$$

$$\frac{ع}{س} = س \iff ع = س^2$$

$$١ = س \iff ١ = س$$

$$\text{عند } س = ١ \iff \text{و(اس)} = (١, ١)$$

النقطة (١, ١)

بالنحوين في المستقيم

$$٤ = س - ١ \iff (س - ١) - ١ = ٤ - ٤$$

$$\text{عند } س = ١ \iff ١ - (١ - ١) = ٢$$

النقطة (٢, ١)

بالنحوين في المستقيم

$$٥ = س - ١ - ٤$$

$$\iff ٤ = س$$

١٦) وزارة (٠.١٥) صبغة

١٥) وزارة (٠.١٥) شوية

إذا كان ل (اس) ، ه (اس) افتراض
 حاصلين للاستهلاك وكانت
 ل (اس) + ه (اس) = م صبغة
 ثابتة $P \neq 0$ وكانت
 $ه (٠) = ٣$ ، $ل (٠) = ٤$
 نجد معادله الجماس لمنحنى الأفتراض
 ل (اس) عند $س = ٢$

حداثة المثلث الواقع في ربع الأول
 والمحصور بين محوري السينات والصادات
 ومحاس منحنى العلاقة
 $ه = ٤ - ٣س$ عند
 النقطة (٠.٥)

اكل

$$س = ٢ \iff ل (٢) = ٤ - ٣ \times ٢ = -٢$$

$$ل (٢) = ٤ - ٣ \times ٢ = -٢$$

$$ل (٢) = ٤ - ٣ \times ٢ = -٢$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{٢}{٣} = ل (٢)$$

نقطة (٢، ١/٤)

ل (اس) ، ه (اس) ، م (اس) + ه (اس) = م

$$ل (٢) = ٤ - ٣ \times ٢ = -٢$$

$$٣ = ٤ - ٣ \times ٢ = -٢$$

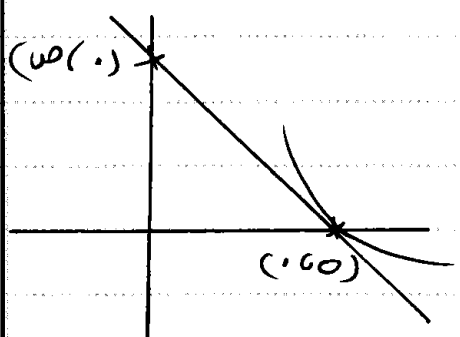
$$\frac{٣}{٤} = \frac{٢}{٣} = ل (٢)$$

معادله الجماس

$$ه = ٤ - ٣س$$

اكل

النقطة (٠.٥) تقع على المنحنى



ميل الجماس = $\frac{٤ - ٠}{٠ - ١.٥} = -\frac{٨}{٣}$

$٤ - ٠ = \frac{١}{٥} - \frac{٠}{٣}$

$٤ = \frac{١}{٥} - \frac{٠}{٣} = \frac{٣ - ٠}{١٥} = \frac{٣}{١٥}$

ميل الجماس = ميل المنحنى

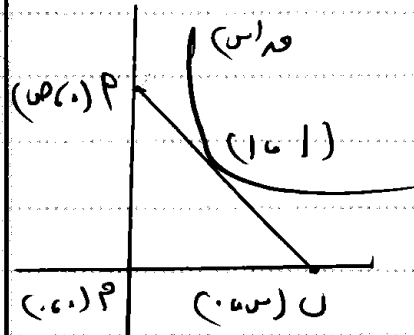
$٤ = \frac{٣}{١٥} \iff ٤ = \frac{١}{٥}$

حداثة المثلث

$٥ = ٢ \times ٥ \times \frac{١}{٤}$

١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

معمداً لكل الجوار الذي على
المثلث MP من الذي ضلعه \overline{MP}
يس من ضمن الأقران $(س, س)$ \Rightarrow
ص \neq ١ عند نقطة $(١٥, ١)$
بقيمة ثابتة \Rightarrow التي تحصل
عاشته $س$ في $(\frac{٩}{٤})$ وحدة مربعة



$(١٥, ١)$ تقع على المحور \leftarrow

عدا $١ = ١ \leftarrow \frac{٩}{٤} = ١ \leftarrow ٢ = ٢$

و $س = \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤}$

و $س = \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤}$

ميل المحاور $= \frac{١-٥}{١-٠} = \frac{١-٥}{١}$

$١ + ٥ = ٦$
 $٣ = ٥$ $٣ = ٥$

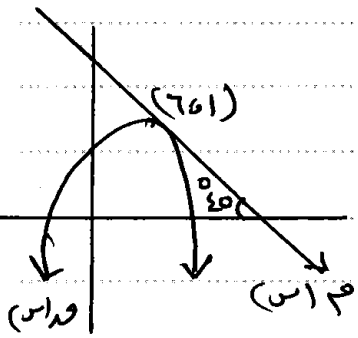
ميل المحاور $= \frac{١-٥}{١-٠} = \frac{١-٥}{١}$

$٢ = ١ + ١ = ٢$

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ = \frac{٩}{٢}$

١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

إذا كان $س$ ، $س$ ، $س$ اقتران
عالمين للاستقامة حيث ان
و $س = (س + ٢)$ ل $س$ وكان
م $س$ مما س \Rightarrow الأقران $(س, س)$
عند نقطة $(٦, ٦)$ كما هو موضح
في الشكل الجوار \Rightarrow ل $س$



الحل

و $س = (س + ٢)$ ل $س$

و $س = (س + ٢)$ ل $س$ \Rightarrow $١ \times س + ٢ \times س = س + ٢$

المطلوب ل $س$ \leftarrow $س = ٥$
 $س = ٥$

و $س = (١)$ \Rightarrow $١ \times س + ٢ \times س = س + ٢$

$٣ = س + ٢$

$٦ = س + ٢$

و $س = (١)$ \Rightarrow $٣ = س + ٢$

لكن $س = (١)$ \Rightarrow $٣ = س + ٢$

لأن $س = (١)$ \Rightarrow $٣ = س + ٢$

ل $س = \frac{٣}{٢} = (١)$

و $س = (١)$ \Rightarrow $٦ = س + ٢$

$١ = س + ٢$

$٦ = س + ٢$ \Rightarrow $٣ = س + ٢$

وزارة (ك.ا.ص) شوية

جد معادلة التماس لمحن الأفتان
 عند $(س, ٣) = (س + ٣) =$ البرسوم
 عن النقط $(٠, ٥)$

اكل

نقطة لقطعة التماس $(س, ٥)$

ميل التماس = ميل الممح

$$\frac{٥ - ٠}{س - ٠} = \frac{٥ - ٣}{س + ٣}$$

$$\frac{٥}{س} = \frac{٢}{س + ٣}$$

$$\frac{٥(س + ٣)}{س} = ٢$$

$$٥س + ١٥ = ٢س$$

$$٣س + ١٥ = ٢س$$

$$س = -١٥$$

$$\leftarrow س = ٣ \text{ عند } (٣, ٥)$$

$$٣ = ٣$$

$$١٥ = (٣ + ٣) = ٦$$

معادلة التماس

$$١٥ - ٣ = ٦ - ٣$$



الوسام : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيف

$$\begin{aligned} 4 &\Leftarrow (s^2 + s) = 3(1 + s) \\ 4s^2 + 4s &= 3 + 3s \\ 4s^2 + 4s - 3 - 3s &= 0 \\ 4s^2 + s - 3 &= 0 \\ (4s - 3)(s + 1) &= 0 \\ 4s - 3 = 0 \quad \text{or} \quad s + 1 = 0 \\ s = \frac{3}{4} \quad \text{or} \quad s = -1 \end{aligned}$$

جد النفا التي يكون عندها الجاس
لنحس الاقران هـ (س) = $\frac{1 + s + s^2}{1 + s}$
 $s \neq 1$ ، كجودياً على السليم
 $3 - s = 0 \Rightarrow s = 3$
(٧ علاقات)

الكل

وزارة (٢٠١٨) شتوية صيف

إذا كانت معادلة الجودي هي الجاس
معنى الاقران هـ (س) عنده $s = 2$
هي $s = \frac{1}{2}$ ، فانه
هنا هـ (س) = $\frac{1 - s^2}{1 + s}$ ، فانه
 $\frac{1 - s^2}{1 + s} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2} = \frac{1 - 4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

$$\begin{aligned} (1 + s) - (1 + s^2) &= (1 + s + s^2) - (1 + s^2) \\ &= 1 + s + s^2 - 1 - s^2 \\ &= s \\ &= s(1 + s) \end{aligned}$$

الكل
صلى الجودي $s = \frac{1}{2}$ ، فانه
صلى الجاس $s = 2$ ، فانه
فأ هـ (س) = $\frac{1 - s^2}{1 + s} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2} = \frac{1 - 4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$
صلى الجاس $s = 2$ ، فانه
صلى الجاس $s = 2$ ، فانه
صلى الجاس $s = 2$ ، فانه
صلى الجاس $s = 2$ ، فانه

صلى الجودي لا صلى الجاس = $1 - s = 1 - 2 = -1$
 $\frac{1 - s^2}{1 + s} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2} = \frac{1 - 4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

(٤)

وزارة (2018) شتوية جديد

جد صادلي المحاسين لمنحنى لعلاقة
 $\frac{3}{4}س = ٢هـ - ٦هـ$ عند نقطتي
 تقاطع منحناها مع محور إصابات

الحل

جد نقط التقاطع مع محور إصابات بوضع
 $س = ٠$

$$٢هـ = ٦ - ٠هـ$$

$$٢هـ = ٦ \Rightarrow هـ = ٣$$

$$٣ = هـ$$

نقط التقاطع (التماس) هي

$$(٣, ٠) \quad (٠, ٦)$$

عند النقطة (٠, ٦)

$$\text{جد الميل} \Rightarrow \frac{٣}{٤} = \frac{٤هـ - ٠هـ}{٠هـ - ٦هـ}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٤ \times هـ}{-٦}$$

$$\frac{٣}{٤} = -\frac{٢}{٣} هـ$$

$$\text{المعادلة} \Rightarrow -\frac{٣}{٤} = \frac{١}{٦} (٠ - هـ)$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{١}{٦} هـ$$

عند النقطة (٣, ٠)

$$\text{الميل} \Rightarrow \frac{٣}{٤} = \frac{٤هـ - ٠هـ}{٠هـ - ٦هـ}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٤}{٦} هـ$$

$$\text{المعادلة} \Rightarrow \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٦} (٠ - هـ)$$

$$\frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٦} هـ$$

$$\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٦} هـ = ٠$$

وزارة (2018) شتوية جديد

بين ان المحاسين المرسومين من
 النقطة (٠, ٦) و (٤, ٠) لمنحنى لاقران
 عد (س) = ٤ - س^٢ غير متعامدين

الحل

لكنه (س, هـ) نقطه تماس

$$هـ (س) = ٤ - س^2 \Rightarrow \frac{٤ - ٥س}{٠ - ٤}$$

$$٤ - ٥س = (٤ - س)س$$

$$٤س - ٥س^2 = ٤س - س^2$$

ضرب المعادلة بالعدد (٥)

$$٢٠س - ٢٥س^2 = ٢٠س - ٥س^2$$

$$٠ = ٤س - ٢٠س^2 \Rightarrow ٤س(١ - ٥س) = ٠$$

$$٤س = ٠ \quad ١ - ٥س = ٠$$

$$٠ = س \quad ١ = ٥س$$

$$\Rightarrow هـ (١) = ٤ - ١ = ٣$$

$$هـ (٠) = ٤ - ٠ = ٤$$

$$\text{لكنه} \quad ١ \times ٣ = ٣ \neq ٤ \times ٠ = ٠$$

$$\frac{٤}{٥} \neq ١ = \frac{٤}{٥}$$

\Rightarrow محاسين غير متعامدين

مساحة الشكل الرباعي $PMUP$

= مساحة ΔUP - مساحة ΔPMU

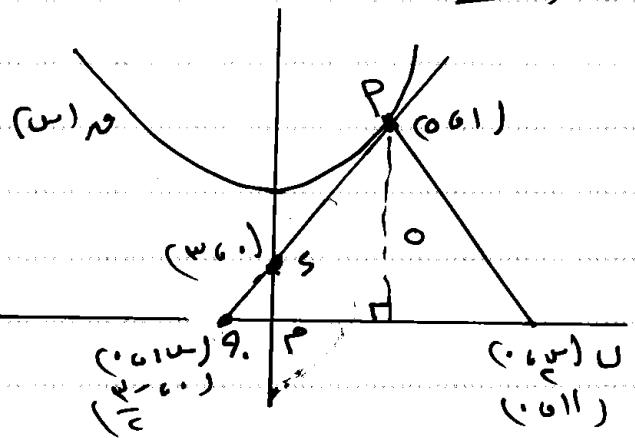
$$= \frac{1}{2} \times (3 \times \frac{3}{2}) - \frac{1}{2} \times 5 \times (\frac{3}{2} - \frac{11}{2})$$

$$= \frac{9}{4} - 5 \times \frac{20}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{100}{2} = \frac{9}{4} - 50 = -49$$

وزارة (2018) صيف جديد

جد مساحة الشكل الرباعي الناتج عن تقاطع المحاس والعمودي على المحاس لمخني الاقتران $PMUP$ عند النقطة $(5, 6)$ ومحوري إسقاط والصدارة



ميل المحاس = $\frac{6-0}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$0 = \frac{3}{2}c - 3 \Rightarrow c = 2$
 $3 = \frac{3}{2} \times 5 - 3 = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$

$\frac{3}{2} = 1.5$

معادلة المحاس هي

$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

مع محور الصدارة = $y = 3$

$3 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow 3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 3$

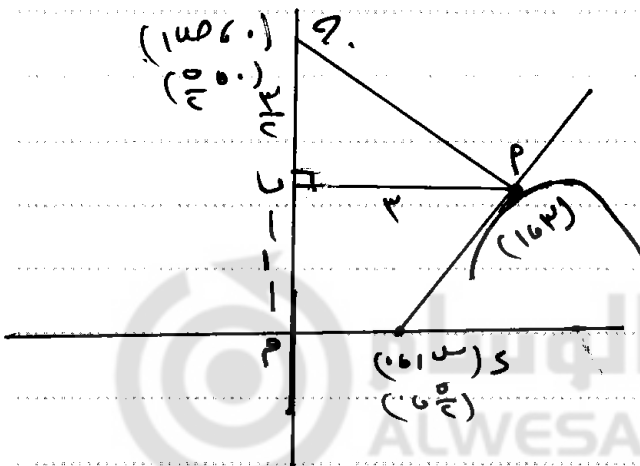
نجد $c = 2$

ميل العمودي = $\frac{0-6}{1-5} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

$1 = c + 1 - 1 = c$

وزارة (2018) صيف قديم

جد مساحة الشكل الرباعي الناتج من تقاطع المحاس والعمودي على المحاس لمخني الاقتران $PMUP$ عند النقطة $(3, 6)$ ومحوري إسقاط والصدارة $PMUP$



الحل

ميل المحاس = $\frac{6-0}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$6 = 3c - 3 \Rightarrow 6 + 3 = 3c \Rightarrow 9 = 3c \Rightarrow c = 3$

س.ع.كل

$$1 = 6 - 15c \iff 15c = 5$$

$$\iff 3 = 15c$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1-15c}{3-1} = \text{صلي العمودي}$$

$$\iff 3 + 15c = 3 - 15c$$

$$\iff 30c = 0 \iff 15c = 0$$

صافه لكل اربعي P م D

$$= \text{صافه تبتل } 30P + \text{صافه شبطخرف}$$

$$= 1 \times \left(\frac{3}{3} + \frac{0}{3}\right) \times \frac{1}{3} + (1 - \frac{0}{3}) \times 3 \times \frac{1}{3} =$$

$$= 1 \times \frac{11}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \times 3 \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{11}{9} + \frac{9}{9} = \frac{20}{9}$$

وزارة (18. c) صيف جديد

① اذا كان هـ (س) = جـ س² - 3س + 6
وكانت ميا س زاوية صلي الجاس لمخني
هـ عند النقطة (16 هـ 11) هو 135
فان صيفك د ؟

$$1 - 16 \quad 2 - 11 \quad 3 - 6 \quad 4 - 1$$

الكل

$$\text{لما } 135 = \text{صلي الجاس عند } 5 = 1$$

$$1 - 15c = 3 - 5c$$

$$= 2 - 10c$$

$$\text{⑤ } 1 = 6 \quad 2 = 5c$$

⑥ اذا كان هـ (س) = س² - 3س + 6
فان قيمة P التي تجعل للافتات
هـ (س) جاس افصري عند س = 1

$$1 - 16 \quad 2 - 11 \quad 3 - 6 \quad 4 - 1$$

الكل

جاس افصري عند س = 1

$$\iff \text{هـ} (1) = 0$$

$$\text{هـ} (س) = 3س^2 - 3س + 6 + 0 =$$

$$\text{هـ} (1) = 3(1) - 3(1) + 6 + 0 = 3$$

$$= 3 + 3c + 0$$

$$3c + 3 = 6 \quad 3c = 3$$

①



ورقة عمل التطبيقات الهندسية

الاسئلة الموضوعية

١) اذا كان للأقتران $f(x)$ مماساً أفقياً عند النقطة $(a, f(a))$ فما قيمة $f'(a)$ ؟

- أ) 1 ب) 0 ج) $-\frac{1}{3}$ د) $-\frac{2}{3}$

٢) اذا كانت $C = 5x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ تمثل مساحة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$ عند $x = a$ وكانت $f'(a) = 6$ فما كانت $f(a)$ ؟

- أ) 11 ب) 12 ج) 3 د) 17

٣) قياس الزاوية المحصورة بين المماس لمنحنى $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ عند النقطة الاصل وبين المماس المماس $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ عند $x = \frac{\pi}{4}$ ؟

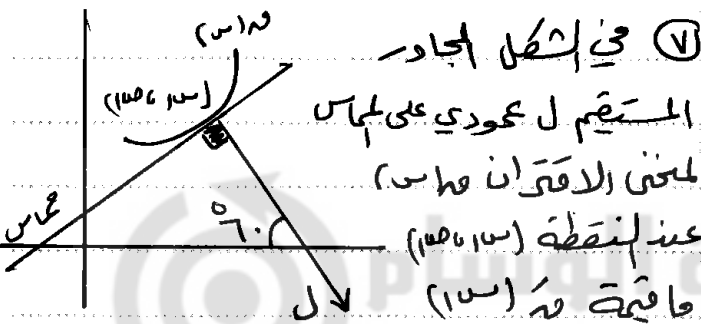
- أ) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{12}$

٤) اذا كان منحنى الأقتران $f(x)$ يمر بالنقطة $(1, 6)$ وكان المماس المرسوم لمنحنى $f(x)$ عند هذه النقطة ليضع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فما كانت $f'(1)$ ؟

- أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

٥) اذا كان ميل المماس للأقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ عند النقطة $(1, 0)$ يساوي 4 فما قيمة $f(1)$ ؟

- أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4



- أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

٦) اذا كان ميل المماس للأقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ عند النقطة $(1, 0)$ يساوي 4 فما قيمة $f(1)$ ؟

- أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

٧) اذا كان المماس عند $x = 1$ مماساً لمنحنى الأقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ عند النقطة $(1, 0)$ فما كانت $f(1)$ ؟

- أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

١٣) اذا كان

لدا (س) = (دا (س) + س) x هو (س) ، وكان
للمختلين دا (س) ، هو (س) مماثلاً أفقيًا مشتركاً
عند النقطة (٤، ٣) الواقعة على كليهما فان
لدا (س) =

١٨ (د) ١٢ (هـ) ٤ - (و) ٤ (ز)

١٤) اذا كان المستقيم الواصل بين نقطتين

(١-٥، ٠) ، (١٠، ٦) مماثلاً لمختلي الاقتران
دا (س) = س^٢ - س + ٧ فان قيمة
الثابت ب ثابت

١٢ (د) ٤ (هـ) ٦ (و) ٦ (ز) ٦ - (د)

١٥) اذا كان المستقيم هو = س - ٣ مماثلاً

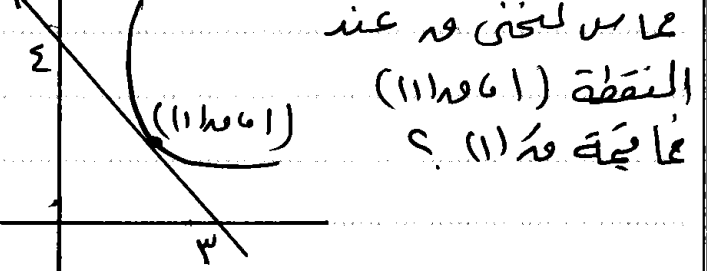
لمختلي الاقتران دا (س) = س^٢ - ٥س + ٢
فان قيمة الثابت P ثابت

١٢ (د) ٩ (هـ) ٦ (و) ٩ (ز) ٦ - (د)

٨) اذا كان دا (س) = س^٣ - س^٢ + س - ٣

فان ميل المماس لمختلي دا عند النقطة
التي تكون عند دا (س) = ٤ يادي
١٢ (د) ١٠ (هـ) ٤ (و) ٤ (ز)

٩) من لكل الجوار المستقيم



١٢ (د) ٣ (هـ) ٤ (و) ٣ - (د)

١٠) اذا كانت معادلة العمودي لمختلي

دا (س) عند النقطة (٣، ٨) هي
٤س + ٣س - ٧ = ٠ فان قيمة
٦ (د) (٣ -) ثابت

١٨ (د) ١٨ - (هـ) ٤ (و) ٤ (ز)

١١) اذا كان دا (س) = $\frac{س+١}{س}$ ، دا (س) ≠ ١

وكان لمختلي دا (س) مماثلاً أفقيًا عند (٥، ٢)
فان دا (١) ثابت

١٢ (د) ١ (هـ) ٢ (و) ٢ (ز)

١٢) اذا كانت معادلة العمودي على مماس مختلي

دا (س) عند النقطة (١، ٣) هي س = $\frac{١}{٣}$
فان دا (١) =

٣ (د) ٣ - (هـ) $\frac{١}{٣}$ (و) $\frac{١}{٣}$ (ز)

اجابات الاسئلة الوصوي

١ (د) ٢ (هـ) ٣ (و) ٤ (ز)

٥ (د) ٦ (هـ) ٧ (و) ٨ (ز)

٩ (د) ١٠ (هـ) ١١ (و) ١٢ (ز)

١٣ (د) ١٤ (هـ) ١٥ (و) ١٦ (ز)

ورقة عمل التطبيقات الهندسية

السؤال الأول :

أكتب معادلة المماس والعمودي على المماس فيما يلي

١) عند $s = 1$ $s^2 + s^3 = 1$

٢) عند $s = 2$ $s^2 + s^3 = 10$

٣) عند $s = 3$ $s^2 + s^3 = 17$

٤) عند $s = 1$ $s^2 + s^3 = 6$

السؤال الثاني

٥) عند النقطة على منحنى

$s^2 + s^3 = 7$ حيث يكون المماس عند موازياً للـ s

$s^2 + s^3 = 7$

ج. : (٤, ٦)

٦) أكتب معادلة المماس لمنحنى

$s^2 + s^3 = 1$ عند $s = 1$

نقاط التقاطع مع $s = 1$

$s^2 + s^3 = 1$

٥) عند معادلة المماس لمنحنى $s^2 + s^3 = 1$ حيث $s = 1$ عند النقطة التي تقطع فيها المنحنى محور السينات

٥) عند معادلة المماس لمنحنى لإقران $s^2 + s^3 = 1$ حيث $s = 1$ عند ما يكون المماس موازياً للـ s

٥) عند معادلة المماس لمنحنى لإقران $s^2 + s^3 = 1$ حيث $s = 1$ عند النقطة التي يوضع المماس عند زاوية قائمتها مع اتجاه الس المحور السينات علماً بأن $s = 1$ عند $(1, 0)$

السؤال الثالث

Ⓐ إذا كانت ضامه (ع) = (١١) = $\frac{1 - \epsilon}{1 - \epsilon}$

عند قياس زاوية ميل المماس لمنحنى له عند النقطة (١١) (١١)

Ⓑ حد ابتدائي نقطة لمماس التي يكون عندها المماس لمنحنى $٥٠ - ٢ = ٨ - ٣$ نحو دلياً على المستقيم $٥٠ = ٥ + ٥$

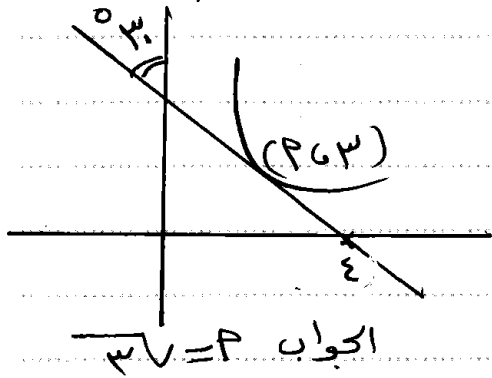
Ⓒ إذا كان المستقيم $٥٠ = ٧ - ٤ - ٣$ عين المنحنى $٥٠ = ٣ + ٣ + ٣$ عند النقطة (٦٥) (٦٥) $٥٠ = ٥٠$

Ⓓ اوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى $٥٠ = ٥٠ + ٥٠$ عند النقطة (٤٦) (٤٦)

السؤال الرابع

Ⓐ اوجد قيم $٥٠ = ٥٠ = ٥٠$ حتى يكون لمخف لحد أقصى $٥٠ = ٥٠ + ٣ = ٥٠ = ٥٠$ مماثل فترك عند النقطة (٢٥) (٢٥)

Ⓑ الشكل المجاور عيّن منحنى $٥٠ = ٥٠$ حيث رسم مماس للأقتران عند النقطة (٢٥) (٢٥) فما قيمته $٥٠ = ٥٠$



Ⓒ إذا كان المستقيم $٥٠ = ٥٠ + ٥٠ = ٥٠ + ٥٠$ عين منحنى الأقتران $٥٠ = ٥٠ = ٥٠$ فما قيمته $٥٠ = ٥٠$

السؤال السابع

١٥) أكتب معادلة المماس للمحن E من $S^2 + 4S + 8 = 8$ والمرسوم من النقطة $(-1, -0.5)$

١٦) إذا كانت معادلة المماس للمحن E عند $S = 2$ هي $4S + 3S = 10$ وكانت $L(S) = S^2 + 4S + 8$ فما هي $L'(2)$

١٧) إذا كان لكل المنحنيين E و F مماسان أحدهما عند $(4, 2)$ وكانت $L(S) = 16S + 4S$ فما هو $L'(4)$

١٨) إذا كانت معادلة المماس للمحن E على المماس $L(S) = 3S^2 - 4S + 8$ عند النقطة $(1, 5)$ فما هي $L'(1)$

السؤال الثامن

١٩) إذا كان $L(S) = 8S - 4S - 4 = 4S - 4$ مماساً للمحن E عند $(3, 5)$ وكان المماس $L(S) = 6S + 10 = 6S + 10$ مماساً على منحنى $L(S)$ عند $(3, 4)$ فما هي $L'(3)$

٢٠) إذا كانت معادلة المماس للمحن E عند $S = 1$ هي $L(S) = 3S^2 + 8 = 3S^2 + 8$ فما هي $L'(1)$

٢١) إذا كان $L(S) = 8S - 4S - 4 = 4S - 4$ مماساً على المنحنى E عند $S = 3$ فما هي $L'(3)$

٢٢) إذا كان المماس للمحن E عند $S = 2$ يمر بالنقطة $(1, 5)$ فما هي $L'(2)$

حول ورقة عمل التطبيقات الهندسية

السؤال الأول

① $ص = 3س + ٤$

ص = ١ = ٣س + ٤

ص = ٢ = ٣س + ٤

ص = ٣ = ٣س + ٤

② $ص = ٤س + ٥$

ص = ٢ = ٤س + ٥

ص = ٣ = ٤س + ٥

ص = ٤ = ٤س + ٥

③ $ص = ٣س + ٤$

ص = ٢ = ٣س + ٤

ص = ٣ = ٣س + ٤

ص = ٤ = ٣س + ٤

ص = ٥ = ٣س + ٤

ص = ٦ = ٣س + ٤

④ $ص = ٣س + ٤$

ص = ١ = ٣س + ٤

ص = ٢ = ٣س + ٤

ص = ٣ = ٣س + ٤

ص = ٤ = ٣س + ٤

ص = ٥ = ٣س + ٤

ص = ٦ = ٣س + ٤

السؤال الثاني

① $ص = ٣س + ٤$

ص = ١ = ٣س + ٤

ص = ٢ = ٣س + ٤

حل السؤال

ص = ٣ = ٣س + ٤

ص = ٤ = ٣س + ٤

ص = ٥ = ٣س + ٤

← لتكمل

Ⓣ

يقطع محور السينات عند $v = \frac{\pi}{2}$
 عند $v = \frac{\pi}{2}$: $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 النقطة $(\frac{\pi}{2}, 0)$

عند $v = \frac{\pi}{2}$: $h = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$
 $\frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$
 معادلة المحاور
 $h = \frac{4}{\pi} - 1 = \frac{4 - \pi}{\pi}$

Ⓥ عند $v = \frac{\pi}{3}$: $h = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$
 عند $v = \frac{\pi}{3}$: $h = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$
 عند $v = \frac{\pi}{3}$: $h = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$
 $\frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}$
 $h = \frac{3}{\pi} - 1 = \frac{3 - \pi}{\pi}$
 النقطة $(\frac{\pi}{3}, \frac{3 - \pi}{\pi})$
 الميل $= \frac{3 - \pi}{\pi}$
 $h = \frac{3 - \pi}{\pi}$

$$v = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ⓦ عند $v = \frac{\pi}{2}$: $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 النقطة $(\frac{\pi}{2}, 0)$
 $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

Ⓧ $(v + \frac{1}{v})^3 - v^3 - \frac{1}{v^3} = 1$

Ⓨ $v + \frac{1}{v} = 1$
 معوضا في ①
 $1 = v^3 - 1 + v^3 - \frac{1}{v^3} = 2v^3 - \frac{1}{v^3} - 1$

Ⓩ $1 = v - 1 + v - 1 = 2v - 2$
 $\frac{1}{v} = v$
 معوضا في ①
 $0 = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1 - v}{v}$
 النقطة $(\frac{1}{v}, \frac{1 - v}{v})$

Ⓨ الميل
 $h = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1 - v}{v}$
 $h = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1 - v}{v}$
 $h = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1 - v}{v}$
 $h = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1 - v}{v}$
 معادلة المحاور
 $h = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1 - v}{v}$

④ ميل المماس = $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ لا يتكافئ
 $\tan \alpha = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ميل المماس = $\frac{1}{2}$ = ميل المماس = $\frac{1}{2}$

ميل المماس = $\frac{1}{2}$ = ميل المماس = $\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{12} = \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

ميل المماس = $\frac{1}{2}$

النقطة $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

معادلة المماس

$(\frac{\pi}{12} - \alpha) \tan \alpha = \frac{1}{2} - \alpha$

بعضها

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

السؤال الثالث

⑤ ميل المماس = $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ عند نقطة المماس

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$ من نهايتها

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

السؤال الرابع

Ⓟ محاسن مارك

المشتقة = المشتقة

$$1 - \sqrt{2}c = u + c \quad P3$$

$$1 = u + c$$

$$1 - 1 - \sqrt{2}c = u + (1 - u) \quad P3$$

Ⓛ - 1 - 1 = \sqrt{2}c + u + P3

$$c = 1 - \sqrt{2}u + (1 - P) = \frac{1}{2}$$

Ⓢ - c = u - P - 1 = u

Ⓢ | c = 1 + (1 - P)

c = 1 + P

Ⓛ = 1 = 0

$$1 = c + u + P3$$

Ⓛ = 1 = \sqrt{2} + u + P3

Ⓢ = 1 = P - P

$$c = \sqrt{2} + P3$$

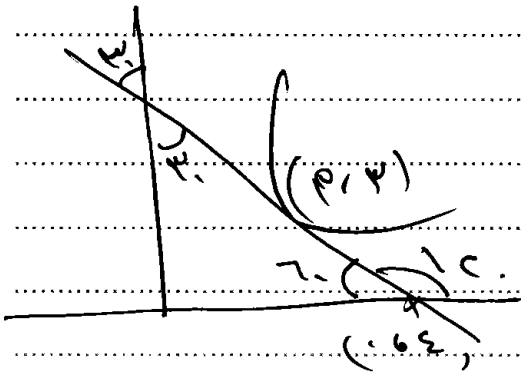
$$\frac{1}{2} = P \iff 1 = P3$$

المشتقة في c

$$c = u - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = c - \frac{1}{2} = u$$

Ⓛ



صل الياس = \frac{1 - P}{2 - 3} = \frac{1 - P}{-1} = P - 1

$$c - 1 = \frac{P}{-1} = -P$$

$$c - 1 = -P$$

Ⓢ

$$1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

المشتقة = المشتقة

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

الصورة = 0 (الصورة 0)

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

$$c = 1 = \sqrt{2} + u + P3$$

الوالت الخاص

(U)

من (U) $P - \sqrt{c} = (U)$
 ميل عند نقطة ص =

$\frac{P}{c} = U = P - \sqrt{c}$
 ميل عند $\left(\frac{P}{c}\right)$

$= (P-1) - \frac{P}{c} \times P - \frac{P}{c}$

$= P + 1 - \frac{P^2}{c} - \frac{P}{c}$

$= P + 1 - \frac{P^2}{c} - \frac{P}{c}$

بالفرض في ح $= P + 1 - \frac{P^2}{c}$

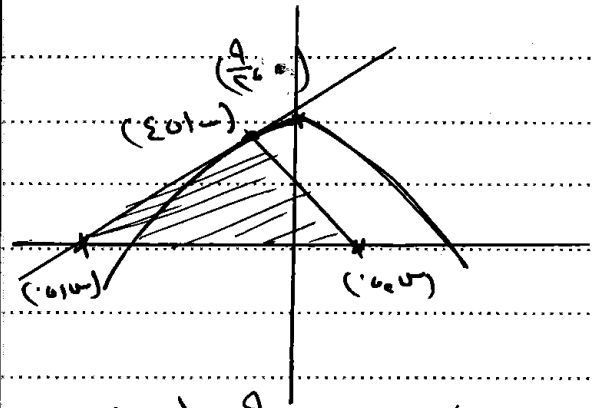
$= P^2 + c - P^2$

$= c + P^2 - P^2$

$= (c - P)(c - P)$

$c = P$

(P)



$c = \frac{A}{c} = \frac{1}{c} - 9 = 0 \Rightarrow c = 1$

ميل المماس $= -\frac{c}{c^2} = -\frac{1}{c}$
 $1 + = (1-9) =$

$1 + = \frac{c}{c^2 - 1}$

$c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$

$0 =$

ميل المماس $= \frac{1-c}{c^2} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$

$3 = c^2 = c^2 + 1 + = c$

(D)

$5 + \sqrt{5} + 2 = P = 5$ ميل $5 - \sqrt{5} = 5$

عند (1, 3)

① $11 = 5 + \sqrt{5} + 2 = P = 11$

من (D) $3 = 5 - \sqrt{5} = 5$ ميل $3 = 5 - \sqrt{5}$

عند $3 = 5 - \sqrt{5}$

② $6 = 5 + \sqrt{5} = 6$

$9 + \sqrt{9} + 5 = P = 9$ ميل $9 - \sqrt{9} = 9$

من (D) $9 = 9 - \sqrt{9} = 9$ ميل $9 = 9 - \sqrt{9}$

← تبع

صافة ليلت $= \frac{1}{c} \times$ القاعدة \times الارتفاع

$\frac{1}{c} \times (0-1-3) =$

$16 = \frac{1}{c} \times 4 \times 3$

السؤال السادس

$$\textcircled{P} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$3 - 11 = 3 - 11 \quad 3 - 11 = 3 - 11$$

$$3 - 11 = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = 0 = 3x - 11 = 11 \quad x = 5$$

بمعنى آخر $\frac{f(x)}{f'(x)} = f'(x_0)$

$$\frac{x}{0} = f'(x_0) \quad \frac{x}{f'(x_0)} = 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{17}{0} = \frac{17}{0} = \frac{17}{0}$$

$$f'(x_0) = \frac{17}{0} = \frac{17}{0} = \frac{17}{0}$$

$$f'(x_0) = \frac{17}{0} = \frac{17}{0} = \frac{17}{0}$$

$$f'(x_0) = \frac{17}{0} = \frac{17}{0} = \frac{17}{0}$$

$$f'(x_0) = \frac{17}{0} = \frac{17}{0} = \frac{17}{0}$$

بمعنى آخر $c = p$ في ١

$$11 = p + 3 + p9$$

$$11 = c + 3 + p9$$

$$\textcircled{1} \quad \dots = 9 - 3 + p9$$

$$\textcircled{2} \quad \dots = 7 - 3 + p7$$

بمعنى آخر $c = p$

$$\dots = 9 - 3 + p9$$

$$\dots = 18 + 3 - p18$$

$$9 - p9 = 9 + p9$$

$$1 = p$$

فأبداً لا نقران $(c) = (p)$

٥

$$f'(x) = 6x + 3 = 6x + 3$$

مصادفة الجودي $v = 13 + 4c$

$$c = 11 \quad v = 13 + 4c$$

$$f'(x) = \frac{17}{0} = \frac{17}{0} = \frac{17}{0}$$

$$c = 11$$

$$v = 13 + 4c$$

$$c = 11$$

$$c = 11$$

$$f'(x) = 6x + 3 = 6x + 3$$

$$6x + 3 = 6x + 3$$

$$17 = 13 + 4$$

4

ميل المستقيم = ميل المماس

$$3 = P \text{ ضا } \text{ عند } 0$$

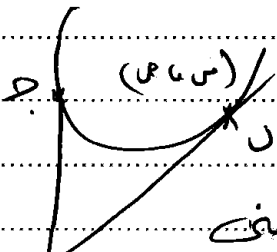
$$3 = P \text{ ضا } \text{ عند } 0$$

$$\text{المماس} = \text{المماس}$$

$$3 + 4P = 2 + 4P$$

$$3 = 2$$

5



ميل المماس =

$$P(0, 2) \text{ عند } 0 = 2 - 1 = 1$$

$$1 = 1 \text{ عند } 0$$

$$2 + 1 = 3 + 1$$

$$\text{عند } 0 = 1$$

$$2 + 1 = 3 + 1$$

$$0 = 0$$

$$0 + 1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$2 - 1 = 1 = 1$$

$$1 - 1 = 0 = 0$$

$$1 = 1$$

$$1 = 1$$

$$1 - 1 = 0 = 0$$

$$1 = \frac{1-2}{1-3}$$

معادلة المماس

$$(1, 3) \times 1 = 1 - 3$$

$$1 + 3 = 3$$

ميل المماس = ميل المماس

$$1 - 3 = 1$$

$$1 - 3 = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

المماس = المماس

$$0 + 1 - 1 = 1 + 1$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$0 + \frac{1}{1} \times 1 - \frac{1}{1} \times 1 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$0 + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{1}$$

$$1 - 0 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ عند } 1 = \frac{1}{1}$$

$$1 = 1$$

السؤال الرابع

Ⓟ

نظروا نقطة بما س (س، ص)

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص - ٥}{س + ٥}$$

$$٨س + ٤٥ = صس$$

$$\frac{ص - ٥}{س} = \frac{٥٨ - ٥}{س}$$

$$\frac{ص - ٥}{س} = \frac{٥٤ - ٥}{س}$$

$$ص - ٥ = ٤٩ - ٥$$

$$\leftarrow ص = ٤٤ - ٨ = ٣٦$$

$$\sqrt{٣٦} = \sqrt{٤٤ - ٨}$$

$$٦ = ٥ = \frac{٨}{٦} = ٥$$

عندما س = ٦ فان

$$٨ = ٤ + (٦ - ٥)$$

$$\leftarrow ص = ٤ = ٤ + ٠$$

النقطة (٦، ٤)

$$ص - ٥ = س(س + ٥)$$

النقطة (٥، ٤)

$$ص + ٥ = س(س - ٥)$$

Ⓠ

$$ص = ١٠ - ٣س$$

صلي بالمساوي ص = ٣ - ٣س

$$٣ - ٣س = ص(٣) = ٣ - ٣س$$

$$٣ - ٣س = ٣ - ٣س$$

$$ل(٣) = ٣س(٣) + ٣(٣)$$

$$ص(٣) = ٣(٣) - ٣(٣)$$

$$ص(٣) = ٣(٣)$$

$$٤(٣) = ٤(٣) + ٤(٣) + ٤(٣)$$

$$١٦(٣) = ٤(٣)$$

$$ص(٣) = ٣(٣)$$

$$\frac{٣ - ٣س}{٣} = \frac{٤(٣) + ٤(٣) + ٤(٣)}{٣}$$

$$٣ - ٣س = ٤ + ٤ + ٤$$

$$٣ - ٣س = ١٢$$

Ⓡ ص = ٣(٣) = ٩

ص(٣) = ٩

$$٩ = ٣(٣) = ٩$$

$$ل(٣) = ٣(٣) = ٩$$

$$ص(٣) = ٩$$

$$ل(٣) = ٣(٣) = ٩$$

$$\frac{٩}{٣} = \frac{٩}{٣}$$

⑤

مصادرة الجودي

$$3x - 8 = 5y$$

$$\frac{3x}{4} = \frac{5y}{4}$$

$$\frac{3x}{2} = 5y$$

$$\frac{3x}{2} = (1)y$$

السؤال الثاني

⑥

$$\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}y$$

$$0 = (3)x - (1)y$$

$$3x - y = 10$$

$$\frac{3x}{4} = \frac{1}{4}y$$

$$3x - y = 10$$

$$(3x - y) + (3x - y) = 10 + 10$$

$$6x - 2y = 20$$

$$6x - 2y = 20$$

$$-2y = 20 - 6x$$

⑦

$$3x - 8 = 5y$$

$$(1)y = 3x - 8$$

$$3x - 8 = 5(3x - 8)$$

$$3x - 8 = 15x - 40$$

$$3x - 8 = 15x - 40$$

$$-12x + 32 = 0$$

$$-12x + 32 = 0$$

$$-12x + 32 = 0$$

$$3x - 8 = 5y$$

$$3x - 8 = 5y$$

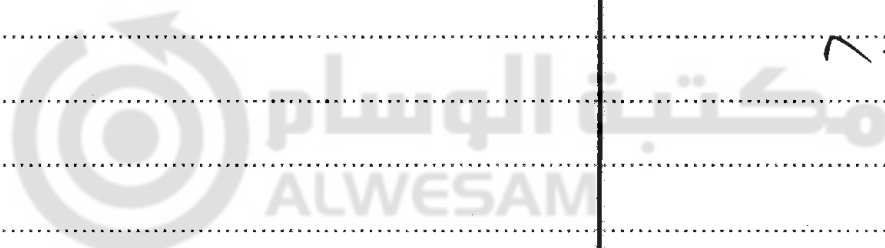
$$3x - 8 = 5y$$

$$3x - 8 = 5y$$

$$3x - 8 = 5y$$

$$0 = 5y + 8 - 3x$$

$$18 + 5y = 3x$$



(5)

صلي لبحاس = صلي لبحسن

نقضي نقص لبحاس (ص، س)

$$1 = \frac{c-1}{1-b} = \frac{p}{c} = \frac{c-v}{1+s}$$

$$\boxed{c = p} \quad 1 = \frac{p}{c}$$

$$1 = \frac{c-v}{1+s}$$

$$1-s = c-v$$

$$1 = c+v$$

$$1 = c+v \Rightarrow 1 = \frac{p}{c} + \frac{p}{c}$$

$$1 = c+v$$

$$\frac{1}{c} = v \leftarrow 1 = c$$

$$c = p$$

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{1}{c}\right) = p$$

(6)

صلي لبحودى = $\frac{1}{0}$

صلي لبحاس = 0 = ص (س)

$$c \times (v) = (s)$$

$$1 \times (vc) = +$$

$$9 = \frac{40}{0} = \frac{3-41}{0} = (s)$$

$$9 = (s) \times 3 = (s)$$

$$3 = (s)$$

$$(s) \times 3 = (s) \times 3 = (s)$$

$$3 + c \times (s) \times 3 = 0$$

$$3 + (s) = 0$$

$$(s) = 0$$

$$(s) = \frac{3}{6}$$



الدرس الثاني

تطبيقات فيزيائية

(ملاحظات هامة)

① السرعة الابتدائية = ع (٠)

② $v = 0$ عند ما

④ بداية الحركة ⑤ السرعة الابتدائية

⑥ اللحظة التي تقذف الجسم منها

③ ع (ن) = صفر

④ عند ما يصل الجسم الى اعلى ارتفاع

⑤ عند ما تنعدم السرعة

⑥ عند ما يتوقف الجسم او يكمل كضيئاً

⑦ عند ما يعكس اتجاه حركته

⑧ (ن ان) = صفر

④ يتعدم الساع

⑤ عند السرعة الثانية

⑤ الزمن دائماً موجب

⑤ يعود الجسم الى نقطة القذف

ف (ن) = صفر

اذا كان ف (ن) عيّل افتّر ان المسافة في الفترة [ن١، ن٢] فإت

$$\textcircled{1} \text{ السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1}$$

وعندما $\Delta n \rightarrow$ صفر فانها تصبح سرعة لحظية = مشتقة المسافة

ع (ان) = ف (ان)

$$= \frac{df}{dn} = \text{معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن}$$

$$\textcircled{2} \text{ الساع المتوسط} = \frac{\Delta v}{\Delta n} = \frac{v(n_2) - v(n_1)}{n_2 - n_1}$$

وعندما $\Delta n \rightarrow$ صفر فان الساع يصبح لحظي

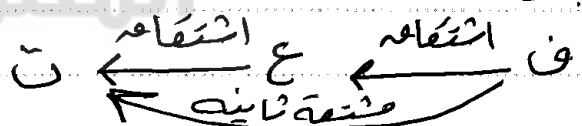
الساع اللحظي = مشتقة السرعة

(ن ان) = ع (ان) = ف (ان)

$$= \frac{dv}{dn} = \frac{dv}{dt}$$

= معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

لكل عا

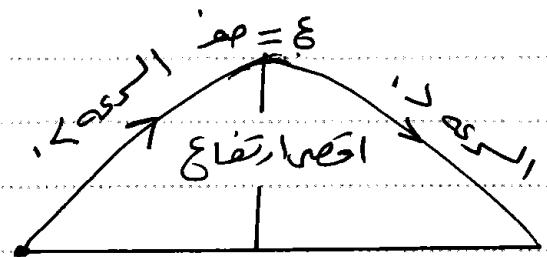


← تابع الملاحظات

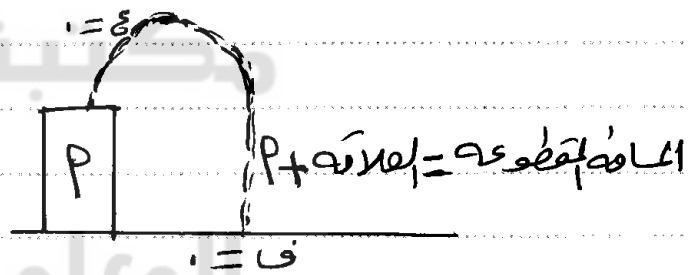
ملاحظات هامة

- ① السرعة عليه ان تكون موجبه أو تكون سالبه أو صفر حيث
السرعة موجبه ← جسم يتحرك باتجاه الحركة
السرعة سالبه ← جسم يتحرك عكس اتجاه الحركة
السرعة صفر ← جسم ساكن أو متوقف
- ② التسارع يمكن ان يكون موجبه أو سالب حيث
التسارع موجبه ← سرعة تزداد (الجسم يتسارع)
التسارع سالب ← سرعة تنقص (الجسم يتباطأ)
التسارع صفر ← سرعة ثابتة

③ في المقذوفات



- | | |
|-------|-------|
| • = ن | • ≠ ن |
| • = ف | • ≠ ف |
| • ≠ ع | • ≠ ع |
| • = ع | |



سؤال ①

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ان) = ن^٣ + ن^٢

① اوجد سرعة وسارع الجسم
عند ف = ٥

② اوجد سرعة المتوسط والسارع
المتوسط في [٣, ٥]

الحل

ف(ان) = ن^٣ + ن^٢
ع = ف' = ٣ن^٢ + ٢ن
ن = ع' = ٦ن + ٢

① ٨٥ = ٥ × ٢ + (٥)^٣ = (٥) ٤

٣٢ = ٢ + ٥ × ٦ = (٥) ٦

② السرعة لمتوسطه = $\frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(٣ + ٩) - (١ + ١)}{٢} = \frac{١١}{٢}$

التسارع المتوسط = $\frac{ع(٣) - ع(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{١٨ - ٤}{٢} = ٧$

⑤ متى يكون الساعة سالبا

$$\begin{aligned} \bar{n} \text{ (ان)} &= 1 - n = 0 \\ n &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{- - - + + +}{\frac{1}{3}}$$

الساعة سالبا عندما $n > \frac{1}{3}$

⑥ اصب سرعة الجسم عندما يكون

$$\text{ساعة} = \frac{3}{m} n^2$$

الحل

$$\bar{n} \text{ (ان)} = 3$$

$$1 - n = 3 \iff n = \frac{4}{3} = \frac{1.33}{3}$$

$$\bar{e} \text{ (ان)} = n^2 - n - 6$$

$$\bar{e} \text{ (ان)} = 6 - 4 - 1 = 1 \text{ م/م}$$

عكس اتجاه الحركة

مثال ⑤

تحرك جسم في خط مستقيم حيث أن

لديه $s = f(n) = 3n^2 - 6n + 1$ ،

ن و [١٤٠] اوجد الساعة جسم

عندما تكون السرعة = $\frac{1}{3}$ م/م

الحل

$$\bar{e} \text{ (ان)} = f'(n) = 6n - 6 = \frac{1}{3}$$

← يتبع اكل

مثال ⑤

يتحرك جسم حسب العلاقة

$$f(n) = n^3 - \frac{2}{3}n^2 - 6n$$

اوجد مايلي

⑥ المسافة التي تقطعها الجسم بعد ٦ ثواني

$$\bar{f} \text{ (ان)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 6 = 18$$

⑦ سرعة الجسم بعد ٤ ثواني

$$\begin{aligned} \bar{e} \text{ (ان)} &= f'(n) = 3n^2 - \frac{4}{3}n - 6 \\ \bar{e} \text{ (ان)} &= 48 - \frac{16}{3} - 6 = 36 \text{ م/م} \end{aligned}$$

⑧ ساعة الجسم بعد ثابنتين

$$\bar{n} \text{ (ان)} = e = 1 - n = 0$$

$$\bar{n} \text{ (ان)} = 1 - 2 \times 2 = -3 \text{ م/م}$$

⑨ الساعة عندما تنعدم السرعة

الحل

$$\bar{e} \text{ (ان)} = 0 = n^2 - n - 6$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0 \implies n = 3 \text{ م/م}$$

$$\bar{n} \text{ (ان)} = 1 - 3 \times 3 = -8$$

$$0 = 1 - 6 = -5$$

$$\frac{\text{حان}}{\text{حبان}} = \frac{\text{حبان}}{\text{حبان}} = 3 = \frac{\text{حبان}}{\text{حبان}}$$

$$\text{حان} = 3 \leq \text{حان} = \text{حان} \pm 3$$

$$\leftarrow \text{حان} = \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \leftarrow$$

اول مرة يتعدى فيها الساع
عندما $\text{حان} = \frac{\pi}{3}$

$$\text{ح} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ حان} = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\frac{\pi}{3} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ م/ث}$$

مسألة ٤

تحرك جسم على خط مستقيم وفق

المعادلة الزمنية

$$\text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان} \leq \text{حان}$$

او

١ سرعة الجسم وكساعه عند $\text{حان} = 3$

٢ الفترة الزمنية التي تكون سرعة

الجسم سالبه

الحل

١ $\text{حان} = \text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$\text{ح} = 3 = 3 - 3(3) - 4(3) = 3 - 9 - 12 = -18 \text{ م/ث}$

$\text{حان} = 3 - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$3 = 3 - 3(3) - 4(3) = 3 - 9 - 12 = -18$

٢ $\text{حان} = 3 - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$3 = 3 - 3(3) - 4(3) = 3 - 9 - 12 = -18$

السرعة سالبه (-18)

$\text{حان} = \frac{1}{2} \text{ حان}$ (متطابقه)

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ حان} \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\leftarrow \text{حان} = 1 \leftarrow \text{حان} = \frac{\pi}{2}$

$\text{حان} = \frac{1}{2} \text{ حبان}$

$\text{ح} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ حبان} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \text{حان}$

مسألة ٣

تحرك جسم على خط مستقيم حسب

العلاقة $\text{حان} = \text{حان}$ او

سرعة الجسم في اللحظة التي يتعدى

ساعه لأول مرة بعد تحركه

الحل

$\text{حان} = \text{حان}$

$\text{حان} = \text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$\text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$\text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$\text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان}$

$\text{حان} = \text{حان} - 3\text{حان} - 4\text{حان} = \text{حان}$

$\text{حان} = \text{حان} = \text{حان}$

$\leftarrow \text{حان} = \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leftarrow$

$\text{حان} = \text{حان} + 3\text{حبان} = \text{حان}$

$\text{حان} = 3\text{حبان}$ بالقسمة على

حبان

ملاحظة هامة

$$ع = \frac{د ف}{د ن} = ف'$$

$$ن = \frac{د ع}{د ن}$$

مثال ٦

يبحر لاجيم على فطر وسنتم بحيث ان سرعته تعطى بالعلاقة

$$ع(ان) = \frac{ن}{ف(ان)}$$

اوجد الساعة ايجيم عندما ن=٣ علماً بان سرعته عندئذ ١م/ن

الحل

$$ع(ان) = \frac{ف(ان) - ١ \times (ان)}{ف(ان)}$$

$$ن(ان) = \frac{ف(ان) - ن \times ع(ان)}{ف(ان)}$$

$$ع(٣) = \frac{ف(٣) - ٣}{ف(٣)}$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{ف(٣) - ٣}{ف(٣)}$$

$$ن(٣) = \frac{ف(٣) - ٣ \times ع(٣)}{ف(٣)}$$

$$\frac{١}{٨} = \frac{ف(٣) - ٣}{٦} = \frac{٣ - ٦}{٦} = \frac{٣ - ٦}{٦}$$

مثال ٧

يبحر لاجيم بحيث ان

$$ع = ٤ف - ٢$$

حيث ف: المسافة بالاعشار

ع: السرعة م/ن

اوجد الساعة عندما ف=٢

الحل

اشتقاق ضمنى النسبة للزمن

$$ع' = ٨ف' - ٢ف'$$

$$ن = ٨ف - ٢ع$$

عندما ف=٢ فان

$$ع = ٤(٢) - ٢ = ٤$$

$$ن = ٨ \times ٢ - ٤ \times ٤ = ٤$$

مثال ٨

اذا كانت ع = ٧ف : السرعة

ف: المسافة اوجد الساعة

الحل

$$ع(ان) = \frac{ف(ان)}{٧}$$

$$ن(ان) = \frac{ع(ان)}{٧} = \frac{١}{٧} م/ن$$

سؤال ١٠

يتحرك جسم حسب لعلاقته
 في ان $v = 3t^2$ حيث $t < 0$
 اذا كانت سرعة الجسم بعد t ثواني
 تساوي صلي سرعة له 0
 ثواني اوجد قيمة t ؟

الحل

ج ان $v = 3t^2$ = في ان $v = 0$ ج ن

ج (١٠) $v = 3(0) = 0$ ج-١

ج (١٠) $v = 3(0) = 0$ ج-١

ج (١٠) $v = 3(0) = 0$ ج-١

ج (١٠) $v = 3(0) = 0$ ج-١

$t = 0$

سؤال ١١

يتحرك جسم حسب لعلاقته
 في ان $v = 3t^2 + 6t - 1$ حيث $t < 0$
 الساعة لهذا الجسم عند ما يقطع
 ٣ متر ؟

الحل

ج ان $v = 3t^2 + 6t - 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 + 6t - 1$ حيث $t < 0$

← يتبع اكل

سؤال ١٥

اذا كانت $v = 3t^2$ حيث $t < 0$
 ع: السرعة ، ف: المسافة اثبت
 ان المسار ثابت ؟

الحل

$v = 3t^2$ \Rightarrow $\frac{ds}{dt} = 3t^2$ \Rightarrow $ds = 3t^2 dt$ \Rightarrow $s = t^3 + C$

ج ان $v = 3t^2$ \Rightarrow $\frac{ds}{dt} = 3t^2$ \Rightarrow $s = t^3 + C$ ثابت

سؤال ١٩

يتحرك جسم حسب لعلاقته
 في ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$
 سرعة هذا الجسم بعد ثابته
 واحدة عما بان المسار هذا
 الجسم حتى تتلذذ الكثرة 11 م / ث

الحل

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

ج ان $v = 3t^2 - 6t + 1$ حيث $t < 0$

الحل

المطلوب في (ن) مع (ن) عندها
ن (ان) = صفر

ع (ان) = في (ان) = $3 + 4 - 2n$

ن (ان) = ع (ان) = $2 - n$

ن (ان) = صفر نعدم الساع

$2 - n = 0 \rightarrow n = 2$

في (ن) = $\frac{1}{3} (2) - \frac{2}{3} (2) + 3 + 0 = \frac{17}{3}$

$\frac{17}{3} =$

ع (ن) = $2 - 4 + 3 = 1$ م / ن

تابع الكل

$2n^3 - 17n^2 + 44n + 10 = 27$
 $2n^3 - 17n^2 + 44n - 17 = 0$

بالجريب نجد ن = ٢ جذر كعادته

27 -	44	17 -	2
36 -	27 -	4	
0	18	13 -	2

$(n-2)(n^2 - 9n + 18) = 0$
 $(n-2)(n-3)(n-6) = 0$

$n = 2, n = 3, n = 6$

ع (ان) = في (ان) = $2n^2 - 4n + 3 = 2(6)^2 - 4(6) + 3 = 30$
ع (ن) = صفر

ع (ن) = $\frac{9}{2} = 4.5$

ن (ان) = $2n - 1 = 11$

ن (ن) = $1 - 3n = -8$

ن (ن) = $9 - 4n = -5$

سؤال ١٦

يحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالاقطار بعد ن من الثواني ياوي

في (ن) = $\frac{1}{3}n^3 - 2n^2 + 3n + 0$

ن < ٠
بعد ن بعد الجسم عن نقطة الاصل وسرعته عند ما نعدم ساعه



ناجح الجمزاوي

المقدوفات

٣) عند ما يلامس الارض فان
 فان) = صفر
 $16 - n^2 = 0$
 $n^2 - 16 = 0 \Rightarrow n = 4$
 $n^2 - 16 = 0 \Rightarrow n = 4$
 ع (٨١) = $16 - 4 \times 4 = 0$
 = $16 - 16 = 0$ عكس اتجاه الحركة
 ٤) على ارتفاع ٢٤ ← فان) = ٢٤
 $16 - n^2 = 24$
 $n^2 - 16 = 24 \Rightarrow n^2 = 40$
 $n = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $n = 2\sqrt{10}$
 $n = 2\sqrt{10}$
 ع (٢) = $16 - 4 \times 4 = 0$
 $n = 4$
 $n = 4$

سؤال ١
 قذف جسم لأعلى حسب العلاقة
 فان) = $16 - n^2$
 ما يلي
 ١) أقصى ارتفاع يصله جسم
 ٢) سرعة الجسم عند القذف
 ٣) سرعة الجسم عند عودته وعلامته
 الارض
 ٤) سرعة الجسم عندما يكون على
 ارتفاع ٢٤ م اثناء الصعود

الحل

ع (٨١) = $16 - n^2 = 0$

١) عند أقصى ارتفاع ، ع (٨١) = ٠

$16 - n^2 = 0 \Rightarrow n = 4$

$n = 4$

أقصى ارتفاع = ف (٤)

$16 - 4 \times 4 = 0$

$16 - 16 = 0$

٢) السرعة الابتدائية = سرعة الجسم

عند القذف = ع (١)

$16 - 1 \times 1 = 15$

سؤال ٢
 قذف جسم حسب العلاقة
 فان) = $16 - n^2$
 قيمة م اذا كان أقصى ارتفاع
 يصله جسم ٢٤ م ؟

الحل

يصل الجسم أقصى ارتفاع عندما

ع (٨١) = صفر

ع (٨١) = $16 - n^2 = 0$

$16 - n^2 = 0 \Rightarrow n = 4$

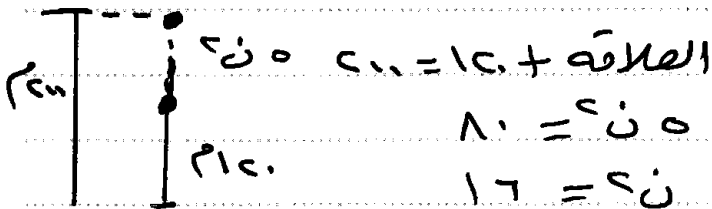
ع (٨١) = $16 - 4 \times 4 = 0$

← ينبع

سؤال ٤

اسقط جسم من ارتفاع ٣٠ م عن سطح الارض بحيث كانت المسافة بالاصفار التي يقطعها في ن ثانية هي $v = 5n^2$ جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ١٠ م من سطح الارض ؟

الحل



العلاقة $30 = 10 + 20$ $5n^2 = 20$
 $5n^2 = 20$
 $n^2 = 4$
 $n = 2$ $v = 5 \times 2^2 = 20$ م/ث
 ع (ان) $10 = 5n^2$
 ع (ع) $20 = 5n^2$

← يتبع

$30 = 10 + 20$

$20 = 5n^2$

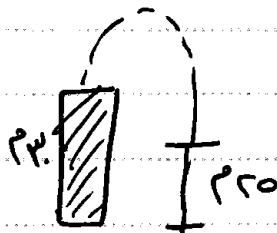
← $n^2 = 4$ ← $n = 2$ ← $v = 5 \times 2^2 = 20$ م/ث

$10 = 5 \times 2^2 = 20$

سؤال ٣

قذف جسم حسب العلاقة فان $v = 5n^2$ من سرعة ارتفاعه ٣ م حسب سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٥ م من سطح الارض

الحل



المسافة المقطوعة = العلاقة $5 = 3 + 2$

$5 = 3 + (5n^2)$

$2 = 3 + 5n^2$

$5n^2 = -1$

$(5n^2) = (5 - 3)$

$5n^2 = 2$

← يتبع

ع (ان) $5 = 3 + (5n^2)$

ع (ع) $2 = 5 - 3 = 2 \times 5n^2 = 10n^2$

سؤال ٥

قذف جسم عن سطح بناية م حسب العلاقة فان $v = 5n^2$ فاذا علمت ان سرعة الجسم لحظة وصوله الارض $v = 20$ م/ث فما هو ارتفاع البناية

الحل

تفرض ان ارتفاع البناية P

المسافة المقطوعة = فان $P + (5n^2)$

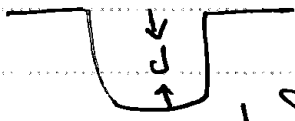
فان $20 = 5n^2 + P$

← يتبع

سؤال ٩

قذف جسم من قمة بيت للارض على
 حسب العلاقة فان $c = c_0 - c_1 t$
 ما اذا كانت سرعة على ارتفاع ٣ م
 صوره سطح الارض كما وي $c = c_0 - c_1 t$
 فما قمة البيت الذي الملهه منه جسم

الحل



فان $c = c_0 - c_1 t$

العلاقة بالنسبة للارض

$f = 3$

بحان $c = c_0 - c_1 t$

$4 = c_0 - c_1 \times 6$

$3 = c_0 - c_1 \times 7$

$3 = c_0 - c_1 \times 7$

$3 = c_0 - c_1 \times 7$

$18 = 3 - 48 = l$

سؤال ٨

قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة
 فان $P = c + c_1 t$
 ابتدائية $c = 0$ ، فاذا كان أقصى
 ارتفاع وصلة الجسم هو ٨ م فاوجه
 صفة كل من c و c_1 ؟

الحل

$c + c_1 t = 0$

$c = -c_1 t$

\therefore فان $c = -c_1 t$

وعند أقصى ارتفاع تكون $c = 0$

$c = -c_1 t$

$\frac{c}{c_1} = -t$

$P = c + c_1 t$

$8 = c + c_1 t$

$8 = c + c_1 t$

$8 = c + c_1 t$

$0 = \frac{c}{c_1} = -t$



المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ③ ص ١٦٧

إذا كانت $f(x) = x^2 - 4x + 10$ هي العلاقة الزمنية لحركة جسم على قطر مستقيم، حيث x الزمن بالسواوي، $f(x)$ المسافة بالامتار، فما تسارع الجسم في اللحظة التي يتعدم فيها السرعة.

الحل

$$f(x) = x^2 - 4x + 10$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$3 = x^2 - 4x + 10$$

$$x^2 - 4x + 10 - 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{أو} \quad x = 5$$

$$f'(1) = 2(1) - 4 = -2$$

$$f'(5) = 2(5) - 4 = 6$$

$$f'(1) = -2 \quad \text{أو} \quad f'(5) = 6$$

تدريب ① ص ١٦٧

إذا كانت $f(x) = x^2 - 4x + 10$ هي العلاقة بالامتار، ما الزمن بالسواوي ما يصل من المسافة والسرعة والسارع عند $x = \frac{\pi}{2}$

الحل

$$f(x) = x^2 - 4x + 10$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f''(x) = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4 = \pi - 4$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4 = \pi - 4$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

تدريب (٣) ص ١٦٨

قذف جسم من سطح برج رأسيًا
إلى اعلى ، حيث ان ارتفاعه الإمتداد
عنه سطح البرج بعد ثابته من
يدي الحركة يعطى بالعلاقة
ف(ن) = ٢٥ن - ٥ن^٢ + ٦٥
ارتفاع البرج اذا كانت سرعة
الجسم لحظة وصوله لارضه تساوي
(-٥٥ م/ث)

الحل

$$v = 25n - 5n^2 + 65$$

$$0 = 25n - 5n^2 + 65$$

$$10 = 50 + 65 = 110$$

$$10 = n$$

$$v = 25(10) - 5(10)^2 + 65 = 10$$

$$= 250 - 500 + 65$$

$$= -185$$

$$\leftarrow 185 = v \text{ ارتفاع البرج}$$



ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (١٦٩)

السؤال الأول

يحرك جسم على خط مستقيم وفوه
العلاقة فان) = $n^2 - 6n + 9 + 3$
حيث n الزمن بالسواني ، f المسافة
المقطوعة بالامتار ، نجد للأمام يأتي
(٢) السرعة الابتدائية للجسم
(٣) تسارع الجسم لحظة سكونه

الحل

(٢) $v = 2n - 6$
ع (١) $a = 2$
ع (٣) $v = 0 \Rightarrow 2n - 6 = 0 \Rightarrow n = 3$
ع (١) $f = 3^2 - 6 \times 3 + 9 + 3 = 0$
ع (٢) $v = 2 \times 3 - 6 = 0$
ع (٣) $a = 2$
ع (٤) $f = 3^2 - 6 \times 3 + 9 + 3 = 0$

السؤال الثاني

يحرك جسم على خط مستقيم وفوه
العلاقة فان) = $3n^2 + 2n$
حيث n الزمن بالسواني ، f المسافة بالامتار
ع (١) تسارع الجسم
ع (٢) سرعة الجسم لحظة سكونه

الحل

ع (١) $a = 6n + 2$
ع (٢) $v = 6n + 2 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$
ع (٣) $f = 3 \times (-\frac{1}{3})^2 + 2 \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$

السؤال الثالث ١٦٩

حذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث كان بعده عن سطح الأرض بعد زمن t هو $f(t) = 19.6t - 4.9t^2$ جدد كلاً مما يأتي.

(٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عند سطح الأرض

$f(t) = 19.6t - 4.9t^2$
 $f'(t) = 19.6 - 9.8t$
 $f'(t) = 0 \Rightarrow 19.6 - 9.8t = 0$
 $9.8t = 19.6 \Rightarrow t = 2$
 $f(2) = 19.6 \times 2 - 4.9 \times 2^2 = 39.2 - 19.6 = 19.6$

السؤال الرابع ١٦٩

حذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد زمن t ما بين $f(t) = 19.6t - 4.9t^2$ جدد كلاً مما يأتي.
 (٢) مجموعة قيم t التي تكون عندها السرعة سالبة

اكتب

$f'(t) = 19.6 - 9.8t < 0$

$19.6 - 9.8t < 0 \Rightarrow 19.6 < 9.8t$

$19.6 < 9.8t \Rightarrow 2 < t$

$$\begin{array}{r} 19.6 < 9.8t \\ \hline 2 < t \end{array}$$

اكتب

يصل الجسم لأقصى ارتفاع $t = 2$

$f(2) = 19.6 \times 2 - 4.9 \times 2^2 = 39.2 - 19.6 = 19.6$

$t = \frac{19.6}{9.8} = 2$

$f(2) = 19.6 \times 2 - 4.9 \times 2^2 = 39.2 - 19.6 = 19.6$

$39.2 - 19.6 = 19.6$

$19.6 =$

(ب) السارع

$f''(t) = -9.8$

(ج) سرعة جسم كره وصوله الأرض

اكتب

$f(t) = 19.6t - 4.9t^2$

الحل

كَيُون جِسْم عِى اِرْتِفَاع h_0

فَا ن $h_0 =$

$$h_0 = 96 - 16n^2$$

$$16n^2 - 96 - h_0 = 0 \text{ بالقسمة على } 16$$

١٦

$$n^2 - 6n - \frac{h_0}{16} = 0$$

$$n = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{h_0}{16})}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + \frac{h_0}{4}}}{2}$$

$$n = 1 \text{ صاعد } n = 5 \text{ هابط}$$

$$h(1) = 96 - 16 = 80$$

$$h(5) = 96 - 400 = -304$$

$$h(0) = 96 - 0 = 96$$

$$96 - 304 = -208$$

السؤال السادس من ١٧

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة

على سطح الأرض بحيث أن بعده عن

نقطة القذف بعد n ثانية من

بدء الحركة يعطى بالعلاقة

$$h(n) = 96 - 16n^2 \text{، } h(0) = 96$$

علماً بأن أقصى ارتفاع وصل

إليه الجسم h_0 م.



يتبع الكل

(ب) أقصى ارتفاع يصل إليه

الجسم عن سطح الأرض

الحل

$$h(n) = 96 - 16n^2$$

$$n = 0$$

$$h(0) = 96 - 0 = 96$$

$$96 - 0 = 96$$

$$96 =$$

(ج) كما زعم الجسم عند أي لحظة

$$h(n) = 96 - 16n^2$$

$$96 - 16n^2 =$$

(د) سرعة الجسم الابتدائية

$$h(n) = 96 - 16n^2$$

$$16n^2 =$$

السؤال الخامس

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من

نقطة على سطح الأرض بحيث يكون

ارتفاعه عن سطح الأرض بالاقدم

بعد n ثانية يعطى بالعلاقة

$$h(n) = 96 - 16n^2$$

بدء الحركة بحيث يكون عى ارتفاع

h_0 م.

الحل

اقصى ارتفاع عندما

ع (ان) = صفر

$$P - 10A = 0 \Rightarrow A = \frac{P}{10}$$

ف $(\frac{P}{10}) = 10$ اقصى ارتفاع

$$10 = (\frac{P}{10})^2 - \frac{P}{10} \times P$$

$$10 = \frac{P^2}{100} - \frac{P^2}{10}$$

$$10 = \frac{P^2}{100} - \frac{10P^2}{100}$$

$$1600 = P^2 \Rightarrow$$

$$40 \pm = P$$

السؤال الرابع

تذف جسم رأسياً إلى اعلى من نقطة على ارتفاع 60 متراً من سطح الارض ونحو العلاقات

ف (ان) = $40 - 5t^2$ حيث

ن الزمن بالتواني ماف المسافة

بالامبار جديلاً عما يأتي

(P) الزمن الذي ليفرقه الجسم حتى

يعود الى نقطة التذف

الحل

ف (ان) =

ع (ان) = $50 - 5t^2$

ف (ان) = $50 - 5(10 - 10) = 0$

ن = 10

(U) الزمن الذي ليفرقه الجسم حتى يعود الى سطح الارض

ف اعلى سطح الارض

ف (ان) = $40 - 5t^2 - 60 + 60 = 0$

بالعنه مع 0

ان - 5 - 10 + 60 = 0

ن - 5 - 10 = 0

$$N = \frac{11 \pm \sqrt{121}}{2} = 10$$

$$N = 10 + 5 = 15$$

(P) اعصى ارتفاع يصل اليه

الجسم عن سطح الارض

ع (ان) = $40 - 5t^2 = 10$

ن = 6

اقصى ارتفاع عن سطح الارض

ف (ان) = $40 - 5(6)^2 - 60 = 0$

6 + 10 - 18 = 0

14 = 0

← يتبع الحل

(د) متى يصبح سرعة جسم $\frac{3}{m} \cdot n$

اكل

ع ان) = ٤ - ١٠ ان = ٣

١٠ ان = ١٠

ن = ١

(هـ) متى يصل ارتفاع جسم

٣٥ متر عند سطح الارض
مدفقه خطأ في الكتاب

ف ان) = ٣٥ متر

٤٠ ن - ٥ ن = ٣٥

٥ ن = ٣٥ + ٤٠ ن

بالقسمة

ن = ٨ + ٧ = ١٥

(ن - ٧) (ن - ١) =

ن = ٧ صايل ن = ١ صايل

السؤال الثامن من ١٧

القط شخص جثا من يكون

من سطح بنايه وقفه العلاقه

فار ان) = ١٦ ن ٦ وحي الكظه

تضربها قذف شخص ثا ن جثا

مكور ثا ابي اسفل بيده ابيده

تقارها ٢ قدم ن من الطبع

نفا وقفه العلاقه

ف ان) = ٢ ن + ١٦ ان

فاذا ارتطم جسم الأول بعد

١ ثا نيب من ارتطام جسم ثا نيب

بالارض نجد ارتفاع بنايه

الحل

اذا اصبح جسم الثا نيب ثا نيب

فان جسم الأول يحيا ن + ١ ثا نيب

← ف ان) + ١ = ف ان)

الحما ن قطعا نفس المسافه مع

اختلاف الزمن

١٦ ان + ١ = ٢ ن + ١٦ ان

بالقسمة مع ٤

٤ ان + ١ = ٥ ن + ٤ ان

٤ ان + ١ = ٥ ن + ٤ ان

١ = ٥ ن + ٤ ان - ٤ ان

← ن = ١

زمن جسم الأول = ١ + ١ = ٢ م

زمن جسم ثا نيب = ١

ارتفاع بنايه

فار ان) = ١٦ (٢) = ٣٢

٣٦ = ١٦ × ٢ = ٣٢ م

او

١ × ١٦ + ١ × ٢ = ١ + ١٦ = ١٧

٣٦ =

السؤال الخامس من ١٧

تجرك هيم على قط مستقيم
 حيث ان سرعته $v = P \sqrt{a - x}$
 حيث x المسافة، a المسافة
 حيث $x = 0$ هيم عند التوقف كسرته

الحل

$v = P \sqrt{a - x}$
 $dx = \frac{1}{P} \frac{v}{\sqrt{a - x}}$

$\frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

بالاقتصاص

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

السؤال التاسع من ١٧

تجرك هيم على قط مستقيم
 حيث ان سرعته $v = P \sqrt{a - x}$
 حيث x المسافة، a المسافة
 حيث $x = 0$ هيم عند التوقف كسرته

الحل

$v = P \sqrt{a - x}$

$\frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

كسرته $\frac{1}{v} = \frac{1}{P \sqrt{a - x}}$

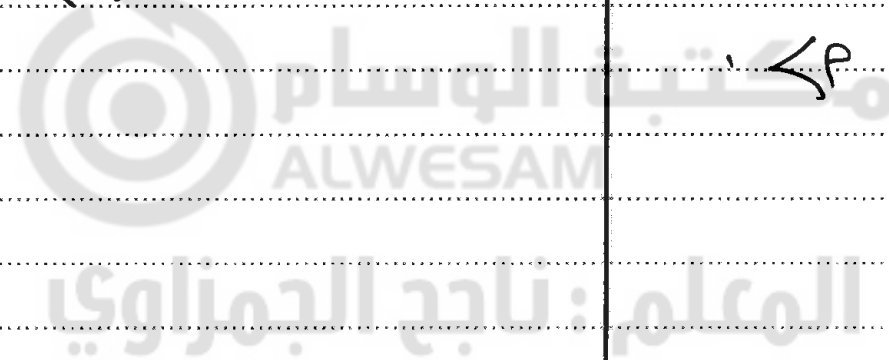
$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$

$\int \frac{1}{v} dx = \frac{1}{P} \int \frac{1}{\sqrt{a - x}}$



أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) مستوى

من نقطة على عمقه (٥٥) صرأ عن سطح الارض قذف جسم رأسياً الى اعلى بحيث ان مسافته المقطوعة بالأضمار بعد ثمانية من قذف الجسم تعظم بالعلاقة

فان) = ٦٠ - ٥ - ن^٢ حد كرتي اكل
الجسم كخفة وصوله مستوى سطح الارض

اكل

عندما يصل الجسم الى سطح الارض يكون فان) = ٥٥
ن^٢ - ٦٠ - ٥ = ٥٥
٥ - ن^٢ + ٦٠ - ٥ = ٥٥
ن^٢ - ١٢ = ١١
(ن - ١) (ن + ١) = ١١
ن = ١١
ن = ١

ع ان) = ١٠ - ٦٠ = ١٠
ع (١) = ١٠ - ٦٠ = ٥٠
ع (١١) = ١١ - ٦٠ = ٥٠

② وزارة (٢٠٠٨) صيفية

يترك جسم على قاط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالأضمار بعد ثمانية من بدء حركته يعطى وفقاً للأقتران فان) = ٢٠ - ٣ - ن^٢ + ١٢

① احب تارح الجسم عندما تنعدم سرعته
② بدالة الرمي التي تكون فيها سرعة الجسم سالبة

اكل

$$\begin{aligned} 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \\ 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \\ 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

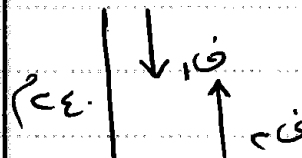
$$\begin{aligned} 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \\ 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \\ 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \\ 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \\ 20 - 3 - n^2 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$20 - 3 - n^2 + 12 = 0$$

③ وزارة (٢٠١٩) شتوية

اسقط جسم من ارتفاع (٤٠) متراً
عن سطح الارض سقوطاً حراً بحيث
ان مسافته التي تقطعها بالامتار
بعد n ثانية هي $F_n = 5n^2$
وفي الوقت نفسه قذف جسم
من سطح الارض رأسياً للأعلى بحيث
ان مسافته التي تقطعها بالامتار
بعد n ثانية هي $F_n = 6n - 5n^2$
جد سرعة كل من الجسمين عندما
يكون لهما الارتفاع نفسه عن
سطح الارض .



اكمل

لهما نفس الارتفاع

$$F_1 + F_2 = 40$$

$$5n^2 + 6n - 5n^2 = 40$$

$$6n = 40 \Rightarrow n = \frac{20}{3}$$

$$F_1 = 5 \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{2000}{9}$$

$$F_2 = 6 \left(\frac{20}{3}\right) - 5 \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}$$

$$F_1 = F_2 = \frac{2000}{9} = \frac{40}{9}$$

$$2000 = 40 \Rightarrow 50 = 10$$

④ وزارة (٢٠١٩) صيفية

اسقط شخص جسماً من نعله على
سطح بنائية سقوطاً حراً بحيث ان
مسافته بالأقدام التي تقطعها بعد n
ثانية هي $F_n = 16n^2$ وفي
اللحظة نفسها رمى شخص ثانياً
جسمًا عمودياً الى أسفل بحيث ان
مسافته بالأقدام التي تقطعها
بعد n ثانية هي
 $F_n = 4n^2 + 16n$ فاذا
ارتطم الجسم الأول بالارض بعد
 n ثانية واحدة عن ارتطام الجسم
الثاني بالارض جد

① سرعة الجسم الثاني كخطه ارتطامه
بالارض

② ارتفاع البناية

اكمل

يفرض زمن الجسم الثاني هو n
فيكون زمن الجسم الأول $n+1$

$$F_{n+1} = 16(n+1)^2 = F_n$$

$$16(n+1)^2 = 16n^2 + 32n + 16$$

$$16n^2 + 32n + 16 = 16n^2 + 32n + 16$$

$$16n^2 + 32n + 16 = 16n^2 + 32n + 16$$

$$16 = 16 \Rightarrow n = 1$$

$$F_{n+1} = 16(n+1)^2 = 16(2)^2 = 64$$

$$F_n = 16n^2 = 16(1)^2 = 16$$

$$31 \text{ ع} = 64 - 27 \times 30 = 30 - 30 = 0$$

$$= - \frac{1}{2} \times 64 \text{ بحسب هاربط}$$

Ⓒ وزارة (٢٠١٠) صيفيه

قذف جسم من سطح بنايه رأسياً إلى اعلى بحيث أن ارتفاعه عنها بعد ثابته من بدء حركه يعطى بالأقتران فان) = 30 - 5 ن
إذا كانت سرعته لحظة وصوله الارض تساوي - 6 م/ث بعد ارتفاع المنيابه .

الحل

ارتفاع المنيابه

$$P + 5 ن - 30 = 0$$

$$8 (ن) = 30 - 10 = 20$$

$$9 = 10 ن$$

← ن = 9 زمن وصوله الارض

يصل الارض فان) = 20
فان) = 9 = 20 - 9 × 20 = 20 - 180 = -160

20 = 20 - 160 = -140

130 = 20

ارتفاع المنيابه

$$14 = 30 ن = 3 \times 30 = 96$$

$$2 \times 30 + 40 = 30 ن + 40 = 60$$

$$104 =$$

$$144 = 3 (ن) \times 16 = 3 (ن) \times 16$$

$$144 = 3 (ن) \times 16 + 2 \times 40 = 3 (ن) \times 16 + 80$$

$$144 = 3 (ن) \times 16$$

Ⓓ وزارة (٢٠١٠) شتويه

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطه على سطح الارض ، فاذا كانت المسافه بالاقدام التي يقطعها جسم بعد ثابته من بدء حركته يعطى بالقانون

فان) = 64 - 16 ن² اثبت ان الجسم يفقد سرعته الابتدائية على ارتفاع 48 قدم

الحل

$$3 (ن) = 64 - 16 ن^2$$

$$3 (ن) = 64 - 16 ن^2$$

وعندها فان) = 48 فان

$$48 = 64 - 16 ن^2$$

$$16 ن^2 = 64 - 48 = 16$$

$$ن^2 = 1$$

$$ن = 1$$

$$ن = 1$$

$$30 = 1 \times 30 - 64 = 30 - 64 = -34$$

$$= \frac{1}{2} \times 64$$

٧) إذا كانت $f = \frac{1}{x^2} - 3x^2 + 5$ هي معادلة الزمنية للحركة، فسيم على خط مستقيم حيث x الزمن بالسواحي، ف: f المسافة بالامتار احب تارخ جسم في اللحظة التي تتعدم سره .

الحل

ع (ان) = f (ان)

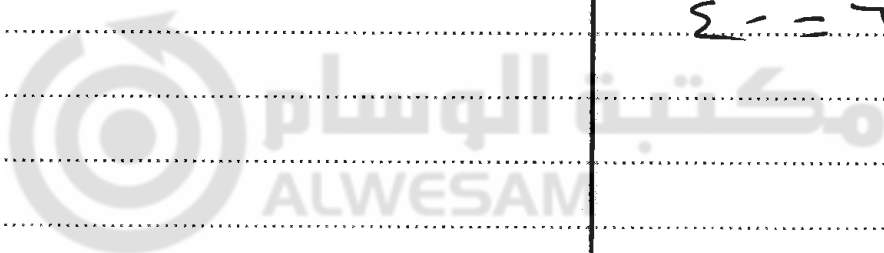
$$= 5 - 3x^2 + \frac{1}{x^2} = (x-1)(5-x)$$

$$x=0 \text{ و } x=1$$

$$f(0) = 5 = f'(0) = 6 - 2x = 6$$

$$f(1) = 5 = f'(1) = 6 - 2x = 4$$

$$f(1) = 5 = f'(1) = 4$$



المعلم: ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١١) صيف

قذف جسم رأسياً الى اعلى من نقطة على سطح الارض بسرعة ابتدائية مقدارها ع، فاذا كان بعده بالامتار عن نقطة القذف بعد ن ثانية من البدء بالحركة يعطى بالأمتار فان) = ع.ن - ٥.ن^٢ اذا علمت ان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم (٤٥) متر، محدد سرعة السقوط الابتدائية ع.

الحل

$$ع = ف = ع - ٥.١٠ = ٠$$

$$\leftarrow ع = ١٠$$

$$ف(ان) = ع.ن - ٥.ن^٢$$

$$= ١٠.١٠ - ٥.١٠^٢$$

$$= ٤٥ = ف(ان)$$

$$٥.ن^٢ = ٤٥ \leftarrow ن = ٣$$

$$٣ = ن \quad ٣ = ٣ - ٥.٣ = ٩$$

$$٣ = ع = ٣ \times ١٠ = ٣٠$$

④ وزارة (٢٠١٢) شوية

قذف جسم رأسياً الى اعلى من نقطة على سطح الارض، فاذا كان بعده بالامتار عن نقطة القذف بعد ن ثانية من البدء بالحركة يعطى بالامتار فان) = ٣.ن - ٥.ن^٢ محدد ارتفاع الجسم عن سطح الارض عندما يفقد نصف سرعته الابتدائية

الحل

$$ع = ف = ٣.١٠ - ٥.١٠^٢$$

$$السرعة الابتدائية = ع = ١٠$$

$$٣.١٠ - ٥.١٠^٢ = ٠$$

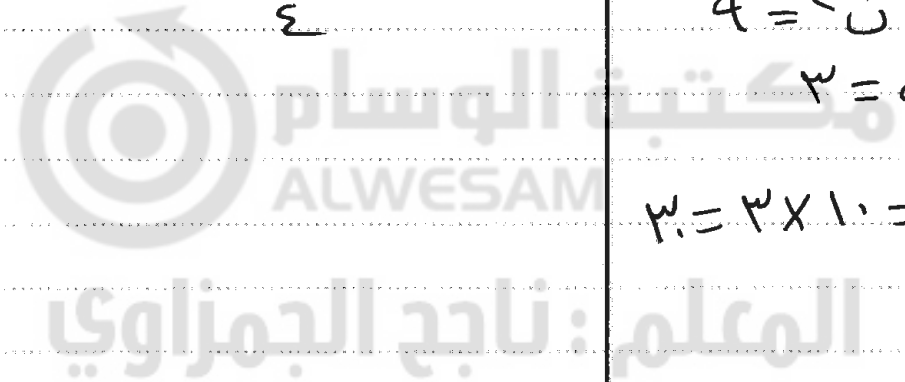
$$٣ = ٥.١٠$$

$$\frac{١}{٥} السرعة الابتدائية = \frac{١}{٥} \times ٣ = ٠.٦$$

$$٣ - ٥.١٠ = ١٠ \leftarrow ن = \frac{٣}{٥}$$

$$ف\left(\frac{٣}{٥}\right) = ٣ \times \frac{٣}{٥} - ٥ \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢$$

$$= \frac{١٢}{٥} =$$



١١) وزارة (٢٠١٣) سوية

يتركب جسم على قطار الاعداد وفقه
العلاقة فان = ١٧ - ٤ ن
صيف ف: كما في الامتلاء ن الزمن
بالنواني بعد كما في التي تقطعها
الجسم عندما تكون سرته ام/ن

الحل

ع = ف = ١٧ - ٤ ن =

ع (ان) = ١

١٧ - ٤ ن = ١ ← ٤ ن = ١٦

← ٤ ن = ١٦

ف (٤) = ١٧ - ٤ × ٤ = ١٤

١٨ = ١٦ - ٣٤ =

١٢) وزارة (٢٠١٣) صيف

تقف شخصان على سطح نايه ، اقلت الشخص
الأول كره من يكون وفقه لعلاقة فان = ٥ ن
وفي اللحظة نفسها في الشخص الثاني كره آخرى
عموديا الى اسفل سرته ابتدائية فصارها
١٥/ن وفقه لعلاقة فان = ١٥ ن + ٥ ن
صيف ف كما في الامتلاء ن الزمن بالنواني
فاذا ارتفعت كره الشخص الأول بعد ثابته
منه ارتفاع كره الشخص الثاني بالارض
هو سرته كره الشخص الثاني لحظة
ارتطامها بالارض

← تتبع اكل

١٠) وزارة (٢٠١٢) صيف

تذف جسم رأسيا للأعلى من قمة
برج ارتفاعه ١٤٤ قدقا عن سطح الارض
فاذا كانت كما في الامتلاء التي
تقطعها الجسم بعد ن ثانية من
بدى حركته عطاها بالعلاقة
ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^٢ حيث كلاً
مما يلي

١) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم
عن سطح الارض

٢) سرته الجسم لحظة اصطداه
بالارض

الحل

١) ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^٢ + ١٤٤ =

عند اقصى ارتفاع ع (ان) =

ع = ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^٢ =

٤ = ن

اقصى ارتفاع

ف (٤) = ١٢٨ × ٤ - ١٦ × ٤^٢ + ١٤٤ =

٤٠٠ =

٢) عند وصوله الارض ف =

١٢٨ ن - ١٦ ن^٢ + ١٤٤ = ٠

١٦ ن^٢ - ١٢٨ ن + ١٤٤ = ٠

(١٦ ن - ١٤٤) (٩ - ن) = ٠

٩ = ن

ع (٩) = ١٢٨ × ٩ - ١٦ × ٩^٢ = ١٦٠ =

$$\frac{3 = 3 - 3 \times 0}{(3)}$$

$$3 = 3 - 3 \times 0$$

$$3 = 3 - 3 = 0$$

$$3 = 3 - 0$$

١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفيه

تجركم عليهم على خط مستقيم وفقه
العلاقه فان $(n) = \frac{(n+2) - 7}{2}$

حيث ن الزمن بالتوالي فبالافه
بالاصار هديتار الجيم
عندما تكون سرعته ٨٩ م/د

الحل

$$3 = \frac{(n+2) - 7}{2} \Rightarrow 6 = n + 2 - 7 \Rightarrow n = 1$$

$$89 = \frac{(n+2) - 7}{2} \Rightarrow 178 = n + 2 - 7 \Rightarrow n = 183$$

$$= 183 + 2 - 7 = 178$$

$$= 178 + 2 - 7 = 173$$

التكريب ن = 3 هي الهد كذور

٨١	٦	١
٨١	٣	٣
٨١	٣	٣
٨١	٣	٣

$$\leftarrow (n-3) (3 + \sqrt{4} + \sqrt{3}) \leftarrow$$

$$n = 3$$

$$3 = \frac{(n+2) - 7}{2} \Rightarrow 6 = n + 2 - 7 \Rightarrow n = 1$$

$$3 = \frac{(n+2) - 7}{2} \Rightarrow 6 = n + 2 - 7 \Rightarrow n = 1$$

الحل

فان $(n) = 0$ ، ف $(n) = 0 + 10 = 10$
الزمن الثاني = ن ، الزمن الاول = ن + 1
فان $(n+1) = 10 + 10 = 20$

$$0 = (n+1) = 10 + 10 = 20$$

$$0 = (n+1) = 10 + 10 = 20$$

$$0 = 0 + 10 + 10 = 20$$

$$0 = 0 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$10 = 10 + 10 = 20$$

$$20 = 10 + 10 = 20$$

١٣) وزارة (٢٠١٤) شتويه

تجركم عليهم على خط مستقيم حيث
ان لافه فالاصار تعطى بالعلاقه
فان $(n) = \frac{n}{8}$ ، حيث ع سرعه

ن الزمن بالتوالي ، فهد كارج الجيم

عندما ن = (٢) ثانيه ، عمدا بان

السرعه عندئذ كاي (٣) م/د

الحل

$$3 = \frac{n}{8} \Rightarrow n = 24$$

$$(8)$$

$$3 = \frac{n}{8} \Rightarrow n = 24$$

$$(8)$$

$$24 = (8) = 8 \times 3$$

$$(8) = 8 \times 3$$

١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفيه

١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

يترك جسم في نقطه معينه من
 العلاقة فان $n = 3 - 2 + 3$
 حيث في المسافه بالاقطار فان الزمن
 المتوالي فاذا كانت سرعته المتوسطه
 في [٢٥٠] كماوي سرعته اللحظيه
 عندما $n = ٥$ حدد قيمة P ؟

قذف جسم رأسياً الى أعلى بسرعة
 ابتدائية مقدارها (١١٢) متر/ث ووفقه
 العلاقة فان $n = 112 - 16n$ حيث
 في المسافه التي تقطعها الجسم بالاقطار
 (ن) الزمن المتوالي جدم ما يأتي
 ١) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

٢) الزمن اللازم ليكون الجسم على
 ارتفاع (٩٦) متراً من نقطة القذف

الحل

الحل

$$g = f = 3 - 2n$$

$$g = 5 = 3 - 2n \Rightarrow n = 1$$

السرعته المتوسطه = السرعته اللحظيه

$$v = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$v = \frac{3 - 2(0) - 3}{1} = 0$$

$$v = \frac{3 - 2(5) - 3}{5} = \frac{-10 - 3}{5} = -\frac{13}{5}$$

$$v = \frac{3 - 2(10) - 3}{10} = \frac{-17}{5}$$

$$P = 10 = 10 - 20 = -10$$

$$P = 10 = 10 - 20 = -10$$

$$P = 10 = 10 - 20 = -10$$

$$g = f = 112 - 16n = 0 \Rightarrow n = 7$$

$$\frac{v}{g} = \frac{112}{32} = n \Rightarrow n = 3.5$$

اقصى ارتفاع $f\left(\frac{v}{g}\right)$

$$196 = \left(\frac{v}{g}\right)^2 \times 16 - \frac{v}{g} \times 112 = 0$$

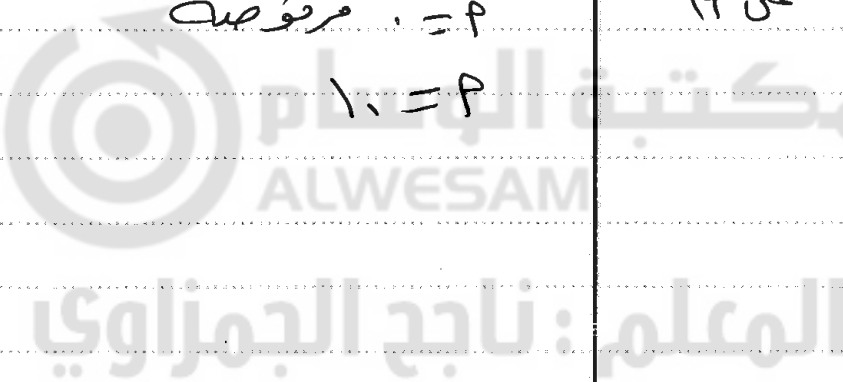
$$96 = f = 112 - 16n \Rightarrow n = 1$$

$$16n - 112 = 96 \Rightarrow 16n = 208 \Rightarrow n = 13$$

$$n^2 - 7n + 6 = 0$$

$$(n-1)(n-6) = 0$$

$$n = 1 \quad n = 6$$



وزارة (٢٠١٧) شتوية

من قمة برج ارتفاعه (٤٨) قدم
 قذف جسم رأسياً لأعلى وفمه
 الأقتران فان (ان) = -١٦ ان + ٣٢ ان
 وفي اللحظة نفسها قذف جسم ثان من
 سطح الارض للأعلى وفمه الأقتران
 فان (ان) = -١٦ ان + ٤ ان
 حيث فان (ان) لم ينفذ بالأقدام
 من الزمن بالتوازي ما هو سرعة
 الابتدائية (ع) للجسم الثاني
 عند ما يتساوى اقصى ارتفاع
 للجسمين عند سطح الارض .

الحل

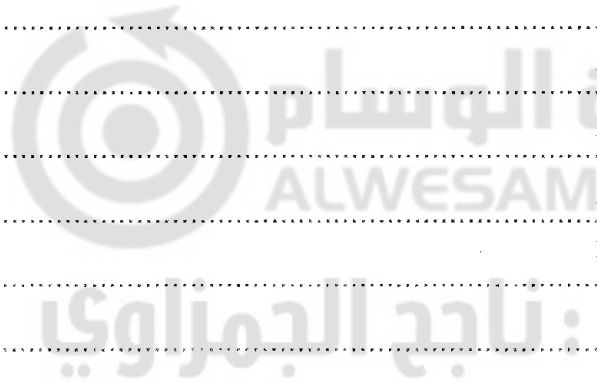
لصل جسم الأول لأقصى ارتفاع
 فان (ان) = (ان) = ٤ ان - ٣٢ ان
 ٣٢ ان - ٣٢ ان = ٤ ان - ٣٢ ان
 اقصى ارتفاع عند سطح الارض
 فان (ان) = -١٦ ان + ٣٢ ان
 الجسم الثاني
 فان (ان) = -١٦ ان + ٤ ان
 ان = $\frac{٤}{٣٢}$ من اقصى ارتفاع
 اقصى ارتفاع

فان (ان) = (ان) = -١٦ ان + ٣٢ ان
 $\frac{٤}{٣٢} + \frac{٤ \times ١٦}{٣٢ \times ٣٢} =$

فان (ان) = -١٦ ان + ٣٢ ان
 $\frac{٤}{٣٢} + \frac{٤}{٣٢} =$
 $\frac{٣}{٣٢} =$

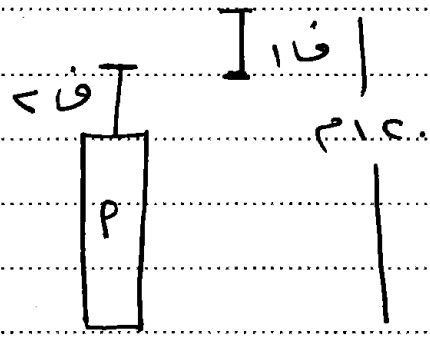
اقصى ارتفاع الأول = اقصى ارتفاع الثاني

$\frac{٣}{٣٢} = \frac{٤}{٣٢}$
 $٣ = ٤$
 $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$
 $٨ \times ٨ = ٦٤$



وزارة (٢٠١٧) صيفيه

استقام جسم من ارتفاع ١٥ م
 عن سطح الارض نحو طأ حراً
 وفيه الاقتران فان $(٥ - ٥) = ٥$
 وفي الكفة نفسها فنذف جسم
 آخر من سطح بنايه للأعلى وفيه
 الاقتران فان $(٥ - ٥) = ٥$
 صيف فان ١٥ بلطفه بالأصا -
 ن الزمن التواني ١٥ ارتفاع
 السياره اذا علمت ان سره ١٥ جسم
 الأول ساوي $(١٥) / م / ث$ في
 الكفة التي يكون للجسمين
 الارتفاع نفسه عند سطح الارض



$١٥ = ١٥ + ٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥ - ٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$
 سره جسم الاول ٥
 $١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$

التعويض

$١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$

وزارة (٢٠١٨) شتويه قديم

تحرك جسم على قطر مستقيم بحيث
 انه يلفه (ف) بالاقطار التي تقطعها
 في زمن قدره (٥) ثايب هو
 فان $١٥ = ١٥ + ٥$
 فان $١٥ = ١٥ + ٥$
 اقطار هو

الحل

فان $(٥) = ١٥ - ١٥$
 فان $(٥) = ١٥ - ١٥$
 فان $(٥) = ١٥ - ١٥$
 $١٥ - ١٥ = ١٥ - ١٥$
 $١٥ - ١٥ = ١٥ - ١٥$

وزارة (٢٠١٨) لشتويه جديد

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطه
 على سطح الارض من العلاقة فان $(٥) = ١٥ - ٥$
 صيف فان ١٥ بالاقطار ن الزمن التواني
 فاذا علمت ان سره ١٥ جسم بعد ١٥ ثايبين
 من حركته ساوي ثلثي سره الابتدائي
 فان قيمة الثابت ١٥ ساوي

$١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$
 $١٥ = ١٥ + ٥$

← لتبع لكل

وزارة (٢٠١٨) صيف

إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ هي علاقة الزمن t بحركة جسم على خط مستقيم حيث x المسافة بالمترا. t الزمن بالسواني فإن المسافة المقطوعة بالمترا عند ما يكون التـ t صفرًا تساوي

الحل

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 3$$

$$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3$$

$$= 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3 = 0 - 0 + 3 \Rightarrow 3 = 3$$

$$\Rightarrow 3 = 0 \quad \text{ج ٥}$$

(٢) ٧ (٥) ٢٢ (ج) ٢٩ (د) ١٨٣

الحل

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 3$$

$$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3$$

$$= 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3 = 0 - 0 + 3 \Rightarrow 3 = 3$$

$$3 = 0 - 0 + 3$$

$$3 = 0 - 0 + 3$$

$$\Rightarrow 3 = 0 \quad \text{ج ٢}$$

وزارة (٢٠١٨) صيف قديم

خذت كرة رأسياً لأعلى من سطح الارض، فإذا كانت المسافة المقطوعة $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ حيث x المسافة بالمترا. t الزمن بالسواني فإن سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالارض تساوي

(٢) ٦٠ (د) ٥/٢٦ (٥) ٣٠ (ج) ٣٠ (ب) ٦٠

الحل

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 3$$

لحظة اصطدامها بالارض

$$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3$$

$$= 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3 = 0 - 0 + 3 \Rightarrow 3 = 3$$

$$3 = 0 - 0 + 3 \Rightarrow 3 = 3$$

$$\Rightarrow 3 = 0 \quad \text{ج ٢}$$



الاستاذ ناجح الجمزاوي

١٧) اذا كانت سرعة جسم تعطي بالعلاقة $v = 5 - \frac{t^2}{2}$ حيث v المانه بالاقطار v كـ م / ث عندما سرعتك 3 م / ث

١٤) ٩٦-١٥ ٢٤) ٢٤-١٥ ٩٦) ١٤

١٧) اذا كانت $v = 3t^2$ حيث v السرعة، فما المسافة او جـ لثـ اـ عـ تـ عندما $v = 3$

١٤) ٣ م / ث (١) ١ م / ث (٢) ٩ م / ث (٣) ١ م / ث (٤)

١٨) قذف جسم رأسياً إلى الأعلى من سطح الأرض صب العلاقة (فان) $h = 12t - 4.9t^2$ حيث h المسافة بالاقطار، t الزمن بالثواني، h الزمرة الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد حتى تبلغ سرعتك نصف السرعة التي قذف بها.

١٤) ٤ (١) ٢ (٢) ٦٤ (٣) ١٢٨ (٤)

١٩) اذا كانت المسافة التي تقطعها جسم تعطي بالعلاقة (فان) $s = 2t^3$ فان تسارع هذا الجسم عندما تقطع 5 م يساوي

١٤) ٧ م / ث (١) ١٠ م / ث (٢)

١٤) ١٠ م / ث (٣) ٢٠ م / ث (٤)

الاجابات

١٤) ٢

١٥) ١

١٤) ٤

١٥) ٣

١٤) ٦

١٥) ٥

١٤) ٨

١٥) ٧

١٤) ١٠

١٥) ٩



مركزية الوسام
ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل تطبيقات فيزيائية

السؤال الأول

السؤال الثاني

Ⓐ يتحرك جسم على خط مستقيم حيث ان سرعته تعطاه بالعلاقة
 $v = (an) = \sqrt{an^2 - 6n + 13}$ اكتب
 سرعة الجسم عندما يتعدى الساعة

Ⓐ يتحرك جسم على خط مستقيم
 فيقطع مسافة f متراً في زمن
 قدرة n ثانية حيث
 $f = (an) = \sqrt{an^2 - 6n + 13}$ اكتب
 سرعة الجسم عندما يتعدى الساعة

ⓑ يتحرك جسم في خط مستقيم
 فيقطع مسافة f متراً في زمن
 n ثانية حيث
 $f = (an) = \sqrt{an^2 - 6n + 13}$
 اوجد الساعة الجسم عندما تكون
 سرعته am / s

ⓑ يتحرك جسم على خط مستقيم
 بحيث ان مسافة المعطاه بالعلاقة
 $f = (an) = \sqrt{an^2 - 6n + 13}$
 اذا كانت السرعة المتوسطة في
 [٥.٠] ساوي $3m / s$ و سرعة
 الجسم بعد t ثواني هي $50m / s$
 حدد الثابتين a, n

Ⓒ ليس جسم حيث ان ليه عن
 نقطة الاصل يعطى بالعلاقة $f = (an) = \sqrt{an^2 - 6n + 13}$
 اوجد الساعة الجسم في اللحظة
 التي يقطع فيها مسافة $4m$

Ⓒ يتحرك جسم في خط مستقيم
 فيقطع مسافة f متراً في زمن
 قدرة n ثانية حيث
 $f = (an) = \sqrt{an^2 - 6n + 13}$
 اوجد السرعة والساعة عند
 $f = 4m$

السؤال الثالث

السؤال الرابع

Ⓐ يتحرك جسم حسب إلاقه فان) وكانت
 ضا ف (ن+٥ن) - ف(ن) =
 ٥ن ← .
 $٣ = ٤ن - ٣ = ٣$
 فاوهد سرعة الجسم عندها ن = ٣

Ⓐ قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة
 فان) = ٥ن - ن + ٢ وكان
 اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم
 هو ٣٥ متر بعد انقابت ٢.

Ⓑ يتحرك جسم حسب إلاقه
 مع ان) = ف (٤ن - ن) بعد
 التاسع بعد ثابتهن عتاً بان
 السرعة عندها ن = ٦ ساوي
 ٣ / ٣

Ⓒ قذفت كرة رأسياً لأعلى من
 قمة برج ارتفاعه ٢١٤ م حسب
 العلاقة فان) = ٦٠ن - ٥ ن
 حيث ف إلفه بالاقطار ن
 الزمن بالنواني هو سرعة الكرة
 لحظة اصطدامها بالأرض

Ⓓ يتحرك جسم حسب إلاقه
 $٤ = ٢ + ف + ١$ بعد التاسع
 لهذا الجسم

Ⓔ اذا كانت السرعة = $\frac{١}{٢}$ حيث
 ف إلفه بالاقطار بعد ن
 ثانية فاوهد التاسع

Ⓕ قذف جسم رأسياً إلى أعلى
 حسب إلاقه فان) = ٦٤ن - ١٦ ن
 فن طبع نهاية ارتفاعها
 ١٠ قدم ماسرة اكتم وهو
 على ارتفاع ١٢ قدم من
 سطح الأرض

السؤال الخامس

Ⓐ اقطع جسم من ارتفاع ١٠٠ م عن سطح الارض سقوطاً حراً حيث ان المسافة المقطوعة بالإمتار بعد t ثانية هي $f(t) = 5t^2$ وفي نفس الوقت قذف جسم من سطح الارض للأعلى حيث ان المسافة التي يقطعها في t ان $f(t) = 50t - 5t^2$ حدد سرعة كلا من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

ⓑ قذف جسم رأسياً الى أعلى من سطح نهاية ارتفاعها ٤٠ م عن سطح الارض فكان ارتفاعه في اي لحظة $f(t) = 4t^2 - 8t$ فإذا كان أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم ٤٠ م حدد

Ⓒ قيمة الثابت P

Ⓓ سرعة الجسم لحظة وصوله الارض

Ⓔ المسافة التي يكون قد قطعها بعد t ثوان من انطلاقه

السؤال السادس

Ⓐ قذف جسم من سطح نهاية رأسياً للأعلى حسب العلاقة $f(t) = 5t^2 - 20t + 100$ حيث f في الامتار، t بالثواني في ارتفاع النبأة اذا علمت ان أقصى ارتفاع وصلت إليه الجسم من سطح الارض ٥٠ م

ⓑ قذف جسم من سطح عمارة ارتفاعها ١٠٠ م حسب العلاقة $f(t) = 5t^2 - 20t + 100$ وكان أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم ١٦٥ م او حدد سرعته الابتدائية

Ⓒ الزمن الذي يحضر ليعود جسم الى الارض

Ⓓ يتحرك جسم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة

$f(t) = 3t^3 - 3t^2 + 3t + 3$ حيث f في المسافة بالامتار، t الزمن بالثواني اثبت ان الجسم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته

السؤال السابع

Ⓐ قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح نائية ارتفاعها (ل) متر وفضاد إلى مستوى سطح النائية بعد t ثواني ثم اصطدم بالأرض بعد ثانية وكان ارتفاع الجسم عن سطح النائية يعطى بالعلاقة
 فان $h = 2t - 5t^2$ أو بعد حصة h و t

Ⓝ يتحرك جسم حسب العلاقة
 فان $v = 3t^2 - 4t + 2$ حتى تكون سرعة الجسم مساوية لساعة

Ⓔ يتحرك جسم بحيث ان $v = 3t^3$
 حسب الساعة عند ما تكون السرعة = 18 م / ث



حلول ورقة عمل تطبيقات فيزيائية

السؤال الأول

$$P \quad \frac{c - n}{13 + n} = \frac{c - n}{13 + n}$$

$$c - n = 13 + n$$

$$c - n = 13 + n \rightarrow c = 13 + 2n$$

$$c = 13 + 2n = 13 + 2 \times 3 = 19$$

$$Q \quad \frac{1 + n}{14 - n} = \frac{1 + n}{14 - n}$$

$$1 + n = 14 - n$$

$$2n = 13 \rightarrow n = 6.5$$

$$c = 13 + 2 \times 6.5 = 26$$

$$R \quad \frac{14 - n}{14 - n} = \frac{14 - n}{14 - n}$$

$$14 - n = 14 - n$$

$$14 - n = 14 - n \rightarrow n = 14$$

$$c = 14 + 2 \times 14 = 42$$

$$S \quad \frac{10 + n}{17 - n} = \frac{10 + n}{17 - n}$$

$$10 + n = 17 - n$$

$$2n = 7 \rightarrow n = 3.5$$

$$c = 17 + 2 \times 3.5 = 24$$

$$\begin{array}{r} 27 - 24 = 3 \\ 37 - 24 = 13 \end{array}$$

$$(18 + n)(13 - n)$$

$$= (18 + n)(13 - n)$$

$$c = 18 + n$$

$$\frac{18}{2} = n$$

$$E \quad \frac{44 + n}{14 - n} = \frac{44 + n}{14 - n}$$

$$44 + n = 14 - n$$

$$58 = 2n \rightarrow n = 29$$

$$c = 14 + 2 \times 29 = 72$$

$$F \quad \frac{44 + n}{14 - n} = \frac{44 + n}{14 - n}$$

$$44 + n = 14 - n$$

السؤال الثاني

$$P \quad \frac{3 - n}{3 + n} = \frac{3 - n}{3 + n}$$

بالقسمة على 3

$$3 - n = 3 + n$$

$$-2n = 0 \rightarrow n = 0$$

$$\frac{3 - n}{3 + n} = \frac{3 - n}{3 + n}$$

$$Q \quad \frac{c - n}{c} = \frac{c - n}{c}$$

$$c - n = c$$

$$-n = 0 \rightarrow n = 0$$

$$R \quad \frac{10 + n}{17 - n} = \frac{10 + n}{17 - n}$$

$$10 + n = 17 - n$$

$$2n = 7 \rightarrow n = 3.5$$

$$c = 17 + 2 \times 3.5 = 24$$

$$c - n = 24 - 3.5 = 20.5$$

السؤال الثاني

Ⓐ) $f(x) = x$

$f'(x) = 1$

$f'(2) = 1$

$T(x) = 17 - 4x$ معطيان

$T'(x) = -4$

Ⓑ) $f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(2) = -\frac{1}{4}$

$f'(3) = -\frac{1}{9}$

أو $f'(x) = -x^{-2}$
 $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

السؤال الثالث

Ⓐ) $f(x) = (x+5) - f(x) = f'(x)$

$f'(x) = 1$

$f'(3) = 1$

$f'(4) = 1$

Ⓑ) $f(x) = 8 - x$

$f'(x) = -1$

$f'(8) = -1$

$f'(17) = -1$

Ⓒ) $f(x) = (x-3)^2$

$f'(x) = 2(x-3)$

$f'(6) = 2(6-3) = 6$

$f'(7) = 2(7-3) = 8$

$f'(3) = 2(3-3) = 0$

$f'(1) = 2(1-3) = -4$

Ⓓ) $f(x) = 6x - 5x^2 + 14$

$f'(x) = 6 - 10x$

$f'(8) = 6 - 80 = -74$

$f'(14) = 6 - 140 = -134$

$f'(1) = 6 - 10 = -4$

$f'(10) = 6 - 100 = -94$

Ⓔ) $f(x) = 6x - 14x^2$

Ⓕ) $f(x) = 17 - 4x^2$

$f'(x) = -8x$

$f'(5) = -40$

$f'(1) = -8$

$f'(3) = -24$

$f'(17) = -136$

$f'(7) = -56$

Ⓖ) $f(x) = \sqrt{x+1}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

السؤال الخامس

(P) $f + f' = 1$

$1 = f + f' = 0 + f' = f'$

$f' = 1 \Rightarrow f = x + c$

$1 = f = x + c \Rightarrow c = 1 - x$

$f = x + 1 - x = 1$

$f(x) = x^2 - 4x - 5 = 0$

$f(x) = (x-5)(x+1) = 0$

$x = 5$

$f(5) = 0$

$f(5) = 5^2 - 4 \times 5 - 5 = 0$

$f(5) = 25 - 20 - 5 = 0$

$f(5) = 0$

$5 = 5 - 17 = -12$

(Q)

$f(4) = 16 \times 8 - 4 \times 32 = 0$

$128 - 128 = 0$

$0 = 0$

السؤال السادس

(P)

$f(x) = x^2 - 1 = 0$

$x = 1$

$f(1) = 0$

$0 = 1^2 - 1 = 0$

$0 = 1 + 1 - 2 = 0$

$0 = 1 + 1$

$1 = 1$

$f(x) = x^2 - 16 = 0$

$x = \frac{16}{16} = 1$

$f(1) = 1^2 - \left(\frac{16}{16}\right) \times 16 = 1 - 16 = -15$

$-15 = 1 - \frac{16}{16} \times 16 = 1 - 16 = -15$

$-15 = 1 - \frac{16}{16} = 1 - 1 = 0$

$-15 = 1 - \frac{16}{16} = 1 - 1 = 0$

$\frac{16}{16} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

$1 = 1$

(Q) $f(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$

$f(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = 2$

١٤

$$e^{an} = e^{an} - e^{an} = 0$$

$$n(n) = n$$

$$e^{an} = e^{an}$$

$$e^{an} = e^{an} - e^{an} = 0$$

$$e^{an} = e^{an} - e^{an} = 0$$

بالنسبة لـ e^{an}

$$e^{an} = e^{an} - e^{an} = 0$$

$$e^{an} = e^{an} - e^{an} = 0$$

$$n = n$$

١٥

$$n = n$$

$$n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

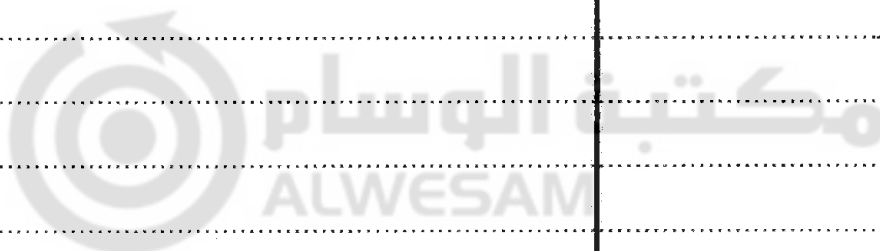
$$n = n$$

$$n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

$$n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

$$n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

$$n = n$$



الدرس الثالث

المعدلات المرتبطة بالزمن

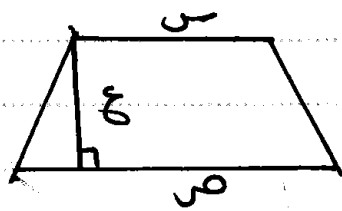
قوانين هامة جداً

① مساحة المربع = الضلع \times الضلع
محيط المربع = $4 \times$ طول الضلع

② مساحة الدائرة = $\pi \times$ نصف
محيط الدائرة = $2\pi \times$ نصف

③ مساحة المستطيل = الطول \times العرض
محيط المستطيل = $2 \times$ (الطول + العرض)

④ مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2} \times$ (مجموع القاعدتين) \times الارتفاع



$\frac{1}{2} \times (س + ص) \times ع =$

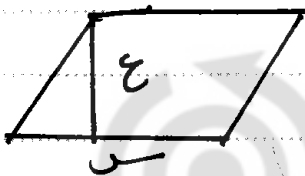
⑤ مساحة مثلث =

$\frac{1}{2} \times$ القاعدة \times الارتفاع

الارتفاع : العمود المنزل من رأس الزاوية على القاعدة

⑥ مساحة متوازي الاضلاع =

القاعدة \times الارتفاع



$س \times ع =$

⑦ مساحة مثلث اذا علم ضلعين

وزاوية محصورة بينهما

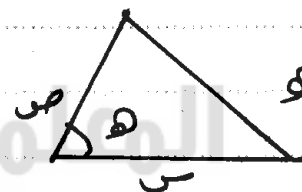
مساحة مثلث

$= \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب الضلعين \times جيب الزاوية

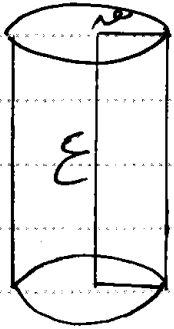
⑧ مساحة المربع =



$\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب القطرين



$= \frac{1}{2} \times س \times ع$



(١٢)

حجم الاسطوانة

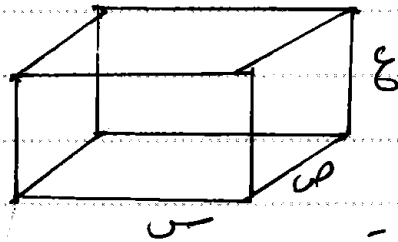
$$= \text{مساحة لقاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \pi \text{ نصف } ع^2$$

(٩) حجم متوازي المستطيلات

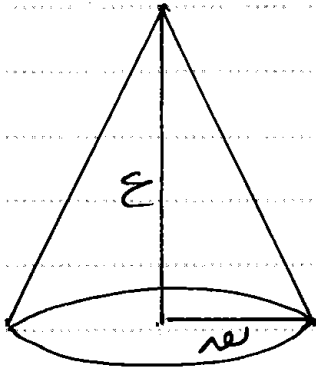
$$ع = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$ع = س \times ص \times ع$$



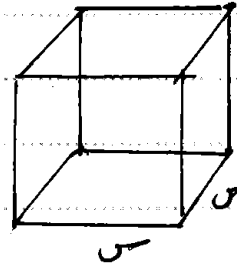
مساحة الاسطوانة =
المساحة الجائيت + مساحة لقاعدتين
 $= \pi \text{ نصف } ع + \pi \text{ نصف } ع^2$

(١٣)



المساحة الكلية =
المساحة الجائيت + مساحة لقاعدتين
= محيط لقاعدة \times الارتفاع + مساحة لقاعدتين
 $= \pi (س + ص) \times ع + \pi \text{ نصف } س^2 + \pi \text{ نصف } ص^2$

حجم المخروط
 $= \frac{1}{3} \times \text{مساحة لقاعدة} \times \text{الارتفاع}$
 $= \frac{1}{3} \pi \text{ نصف } ع^2$



(١٠) حجم المكعب

$$ع = (\text{الضلع})^3$$

مساحة المكعب

$$= 6 \times \text{مساحة احد الاوجه}$$

$$= 6 \times س^2$$

$$= 6س^2$$

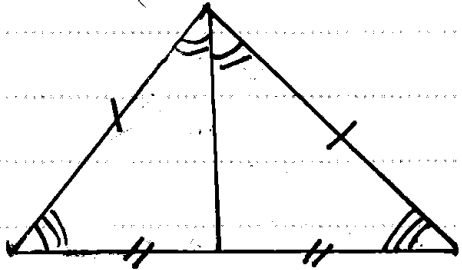
(١١) حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi \text{ نصف } ع^3$

مساحة سطح الكرة = $4\pi \text{ نصف } ع^2$

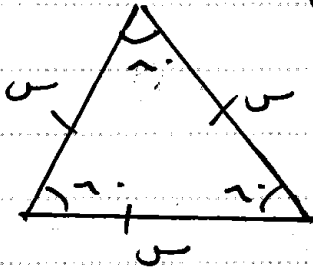


خواص المثلثات

① في مثلث متساوي الساقين
العمود النازل من رأس الزاوية
على القاعدة ينصفها ويكون عمودي
عليها وايضا ينصف زاوية الرأس
وزاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين
متساويتين



② زوايا مثلث متساوي الاضلاع
متساوية = 60°



③ تصنيف المثلثات اربعة حالات

- ① ثلاثة اضلاع
- ② ضلعين وزاوية محصورة بينهما
- ③ ضلعين وزاوية قاعه
- ④ زاويتيه وضلع

رقوانين هاوية

① المسافة بين نقطتين
A(1, 3), B(4, 5) و C(5, 7)

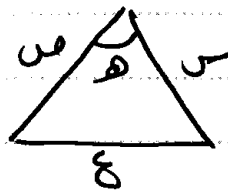
$$f = \sqrt{(5-1)^2 + (7-3)^2}$$

② نظرية فيثاغورس

مربع طول = مجموع مربعي اضلعين الاخرين

$$f^2 = s^2 + v^2$$

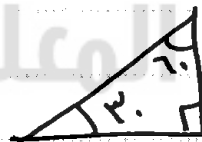
③ قانون جيب التمام

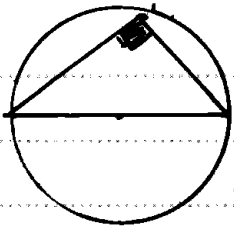


$$e^2 = s^2 + v^2 - 2sv \cos h$$

④ في مثلث قائم الزاوية

الثلثتين متساويتين
كون اضلع المتقابل للزاوية
(30°) = 1/2 طول النور



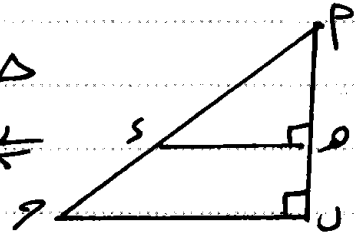


⑤ الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة = 90°

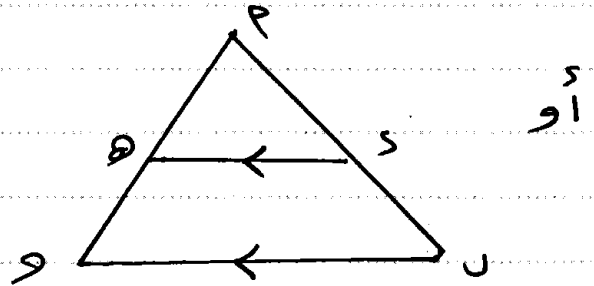
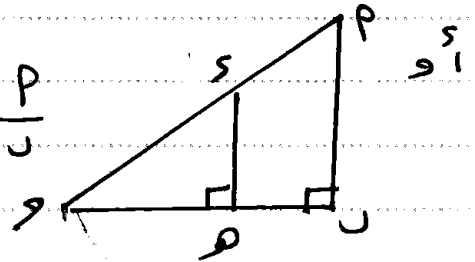
④ تشابه المثلثان اذا وجدنا زاويتان فصاويتان وينتج من التشابه نسبة وتناسب

س هـ پ د هـ س هـ پ د

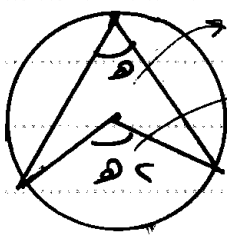
$$\frac{س هـ}{س هـ} = \frac{س هـ}{س هـ}$$



$$\frac{س هـ}{س هـ} = \frac{س هـ}{س هـ}$$

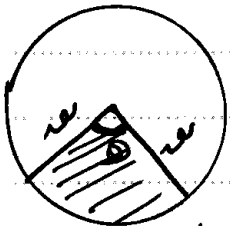


$$\frac{س هـ}{س هـ} = \frac{س هـ}{س هـ}$$



③ الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس

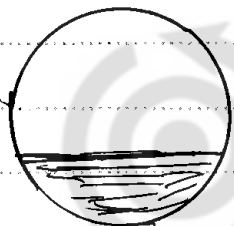
④ القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محصور بين نصف قطرين وقوس



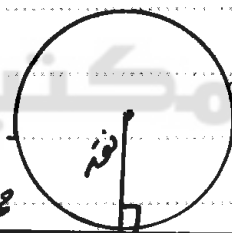
مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} \times \text{نصفه} \times \text{هـ}$
هـ : زاوية مركزية بالتقدير الدائري

هـ القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محصور بين نصف قطر وقوس

الدائرة



مساحة لقطعه الدائري = $\frac{1}{2} \times \text{نصفه} \times (\text{هـ} - \text{هـ})$
مساحة دائرية
طول قوس الدائرة (ل)
= نصف هـ



① نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس

خطوات حل المسألة

مفهوم المعدلات المرتبطة بالزمن

١- قراءة المسألة جيداً و الرسم
التوضيحي للسؤال .

هي اقترانات لها علاقة مع الزمن
وتسمى هذه الاقترانات اقترانات
زمنية مثل السرعة ، المسافة
التابع ، زيادة أو نقصان حجم الجسم

٢- تحديد التوابيع و المتغيرات
وفرض الرموز للمتغيرات
س ، ص ، هـ ، ف ، ع

لذلك عندما نشترط هذه الاقترانات
فإننا نشترطها ذهنياً بالنسبة
للزمن .

٣- تحويل السؤال من نص كلامي
إلى رموز حيث أن معدل أو
السرعة تعني المشتقة بالنسبة
للزمن .

مشتقة ع هي $\frac{dc}{dt}$ معدل تغير ع
بالنسبة للزمن

٤- إذا كان المعدل الزمني يزداد
بازدياد الزمن فإن قيمته موجبه

مشتقة ف هي $c \times \frac{df}{dt}$

وإذا كان المعدل الزمني يتناقص
بازدياد الزمن فإن قيمته سالبه

$s \times \frac{ds}{dt} + v \times \frac{dv}{dt}$

مشتقة هـ هي $\frac{dh}{dt} \times h$

٥- تكوين علاقة تحتوي على المطلوب
وتربط هذه العلاقة بالمعطيات
وعند الحاجة نستبدل متغير بـ لالة
آخر من خلال علاقة هـ

معدل تغير ص بالنسبة للزمن = $\frac{dv}{dt}$

معدل تغير هـ بالنسبة للزمن = $\frac{dh}{dt}$

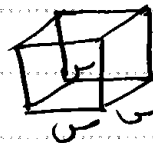
٦- اشتقاق متغيرات العلاقة
ذهنياً بالنسبة للزمن

٧- نعوض المعطيات السؤال
في المشتقة ونجد المطلوب

سؤال ①

مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه
بمعدل ١.٠٠ سم/س، بعد ٦ س بعد
تناقص كل من حجمة ومساحته
الكلية عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

الحل



نقصد طول ضلع المكعب s س

$s =$

$\frac{ds}{dt} =$ معدل تغير ضلعه يتناقص = -1.00

حجم المكعب $V = s^3$

$\frac{dV}{dt} =$ ؟؟ المطلوب إيجادها عندما $s = 10$

$V = s^3 \rightarrow \frac{dV}{dt} = 3s^2 \frac{ds}{dt}$
استفاده ضمنياً بالنسبة للزمن

$\frac{dV}{dt} = 3 \times 10^2 \times (-1) = -300$
ص = ١٠

• مساحته الكلية = $6s^2$

$A = 6s^2$

$\frac{dA}{dt} = 12s \frac{ds}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 12 \times 10 \times (-1) = -120$

ص = ١٠

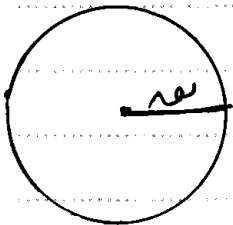
سؤال ②

بالون كروي يتكبر منه الهواء
بمعدل ٣ سم^٣/دقيقة اوجد

① معدل نقصان نصف قطر البالون
في اللحظة التي يكون فيها نصف
القطر ١٠ سم.

② معدل التغير في مساحة
سطح البالون في تلك اللحظة

الحل



حجم البالون $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 3$

نصف قطر البالون $r = 10$

① المطلوب $\frac{dr}{dt}$ عندما $r = 10$

نصف = ١٠

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = 3 = 4\pi \times 10^2 \times \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{400\pi}$

ص = $\frac{3}{400\pi}$

② مساحة سطح البالون $A = 4\pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

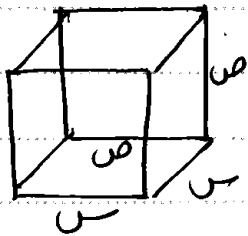
$\frac{dA}{dt} = 8\pi \times 10 \times \frac{3}{400\pi} = \frac{6}{5}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{6}{5}$

نصف = ١٠

مسألة ٤

صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ثلاثة أضعاف طول ضلع القاعدة فإذا كان طول ضلع القاعدة يساوي $\frac{1}{2}$ سم، اوجد معدل التغير في الحجم ومعدل التغير في مساحة سطح التلية للصندوق عندما يكون طول الضلع ٣٨ سم.



الحل

$ص = 3س$

$\frac{1}{2} = \frac{ص}{3س}$

$س = ٨ =$ المطلوب $\frac{ص}{3س}$ ، مساحة السطح

التكبير $\frac{ص}{3س}$ ، التكبير

$ع =$ الطول \times العرض \times الارتفاع

$ص \times س \times س = ص \times س \times س =$

$= ص \times س \times س = ٣س^٣$

$\frac{دص}{دس} = \frac{د(٣س^٣)}{دس} = ٩س^٢ \times \frac{ص}{س}$

$\frac{1}{2} \times ٨ \times ٨ \times ٩ = \frac{1}{2} \times ٨ \times ٩ = ١٤٤$

مساحة التلية = $ص + ٤س^٢$

$= ٣س + ٤س^٢$

$٣ = ٣س + ٤س^٢ = ١٤س$

$\frac{د(٣س + ٤س^٢)}{دس} = \frac{٣ + ٨س}{س}$

$٠٦ = \frac{٣ + ٨س}{س} = ٠٦$

مسألة ٥

شركة ماء رآكه ألقى فيها حجر فاهدن موجان دائرية ، وفي لحظة ما كانت مسافة الهدى لموجان يساوي $\frac{٣}{٤}$ م ، أو بعد معدل التغير في محيط الموجه اذا كان نصف القطر عندئذ هو $\sqrt{٥}$ م

الحل

مسافة الموجه

$\frac{٣}{٤} = \frac{ر}{\sqrt{٥}}$

ل : محيط الموجه

المطلوب $\frac{د(ر)}{دس}$ عندما $ر = \sqrt{٥}$

محيط الموجه $ل = ٢\pi ر$

$\frac{د(ل)}{دس} = \frac{د(٢\pi ر)}{دس} = ٢\pi \frac{د(ر)}{دس}$

بجد $\frac{د(ر)}{دس}$ من معرته $\frac{٣}{٤}$

$\pi = \frac{د(ر)}{دس}$

$\frac{د(ل)}{دس} = \frac{د(٢\pi ر)}{دس} = \frac{٢\pi}{دس}$

$\frac{د(ل)}{دس} = \frac{د(٢\pi ر)}{دس} = \frac{٢\pi}{دس}$

$\frac{٣}{٤} = \frac{٢\pi}{دس} = \frac{د(ل)}{دس}$

بالنظر الى

$\frac{٣}{٤} \times \frac{د(ل)}{دس} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٢\pi}{دس} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٢\pi}{دس}$

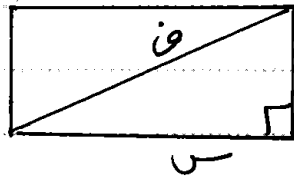
سؤال ٥

صفتية هديد فسطيلة الشكل
 حُفنت بحيث تمدد فكان طولها
 بزواد معدل ٣ كم/ساعة وعرضها
 بزواد معدل ٤ كم/ساعة وفي لحظة
 ما كان طولها ٦ كم وعرضها ٤ كم

هد

- ١ معدل التغير في محيطها
- ٢ معدل التغير في مساحتها
- ٣ معدل التغير في قطرهما في تلك اللحظة

الحل



$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ص} = ١ \text{ كم/س}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ص} = ٣ \text{ كم/س}$$

١ محيطها = $ص + س = م$

$$\frac{ص}{س} \times س + \frac{ص}{س} \times س = \frac{م}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = ٤ \times س + ٣ \times س =$$

٢ ساعة = $م = س \times س$

$$\frac{ص}{س} \times س + \frac{ص}{س} \times س = \frac{م}{س}$$

$$٣ \times ٤ + ٤ \times ٦ =$$

$$\frac{ص}{س} = ٣٦ + ٣٤ =$$

٣) ف: قطر $ف = \frac{ص}{س} = ؟$

نترجم نظرية فيثاغورس
 $ف^2 = س^2 + ص^2$ ننتقل

$$\frac{ص}{س} \times \frac{ص}{س} = \frac{ص^2}{س^2} + \frac{ص^2}{س^2}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س}$$

$$\sqrt{ص^2 + س^2}$$

$$\frac{٤ \times ٤ + ٣ \times ٦}{س} = \frac{ف}{س}$$

$$\sqrt{١٦ + ٣٦} = ١٦ = س$$

$$١٤ = ص$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤ + ٤٨}{\sqrt{١٤٤ + ٥٧٦}}$$

$$\frac{٣}{١٠} = \frac{٣٦}{١٠} = \frac{ص}{س} =$$

سؤال ٦

٣ نسير نقطة على حافتي $ص = س = ٤$

حيث ان $\frac{ص}{س} = س$ او $\frac{ص}{س} = س$
 عند النقطة (٤, ٤)

الحل

$$ص = س = ٤$$

$$\frac{ص}{س} \times س = \frac{ص}{س} \times س$$

$$\frac{ص}{س} \times س = س \times س$$

$$\frac{ص}{س} \times ٤ \times ٦ = س \times ٤ \times ٤$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٦} = \frac{ص}{س}$$

سؤال ٧

تأخره نقطة على S و U = 117
 هذا امران التناقص في اللحظة التي
 يكون فيها معدل التغير في الامداتي
 السني 3 كم/س، ومعدل التغير في
 الامداتي اصادي 2 كم/س

الحل

$$2 = \frac{ds}{dt} \quad 3 = \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{ds}{dt} \times c + \frac{du}{dt} \times c$$

$$= c \times 2 + 3 \times c$$

$$c = 4 + 3c \Rightarrow -2c = 4 \Rightarrow c = -2$$

$$\leftarrow c = \frac{3}{2} \text{ من التناقص في}$$

$$S + U = 117$$

$$S + \left(\frac{3}{2}S\right) = 117$$

$$S + \frac{3}{2}S = 117 \rightarrow 4S = 117$$

$$4S = 117 \Rightarrow S = \frac{117}{4} = 29.25$$

$$13S = 117 \Rightarrow S = \frac{117}{13} = 9$$

$$S = 9$$

$$S = 9 \rightarrow c = 7 - \frac{3}{2} \times 9 = -9.5$$

النقطة (9-67)

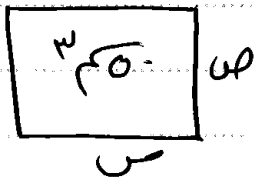
$$S = 7 - \frac{3}{2} \times 9 = -9.5$$

(-9.5)

سؤال ٨

في ظل صاحبة 50 كم إذا
 زاد طول الضلعين متوازيين
 فيه معدل 2 كم/س، وتناقص
 طول الضلعين الآخرين بحيث
 تظل صاحبة ثابتة، فجد معدل
 التغير في اللحظة التي يتوقف
 فيها المحيط عن التناقص.

الحل



$$2 = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{محيط يتوقف} = L = c + 50$$

$$3 = S \times 2 = 50$$

$$\leftarrow c = \frac{50}{2} = 25 \text{ نحوها في } L$$

$$L = c + 50 = \frac{50}{2} \times c + 50 = \frac{110}{2} + 50$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dc}{dt} \times \frac{110}{2} = \frac{ds}{dt} \times c$$

عندما يتوقف المحيط عن التناقص فان
 المحيط ل يصبح ثابتا $\leftarrow \frac{dL}{dt} = 0$

$$0 = \frac{ds}{dt} \times c - \frac{dc}{dt} \times \frac{110}{2}$$

$$0 = c \times \frac{110}{2} - c \times c =$$

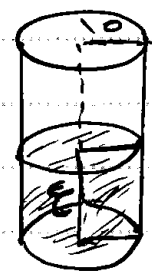
$$\frac{c}{2} = c \Rightarrow c = 0$$

$$\leftarrow c = 0 \Rightarrow S = 0.7$$

$$c = \frac{50}{2} = 25$$

مسألة 9

خزان ماء اسطوانتي الشكل قطر خالديه 3 م يخرج منه الماء بمعدل 2 م³/د مع سرعة انخفاض سطح الماء فيه



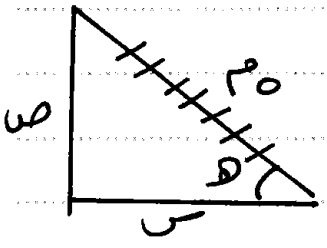
الحل
حجم الماء = $\pi r^2 h$
القطر = 3 ← نصفه = 1.5

$\pi (1.5)^2 \times 2 = \pi r^2 \times 2$
 $4.5\pi = 2\pi r^2$
 $2.25 = r^2$
 $r = 1.5$

5 معدل تغير الزاوية المحصورة بين اسفل السلم والارض في تلك اللحظة

3 معدل تغير مسافة المثلث المحصور بين السلم والارض والجدار

الحل



5
المعدل = $\frac{dx}{dt} = ?$
المعدل = $\frac{dy}{dt} = 3$

حسب نظرية فيثاغورس $5^2 = 3^2 + x^2$
 $25 = 9 + x^2$
 $x^2 = 16$
 $x = 4$
عند ما $x = 4$ فان $3 = \frac{dy}{dt}$
 $3 = \frac{dy}{dt}$
 $3 = \frac{dy}{dt}$

3
المعدل = $\frac{dy}{dt} = ?$

حسب ما $\frac{dy}{dt} = 3$ ← $\frac{dx}{dt} = ?$

عند ما $x = 4$ $\frac{dy}{dt} = 3$ ← $\frac{dx}{dt} = ?$

3
المعدل = $\frac{dy}{dt} = ?$

3 مسافة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$3 = \frac{1}{2} \times 4 \times h$

$3 = \frac{1}{2} \times 4 \times h$

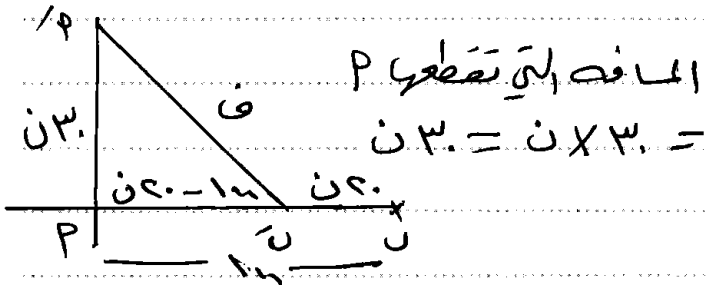
$3 = \frac{1}{2} \times 4 \times h$

مسألة 10

يرتكز سلم طوله 5 م على حائط عمودي وارسله على ارض افقية بدأ السلم الانزلاق بسرعة 3 م/د وفي لحظة معينة كان بعد اسفل السلم 3 م عن الحائط او جد

1 سرعة صيوط اعلى السلم في تلك اللحظة

حل آخر بدلالة الزمن (ن)



المسافة التي تقطعها P
 $3n = 3 \times n = 3n$

المسافة التي تقطعها U
 $100 - 10n = 100 - 10n$

$$F = \sqrt{(3n)^2 + (100 - 10n)^2}$$

$$\frac{dF}{dn} = \frac{3n \times 3 + (100 - 10n) \times (-10)}{\sqrt{9n^2 + (100 - 10n)^2}}$$

$$\frac{dF}{dn} = \frac{9n - 10(100 - 10n)}{\sqrt{9n^2 + (100 - 10n)^2}}$$

$$\frac{dF}{dn} = \frac{9n - 1000 + 100n}{\sqrt{9n^2 + (100 - 10n)^2}}$$

$$\frac{dF}{dn} = \frac{109n - 1000}{\sqrt{9n^2 + (100 - 10n)^2}}$$

$$0 = \frac{109n - 1000}{\sqrt{9n^2 + (100 - 10n)^2}}$$

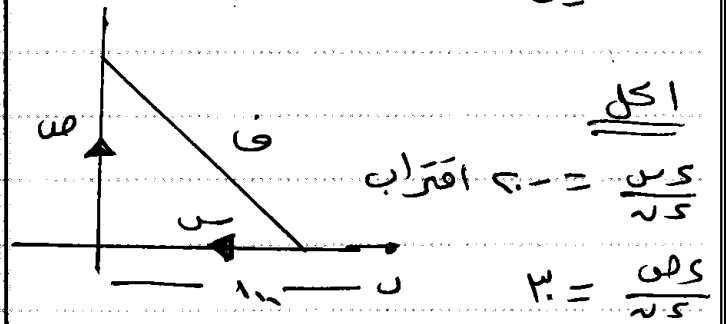
$$109n - 1000 = 0$$

$$109n = 1000$$

$$n = \frac{1000}{109}$$

مسألة 11

ضئتان اليد بينهما 100 ميل
 تقع غزوي N وتسير شمالاً
 بسرعة 3 ميل/س، وون تسيير
 غرباً بسرعة 4 ميل/س، بعد فصل
 تغير اليد بين الساعتين هو مرور
 ساعتين.



الكل

$$\frac{dD}{dt} = \frac{3t \times 3 + (100 - 4t) \times (-4)}{\sqrt{9t^2 + (100 - 4t)^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{9t - 4(100 - 4t)}{\sqrt{9t^2 + (100 - 4t)^2}}$$

$$0 = \frac{9t - 400 + 16t}{\sqrt{9t^2 + (100 - 4t)^2}}$$

$$0 = \frac{25t - 400}{\sqrt{9t^2 + (100 - 4t)^2}}$$

بعد ساعتين المسافة التي تقطعها
 $60 = 3 \times 20 = 60$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

$$60 = 3 \times 20 = 60$$

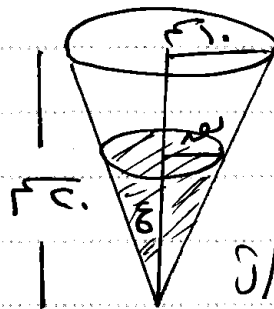
$$\frac{60}{20} = \frac{60}{20} = \frac{60}{20}$$

سؤال ١٦

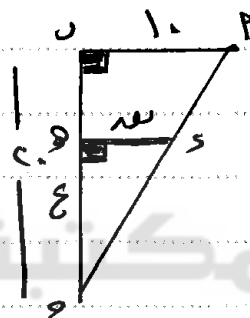
مخروط دائري قائم رأسه للأعلى
ارتفاعه ٨ سم، ونصف قطره ٣ سم.
ينكب فيه الماء من الأعلى بعد
٨ سم / ٣، ويخرج منه الماء بعد
٥ سم / ٣، وفي لحظة ما كان ارتفاع
الماء فيه ٦ سم، اوجد ما يلي

- ١) سرعة ارتفاع الماء في المخروط في تلك اللحظة
- ٢) معدل التغير في نصف قطر سطح الماء في تلك اللحظة
- ٣) معدل التغير في مساحة سطح الماء في تلك اللحظة.

الحل



١) حجم الماء في المخروط
 $\frac{25}{\sqrt{5}} = 8 - 8 = 0$



٢) ارتفاع الماء

$$\frac{8}{\sqrt{5}} = 6 = 8$$

من تشابه ΔP و ΔS

$$\frac{h}{8} = \frac{r}{3} \rightarrow r = \frac{3h}{8}$$

$$\boxed{h = \frac{1}{3}r}$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 h$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 h$$

$$3 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 h$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\frac{1}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi r^2} = \frac{25}{\sqrt{5}}$$

$$\text{③} \quad \frac{1}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi r^2} = \frac{25}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi r^2}$$

$$\frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2} \times \frac{1}{\pi r^2} =$$

③) مساحة سطح الماء

$$S = \pi r^2 h$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = \pi r^2 h$$

$$25 = \pi r^2 h$$

$$3 = \pi r^2 h$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\pi r^2} \times 3 \times \pi r^2 h = \frac{3}{\pi r^2} h$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = \text{صفر} - \frac{1}{\pi 4} (6 - 4) \times \frac{25}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} \times (16 - 4) \frac{1}{\pi 4} = 3$$

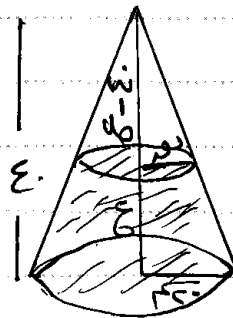
$$3 = \frac{25}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\pi} \leftarrow \frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{\pi 36}{25}$$

سؤال ١٣

محروط دائري قائم قاعدته لاسفل ونصف قطر قاعدته ٤ سم ، وارتفاعه ٤ سم ، ينكب فيه الماء بعدل ٣ سم / ٣ د اوجد معدل التغير في ارتفاع الماء داخل المحروط عندما يكون ارتفاع الماء يابوي ٦ سم .

اكل

حجم الماء = $\frac{2}{\sqrt{5}} = 3 \frac{1}{3}$ د



ح : ارتفاع الماء

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = 16 = 4$$

$$16 = 4$$

سؤال ١٤

عُمل الشكل المجاور اناء على شكل محروط دائري قائم نصف قطره ٦ سم ، وارتفاعه ٣ سم ، اغلته جزئيا حتى يقره معدني دائري رفيع طول نصف قطره ٣ سم يوازي قاعدة المحروط يمنع وصول اي مادة للجرد السفلي من الاناء ، فاذا صب سائل في هذا الاناء بعد ثابته قدرة (٣٥) سم^٣ / د اوجد سرعة ارتفاع السائل في الاناء عندما يكون حجم السائل في الاناء (٣٧) سم^٣

حجم الماء = حجم المحروط الكبير - حجم المحروط الصغير

$$2 = \frac{1}{3} \pi (6)^2 (3) - \frac{1}{3} \pi (3)^2 (3)$$

معدنية المثلثان

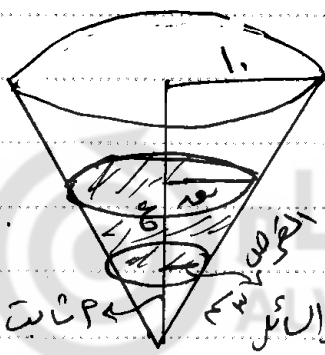
$$\frac{6 - 4}{3} = \frac{4}{c}$$

$$c = 6 - 4 = 2$$

$$c = 0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi (6)^2 (3) - \frac{1}{3} \pi (3)^2 (3)$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi (6)^2 (3) - \frac{1}{3} \pi (3)^2 (3)$$



اكل

نصف قطر السائل ٤ سم ارتفاع السائل

ح : ارتفاع السائل

ح : حجم السائل

← يتبع اكل

$$\pi \sqrt[3]{9+\epsilon} - \frac{\pi}{\sqrt[3]{9}} = \pi \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{9+\epsilon} \frac{\pi}{\sqrt[3]{9}} = \pi \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{9+\epsilon} = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9}$$

$$9+\epsilon = \sqrt[3]{9 \times 9 \times 9} \leftarrow$$

$$12 = 3 \times 3 = 9 + \epsilon$$

$$3 = 9 - 12 = \epsilon$$

$$\frac{\epsilon \sqrt[3]{9+\epsilon}}{\sqrt[3]{9}} \frac{\pi}{9} = \frac{\epsilon \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} \leftarrow$$

$$\frac{\epsilon \sqrt[3]{9+\epsilon}}{\sqrt[3]{9}} \frac{\pi}{9} = \pi \sqrt[3]{9}$$

$$\frac{\epsilon \sqrt[3]{9+\epsilon}}{\sqrt[3]{9}} = 81$$

$$\frac{0}{11} = \frac{81}{81} = \frac{\epsilon \sqrt[3]{9+\epsilon}}{\sqrt[3]{9}} \leftarrow$$

ملاحظة هامة

في اسئلة المخروط نجعل علاقة

الحجم (ع) بدلالة فتحة واحد

دائماً، ولذلك نحتاج دائماً

علاقة تربط بين لعه و ع

$$\pi \sqrt[3]{9} = \frac{\epsilon \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}}$$

$$\pi \sqrt[3]{9} = \frac{\epsilon \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} \leftarrow$$

نفسه ان ارتفاع المخروط لصغر

P = ولايجاد قيمة P من تقابله المثلثان نجد ان

$$9 = P \leftarrow \frac{3}{1} = \frac{P}{3}$$

ع ب ل = حجم المخروط الكبير - حجم المخروط الصغير

$$9 \times \frac{\pi}{3} \sqrt[3]{9} - (9+\epsilon) \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\pi \sqrt[3]{9} - (9+\epsilon) \frac{\pi}{3} = 2$$

ومن ثابته المثلثان

$$\frac{1}{3} = \frac{لعه}{9+\epsilon} \leftarrow \frac{3}{9} = \frac{لعه}{9+\epsilon}$$

$$9+\epsilon = 3 \text{ لعه} \leftarrow 9+\epsilon = 3 \text{ لعه} \leftarrow$$

$$\pi \sqrt[3]{9} - (9+\epsilon) \times \frac{\pi}{3} \sqrt[3]{9+\epsilon} = 2 \leftarrow$$

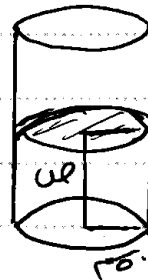
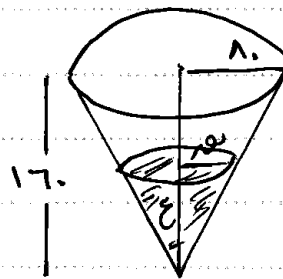
$$\pi \sqrt[3]{9} - (9+\epsilon) \frac{\pi}{\sqrt[3]{9}} = 2$$

$$\frac{\epsilon \sqrt[3]{9+\epsilon}}{\sqrt[3]{9}} \times \frac{\pi}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\epsilon \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}}$$

$$\pi \sqrt[3]{9} = 81$$

سؤال ١٥

مخروط دائري قائم رأسه كرسفل
نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه
١٦ سم يسرب منه الماء ويتجمع
في وعاء اسطوانى لكل نصف محطره
٥ سم ، أوجد ارتفاع الماء في المخروط
في اللحظة التي يكون معدل صعود
الماء في المخروط مساوياً لمعدل ارتفاع
الماء في الاسطوانة .



الحل

نبدأ بالمخروط اولاً
$$ع = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

من تساويهما
$$\frac{r}{8} = \frac{10}{16}$$

$$\leftarrow r = 5 \text{ سم}$$

$$\leftarrow h = \frac{1}{2} \text{ سم}$$

$$\therefore ع = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 5$$

$$= \frac{\pi}{12} \times 5$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{12} \times 5 = \frac{25}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{4} \times 5$$

الاسطوانة

$$ع = \pi r^2 h \text{ : نصف ثابت } = ٥$$

$$ع = ٥$$

$$ع = \pi \times ٥^2 \times h$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{25}{\sqrt{5}} \times \pi \times ٥^2 \times h$$

لكي $\frac{25}{\sqrt{5}}$ للمخروط = $\frac{25}{\sqrt{5}}$ للأسطوانة

$$\frac{25}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{4} \times ٥^2 = \frac{25}{\sqrt{5}} \times \pi \times ٥^2 \times h$$

لأن المثلون ع عندما $\frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{25}{\sqrt{5}}$

$$\leftarrow ٥^2 \times \pi = \frac{\pi}{4} \times ٥^2$$

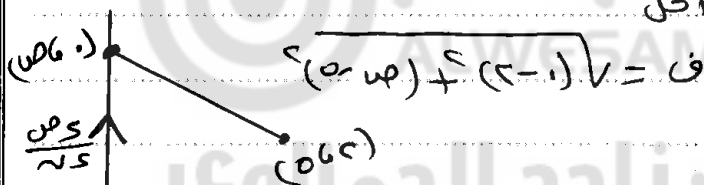
$$\frac{٥^2}{4} = ٥^2 \leftarrow ٥ = ٤$$

$$ع = \sqrt{٥^2 \times ٤} = ١٠$$

سؤال ١٦

بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل
وعين الاتجاه الموجب نحو اصدات
سرعة ٣ م/ث ، بعد معدل تغير
البعد بينهما وبين النقطة (٥٦٢)
بعد مرور ثابته من الحركة

الحل



من بعد ثابته = $٣ \times ٣ = ٩$

$$\frac{c \times c \times c + 0}{\sqrt{5}} = \frac{c \times c \times c}{\sqrt{5}}$$

نجد c عندما $c = 0$
 $(c) = (10) + c$

$$c = 144 - 4 = 140$$

بالتعويض $c = 140$
 $160 = c$

$$\frac{c \times c \times c}{\sqrt{5}} = \frac{c \times c \times c}{\sqrt{5}}$$

$$8 \times 160 \times c = \frac{c \times c \times c}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2c}{0} = \frac{8 \times 160 \times c}{c \times c} = \frac{c}{\sqrt{5}}$$

سؤال ١٨

مصعدان كهر بائيان P ، B متفران في اطار به الارض في عمارة والمسافة الافقية بينهما 38 م، بدأ المصعد P يرتفع للأعلى بسرعة 3 م/ث، وبعد ثانيتين بدأ المصعد B في الارتفاع للأعلى بسرعة 4 م/ث، حدد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد 2 ثانية من بدء حركة المصعد P ؟

الكل

$$c \sqrt{c^2 + (c-1)^2} = c \sqrt{c^2 + (c-1)^2}$$

$$c \sqrt{c^2 + (c-1)^2} = c \sqrt{c^2 + (c-1)^2}$$

$$c \sqrt{c^2 + (c-1)^2} = c \sqrt{c^2 + (c-1)^2}$$

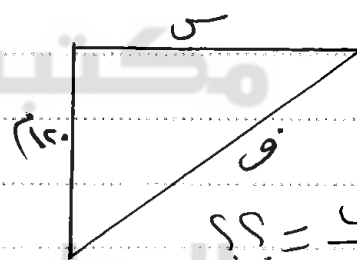
$$\frac{c}{\sqrt{5}} \times \frac{10 - c}{c \sqrt{c^2 + (c-1)^2}}$$

$$= 2 \times \frac{10 - 6 \times c}{c \sqrt{c^2 + (c-1)^2}}$$

$$\frac{3}{0.7} = 2 \times \frac{c}{0.7 \times c} =$$

سؤال ١٧

يملك ولد بيبة خيط طائرة ورقية مرتفعه 30 م، والرياح تأخذ الطائرة من الولد افاقياً عيول 38 م/ث، ولم السرعة التي يعطي بها الولد الخيط عندما يبعد الطائرة عنه 3 م



$$\frac{c}{\sqrt{5}} = 8$$

$$c = 0, \quad \frac{c}{\sqrt{5}} = ??$$

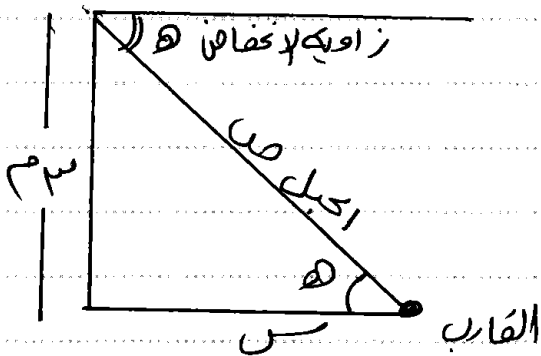
$$c = (10) + c$$

مسألة (٩)

يقف شخص على حافة رصيف
شاطئ البحر، ويرى حبلًا متصلًا
لقارب عمود ٥٠ م / م / ن، فإذا
كان ارتفاع يدي الشخص مع ارتفاع
الرصيف عن مستوى نقطة اتصال
الحبل بالقراب هو ٣ م نجد

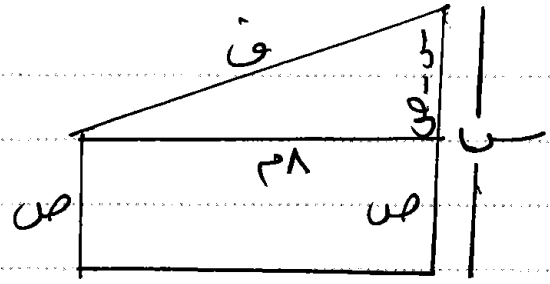
١) سرعة تغير زاوية انخفاض الحبل
في اللحظة التي يكون فيها القارب
على بعد ٤ م من الرصيف

٢) جد معدل تغير اقتراب القارب
من قاعدة الرصيف في تلك اللحظة



١) $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{c}$ ، هـ: زاوية الانخفاض
زاوية الانخفاض = زاوية الاقتراب

حاله = $\frac{3}{50}$
عندما $s = 4$ م فإنه حسب نظرية
فيثاغورس \leftarrow يتبع



س: المسافة التي قطعها المصدر
 $\frac{ds}{dt} = 2$

هـ: المسافة التي قطعها المصدر
 $\frac{dq}{dt} = 1$

$$q^2 = 18^2 + (s-3)^2$$

المسافة = السرعة \times الزمن

$$s = 4 \times 2 = 8$$

$$q = 1 \times 1 = 1$$

$$q = \sqrt{74 + (s-3)^2}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{74 + (s-3)^2} \right)$$

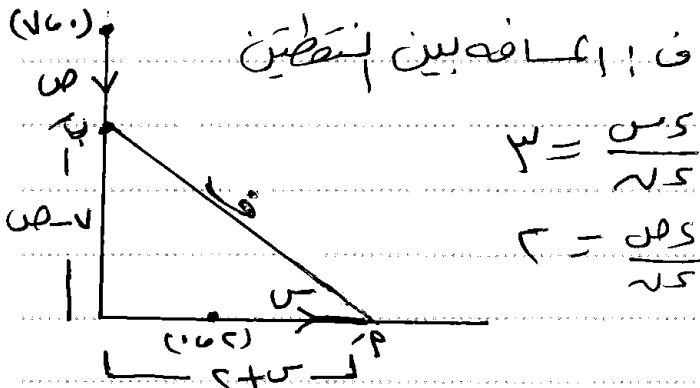
$$1 = \frac{2(s-3)}{2\sqrt{74 + (s-3)^2}} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{74 + (s-3)^2} = (s-3) \times 2$$

$$\sqrt{74 + (s-3)^2} = 4(s-3)$$

$$\frac{1}{11.2} = \frac{1}{74 + 36} \sqrt{\quad}$$

$$1.1 = \frac{1}{1} = 1$$



ف ا ا ماضه بين انقطتين

$$3 = \frac{c-s}{v-s}$$

$$3 = \frac{c-s}{v-s}$$

س ا ا ماضه الي قطعها بالنقطة الأوك

س = السرعة × الزمن = 3 × 3 = 9
 س ا ا ماضه الي قطعها بالنقطة الثانية

$$c = 3 \times 3 = 9$$

$$c = (c+s) + (v-c) = 9$$

$$c = \sqrt{(c+s)^2 + (v-c)^2}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c}} = \frac{c}{\sqrt{c}} \times \frac{c+s}{c+s} + \frac{c}{\sqrt{c}} \times \frac{v-c}{v-c}$$

$$c = \sqrt{c} \times (c+s) + \sqrt{c} \times (v-c)$$

$$\frac{c}{\sqrt{c}} = \frac{c}{\sqrt{c}} \times (c+s) + \frac{c}{\sqrt{c}} \times (v-c)$$

$$c = \sqrt{c} \times (c+s) + \sqrt{c} \times (v-c)$$

$$\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{6-9}{\sqrt{9+64}}$$

$$c = 30 \leftarrow \text{صباحه} = \frac{c}{3}$$

$$\text{صباحه} = \frac{3}{30}$$

$$\frac{3}{30} \times \frac{3}{30} = \frac{3}{30} \times \frac{3}{30}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{30} = \frac{3}{30} \times \frac{3}{30}$$

$$\frac{3}{30} = \frac{3}{30} \times \frac{3}{30} = \frac{3}{30}$$

$$\text{صباحه} = \frac{3}{30}$$

$$9 + 3 = 12$$

$$\frac{3}{30} \times 3 = \frac{3}{30} \times 3$$

$$\frac{3}{30} \times 3 = \frac{1}{3} \times 3$$

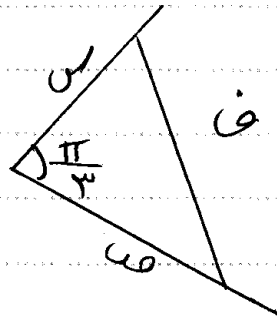
$$\frac{3}{30} = \frac{3}{30}$$

سؤال

بدأت النقطة 2 الحركة من النقطة (0, 3) باتجاه محور السينات الموجه بسرعة 3 كم/د وفي نفس اللحظة بدأت النقطة (0) الحركة من النقطة (0, 3) باتجاه نقطة الاصل بسرعة 3 كم/د بعد مرور 2 دقيقة من الحركة

مسألة (٢١)

خطان مستقيمان يلتقيان في النقطة م بزاوية $\frac{\pi}{3}$ تحركت النقطة P من النقطة م على أحد الخطين بسرعة ٣ م/ث وبتدريج من النقطة ن من النقطة م بسرعة ٢ م/ث على الخط الآخر، اوجد معدل تغير البعد بينهما بعد ٤ ثواني من حركة النقطة ن.



اكتب
معادلات
جيب المماس

$$f^2 = s^2 + c^2 - 2sc \cos \frac{\pi}{3}$$

$$f^2 = s^2 + c^2 - sc$$

$$f = \sqrt{s^2 + c^2 - sc}$$

$$s = 3 \times 4 = 12$$

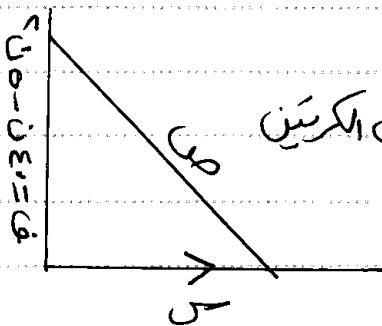
$$c = 2 \times 4 = 8$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2s \frac{ds}{dt} + 2c \frac{dc}{dt} - (s \frac{dc}{dt} + c \frac{ds}{dt})}{2f}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2(12)(3) + 2(8)(2) - (12(2) + 8(3))}{2 \times 10} = \frac{72 + 32 - 36 - 24}{20} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

مسألة (٢٢)

تقع النقطة م على شارع مستقيم افقي تحركت كرتان P وN من النقطة م في لحظة حيث تحركت الكرة P على الشارع في قط مستقيم بسرعة ثابتة قدرها ١٥ م/ث في حين قذفت الكرة (N) رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٤٠ م/ث وكان ارتفاعها يعطى بالعلاقة $f(N) = 40 - 5t^2$ اوجد معدل تغير المسافة بين الكرتين P وN عندما تصل N الى اقصى ارتفاع



اكتب
معادلات
جيب المماس

$$c^2 = s^2 + f^2$$

$$c = \sqrt{s^2 + f^2}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{s \frac{ds}{dt} + f \frac{df}{dt}}{c}$$

$$c = 10 \quad f = 40 - 5(4) = 20 \quad s = 60$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{60(3) + 20(-10)}{10} = \frac{180 - 200}{10} = -2$$

$$c^2 = s^2 + f^2$$

$$2c \frac{dc}{dt} = 2s \frac{ds}{dt} + 2f \frac{df}{dt}$$

$$2(10)(-2) = 2(60)(3) + 2(20)(-10)$$

$$-40 = 360 - 400$$

تابع اكل

$$\frac{\text{مس ١٥} + \text{مف ١٥}}{\sqrt{5}} = \frac{\text{مس}}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{١٥ + ١٥} = ١٥$$

$$\frac{١٥ \times ١٠ + ١٥ \times ٦٠}{\sqrt{١٠ + ٦٠}} = \frac{\text{مس}}{\sqrt{5}}$$

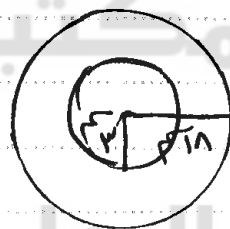
$$١٥ \times ٦٠ = ٩٠٠$$

$$\frac{٩٠٠}{\sqrt{٦٠ + ١٠}} = \frac{٩٠٠}{\sqrt{٧٠}} = \frac{٩٠٠}{\sqrt{٧٠}}$$

سؤال ٩٣

دائرتان متحدتان في المركز نصف قطرهما ٣ سم و ١٨ سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها معدل ٣ سم/د ، وفي نفس اللحظة اخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها معدل ٣ سم/د ، اوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين عندما تصبح هذه المساحة صفر

الحل



في اللحظة ن
نصف قطر الدائرة الصغرى
= ٣ + السرعة × الزمن

$$٣ + ٣ن =$$

$$١٨ - ٣ = \text{نصف قطر الكبرى}$$

المساحة المحصورة

$$= \text{مساحة الكبرى} - \text{مساحة الصغرى}$$

$$\pi (٣ + ٣ن)^2 - \pi (١٨ - ٣)^2 = م$$

$$\frac{\pi (٣ + ٣ن)^2 - \pi (١٥)^2}{٢ \times} = \frac{\pi م}{\sqrt{5}}$$

عندما م = ن

$$\text{نصف قطر الصغرى} = \text{نصف قطر الكبرى}$$

$$٣ + ٣ن = ١٨ - ٣$$

$$١٥ = ٣ + ٣ن$$

$$\frac{\pi (٣ + ٣ \times ٤)^2 - \pi (١٨ - ٣)^2}{٢ \times} = \frac{\pi م}{\sqrt{5}}$$

$$= \pi ٥٤ - \pi ٣٦ = \pi ١٨$$

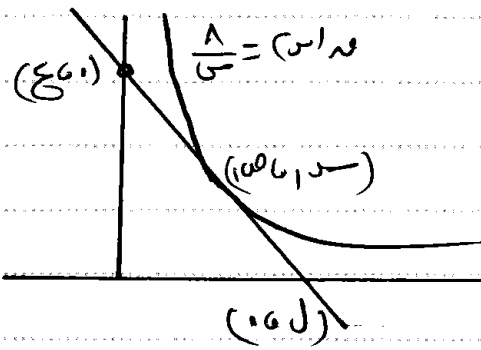
سؤال ٩٤

يقع مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٨٠ م ، اسقطت كره من نفس الارتفاع من نقطة تبعد ٢٠ م من المصباح ، اذا كانت الكرة نقطة م ب العلاقة ف = ١٦ ن^٢ فما سرعة تحرك ظل الكرة على الارض بعد ثابته واحدة من سقوطها .

← تابع اكل

مثال ٢٦

رسم محاسن لمنحنى الأقطار في
 وحدة (داس) = $\frac{A}{S}$ في الربع الأول
 كما في الشكل المجاور ، فكان
 مقطعة السيني والصادي لـ E
 على الترتيب ، فإذا كان المقطع
 السيني يزيد بمعدل 2 وحدة /
 حد معدل تغير المقطع الصادي
 عندما يكون المقطع السيني 10 وحدات



أولاً
 ميل المحاسن = ميل المنحنى = $\frac{A}{S}$ وحدة (داس)
 المحاسن يمر بالنقطتين (10, 60) و (0, 60)
 ميل المحاسن = $\frac{60 - 60}{0 - 10} = \frac{0}{-10} = 0$
 وحدة (داس) = $\frac{A}{S} = 0 \leftarrow \frac{A}{S} = \frac{E}{L}$
 $0 = \frac{E}{L} \leftarrow L = E = 10$ ---- ①

ثانياً

المحاسن يمر بالنقطتين (10, 60) و (10, 0)

$$\frac{A}{S} = \frac{A}{L} = \text{ميل المحاسن}$$

ولكنه $\frac{A}{S} = 0$

$$\frac{A}{S} = 0 \leftarrow \text{ميل المحاسن} = \frac{A}{L}$$

ميل المحاسن = ميل المنحنى

$$\frac{A}{S} = \frac{A}{L} \quad (\text{تبادلي})$$

$$\frac{A}{S} = \frac{A}{L} \leftarrow \frac{A}{S} = \frac{A}{L} + 0 = \frac{A}{L} + 0$$

② $L = 10$

تكونين صادية ② في صادية ①

$$L = E = 10$$

$$L = E = 10$$

العلاقة $\frac{30}{L} = E$

$$\frac{30}{L} = E \leftarrow \frac{30}{L} = \frac{E}{L}$$

$$\frac{30}{L} = \frac{E}{L} \leftarrow \frac{30}{L} = \frac{E}{L}$$

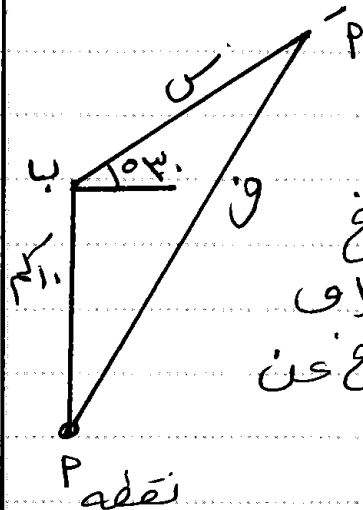
$$\frac{30}{L} = \frac{E}{L} \leftarrow \frac{30}{L} = \frac{E}{L}$$

$$\frac{30}{L} = \frac{E}{L} \leftarrow \frac{30}{L} = \frac{E}{L}$$

سؤال (٤٧)

صاروخ يرتفع عمودياً عن سطح الارض الى أعلى بمعدل ٢ كم/ثا وعند ما وصل إلى ارتفاع ١٠ كم عن الارض الحرف صار حركته بزاوية مقدارها ٣٠° مع الافق (سؤال شرفه) محافظاً على نفس السرعة السابقة، ما معدل تغير اعنانه بين الصاروخ ونقطة انطلاقه عندما يكون الصاروخ على بُعد ١٠ كم من نقطة الانطلاق

الحل



نظرف ان
ف: بُعد الصاروخ
عن نقطة الانطلاق
س: بعد الصاروخ عن
النقطة ب.

نقطة P الانطلاق $١٠ = ٣ + ٩ = PUP \neq$

$\frac{س}{٢} = \frac{ر}{٢} = \frac{س}{٢} = \frac{ر}{٢}$ المطلوب $\frac{د ف}{د س}$

$ف = ١٠ \sqrt{٣}$

حيد قانون هيب التمام

$ف^2 = س^2 + ١٠^2 - ٢ \times ١٠ \times س \times \cos ٣٠^\circ$

$١٠ + س^2 - ١٠س = \frac{١}{٢} \times س^2$

$١٠ + س^2 + ١٠س =$

$ف = \sqrt{س^2 + ١٠^2}$ لعلاقه

$\frac{د ف}{د س} = \frac{س}{\sqrt{س^2 + ١٠^2}} + \frac{١٠}{\sqrt{س^2 + ١٠^2}} \times \frac{د س}{د س}$

$\sqrt{س^2 + ١٠^2}$

لكه $ف = ١٠ \sqrt{٣}$

$١٠ \sqrt{٣} = \sqrt{س^2 + ١٠^2}$

بالنسبة

$٣ = س^2 + ١٠$

$س^2 + ١٠ = ٣$

$١ = (س - ١٠)(س + ١٠)$

$س = ١٠ - س$

$\frac{د ف}{د س} = \frac{س}{\sqrt{س^2 + ١٠^2}} + \frac{١٠}{\sqrt{س^2 + ١٠^2}} \times \frac{د س}{د س}$

$\frac{٣}{٢\sqrt{٣}} = \frac{٣}{٣\sqrt{٣}} = \frac{٦}{٣\sqrt{٣}}$

$\sqrt{٣} =$



مثال ٢٨

زيد ايجاد $\frac{S}{\sqrt{S}}$ ؟

$L = \text{سرعة} \times \text{طول القوس}$

$\frac{L}{\sqrt{S}} = \text{سرعة} \times \frac{S}{\sqrt{S}}$

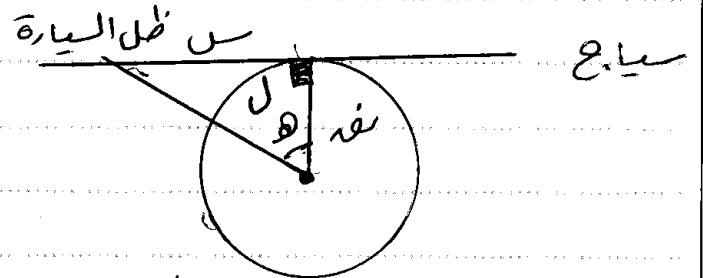
$\frac{L}{\sqrt{S}} = \frac{S}{\sqrt{S}} \times \frac{1}{\text{سرعة}} \leftarrow$ بالتعويض

$\frac{L}{\sqrt{S}} \times \frac{1}{\text{سرعة}} = \frac{1}{\text{سرعة}} \times \frac{1}{\text{سرعة}}$

$\frac{L}{\sqrt{S}} = 2 \times 1$

$16 = \frac{L}{\sqrt{S}}$

تسير سيارة بسرعة ٨ م/ث على
ضمار سبانه واثري ويوجد في
مركزة مصدر صوتي ويوجد سباح
متتبع عماس للدائرة فاذا بدأ
السيارة بالحركة من نقطة التماس
مجد سرعة ظل السيارة على السباح
عندما تقطع السيارة $\frac{1}{8}$ دورة ؟



ل: طول قوس الدائرة التي يسير عليها
السيارة

س: ظل السيارة على السباح

هـ: الزاوية المركزية المقابلة للقوس (ل)
سرعة نصف قطر الدائرة (ثابت)

$\frac{L}{\sqrt{S}} = \frac{S}{\sqrt{S}} \times \frac{1}{\text{سرعة}}$ ، $\frac{1}{8}$ دورة = $\frac{1}{8} \times 360 = 45^\circ$

المطلوب $\frac{S}{\sqrt{S}} = 16$

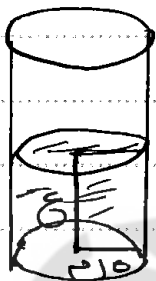
طاه = $\frac{S}{\text{سرعة}}$ (العلاقة)

$\frac{S}{\sqrt{S}} \times \frac{1}{\text{سرعة}} = \frac{1}{\text{سرعة}}$

لأن سرعة ثابت

مثال ٢٩

خزان ماء الطواني الشكل قطر
قاعدته ٣ م يخرج منه الماء
بعمق ٢ م / ٣ د سرعة انخفاض
الماء في الخزان ؟



$3 = \text{عمق الماء}$

$2 = \frac{S}{\sqrt{S}}$

المطلوب $\frac{S}{\sqrt{S}}$

$3 = \pi r^2 \times \text{عمق}$

$3 = \pi (1.5)^2 \times \text{عمق}$

$\frac{S}{\sqrt{S}} \times \pi (1.5)^2 = \frac{S}{\sqrt{S}}$

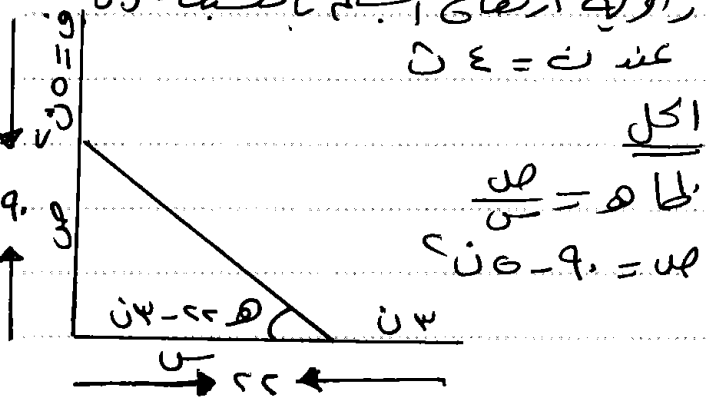
$2 = \frac{S}{\sqrt{S}} \times \pi (1.5)^2$

$\frac{2}{\pi (1.5)^2} = \frac{S}{\sqrt{S}}$

$$\frac{2}{8} = \frac{7}{13} = \frac{r \text{ من}}{\sqrt{5}} \leftarrow \frac{r \text{ من}}{\sqrt{5}} \times 13 = 7$$

سؤال (٣)

سؤال (٣١) سقا جسم عند لحظة ما رأسيًا من أعلى برج ارتفاعه ٣٩٠ م حيث كانت المسافة التي تقطعها في $t=0$ وفي نفس اللحظة يتحرك رجل يبعد ٤٠ م عن قاعدة البرج نحو سرعة منتظمة ٣ م/ث، حدد تغير زاوية ارتفاع جسم بالنسبة للرجل عند $t=4$ ث



اكل

طاه = $\frac{ص}{س}$

$ص = 90 - 3t$

$س = 40 - 3t$

قاه $\times \frac{ص}{\sqrt{5}} = \frac{ص}{\sqrt{5}} \times (40 - 3t)$

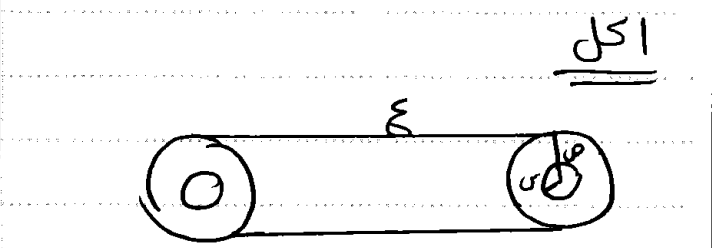
للايجاد قاه عند $t=4$

طاه = $\frac{90 - 3(4)}{40 - 3(4)} = \frac{78}{28} = \frac{39}{14}$

قاه = $1 + 1 = 2$

بالنسبة للرجل ← يتبع اكل

عاصرة من اكد يد محوفة طوكها ثابتة ونصف قطرهما الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى حجم اكد يد ثابتة فاذا كان نصف القطر الداخلي يزداد عند $t=0$ او عند معدل التغير في نصف القطر الخارجي عند ما يكون نصف القطر الداخلي $t=0$ والخارجي $t=8$



ع ك ع ثوابت

$\frac{ص}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

$\frac{ص}{\sqrt{5}} = \frac{7}{8}$

حجم اكد يد ع = الخارجي - الداخلي

$2 = \pi r^2 h - \pi r_1^2 h$

$2 = \pi h (r^2 - r_1^2)$

$2 = \pi h (r - r_1)(r + r_1)$

$2 = \pi h (r - r_1) \times 8$

س ا بعد ده عن ب
 ص ا طول ده
 م ا حافة المنطقه د و د ه
 $\frac{د ه}{ص} = \frac{1}{3}$
 المطلوب $\frac{د ه}{ص}$

$$\frac{(40-9) - 271 - 4(43-9)}{3-2} = \frac{د ه}{ص}$$

$$\frac{(43-9)}{3-2} = \frac{د ه}{ص}$$

$$\frac{34}{1} = \frac{د ه}{ص}$$

$$\frac{34}{1} = \frac{د ه}{ص}$$

مساحة شبه الخرف =
 $\frac{1}{2} (\text{مجموع القاعدتين}) \times \text{الارتفاع}$

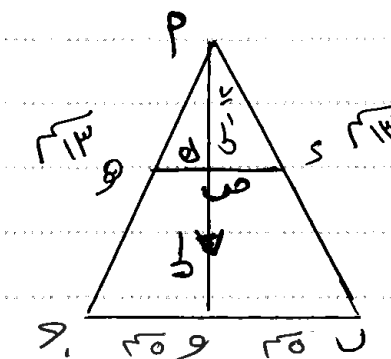
سؤال (39)

الشكل المجاور PUP حيث فيه
 UP = 6, PU = 3, U = 3
 وبتقسيم ده بوازي د و فاذا
 تحرك المقياس ده رأسيًا للأسفل
 موازيًا لنفسه لبرهة $\frac{1}{3}$ م/ن
 جد معدل تناقص مساحة المنطقه
 د و د ه عندما د ه عبر عن نصف
 د و د و د ه

$$P = \frac{1}{2} (د ه + د و) \times ل ه$$

$$= \frac{1}{2} (10 + 6) \times 3$$

ونحل العلاقة بدلالة صغير واحد
 المثلث P و U فيشاعوس
 $(UP) + (U) = (UP)$
 $(13) + (6) = (UP)$
 $19 = (UP)$
 $13 = 144 = 12$



المثلثان P و U ه قساربان

$$\frac{ل ه}{د ه} = \frac{د و}{د ه}$$

$$\frac{ل ه}{5} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{ل ه}{5}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{ل ه}{5}$$

ملاحظة: القطعة الواصلة بين نقطتين
 ضلعين في مثلث توازي اضلعين
 و هو لها = نصف طولها
 د ه = 0 عندما لير د ه عند نصف
 د و د و د ه

الحل

س : طول الضلع الثالث
هـ : الزاوية المحصورة بين الضلعين

$$\frac{d}{\sqrt{5}} = \frac{c}{\sqrt{5}} \Rightarrow c = d$$

$$\sqrt{37} = s$$

صياغة قانون جيب الختام

$$s^2 = (1)^2 + (c)^2 - 2 \times 1 \times c \times \cos 60^\circ$$

$$s = \sqrt{4 - 2c}$$

$$\frac{s}{\sqrt{5}} = \frac{c}{\sqrt{5}} - \frac{c \times \cos 60^\circ}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{4 - 2c}}{\sqrt{5}} = \frac{c - \frac{c}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{4 - 2c} = \frac{c}{2}$$

نستخدم الطريقة لإيجاد حاه ، حباه
عندما $s = \sqrt{37}$

$$\sqrt{37} = \sqrt{4 - 2c} \Rightarrow 37 = 4 - 2c$$

$$3 = 4 - 2c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{\sqrt{5}} = \frac{c \times \cos 60^\circ}{\sqrt{5}} + \frac{c}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{c}{\sqrt{5}}$$

$$0 = \frac{c}{\sqrt{5}} \Rightarrow c = 0$$

$$s = 10 - \frac{c}{\sqrt{5}}$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (10 + s)$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (10 + s - 10)$$

$$3 = \frac{s}{\sqrt{5}} \Rightarrow s = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{c}{\sqrt{5}}$$

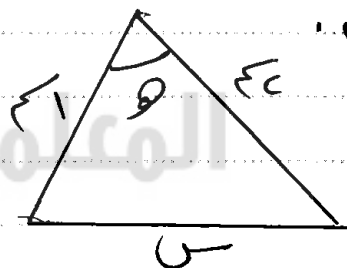
$$3 = 2 - \frac{c}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{5}} = -1 \Rightarrow c = -\sqrt{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{c}{\sqrt{5}}$$

$$3 = 10 - c \Rightarrow c = 7$$

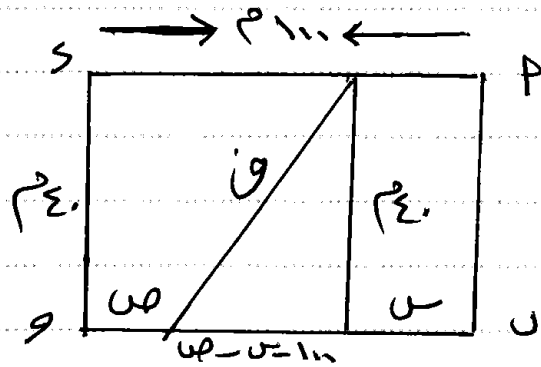
سؤال ٣٣

مثلث فيه ضلعين أطوالهما ١٠م ، ١٣م ، يتغير طول الضلع الثالث بحيث أن معدل تزايد الزاوية بين الضلعين السابقين هو ٠.١ راديان/د ، معدل تغير طول الضلع الثالث عندما يكون طوله $\sqrt{37}$ م .



مسألة ٣٤

صاحب كرة قدم طولة ١٨ م وعرضه ٤٠ م.
بدأ لاعبان بالحركة فحاً اهدهما على
خط التماس ومن النقطة P وباتجاه
(S) بسرعة ٦ م/ث، وبدأ الآخر
الحركة على خط التماس من النقطة
Q باتجاه (B) بسرعة ٥ م/ث
(انظر الشكل) اوجد بعدك لتغير
في المسافة بين اللاعبين بعد مرور
٣ ثواني على حركتهما



الحل

$$\frac{S}{25} = 6 \quad , \quad \frac{Q}{25} = 5$$

صباحاً وس ←

$$F = (18 - S) + (40 - Q)$$

$$S = 3 \times 6 = 18$$

$$Q = 3 \times 5 = 15$$

$$F = \sqrt{(18 - S)^2 + (40 - Q)^2}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{(18 - S) \frac{dS}{dt} + (40 - Q) \frac{dQ}{dt}}{\sqrt{(18 - S)^2 + (40 - Q)^2}}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{18 \times (-3) + 25 \times (-3)}{\sqrt{161 + 2500}}$$

$$= \frac{(18 - 18) - (40 - 15)}{\sqrt{161 + 2500}}$$

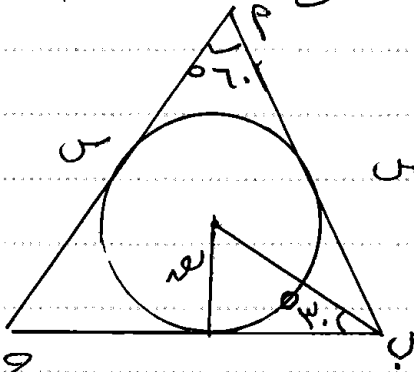
$$= \frac{-25}{\sqrt{2661}}$$

$$= \frac{-11 \times 25}{\sqrt{2661}}$$

$$= \frac{-275}{\sqrt{2661}}$$

مسألة ٣٥

تعدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع
عند ٣ م/ث، رُسبت دائرة داخل
المثلث لمس اضلاعه وأفقته تقدر
مع مثلث، بعدد عدد مساهمة
النقطة المحصورة بين المثلث والدائرة
عند ما يكون طول ضلع المثلث ٣٤ م



$$\frac{S}{25} = 3$$

$$\frac{Q}{25} = 3$$

$$P = \text{مسافة المثلث} - \text{مسافة الدائرة}$$

$$= \frac{1}{2} \times 34 \times 34 \times \frac{\sqrt{3}}{4} - \pi r^2$$

$$= \frac{34^2 \sqrt{3}}{4} - \pi r^2$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{34 \times \sqrt{3}}{4} \times \frac{dS}{dt} - 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{34 \times \sqrt{3}}{4} \times 3 - 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

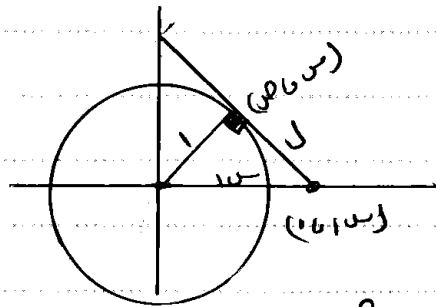
$$= \frac{34 \times \sqrt{3}}{4} \times 3 - 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{34 \times \sqrt{3}}{4} \times 3 - 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{34 \times \sqrt{3}}{4} \times 3 - 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

سؤال (٣٦)

فَتَقِم بِمَكَرٍ فِي الْمَسَوِي حَيْثُ يَبْقَى
 دَلَامًا لِلدَّائِرَةِ الَّتِي مَعَادِلَتَهَا
 $s^2 + h^2 = 1$ فِي تَقْطَعَةٍ فِي الرُّبْعِ
 الْأَوَّلِ، فَإِذَا كَانَ مَعْدَلُ اِرْتِفَاعِ
 الْإِهْدَائِيِّ السِّبْيِ لِنَقْطَةِ الْمَاسِ
 الْمَكْرَمِ يَأْوِي بِوَهْدَتَيْنِ جِد
 مَعْدَلِ التَّغْيِيرِ فِي الْإِهْدَائِيِّ السِّبْيِ
 لِنَقْطَةِ تَقَاطُعِ الْمَاسِ مَعِ مَحْوَرِ السِّبْيَاتِ
 عِنْدَ مَا يَكُونُ الْإِهْدَائِيُّ السِّبْيِ لِنَقْطَةِ
 تَقَاطُعِ الْمَاسِ مَعِ السِّبْيَاتِ وَوَهْدَتَيْنِ



الحل

فَيُتَأَمَّرُ مِمَّا نَمُ الْزَاوِيَه
 $s^2 + l^2 = 1$ لِحَالِ $h = s$ - $s^2 - 1$

$l = 1 - s^2$ مِنْ تَقْطِيعِ

$$l^2 = (1 - s^2)^2 + (s - s)^2 = 1 - 2s^2 + s^4$$

$$= 1 - 2s^2 + s^4$$

$$2s - 1 = 1 - 2s^2 + s^4 \Rightarrow s^4 - 2s^2 + 2s - 2 = 0$$

$$s^4 - 2s^2 + 2s - 2 = 0$$

$$s^4 - 2s^2 + 2s - 2 = 0$$

$$s^4 - 2s^2 + 2s - 2 = 0$$

$$s^4 - 2s^2 + 2s - 2 = 0$$

نِسْبَةٌ

$$\frac{1}{s} \times \frac{1-s}{s} = \frac{1-s^2}{s^2}$$

عِنْدَمَا سَدَا = ١، فَانْ س = $\frac{1}{s}$

$$\frac{1-s^2}{s^2} = 1 - 1 = 0$$

صَدَأْخَرُ

سِيلِ الْمَاسِ = سِيلِ الْفَحْنِ

$$\frac{h-s}{s-s} = \frac{1-s}{s} \Rightarrow (1-s) = s(1-s)$$

$$1-s = s-s^2 \Rightarrow s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$s^2 - 2s + 1 = 0 \Rightarrow (s-1)^2 = 0$$

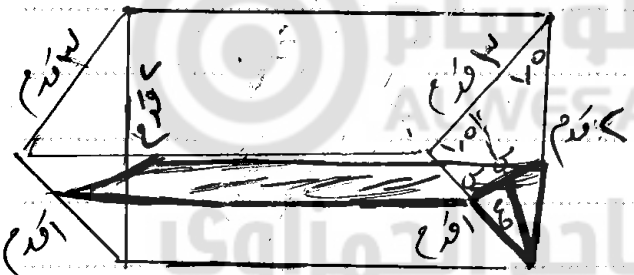
$$s-1 = 0 \Rightarrow s = 1$$

$$s = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} = 1$$

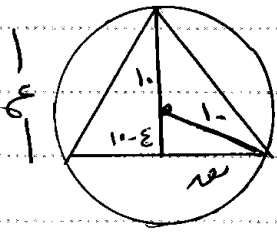
سؤال (٣٧)

فِي الشَّكْلِ الْجَانِبِ عِنْدَ هَوْنِ حَاءِ
 إِذَا كَانَ الْمَاءُ يَنْزِلُ فِي الْكَوْضِ مَعْدَلِ
 ١٠ م/د، أَوْ هُوَ سَرِيحَةٌ اِرْتِفَاعِ سَطْحِ
 الْمَاءِ فِي الْكَوْضِ عِنْدَ مَا يَكُونُ مَعَهُ اِلْمَاءُ
 اِقْدَمُ

١٣ اِقْدَمُ



سَبْعُ أَكْلٍ



اكل

$$2 = \frac{1}{3} \pi \text{ نصف } ع$$

$$\text{كبر } (1.0) = \text{نصف} + (1.0) = ع$$

$$ع - ع = \text{نصف} + ع = 1.0$$

$$\text{نصف} = ع - ع = ع$$

$$ع \times (ع - ع) \times \frac{1}{3} \pi = 2 \leftarrow$$

$$(ع - ع) \times \frac{1}{3} \pi =$$

$$\frac{ع}{\sqrt{5}} \times (ع - ع) \times \frac{1}{3} \pi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \times (ع - ع) \times \frac{1}{3} \pi =$$

$$\frac{\pi ع}{3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1.0 \times \frac{1}{3} \pi =$$

حجم كره = مساحة قاعدته \times الارتفاع

$$1.0 \times (ع \times \frac{1}{3} \pi) =$$

$$= 1.0 \times ع$$

$$\frac{1.0}{3} = \frac{ع}{3}$$

$$\leftarrow 1.0 = ع \leftarrow 3 = ع \leftarrow \frac{1.0}{3} = ع \leftarrow$$

$$\leftarrow ع = 3 \leftarrow$$

$$\text{ن } ع = 3 = 1.0 \times \frac{1}{3} \times 1.0 = ع$$

$$\frac{ع}{\sqrt{5}} \times 1.0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{ع}{\sqrt{5}} \times 1.0 = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{1.0} = \frac{ع}{\sqrt{5}}$$

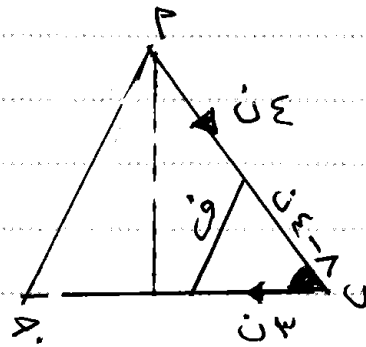
مسألة (٣٨)

كره نصف قطرها ثابت = ٣٢٠
 وضع داخلها مخروط قائم تتغير
 ابعاده وارتفاعه بحيث ان رأسه
 ومحيط قاعدته يتلامس مع سطح
 الكرة اذا كان ارتفاع المخروط يزيد
 بعدل $\frac{1}{3}$ سم / د ، او بعدل
 تغير حجم المخروط في اللحظة التي
 يكون فيها ارتفاعه ٨ سم



مسألة ٣٩

U.P. صلك مساوي لسافين فيه
 $U.P = 6P = 6K = 6U$ حركت
 نقطة P باتجاه B بسرعة ٤ م/س
 وفي نفس الوقت حركت نقطة ثانية
 من B باتجاه J بسرعة ٣ م/س
 او بعد صدك التغير في مسافة بين
 النقطتين بعد مرور ثانية واحدة.

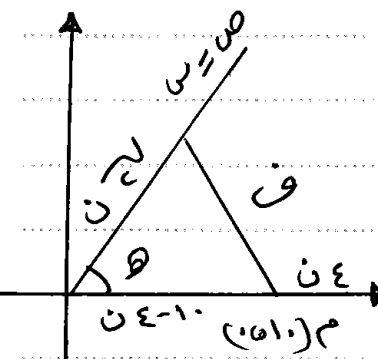


الحل

قانون فيثاغورس
 $(4t)^2 + (3t)^2 = (EN)^2$
 $16t^2 + 9t^2 = EN^2$
 $25t^2 = EN^2$
 $EN = 5t$
 في $t=1$:
 $EN = 5 \times 1 = 5$
 المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة هي ٥ م.

مسألة ٤٠

اذا كانت P (١٠٠ | ١) بدأت نقطه
 الحركة من P على محور السينات بسرعة
 ٤ وحدات في الثانية باتجاه نقطة الاصل
 وفي نفس الوقت حركت نقطه اخرى
 من نقطة الاصل على المحور العمودي
 في الربع الاول بسرعة ٣ وحدات في
 الثانية او بعد صدك تغير المسافة بين
 النقطتين بعد مرور ثانية

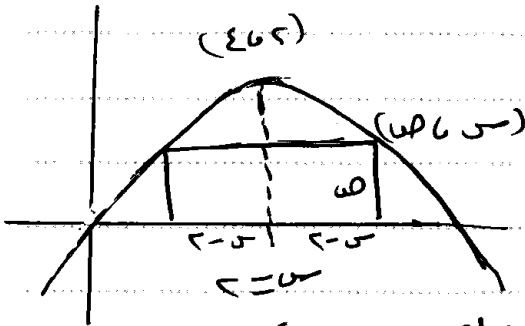


الحل

زاوية ميله مستقيم
 $4 = \frac{dy}{dx}$
 $4dx = dy$
 $4x = y + C$
 في $t=0$:
 $4 \times 100 = 1 + C$
 $C = 400 - 1 = 399$
 في $t=1$:
 $4x = y + 399$
 $4x = 3 + 399$
 $4x = 402$
 $x = 100.5$
 المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة هي 100.5 م.

سؤال (٤٣)

رسم متطيل تحت منحني $h = 2 - x - x^2$ حيث يقع رأسه من رؤوسه على منحني h ويقع رأسه الآخران على محور السينات ، اذا كان ضلعه الذي على محور السينات يتناقص عند اكتمال ما يصل تغير مساحة المتطيل في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه الموجود على محور السينات يساوي 2 سم



$$c = \frac{2 - h}{2} = \frac{c}{2}$$

طول اضلاع الذي على محور السينات

$$l = c = (2 - c) - c = 2 - 2c$$

$$\frac{dc}{dt} \times c = 1 - \frac{dl}{dt} \times c = \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{dl}{dt} \times \frac{1}{2 - 2c} \text{ وعندها } c = 2 \text{ فان } 2 = 2 - 2c \Rightarrow c = 0$$

$$4 = 2(2 - c) \Rightarrow 4 = 4 - 2c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$4 = 2(2 - c) \Rightarrow 4 = 4 - 2c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$4 = 2(2 - c) \Rightarrow 4 = 4 - 2c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

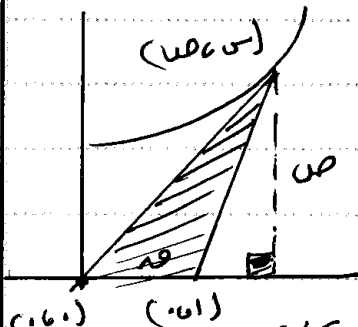
$$\frac{dc}{dt} \times (2 - 2c) = \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \times (2 - 2c) = \frac{dl}{dt}$$

$$1 - c = \frac{dl}{dt}$$

سؤال (٤٤)

يحرك نقطة على منحنى $y = 9 + x^2$ حيث ان الاصدائي السيني لها يزداد عند $t = 0$ ومديات في الثانية ماضل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(t, 9+t^2)$ عند ما يكون الاصدائي السيني للنقطة المتحركة $t = 0$ ومديات .



المثلث

القاعدة $h = 1$

$$1 = 1 - 1 = 0$$

$$3 = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{ارتفاع}$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 1 \times h \Rightarrow h = 6$$

$$3 = \frac{1}{2} \times (9 + t^2 - 1) \times 1$$

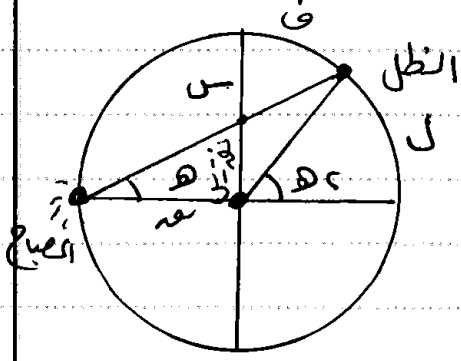
$$\frac{dc}{dt} \times \frac{1}{\sqrt{9 + t^2}} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$0 \times \frac{1}{\sqrt{9 + 16}} \times \frac{1}{2} = 0$$

$$0 = \frac{1}{0} = \infty$$

مثال (٤٣)

مضمار سيارة دائري يوجد على طرف قطره صور ، انطله مصان من نهاية قطر آخر عمودي على القطر الأول قطرًا عن المركز بسرعة ٤ كم/د من سرعة تغير ظل الحصان على المضمار عندما يقطع الحصان نصف المسافة عن المركز



س : المسافة التي قطعها الحصان باتجاه المركز

ف : الظل على المضمار
 $\frac{س}{ص} = ٤$ كم/س

الطول ايجاد $\frac{د ف}{ص}$ عندما $س = \frac{ل}{٤}$

$$\frac{١}{٤} \text{ المحيط} = ل + ف$$

$$= ف + ل$$

$$\text{صفر} = \frac{د ف}{ص} + ل$$

$$\text{لكن ظاه} = \frac{س}{ص}$$

$$\text{ظاه} = ١ - \frac{١}{ص}$$

بالاشتقاق

$$\frac{د س}{ص} \times \frac{١}{ص} = \frac{د هـ}{ص} \times \text{ظاه}$$

$$\text{عندما } س = \frac{ل}{٤}$$

$$\frac{١}{ص} = \frac{د هـ}{ص} \times \frac{١}{ص}$$

$$\text{ظاه} = ١ + \text{ظاه}$$

$$\frac{٥}{ص} = ١ + \text{ظاه} = \frac{١}{ص}$$

$$\frac{د س}{ص} \times \frac{١}{ص} = \frac{د هـ}{ص} \times \text{ظاه}$$

$$٤ \times \frac{١}{ص} = \frac{د هـ}{ص} \times \frac{٥}{ص}$$

$$\frac{١٦}{ص} = \frac{٤}{ص} \times \frac{٤}{ص} = \frac{د هـ}{ص}$$

بعضها ①

$$\text{صفر} = \frac{د ف}{ص} + ل$$

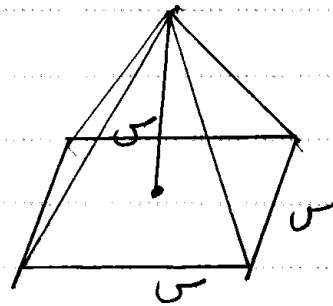
$$= ل - \frac{د هـ}{ص}$$

$$= - \frac{١٦}{ص}$$

$$= \frac{٢٠}{ص}$$

مسألة (٤٥)

نجدد هرم رباعي منتظم صده h عند
ارتفاعه h ليأوي طول ضلع قاعدته
عزوداد حجمه h^3 ، اذا
كان h عند h يزيد كل من ارتفاع
الهرم وطول ضلع قاعدته h ليأوي
١.٠ ، سم h فاوجد طول ضلع
قاعدته



$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة قاعدته} \times \text{ارتفاعه}$$

$$= \frac{1}{3} \times s \times s \times h$$

$$= \frac{1}{3} s^3 = 2$$

$$\frac{1}{3} s^3 = 2 \Rightarrow s^3 = 6$$

$$s = \sqrt[3]{6} \approx 1.817$$

$$s = 1.817 \approx 1.8$$



المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

$$\frac{\pi \cdot 60}{100} = \frac{1}{100} \times 6 \times \pi \times 8 =$$

تدريب ① ص ١٧٣

$$\frac{\pi \cdot 96}{100} = \frac{\pi \cdot 5}{5} = \frac{\pi \cdot 4}{10} =$$

كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة حيث تبهر محافظتها على شكلها، إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ١ سم/دقيقة فماذا يحدث لمعدل تغير حجمها؟

تدريب ② ص ١٧٤

رجل طوله ١.٨٠ مترًا يقف على سطح مسطح من الأرض مستوية بسرعة ٢ م/دقيقة. عندما يتحرك ليرى قمة منساج يتدفع أوه أفقًا عن سطح الأرض بمعدل ١ م/دقيقة. فماذا يحدث لمعدل تغير ارتفاع رأس المنساج عندما يتحرك مع منساج عند ما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار منه نحو الكروبياء؟

① معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١ سم.
② معدل تناقص حافة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١ سم.

الحل

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$-2 = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

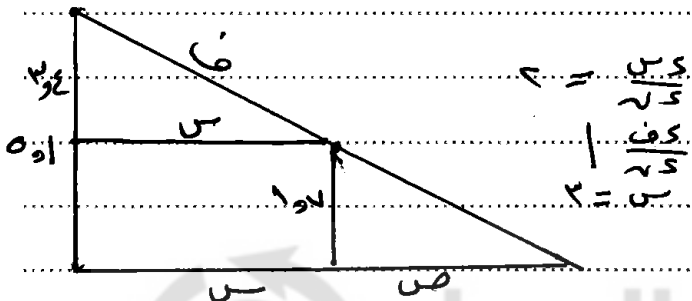
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$-2 = \frac{4}{3} \pi (1)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

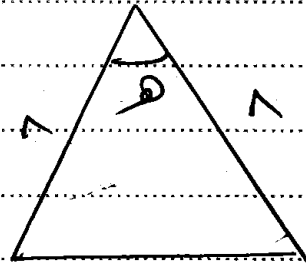


$$f^2 = s^2 + v^2$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2s}{f} \frac{ds}{dt} + \frac{2v}{f} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2s}{f} \frac{ds}{dt} + \frac{2v}{f} \frac{dv}{dt}$$

تدريب (٣) ص ١٧٥
 قُلتَ متطابعا الضلعين طول كل من
 من ضلعيه المتطابقين ٨ سم ، و زاد
 قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل
 $\frac{1}{2}^\circ$ ، حدد معدل التغير في مساحة
 المثلث في كل من الحالات الآتية
 (١) عند ما يكون قياس الزاوية المحصورة 60°
 (٢) عند ما يكون قياس الزاوية المحصورة 120°



$$s = \frac{a^2 \theta}{2}$$

$$6 = \theta$$

$$s = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\pi}{6} = \frac{16\pi}{3}$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

$$\frac{16\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8\pi}{3}$$

$$6 = \theta \quad (1)$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\pi}{6} = \frac{16\pi}{3}$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\pi}{6} = \frac{16\pi}{3} \quad (2)$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

$$cs = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

تقارين ومسائل

صفحة (١٧٧)

السؤال الأول

كلعب من الثلج يتناقص طول ضلعه
بمعدل ١.٥ وسم/س، ما معدل
التغير في كل من حجمه ومساحته
الكلية عندما يكون ضلعه ١٠م

الحل

طول إضلع = س

$$\frac{ds}{dt} = -1.5$$

$$ع = ص^3 \quad \frac{دع}{دص} = \frac{3ص^2}{دص}$$

$$\frac{دع}{دص} = \frac{3}{10} \times 10 \times 3 = \frac{9}{10}$$

$$= -0.9$$

صاحبه ركبليه = ٦ لا مسافه لوجه

$$٦ \times س = ع$$

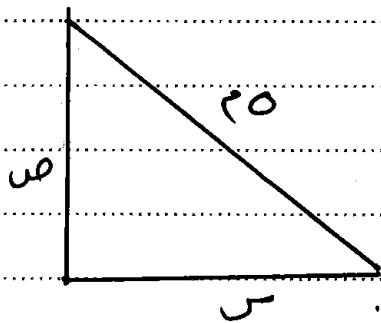
$$\frac{دع}{دص} = ٦ \times \frac{دس}{دص} = \frac{٦}{١٠}$$

$$\frac{١}{١٠} \times ١٠ \times ١٤ = \frac{١٤}{١٠}$$

$$= -0.14 \text{ وسم/س}$$

السؤال الثاني

يتميز سلم طولاه ٥٥ امتار بطرف
العلوي على حائط عمودي ولطرف
السفلي على ارض مسطوره اذا
تحرك الطرف السفلي متبعا عن
اكاريط بمعدل ١/٢ م/س، فمعد
انخفاص الطرف العلوي للسلم
عندما يكون طرفه السفلي على
بعد ٣٣ من اكاريط



$$\frac{دس}{دص} = \frac{١}{2}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{2}{1}$$

$$\text{عندما } س = ٣٣$$

عندما س = ٣٣ فان

$$٥٥ = س + ٩ \Rightarrow ٤٦ = س$$

$$ص = ١٦ \quad ع = ٥٥$$

$$= \frac{١٦}{٤٦} \times ١٦ + \frac{٥٥}{٤٦} \times ٣٣$$

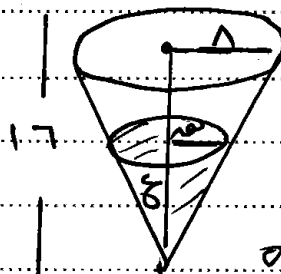
$$= \frac{١٦}{٤٦} \times ٢٥٦ + \frac{١}{٤} \times ٣٣ \times ٤٦$$

$$= \frac{١٦}{٤٦} \times ٨ + ٣$$

$$\frac{٢١}{٤٦} = \frac{دع}{دص}$$

السؤال الثالث

جمع على شكل مخروط دائري قائم
 قاعدته للأعلى ، فإذا كانت
 ارتفاع القمع ٦ كم ، وطول نصف
 قطر قاعدته ٨ كم ، صيغتين سأل
 عميل ١٢ كم / ٣ ، حدد معدل
 تغير مساحة سطح السائل عن
 القمع عندما يكون ارتفاع السائل
 ٨ كم



$$\frac{12}{8} = \frac{r}{4}$$

مساحة سطح

= مساحة الدائرة

$$= \pi r^2$$

$$\frac{12}{8} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 6$$

$$\text{من التشابه } \frac{12}{8} = \frac{16}{r}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{16}{r} \Rightarrow r = 10.67$$

$$\frac{12}{8} = \frac{16}{r} \Rightarrow r = 10.67$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{4} \pi r^2 =$$

$$\frac{12}{8} \times \frac{1}{3} \pi r^2 = \frac{12}{8}$$

$$\frac{12}{8} \times 16 \times \frac{1}{3} \pi r^2 = 12$$

$$\frac{12}{8} = \frac{12}{\pi r^2} = \frac{12}{\pi r^2}$$

$$r = \frac{12}{\pi}$$

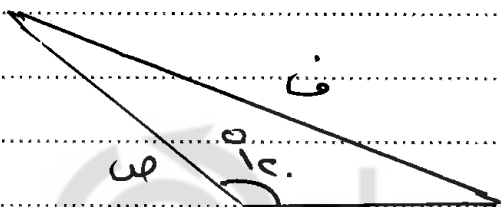
$$\frac{12}{8} \times \frac{1}{3} \pi r^2 = \frac{12}{8}$$

$$\frac{12}{8} \times \frac{1}{3} \pi r^2 =$$

$$= 12$$

السؤال الرابع

انطلقت صفتان من ابيس
 نفا في اتجاهين مختلفين على
 شكل خطين مستقيمين قياس
 الزاوية بينهما (١٢٠°) ، اذا كانت
 سرعة الأولى ٣ كم / س ، سرعة
 الثانية ٤ كم / س ، حدد معدل
 تغير البعد بينهما عندما يكون
 عن نقطة الانطلاق ٦ كم ، ٨ كم
 على الترتيب



$$\frac{12}{8} = \frac{12}{\pi r^2} = \frac{12}{\pi r^2}$$

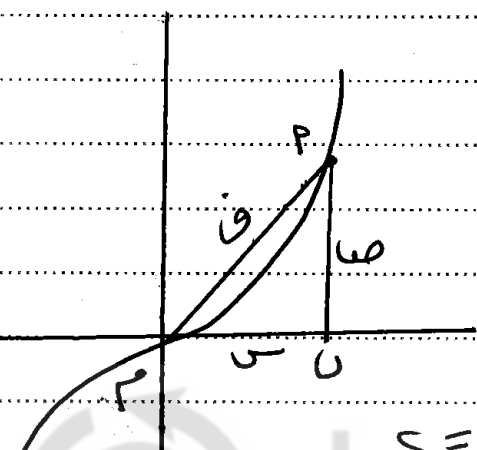
$$\frac{12}{8} = \frac{12}{\pi r^2} = \frac{12}{\pi r^2}$$

← تبعد اكل

السؤال الخامس من ٧٧

بدأت النقطة P بحركة عمداً من نقطة الأصل (٣) بحيث تتحرك النقطة P على محور السينات الموجب مسافة عن نقطة الأصل بسرعة ٤ م/ث وتتحرك النقطة P على الترتيب الأول على محور السينات بحيث يتغير P دائماً بحسب المعادلة

الموجب م.
 (أ) معدل التغير في سرعة التمثيل P م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة
 (ب) معدل التغير في طول وتر التمثيل P م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة



بعد ثانية واحدة = سرعة التمثيل
 $c = \frac{س}{٧.٥}$
 سرعة التمثيل = $\frac{1}{٧.٥} \times$ إلقاءه \times الارتفاع
 $م = \frac{1}{٧.٥} \times ٧.٥ \times ٧.٥ = ٧.٥$
 $\frac{1}{٧.٥} =$ ← نضع

$$ق^2 = س^2 + ٧.٥^2 - ٢ \times س \times ٧.٥ \times \cos ٦٠$$

$$= س^2 + ٧.٥^2 - ٢ \times س \times ٧.٥ \times \frac{1}{٢}$$

$$= س^2 + ٧.٥^2 - ٧.٥ س$$

$$ق = \sqrt{س^2 + ٧.٥^2 - ٧.٥ س}$$

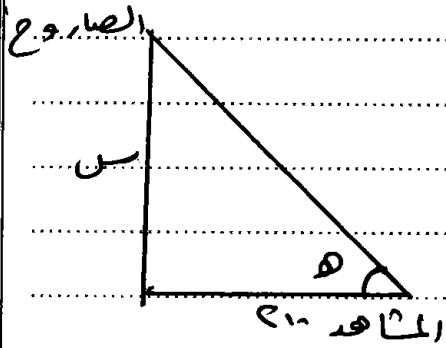
$$\frac{دق}{دس} = \frac{٢س + ١٥ - ٧.٥}{٢ \sqrt{س^2 + ٧.٥^2 - ٧.٥ س}}$$

$$\frac{دق}{دس} = \frac{٣ \times ٧.٥ + ٢ \times ٧.٥ + ٤ \times ٧.٥ + ٣ \times ٧.٥}{٢ \sqrt{٧.٥^2 + ٧.٥^2 - ٧.٥ \times ٧.٥}}$$

$$= \frac{٤٨ + ١٥ + ٢٨ + ٢١}{٢ \sqrt{٤٨ + ١٥}} = \frac{١١٢}{٢ \sqrt{٦٣}} = \frac{٥٦}{\sqrt{٦٣}}$$

الذوالقعدة

اطلع صباروع محمودياً لأعلى بسرعة
 ١١م/ث، وعلى بعد ١٠٠م من
 نقطة انطلاق الصاروع، كان
 شاهداً جانبياً على الأرض ينظر
 إلى الصاروع، بعد معدل تغير زاوية
 ارتفاع نظر المشاهد عنه ما يكون
 الصاروع على ارتفاع ١٠٠م من
 من سطح الأرض.



$$\frac{س}{هـ} = \frac{١١}{١٠٠}$$

$$\frac{س}{١٠٠} = \frac{١١}{١٠٠}$$

$$س = ١١$$

ظاهر = $\frac{س}{هـ}$

$$\frac{س}{١٠٠} \times \frac{١}{١٠٠} = \frac{١١}{١٠٠} \times \frac{١}{١٠٠}$$

لكن عند ما س = ١٠٠ فإن

$$ظاهر = \frac{١١}{١٠٠} = ٠.١١$$

١ + الظاهر = قأه

$$١ + ٠.١١ = قأه \Rightarrow قأه = ١.١١$$

$$\frac{١}{١.١١} = ١.٠٠ \times \frac{١}{١.١١} = \frac{١}{١.١١}$$

= ا.و.ر.ا.د.ن

$$\frac{١١}{١٠٠} \times \frac{١}{١٠٠} = \frac{١١}{١٠٠}$$

$$١ \times (١) = ١$$

$$٣٤ = ١ \times ٨ \times ٤ = ٣٢$$

$$\textcircled{١} \quad \frac{س}{هـ} = \frac{س}{هـ} + \frac{س}{هـ}$$

$$\frac{س}{هـ} = \frac{س}{هـ} + \frac{س}{هـ}$$

$$\frac{س}{هـ} = \frac{س}{هـ} + \frac{س}{هـ}$$

$$\frac{س}{هـ} = \frac{س}{هـ} + \frac{س}{هـ}$$

$$\frac{س}{هـ} \times \frac{س}{هـ} = \frac{س}{هـ}$$

$$٣٤ = ١ \times ٨ \times ٤ = ٣٢$$

عند ما س = ١٠٠ فإن

$$\frac{س}{هـ} = \frac{س}{هـ} + \frac{س}{هـ}$$

$$٣٨٤ + ٨ =$$

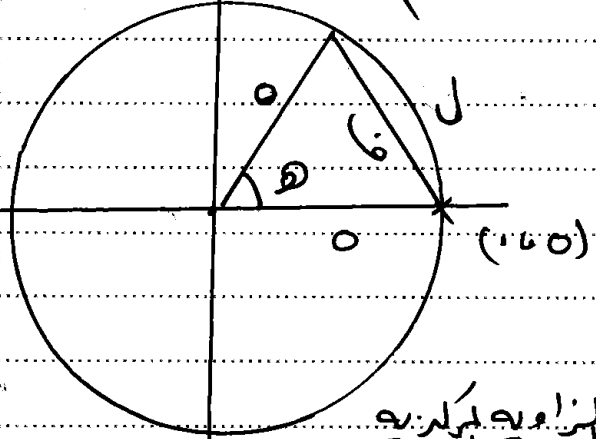
$$\frac{٣٩٢}{٦٨٧}$$

$$\frac{١٩٦}{٦٨٧} = \frac{٣٩٢}{٦٨٧}$$

$$\frac{١٩٦}{٦٨٧} = \frac{٣٩٢}{٦٨٧}$$

السؤال السابع

بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الاصل من النقطة (١,٥) باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي يمسح النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١ سم/ثانية، حدد معدل ابتعاد النقطة بالحركة عن النقطة (١,٥) عند ما يتزايد طول القوس الذي تمسحه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ راد



هـ : الزاوية المركزية بالتقدير الدائري
 ف : بعد النقطة بالحركة عن (١,٥)
 ل : طول قوس الدائرة
 $\frac{dl}{dt} = 1$: المطلوب
 $\frac{df}{dt} = \frac{1}{3}$

حسب قانون جيب التمام



$$f = 20 + 20 - 20 \times 0 \times 0 = 20$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$f = \sqrt{0 - 0} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-x_0 - x_0 \times \frac{dx}{dt}}{2f}$$

$$\sqrt{0 - 0} = 0$$

لكل = ٢٥ هـ

ل = ٥ هـ

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dx}{dt} \times 0 = 0$$

$$\leftarrow 1 = \frac{dx}{dt} \times 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{0}$$

$$\leftarrow \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{20 \times \frac{\pi}{3} \times 0 + 20 \times 0}{2 \times \sqrt{0 - 0}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{20 \times \frac{\pi}{3} \times 0 + 20 \times 0}{2 \times \sqrt{0 - 0}}$$

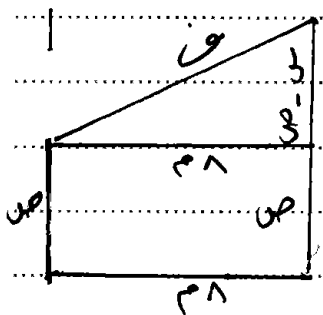
$$20 \times \frac{\pi}{3} \times 0 = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{20 \times \frac{\pi}{3} \times 0 + 20 \times 0}{2 \times \sqrt{0 - 0}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{20 \times \frac{\pi}{3} \times 0 + 20 \times 0}{2 \times \sqrt{0 - 0}}$$

السؤال التاسع ص ١٧٨

مصعدان كهربائيان متحركان في الطابق الأرضي ما المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٤ م/ث ويبدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١ م/ث من المصعد الثاني من أيدي حركة المصعد الثاني



الحل
 المسافة بين مظهر المصعد الأول
 المسافة بين قطرها المصعد الثاني

$$c = \frac{ds}{dt} = 4 \quad \text{و} \quad a = \frac{ds}{dt} = 1$$

المسافة = السرعة × الزمن

$$s = 4 \times c = 8 \quad \text{و} \quad s = c \times 1 = c$$

$$f^2 = (s - c)^2 + 64$$

$$f = \sqrt{(s - c)^2 + 64}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{(s - c)^2 + 64} = \frac{(s - c) \times (c - 1)}{\sqrt{(s - c)^2 + 64}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{(1 - 4)(4 - 1)}{\sqrt{64 + (4 - 1)^2}}$$

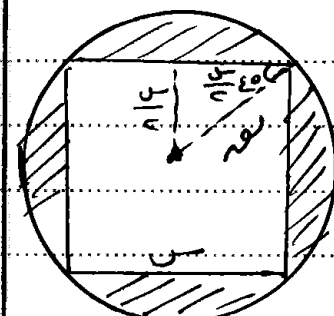
$$\frac{df}{dt} = \frac{-3}{\sqrt{73}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-3}{\sqrt{73}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-3}{\sqrt{73}}$$

السؤال الثامن ص ١٧٨

تتمدد اضلاع مربع عمودك بحجم / ث رمت دائرة حول المربع بحيث تلا من رؤوسه، وأخذت تتعدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها، حدد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع عند ما يكون طول اضلاع المربع ١٠ أمتار



الحل
 س: طول اضلاع المربع

$$\frac{ds}{dt} = 4$$

$$\frac{dr}{dt} = 1$$

$$s = 10$$

٢ = مساحة المنطقة المحصورة (المطلوب)

٣ = مساحة الدائرة - مساحة المربع

$$\pi r^2 - s^2 = 2$$

لكنه حاصله = $\frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}$

$$\frac{d}{dt} (\pi r^2 - s^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\pi r^2 - s^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2\pi r \frac{dr}{dt} - 2s \frac{ds}{dt} = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{s}{\pi r} \frac{ds}{dt} = \frac{10}{\pi \times 5} \times 4 = \frac{8}{\pi}$$

$$2\pi r \frac{dr}{dt} - 2s \frac{ds}{dt} = 0$$

$$2\pi \times 5 \times \frac{8}{\pi} - 2 \times 10 \times 4 = 0$$

$$80 - 80 = 0$$

أسئلة الوزارة

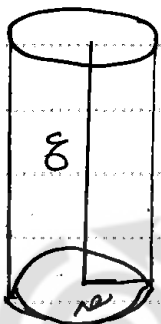
$$f = \sqrt{c(200) + c(50+100)}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{c(50+100) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{c(50+100)}} + \frac{1}{2\sqrt{c(200)}} \right)}{\sqrt{c(50+100) + c(200)}} = \frac{44}{5}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{11 \times 4}{\sqrt{16+9}}$$

٥) وزارة (٢٠٠٨) صيفية

الطائرة دائرية مائة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يادي $\frac{1}{3}$ طول قطر قاعدتها دائماً فإذا كان ارتفاعها يزداد عند ذلك اود $\frac{1}{3}$ من حجم المعدن الترخفي حجم هذه الطائرة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها $\frac{4}{3}$ كم.



الحل

$$h = \frac{1}{3} \times 2r = \frac{2}{3}r$$

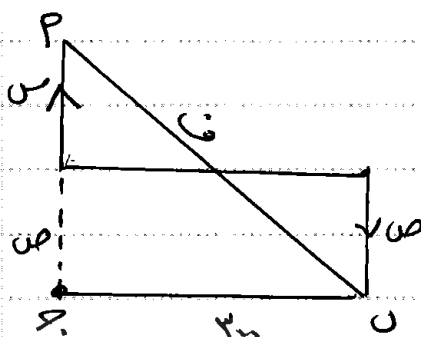
$$\frac{dh}{dr} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\pi r^2 \times \frac{2}{3}r \right) = \frac{4\pi}{3} r^2$$

عند $r = \frac{4}{3}$ فان $\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64\pi}{27}$

عند $r = \frac{4}{3}$ فان $\frac{dV}{dr} = \frac{64\pi}{27} = \frac{25}{3}$

١) وزارة (٢٠٠٨) شتوية
انطلق شخص من النقطة (٢) فجراً شمالاً البتاً ووجهه هوائية بسرعة ٦ م/ث، وبعد ٣ ثاينة ومن النقطة (١) لعاقبه على بعد (٣٠٠) متر شرقه النقطة (٢) انطلق شخص ثانٍ فجراً جنوباً البتاً ووجهه هوائية بسرعة ٥ م/ث بعد بعد تغير المسافة بين الدراجين بعد (٢) ثاينة من انطلاق الدراجه الثاني



الحل

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

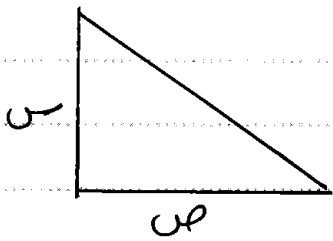
س: المسافة التي يقطعها P = المسافة التي يقطعها N
 $300 = 50 \times 6 = 300$
 س: المسافة التي يقطعها N
 $100 = 50 \times 2 = 100$
 في المثلث P > Q
 $f = \sqrt{c(300) + c(50+100)}$

④ وزارة (٢٠١٩) صيفيت

③ وزارة (٢٠١٩) شتوية

في لحظة ما كان طولاً ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية c 16 ، 17 كما فإذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل c سم/ث، وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل c سم/ث حيث ان المثلث يبقى محافظاً على شكله، حدد معدل التغيير في مساحة المثلث بعد c ثانية من تلك اللحظة.

تتحرك نقطة حادية P على منحنى لإقران $u = v$ في الربع الأول بادية من نقطة الأصل P ، فإذا كانت الاصدائي السيني للنقطة P يتزايد بمعدل c وحدة/ث، وكانت جرد نقطة P (0.68) ، حدد معدل تغير مساحة المثلث OP بعد c ثانية من بدء حركه النقطة P .



$$\frac{d}{dt} \frac{u}{v} = c$$

$$1 - \frac{u}{v} = c$$

$$c = \frac{1}{v} \frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{1}{v} \frac{du}{dt} + \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dt} \right) \frac{1}{c} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \right)$$

بعد c ثانية

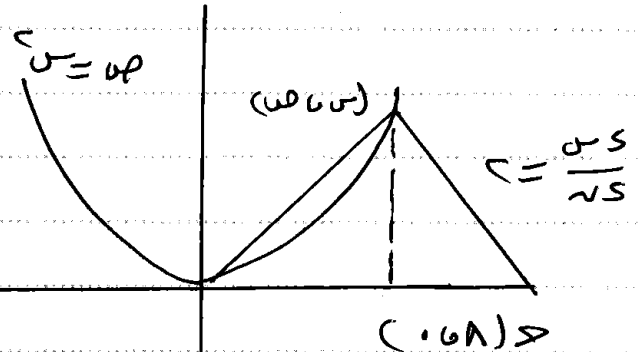
$$17 = c \times c + 1c = v$$

$$14 = 1 \times c - 17 = u$$

$$\left(c \times 14 + 1 - 17 \right) \frac{1}{c} = \frac{c}{v}$$

$$\left(c \times 14 + 1 - 17 \right) \frac{1}{c} =$$

$$7 = \frac{1c}{c} =$$



$$c = \frac{du}{dt} = 0.68 \times \frac{1}{v} = c$$

$$c = \frac{du}{dt} = 0.68 \times \frac{1}{v} = c$$

$$\frac{c}{v} = \frac{c}{0.68} = c$$

$$c = c \times c = c$$

$$74 = c \times c \times 0.68 = \frac{c}{v}$$

وزارة (٢٠١٠) سوي

يُضخ غاز داخل بالون كروي
عبدل (١٢٥) سم^٣ ، بعد فصل
الزيادة في مساحة سطح البالون
عند ما يكون طول قطر البالون π كم

الحل

٢: حجم البالون ٣ : مساحة سطحه
نصف : نصف القطر

$$\frac{2}{\pi r} = \frac{3}{r^2} \quad 125 = \frac{2}{\pi r}$$

$$r = 0$$

$$2 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\frac{2}{\pi r} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$125 = \frac{2}{\pi r} \times \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\frac{0}{\pi r} = \frac{125}{\frac{2}{3} \times \pi r} = \frac{2}{\pi r}$$

$$4 = \pi r^3$$

$$\frac{2}{\pi r} = \frac{4}{\pi r^3} \times \pi r^3$$

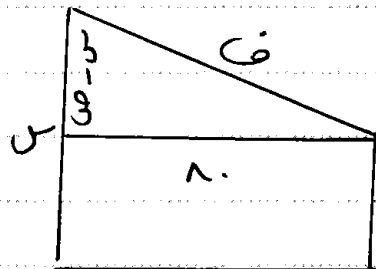
$$\frac{0}{\pi r} \times 0 \times \pi r^3 =$$

$$= 0 \text{ كم}^3$$



⊙ وزارة (٢٠١٠) صيف

قاربان ٢، ٥ من المسافة الأفقية بينهما ٨٠ م، بدأ القارب (٢) بالحركة بسرعة ٢ م/ث، وبعد ثانية بدأ القارب (١) بالحركة في قط مواز للقارب (٢) وبنفس الاتجاه سرعة ١٠ م/ث بعد معدل التغير في المسافة بين القاربين بعد ٤ ثواني من انطلاق القارب (١)



الحل

بعد ٤ ثواني $٨٠ = ٢ \times ٤ =$
 بعد ثانية $٢٠ = ١٠ \times ٢ =$

$٢٠ + (١٠ - ٢) = ٢٠$

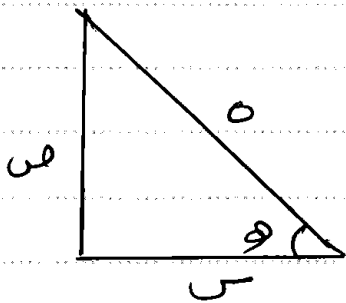
$٢٠ + (١٠ - ٢) = ٢٠$
 $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}} = \frac{٢٠ + (١٠ - ٢) \times ٤}{\sqrt{٥}}$

$\frac{٢٠}{\sqrt{٥}} = \frac{٢٠ + (١٠ - ٢) \times ٤}{\sqrt{٥}}$
 $(١٠ - ٢) \times ٤ = ٢٠ - ٢٠$

$\frac{٢٠}{\sqrt{٥}} = \frac{٢٠ + (١٠ - ٢) \times ٤}{\sqrt{٥}}$
 $٦ = \frac{١٠ \times ٦}{١١}$

وزارة (٢٠١١) شتوي

سليم طوله ٥ م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي، و طرفه السفلي على ارض افقية، اذا انزله الطرف السفلي لبس متبعداً عن الحائط بمعدل ٢ م/د، فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض عندما يكون طرفه السفلي على بُعد ٣ م من الحائط



عند $٣ =$
 تكون

$٥ = ٣ + ٤$
 $١٦ = ٤ + ٤$
 $٤ = ٤$

$\frac{٣}{٥} =$

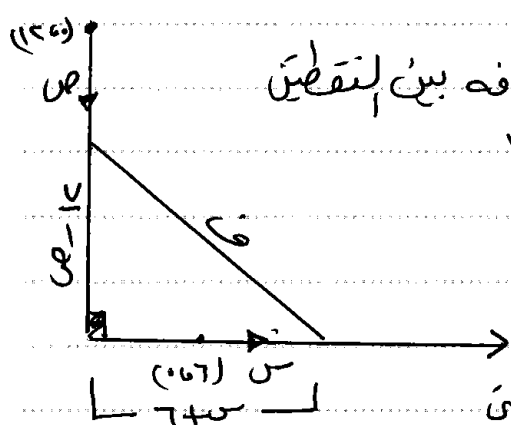
$\frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥}$

$٢ \times \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥}$

$\frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥}$

⑧ وزارة (٢٠١٤) شتوية

بدأت نقطة ماديه الحركة من النقطة
 (١٠٦٦) على محور السينات متبعدة
 عن نقطة الاصل بسرعة 3 م/ث
 وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة اخرى
 الحركة من النقطة (١٢٦٠) على
 محور الصادات متبعدة من نقطة
 الاصل بسرعة 3 م/ث ، بعد عدل
 تغير المسافة بين النقطتين المتحركتين
 عندما تكون النقطة المتحركة على محور
 الصادات على بعد 8 م من نقطة
 الاصل .



الحل
 ف: المسافة بين النقطتين

$$s = \frac{3t}{\sqrt{5}}$$

$$v = \frac{3t}{\sqrt{5}}$$

س: المسافة بين
 نقطتي النقطة الأولى
 $s = 3t$ ، $v = 3$

$$f = (3t + 6) + (1260 - 3t)$$

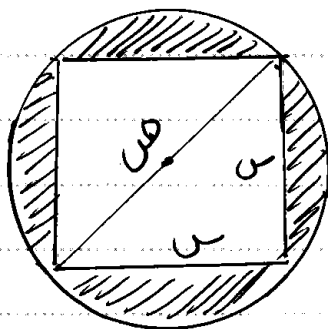
$$= 3t + 6 + 1260 - 3t = 1266$$

$$f = 3t + 6 + 1260 - 3t = 1266$$

$$f = 1266 - 3t = 1266 - 3 \times 8 = 1266 - 24 = 1242$$

⑨ وزارة (٢٠١١) صيفية

تتمدد دائرة بحيث يزداد طول قطرها
 بعدل (٦) م/د ، رسم مربع داخل
 الدائرة و اخذ يمد معها بحيث تبقى
 رؤوسه ملاصقة لها ، بعد عدل تغير
 مساحة المنطقة المحصورة بين المربع
 والدائرة عندما يكون طول قطر الدائرة
 10 م .



الحل

تفرض طول قطر
 الدائرة = v

وطول ضلع المربع = s

$$\frac{v}{\sqrt{2}} = s \quad v = 10$$

مساحة المنطقة المحصورة

$$= \text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة المربع}$$

$$= \pi \left(\frac{v}{2}\right)^2 - s^2$$

$$= \frac{\pi}{4} v^2 - s^2$$

$$\text{لكل } v = s + \frac{dv}{dt} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$s = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dv}{dt}$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{dt} = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} v^2 - s^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} v^2 - \frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{4} (\pi - 2) \right)$$

$$= \frac{1}{2} v (\pi - 2) \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\pi}{3} = h \quad \frac{\pi}{9} = \frac{h}{\sqrt{5}}$$

$$S = (10 + 10 + 10) \times c - (10 + 10) = 30c - 20$$

$$S = 379 - 37.0 = 342$$

$$S = \sqrt{379 - 37.0} = 18.76$$

$$\frac{h}{\sqrt{5}} = \frac{37.0 - 342}{18.76}$$

$$h = \frac{37.0 - 342}{18.76} \times \sqrt{5}$$

$$h = \frac{\pi \times \sqrt{5} \times 37.0}{9}$$

$$h = \frac{1}{9} \times 37.0 - 37.9 \sqrt{c}$$

$$\frac{\pi \sqrt{5}}{9} = \frac{\pi \sqrt{5} c}{18.76}$$

١٠) وزارة (١٣، ١٤) شوية

سلام طولة (١٣) م يرتكز طرفه العلوي على حائط عمودي و طرفه السفلي على ارض افصيه ، اذا انزلناه ل طرف السفلي فبعداً عن الحائط بمعدل (١٠) م / ث فما معدل التغير في قياس الزاوية المحصورة بين الطرف السفلي للسلام و سطح الارض في اللحظة التي يكون فيها طرفه العلوي على ارتفاع ١٢ م عن سطح الارض

← يسع اكل

$$\frac{6 - 13c}{c} = \frac{h}{\sqrt{5}}$$

تكون النقطة الثابتة على بعد ٨ م من نقطة الاصل $12 = 13c - 6c = 7c$

$$c = \frac{12}{7}$$

في وقت عندما $c = \frac{12}{7}$

$$18.76 = 13c - 6c = 7c$$

$$18.76 \times 7 = 131.32 = 7c$$

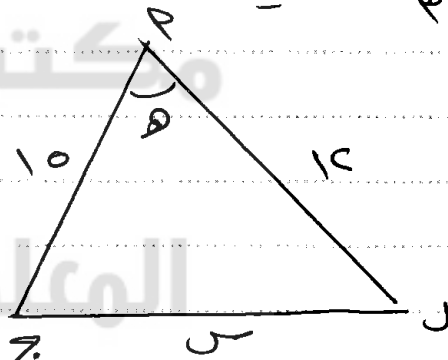
$$\frac{c}{131.32} = \frac{6 - 13c}{131.32} = \frac{h}{\sqrt{5}} \quad c = 0$$

$$\frac{0}{131.32} =$$

٩) وزارة (١٣، ١٤) صفيه

٥٠ م صلت فيه $50 = 13c$
 ٤٠ م $40 = 10c$ يزداد قياس الزاوية
 ٥٠ م معدل $\frac{\pi}{9}$ راديان / ث

بعد معدل تغير طول اضلع 50 م
 عندما يكون قياس الزاوية 50 م
 زاوي $\frac{\pi}{9}$ راديان



$$f' = \sin^2 + \sin + \cos$$

$$f = \sqrt{\sin^2 + \sin + \cos}$$

$$f'' = \frac{2\sin \cos + \cos - \sin}{\sqrt{\sin^2 + \sin + \cos}}$$

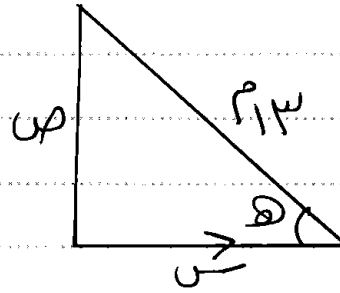
$$f'' = \frac{2\sin \cos + \cos - \sin}{\sqrt{\sin^2 + \sin + \cos}}$$

بعد نصف ساعة

$$s = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \quad c = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$f'' = \frac{2 \times 4 \times 3 + 3 - 4}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 16}}$$

$$= \frac{16}{37}$$



اكل

$$\frac{ds}{dt} = 1$$

$$dc = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{5}$$

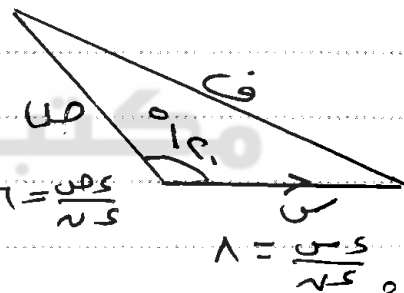
$$- \frac{dh}{dt} \times \frac{1}{5} = \frac{ds}{dt} \times \frac{1}{5}$$

$$- \frac{dh}{dt} \times \frac{1}{5} = \frac{ds}{dt} \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{dh}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

11) وزارة (٢٠١٣) صيف

انطلقه كاربان من نفس النقطة في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما 120° ، اذا كانت سرعة الاول 8 كم/س ، وسرعة الثاني $(6) \text{ كم/س}$ ، فجد معدل تغير المسافة بينهما بعد مرور نصف ساعة من انطلاقهما



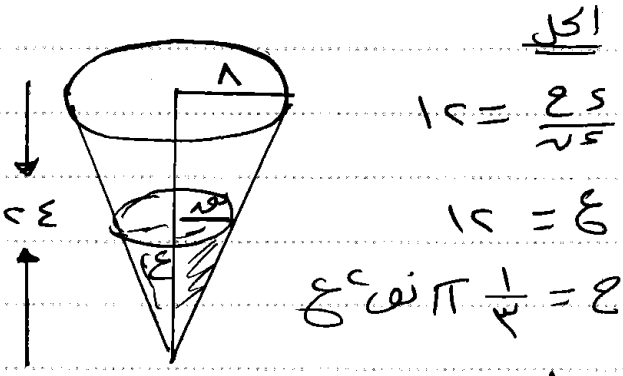
اكل

فاختر حسب المتنام

$$f = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 120}$$

12) وزارة (٢٠١٤) شتوية
تقف رجل طولاه (1.8 م) متراً امام مصباح كهربائي صيماً على عمود ارتفاعه عن سطح الارض (4 م) متراً ، اذا اخذ الرجل بالاقتراب من قاعدة العمود بمعدل 0.5 م/س ، فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والمصباح الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد (1.8 م) متراً من قاعدة العمود

← يتبع اكل



الحل

$$10 = \frac{r}{\sqrt{5}}$$

$$10 = r$$

$$r = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\frac{r}{3} = h \leftarrow \frac{10}{r} = \frac{h}{3}$$

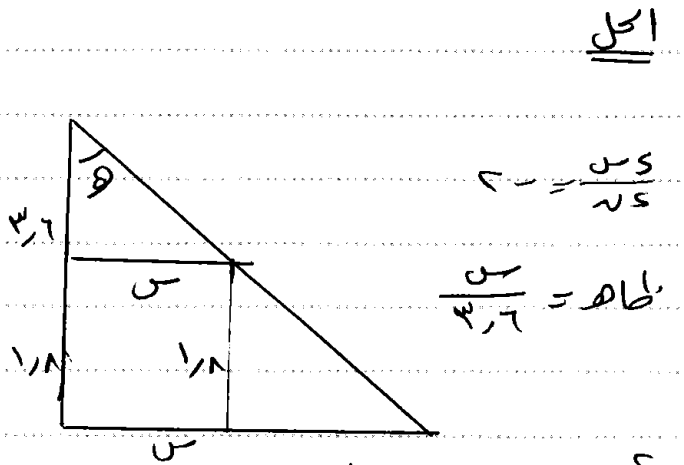
$$r \times \left(\frac{r}{3}\right) \times \pi \frac{1}{3} = r$$

$$r^2 \times \frac{\pi}{9} =$$

$$\frac{r^2}{9} \times \pi \times \frac{1}{3} = \frac{r}{3}$$

$$\frac{r^2}{9} \times (10) \times \frac{\pi}{9} = 10$$

$$\frac{r}{\pi 9} = \frac{10}{\pi 16} = \frac{r}{\sqrt{5}}$$



الحل

$$3 = \frac{r}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{r}{3} = h$$

$$\frac{r}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{3} = \frac{h}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{h}{3} = \frac{h}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + 1 = h + 1 = h + \frac{5}{2}$$

$$3 - x \frac{1}{3} = \frac{h}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{2}$$

$$\frac{r}{9} = \frac{10}{18} = \frac{r}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{h}{\sqrt{5}}$$

(١٤) وزارة (٢٠١٥) شوية
 النحل المجاور على المثلث OP و P برسم
 في مستوى P (٢٠١٨) و (٢٠١٥) و (٢٠١٥)
 قياس الزاوية $PO = 30^\circ$ بدأت
 نقطة P بحركة من P على OP باتجاه
 O وبسرعة مقدارها 3 سم/ث، وبفس
 اللوحة بدأت نقطة اخرى بالحركة من
 P على OP باتجاه O وبسرعة
 مقدارها 3 سم/ث بعد تعديل تغير
 بعد نقطتين المتحركتين عنه بعضها
 بعد ثابته واحدة منه بدء حركتهما
 ← يسع الحل

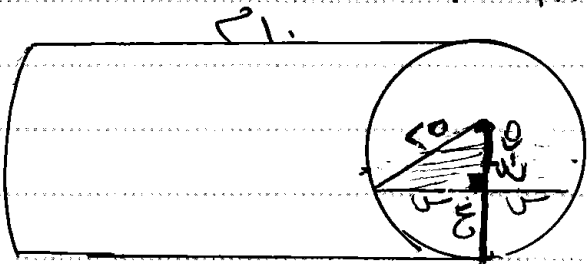
(١٣) وزارة صيفه (٢٠١٤)
 اناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه
 للأسفل وقاعدته افقيه، يكب
 فيه الماء بعدل (١٢) سم/ث، فاذا
 كان قطر قاعدته (١٦) سم وارتفاعه
 (٢٤) سم، بعد تعديل تغير ارتفاع
 الماء في الاناء عندما يصبح ارتفاع
 الماء فيه (١٢) سم

$$\frac{(3-1)c + \sqrt{c^2 + (3-1)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{f}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{3\sqrt{8} - \sqrt{c^2 + (3-1)^2}}{\sqrt{c^2 + (3-1)^2}}$$

١٥) وزارة (٥،١٥) مدينة

بحري الماء في انبوب اعني الطواني
 الشكل طولاه (١٠، ٣) وطول نصف
 قطره يساوي (٥) ، فاذا كان
 عمق الماء في الانبوب يتناقص بمعدل
 ٣ سم/د ، فجد معدل التغير في
 مساحة سطح الماء العلوي في
 الانبوب عندما يكون عمقه الماء
 ١٨ سم



مساحة سطح مستطيل

٣ = الطول × العرض

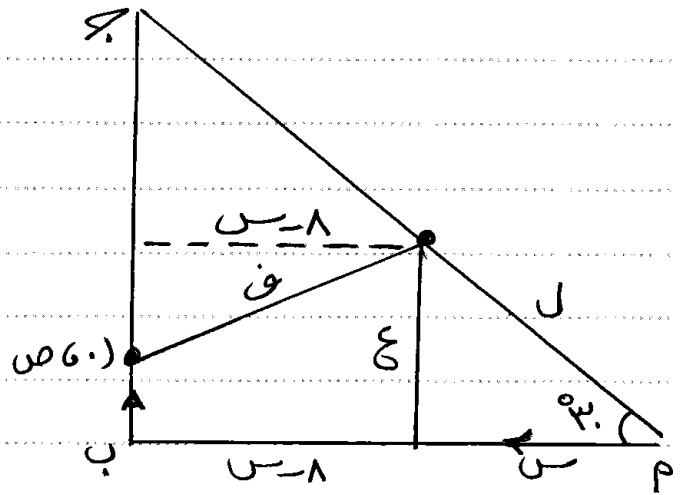
$$3 \times 10 = 30 = 3 \times c = \frac{3c}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{3c}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

$$3 = (5 - c) + (c - 5) + 3$$

$$c = \frac{30}{\sqrt{5}} - (5 - c) + \frac{30}{\sqrt{5}}$$

← يتبع اكل



$$\frac{c}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \frac{f}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{c}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow c = 3$$

$$\frac{f}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow f = 3$$

$$c = \frac{3c}{\sqrt{5}} \Rightarrow c = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{30}{\sqrt{5}} = c \Rightarrow \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{30}{\sqrt{5}} = c \times \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \times \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

$$f^2 = (3-1)^2 + (1-3)^2 = 4 + 4 = 8$$

$$c \times \frac{f}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{8}}{5} = \frac{30 \times 2\sqrt{2}}{5} = 12\sqrt{2}$$

$$c = 1 \times c = 1$$

$$1 \times 1 = 1$$

$$f = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$$

$$m = \text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة المثلث}$$

$$= \pi r^2 - \frac{1}{2} \times s \times s \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \pi r^2 - \frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$$

$$= \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} s^2 \quad \text{--- 1}$$

لكنه من المثلث
حساباً $\frac{1}{2} s^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$$

$$s = \frac{1}{2} s^2 \sqrt{3}$$

حي 1

$$3 = \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$= \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\pi r^2}{\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$3 \times (9 \times \frac{\pi}{3} - 9 \times \frac{\sqrt{3}}{4} s^2) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{3} - \pi \cdot 9 =$$

$$18 = 6 \times 3$$

$$s^2 = (18 - 60) + 60$$

$$s^2 = 60 - 42 = 18$$

$$s = \sqrt{18}$$

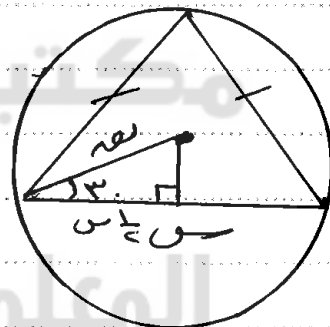
$$= 3 \times (18 - 60) + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 18 \times 18$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \times 18 \times 18}{4 \times 18}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \times 18}{4} = \frac{27}{2}$$

16) وزارة (16) شتوية

رسم مثلث متساوي الاضلاع داخل دائرة حيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة ، يد أنس من الدائرة والمثلث بالمكبر محافظتين على شكلها ووضعها بحيث يبعد نصف قطر الدائرة عمود (3) / 3 ، بعد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمثلث عندما يكون نصف قطر الدائرة (9) م



الحل

$$s = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

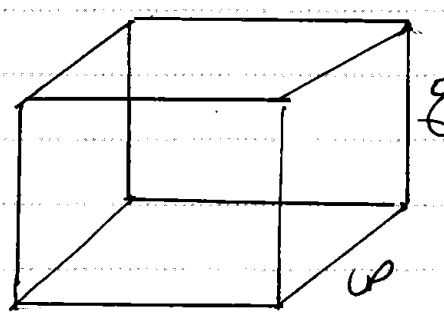
$$\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$9 =$$

١٧) وزارة (٢٠١٦) مريض

صندوق معدني على شكل متوازي
مستطيلات طوله مثل عرضيه
وارتفاعه (٣) اضع عرضيه
لقد د الحراره محافظاً على شكله
حيث يزداد حجمه بمعدل (٧) كم^٣
معدل التغير في مساحه
سطحه االكلي عندما يكون
طول (٣) م .

اكل



$s = e = e$ عند $s = 36$ فان
 $18 = e$
 $e = 3$
 المثلثون
 $\sqrt{e} = \frac{e}{s}$
 $\frac{e}{s} = \frac{36}{18} = 2$
 $e = 36$

طاحه اكله = م

$3 = s + e + e = 36 + 36 + 36 = 108$

$s^2 + e^2 + e^2 = 36^2 + 36^2 + 36^2 = 3 \times 36^2 = 3 \times 1296 = 3888$
 $s^2 + e^2 + e^2 = 3888$
 $3e^2 = 3888$
 $e^2 = 1296$
 $e = 36$

① -- $\frac{e}{s} = \frac{36}{36} = 1$

لكن
 $s = e = e$
 $s^2 + e^2 + e^2 = 3888$
 $3e^2 = 3888$
 $e^2 = 1296$
 $e = 36$

$\frac{e}{s} = \frac{36}{36} = 1$

$\frac{e}{s} = \frac{36}{36} = 1$

تعويضاً $\frac{e}{s} = \frac{36}{36} = 1$

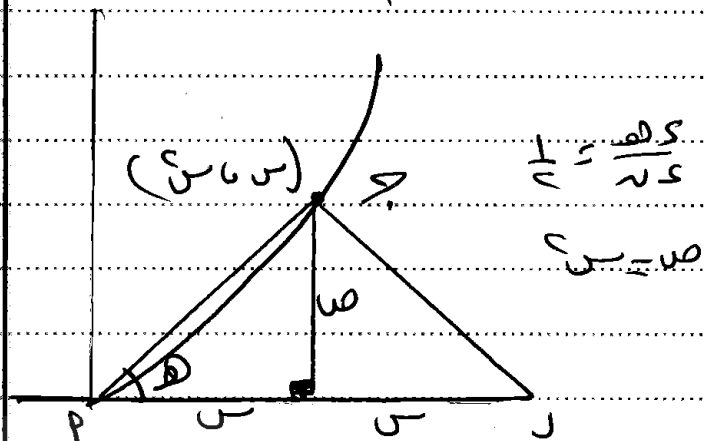
حي ①

$\frac{e}{s} = \frac{36}{36} = 1$

$\frac{18}{9} = \frac{18}{18} = 1$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

بدأت القطاران من نقطة الاصل (٠) حيث يتحركان على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الاصل ويتحركان النقطة Q في الربع الاول على فترتي الاقتران $(١, ٢)$ حيث يتغير طول PQ باس ١ في الثانية وكان معدل تغير الزاوية θ المقصورة بين محور السينات الموجب والنقطة Q في الثانية $\frac{1}{3}$ اذ كان معدل التغير في زاوية θ عند P في الثانية $\frac{\pi}{3}$



$$٣ = ١ \times س \times \frac{1}{س} = س$$

$$ظاه = \frac{س}{س} = \frac{س}{س} = ١$$

$$عند ه = \frac{\pi}{3} \text{ ما ظاه} = س$$

$$\leftarrow س = ٧$$

ظاه = س

$$\frac{س}{\sqrt{5}} = \frac{س}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{س}{\sqrt{5}} = \frac{س}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{س} \right)$$

$$\frac{س}{\sqrt{5}} = \frac{1}{س} \times ٤$$

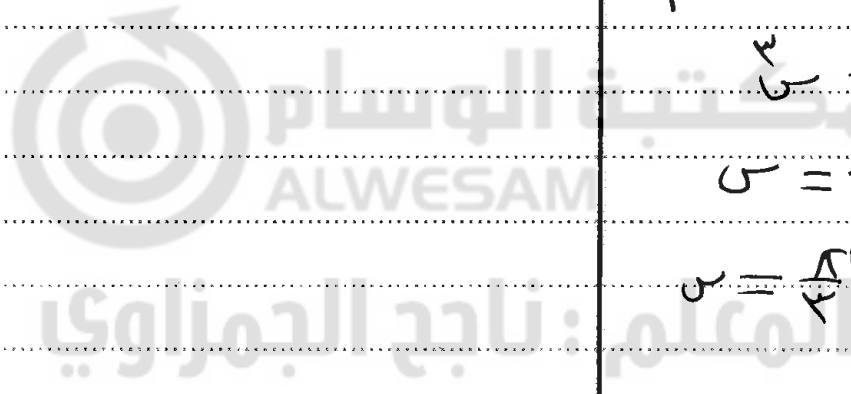
$\leftarrow \frac{س}{\sqrt{5}} = ١$

$$س = ٣$$

$$\frac{س}{\sqrt{5}} \times س = \frac{س}{\sqrt{5}}$$

$$٢ \times (٣) \times ٣ =$$

$$١٨ = ٢ \times ٣ \times ٣ =$$



$$f^2 = (s + w)^2 + 8^2$$

$$f = \sqrt{(s + w)^2 + 64}$$

$$f = \frac{df}{ds} (s + w) = \frac{2s}{\sqrt{s^2 + 64}}$$

$$f = \sqrt{(s + w)^2 + 64}$$

$$f = (s + w)(s + 4) = (s + 3)(s + 4)$$

$$f = \sqrt{(s + 4)^2 + 64}$$

$$0 \times 13 \times 4 =$$

$$\sqrt{64 + 169} = 15$$

$$60$$

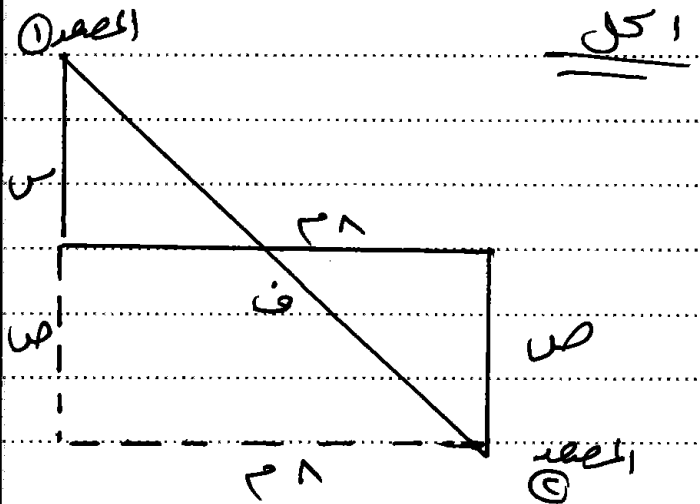
$$\sqrt{64 + 179} = 15$$

$$60$$

$$\sqrt{64 + 225} = 17$$

وزارة (٢٠١٧) مسابقة

صعدت كمر بائيان متفران
 في لطايع الارضني بالسنة لاقت
 بينهما (٨) م. فبدأ الصعد الأول
 في الارتفاع سرعة (٣) م/ث
 وبعد ثمانية بدأ الصعد الثاني
 في الانخفاض للأسفل بسرعة
 (٢) م/ث. صعدك تغير المسافة
 بين الصعدين بعد ثمانية من
 بدء حركة الصعد الثاني



زمن الصعد الثاني = ٢

زمن الصعد الأول = ٣ = ٢ + ١

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$9 = 3 \times 3 = 6$$

$$5 = 2 \times 2 = 4$$

وزارة (٢٠١٨) سنوية قدم

خزان ماء كروي الشكل طول نصف قطره $\left(\frac{3}{2}\right)$ م ، صب مياه الماء ، فإذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه $\frac{1}{6}$ م / د ، جد معدل تغير مساحة سطح الماء في الخزان بعد (٣) دقائق من صب الماء .

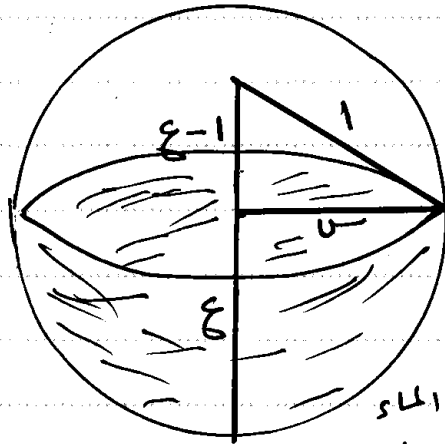
اكمل

نفس طريقة اعمل فقط تغير الارقام .

وزارة (٢٠١٨) سنوية جديد

خزان ماء كروي الشكل طول نصف قطره (٣) م ، صب مياه الماء ، فإذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه $\frac{1}{6}$ م / د ، جد معدل تغير مساحة سطح الماء في الخزان بعد دقيقتين من صب الماء .

اكمل



$r =$ نصف قطر الماء

$h =$ ارتفاع الماء

$$\frac{r}{h} = \frac{a}{\sqrt{r^2 - h^2}} \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{6}} = \frac{a}{\sqrt{3^2 - h^2}}$$

$=$ مساحة سطح الماء (دائرة)

المطلوب $\frac{dA}{dt}$

$t = 2$

$$\text{من المثلث } r^2 = a^2 + (r-h)^2$$

$$r^2 = a^2 + r^2 - 2rh + h^2$$

$$\Rightarrow 0 = a^2 - 2rh + h^2 \Rightarrow 2rh = a^2 + h^2$$

$$\text{فان } h = \frac{a^2 + h^2}{2r} = \frac{a^2 + h^2}{6}$$

$$\Rightarrow \pi a^2 = 3 \Rightarrow \pi (a^2 - h^2) = 3$$

$$\pi \left(\frac{a^2 + h^2}{2} - h^2 \right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\pi \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{36} - \frac{1}{6} \times h \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2} \times \pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{6} \right) \pi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\pi}{2} =$$

ورقة عمل

المعدلات المرتبطة بالزمن

السؤال الأول

٤) تتحرك نقطة على منحني لإقتران
 $v(t) = 5 + 2t^2$ ، بحيث يزداد
 إحصائياً السيني معدل $v(t)$
 أو معدل تغير ليد لها عن
 النقطة (١، ٧) عندما $t = 2$

الجواب = $9/4$

٥) انطلقت سيارتان في نفس
 الوقت من المساء P ، صارت الأولى
 نحو المساء ب سرعة 60 كم/س
 وصارت الثانية نحو المساء ب سرعة
 80 كم/س أو معدل تغير ليد
 بين السيارتين ليد ساعتين من
 الإبحار عما بان إزاوية 90°
 قائمه

الجواب = (1000 كم/س) في مستوى حيث

٥) u و v مثل قائم إزاوية في
 ب إذا علمت ان هذا المثلث يتغير
 أولاً ، يبعه الرأس P في نقطة لاصل

ثانياً ، يتحرك الرأس Q بحيث يقع
 دائماً على منحنى $v(t) = 1 + t^2$

٣٦

ثالثاً ، الرأس u يبدأ التحرك
 من (١، ٧) ب سرعة 60 كم/س

أو معدل تغير خاصة ليد
 ليد u أو أي من حركة ب

الجواب = $71/12$

٦) مخروط دائري قائم رأسه إلى
 أسفل يخرج منه الماء بمعدل
 3 سم^٣/ثا ، وكانت حنفيه تصب
 في مخروط معدل 6 سم^٣/ثا وفي
 لحظة معينة كان ارتفاع الماء في
 المخروط = 8 سم اصب

٧) معدل التغير في ارتفاع الماء

٨) معدل التغير في نصف قطر الماء لعلوي

٩) معدل التغير في مساحة سطح الماء

عندما بان ارتفاع المخروط 6 سم ونصف قطره
 2 سم

السؤال الثاني

١٩) قضيب طوله ١٠ م يتحرك بحيث يبقى طرفاه P و Q على محوري السينات والصادات ، اذا كان الطرف P يتحرك متبعداً عن نقطة الاصل بسرعة ٢ م/ث ، او بعد سرعة الطرف Q على محور الصادات وكذلك معدل التغير في مسافة التمثيل تكون من القضيب و المحاور عند ما يكون الطرف P على بعد ٨ م من نقطة الاصل

الجواب = $\frac{14}{3}$

٢٠) تتحرك نقطة على فترت $v = 3t + 5$ ، فاذا كان الاصدائي السني يزداد بمعدل ٢ م/ث او بعد

٢١) معدل التغير في الاصدائي لصدائي

الجواب = $\frac{1}{364}$ م/ث

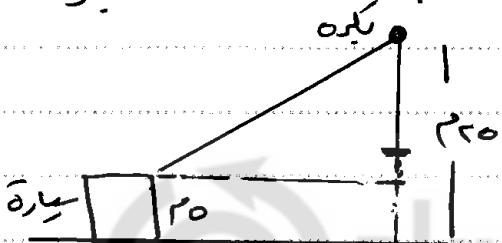
٢٢) معدل التغير في ميل المماس عند ما $t = 2$

الجواب = ٤٤

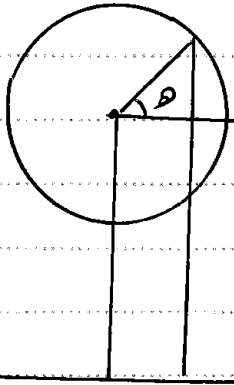
٢٣) يقع مصباح كهربائي في قمة عمود ارتفاعه ٣ م ، قذفت كرة رأسياً الى أعلى من نقطة على الارض تبعد ٢ م من قاعدة العمود حسب العلاقة $v = 30 - 5t$ سرعة ظل الكرة على الارض في اللحظة التي تكون فيها الكرة قد قطعت حافة ٥ م وهي صاعدة للاعلى

الجواب = $\frac{11}{3}$

٢٤) جبل طوله ٤٥ م يحول بكرة ترتفع عن الارض ٢٥ م مربوط بطرفه ثقل والطرف الاخر مربوط في سيارة على ارتفاع ٥ م ، اذا كانت السيارة تسير بسرعة ٦ م/ث او بعد معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي تبعد فيها السيارة صافة ٥ م من اسفل البكرة



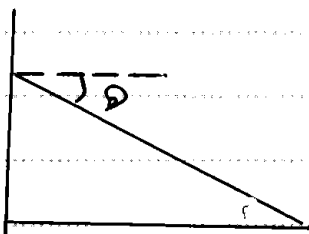
الجواب = $\frac{18}{5}$



الجواب = $\frac{3}{\sqrt{3}}$

٥) طائرة عمودية على ارتفاع ٣٠٠ م فوقه طريقه افقي مستقيم شاهد لطيار سيارة تبعد عن صقطة الطائرة على الشارع مسافة ١٥٠ م وتسير بسرعة ٣٥ م/د ، فاذا بدأت الطائرة بسرعة

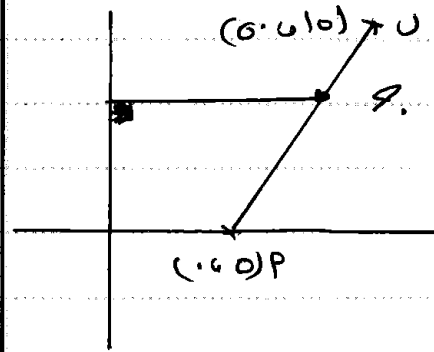
٣٥٠ م/د ، او يصل تغير زاوية الانخفاض بين الطائرة والسيارة ليدمرور دقيقتين



الجواب = $\frac{3}{17}$

السؤال الثالث

١) \overline{AP} قطعة مستقيمة فيها $P(0,60)$ و $A(10,610)$ تتحرك ج على القطعة المستقيمة بحيث يزداد الاهدائي السيني لها معدل $\frac{3}{\sqrt{3}}$ فما هو معدل تغير مساحة شبه المنحرف المكون من P و J و محور السينات و محور الاعدادات و العمود المنزل من J على محور الاعدادات وذلك عندما يكون الاهدائي لاعداد النقطة J يساوي ٣.



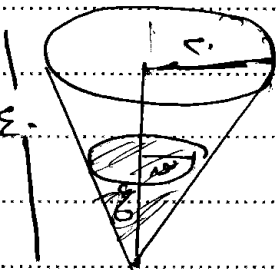
الجواب = ١١٠

٢) دولاب في مدينة العباب نصف قطره ٦٠ قدم ، وارتفاع مركزه عن الارض ٦٤ قدم ، يدور دورة كل دقيقتين ، واهد السرعة التي يتحرك بها راكب وهو على ارتفاع ٤٤ قدم و ما سرعه ارتفاع الراكب عندئذ

كسابع

حلول ورقة عمل المهرلات المرتبطة بالزمن

السؤال الأول



$$25 = r - r' = \frac{25}{\sqrt{5}}$$

$$r = 5$$

$$r' = \frac{1}{3} r = \frac{5}{3}$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{5/3}{5} = \frac{1}{3}$$

$$25 = h - h' \Rightarrow h - \frac{h}{3} = 25 \Rightarrow \frac{2h}{3} = 25 \Rightarrow h = \frac{75}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (5)^2 \left(\frac{75}{2}\right) = \frac{1250\pi}{2}$$

$$V' = \frac{1}{3} \pi (r')^2 h' = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{75}{6}\right) = \frac{1250\pi}{36}$$

$$V - V' = \frac{1250\pi}{2} - \frac{1250\pi}{36} = \frac{1250\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{36}\right) = \frac{1250\pi}{2} \times \frac{35}{36} = \frac{1250\pi \times 35}{72}$$

$$\frac{1250\pi \times 35}{72} = 2 \Rightarrow \frac{1250\pi \times 35}{72} = 2 \Rightarrow \frac{1250\pi \times 35}{72} = 2$$

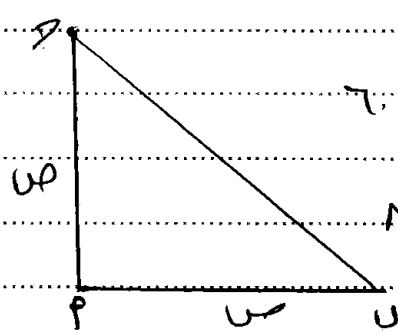
$$\frac{1250\pi \times 35}{72} = 2 \Rightarrow \frac{1250\pi \times 35}{72} = 2$$

$$\frac{1}{\pi \times 2} = \frac{2}{\pi \times 35} = \frac{25}{\sqrt{5}} \leftarrow$$

$$h' = \frac{1}{3} h = \frac{75}{6} = 12.5$$

$$\frac{25}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{3} = \frac{25}{3\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

منه



(A)

$$\sin \alpha = \frac{10}{19}$$

$$\cos \alpha = \frac{17}{19}$$

بعد ساعة

$$10 = c \times \sin \alpha \Rightarrow c = \frac{10}{\sin \alpha} = 19$$

$$17 = c \times \cos \alpha \Rightarrow c = \frac{17}{\cos \alpha} = 19$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (19)^2 \times 10 = \frac{70530\pi}{3}$$

$$V' = \frac{1}{3} \pi (r')^2 h' = \frac{1}{3} \pi (19)^2 \times 10 = \frac{70530\pi}{3}$$

$$V - V' = \frac{70530\pi}{3} - \frac{70530\pi}{3} = 0$$

$$19 \times 17 \times c + 10 \times 10 \times c = 2 \times 19 \times 10 \times c$$

$$\frac{19 \times 17 + 10 \times 10}{2 \times 19 \times 10} = 2$$

أعد

$$1.73 \times \frac{2-2 \times 2}{\sqrt{2+2 \times 2-2 \times 2 \sqrt{2}}} =$$

$$\frac{1}{\pi \lambda} = \frac{1}{\pi \varepsilon} \times \frac{1}{c} = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leftarrow$$

$$9 = 1.73 \times \frac{7}{1.73} =$$

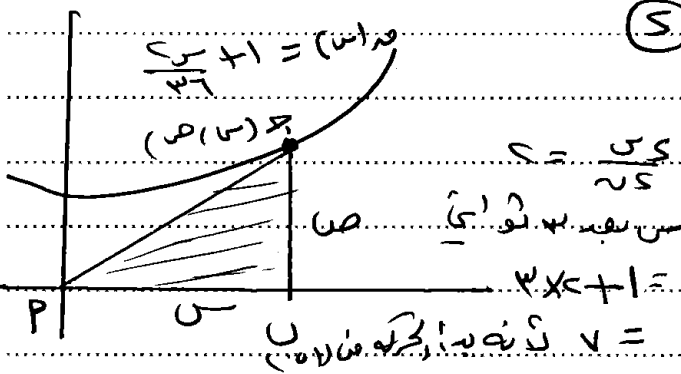
$$\text{ج) } \pi = 3 \text{ نصف}$$

$$\frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \pi c = \frac{4 \pi}{\sqrt{2}}$$

٥

$$\frac{1}{\pi \lambda} = \frac{1}{\pi \varepsilon} \times \frac{1}{c} =$$

$$\varepsilon = \lambda \times \frac{1}{c} = 8 \times \frac{1}{c} = \frac{8}{c} = \text{نصف}$$



$$3 = \frac{1}{5} \times 5 =$$

$$\left(\frac{2}{5} + 1\right) \times 5 =$$

$$\frac{2}{5} + 5 =$$

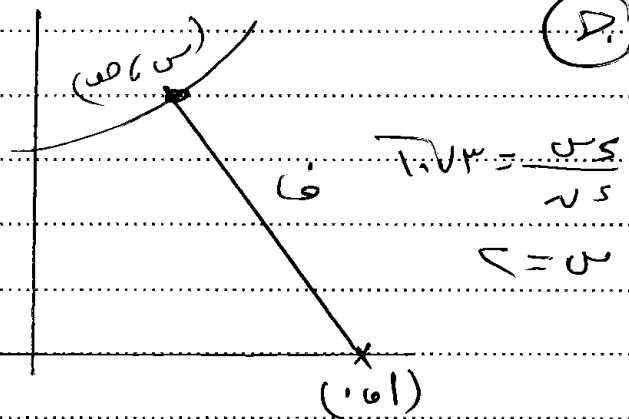
$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{25} + \frac{1}{5} = \frac{4}{25} + \frac{5}{25} = \frac{9}{25}$$

$$2 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} =$$

$$\frac{7}{5} = \frac{2}{5} + 1 =$$

السؤال الاول

٦



$$f = \sqrt{(1-s)^2 + (1-4s)^2}$$

$$0 + 5 = 5 \quad 0 + 5 = 5$$

$$f = \sqrt{0 + 5 + 1 + 5 - 2s}$$

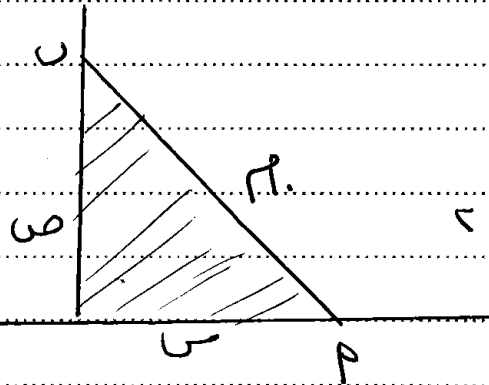
$$\sqrt{6 + 5 - 2s} =$$

$$\frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} (2-5) = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{6 + 5 - 2s}$$

السؤال الثاني

(P)



ص = 8

س = $\frac{ص}{2}$

ص + ص = 10

$\frac{ص}{2} + \frac{ص}{2} = 10$

عذرا ص = 8

ص + 6 = 10

ص = 4

$\frac{ص}{2} \times 6 + 8 \times \frac{ص}{2}$

$\frac{ص}{2} = 4$

$\frac{ص}{2} = \frac{ص}{2}$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة \times الارتفاع

$\frac{1}{2} \times ص \times س = 4$

$\frac{1}{2} \times ص \times \frac{ص}{2} + \frac{ص}{2} \times 6 = 4$

$\frac{1}{4} \times ص^2 + 3 \times ص = 4$

$\frac{1}{4} \times ص^2 + 3 \times ص - 4 = 0$

$\frac{1}{4} \times ص^2 + 3 \times ص - 4 = 0$

(Q) ص = ص² + ص³

$\frac{ص}{2} = \frac{ص(ص + ص^2)}{2}$

$2 \times (ص + ص^2) = 2$

$64 = 2 \times (ص + 16) = 2$

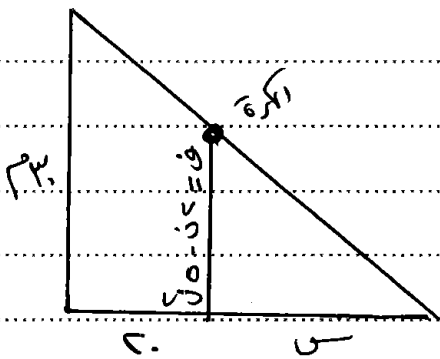
(R) ص = $\frac{ص}{2} = 3$

$\frac{ص}{2} = \frac{ص(ص + 1)}{2}$

$2 \times (ص + 1) = 2$

ص = 2

(S)



من نسبة المثلثات

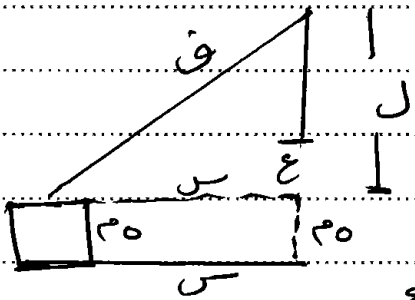
$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ص + س}$

$ص(ص + س) = ص^2$

$ص^2 + ص^2 = ص^2$

$ص(ص - ص) = ص^2 - ص^2$

$\frac{ص}{ص - ص} = 2$



المطلوب $\frac{ع}{\sqrt{5}}$

$$ف^2 = س^2 + (ل + ع)^2$$

بكرة $ع = ل + ل$ بالقطع
 $ع = ل + ل$

$$ف - ع = ل$$

$$\leftarrow ف = ع + ٢٥$$

$$ع^2 + س^2 = (ع + ٢٥)^2$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{٥٥ \times ٥٥}{\sqrt{5}} = \frac{٥٥ \times (ع + ٢٥)}{\sqrt{5}}$$

بكرة $ع^2 + (١٥) = (ع + ٢٥)$

$$ع \times ع + ١٥ \times ١٥ = \dots$$

$$ع + ٢٥ = (ع + ٢٥)$$

$$\textcircled{1} \leftarrow ٢٥ = (ع + ٢٥)$$

$$٢ \times ١٥ \times ع = \frac{٥٥ \times (ع + ٢٥)}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{١٨}{٥} = \frac{١٨٠}{٥} = \frac{٥٥}{\sqrt{5}}$$

$$\textcircled{5} \frac{ع}{\sqrt{5}} \times ١ - ع \times (١ - ع) = \frac{س}{\sqrt{5}} = \frac{س}{\sqrt{5}} \times (١ - ع)$$

بجدد = الزمن

$$١٥ = ف$$

$$١٥ = س - ع$$

$$س = ١٥ + ع$$

$$١٥ = ع + ٣$$

$$١٥ = (٣ - ع) \times ١٥$$

$$١٥ = ٣ - ع$$

$$ع = ٣ - ١٥$$

$$ع = س - ١٥$$

$$\frac{١ \times ١٥}{\sqrt{5}} = \frac{١٥ - ع}{\sqrt{5}}$$

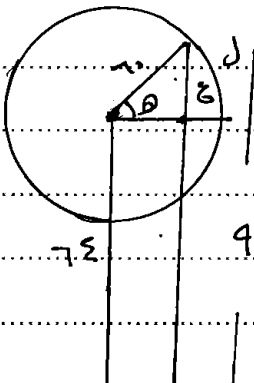
$$١٠ =$$

$$\frac{١ \times ١٥ - ١٥ \times ع - ١ \times ع \times (١٥ - ع)}{ع(١٥ - ع)} = \frac{س}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{٣٠ + ع \times ١٥}{ع(١٥)}$$

$$\frac{٣٠ + ٣٠٠}{٣٤٥} =$$

$$\frac{١٠}{٣} = \frac{٤٠}{١٥} =$$



(٥)

$\pi r = \frac{ds}{\sqrt{s}}$
 دوره كل دقيقة
 $\leftarrow \pi r$ هي السرعة

المطلوب $\frac{ds}{\sqrt{s}}$ و $\frac{ds}{\sqrt{s}}$

$l = \text{نصف } dx \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{dx}{\sqrt{s}}$

$\pi r = \pi x r = \frac{ds}{\sqrt{s}}$

حيث $\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

يوجد حيث $s = 8$

لأن $2 = 76 - 94$ فإن $(76) = (3) + (94)$

$2\sqrt{s} = 94 - 76 = 18$

$\sqrt{s} = 9$

$\sqrt{s} = 9$

$\sqrt{s} = 9$

حيث $\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

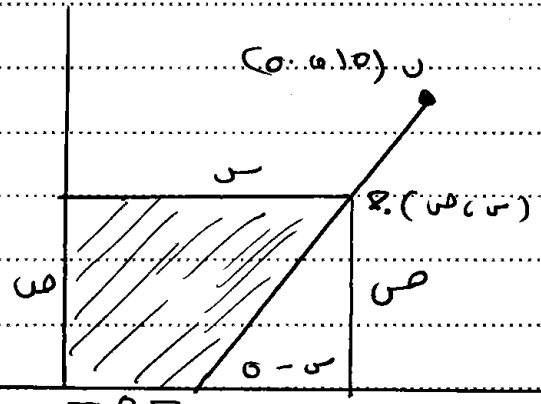
$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

السؤال الثالث

(٩)



$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

صاحبه سبيل كحرف $= \frac{1}{\sqrt{s}}$ (مجموع تعادلية) لا ارتفاع

١ $= \frac{1}{\sqrt{s}} \times (s+0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \times s = \sqrt{s}$

كأنه سبيل يتغير $= \frac{1-0}{0-10} = \frac{1}{-10}$

معادله هي $ص - 1 = 0$

$(0-5) \times 0 = 1$

بتعويض $s=1$

$\frac{1}{\sqrt{s}} \times (s+0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \times s = \sqrt{s}$

$\frac{1}{\sqrt{s}} \times (s-5) = \frac{1}{\sqrt{s}} \times (s-5)$

$\frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \times \frac{ds}{\sqrt{s}}$

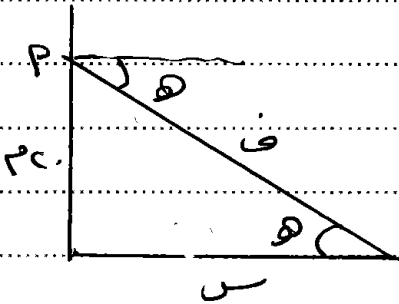
$2 \times 5 - 1 \times 0 =$
 عند $s=3$ فإن $ص =$

$11 = 5 \Rightarrow (0-5) \times 0 = 3$

$11 = 3 \times 11 \times 0 =$

السؤال الرابع

(١)



$$\epsilon = \frac{25}{25}$$

$$\text{عندما } s = 10$$

(٢) $\frac{20}{s} = \frac{25}{25}$

(١) $\frac{20}{25} \times \frac{25}{s} = \frac{25}{25} \times \frac{25}{s}$

عندما $s = 10$ $\frac{20}{10} = \frac{25}{25}$

بالتعويض $\frac{20}{9} = 1 + \frac{17}{9}$

عندئذ (١)

$$\epsilon \times \frac{20}{25} = \frac{25}{25} \times \frac{20}{9}$$

$$\frac{17}{25} = \frac{9}{25} \times \frac{20}{9} = \frac{20}{25}$$

(٣) $\frac{20}{s} + \frac{20}{s} = \frac{20}{s}$

(٤) $\frac{20}{25} = \frac{20}{25}$

عند $s = 10$
 $\frac{20}{10} = \frac{20}{10} + \frac{20}{10}$
 $2 = 2 + 2$
 $2 = 4$

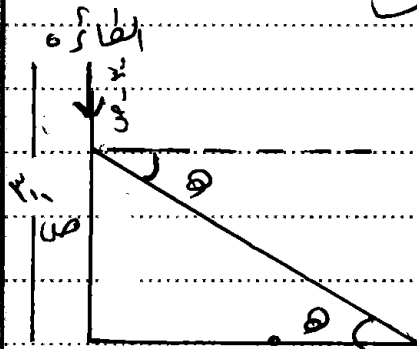
بالتعويض في (٥)

$$\epsilon \times 10 \times 2 = \frac{20}{25} \times 20 \times 2$$

$$\frac{20}{5} = \frac{10}{5} = \frac{20}{25}$$

السؤال الثالث

(٦)



$$\frac{30}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

بالتعويض في (٦)

(١) $\frac{30}{25} \times \frac{25}{s} = \frac{25}{25} \times \frac{25}{s}$

بعد دمج

$$30 = 25 \times s + 10 = s$$

$$30 = 0 \times s - 30 = 30$$

$$1 = \frac{20}{20} = \frac{20}{20}$$

$$2 = 1 + 1 = \frac{20}{20} = \frac{20}{20}$$

$$2 = 2$$

بالتعويض في (٦)

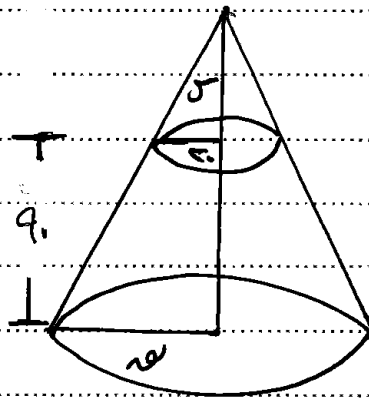
$$\frac{30 \times 20 - 0 \times 20}{25} = \frac{20}{25} \times 20$$

$$\frac{3}{7} = \frac{10}{25} = \frac{20}{25}$$

$$\frac{3}{17} = \frac{3}{17} = \frac{20}{25}$$

السؤال الرابع

(٥)



$$r_x = \frac{r \cdot x}{h}$$

$$r_x = \frac{r \cdot x}{h}$$

$$\text{عندما } x = h$$

من إنشاء

$$\frac{r_x}{r} = \frac{x}{h}$$

$$r_x = \frac{r \cdot x}{h}$$

$$\left(\frac{r \cdot x}{h} \right)^2 = r_x^2$$

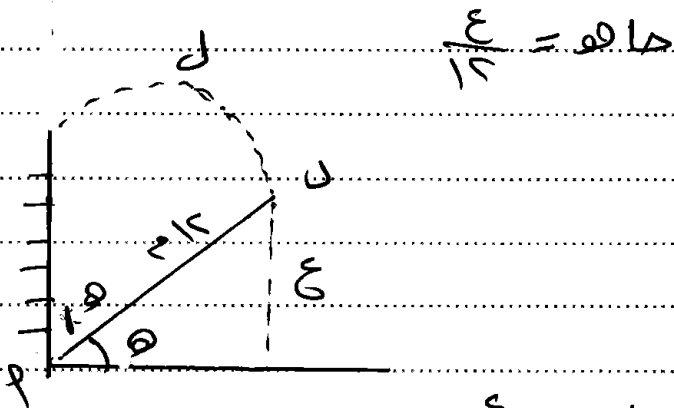
$$r_x^2 = \frac{r^2 \cdot x^2}{h^2}$$

$$\frac{r^2 \cdot x^2}{h^2} = r_x^2$$

$$r_x = \frac{r \cdot x}{h}$$

$$r_x = \frac{r \cdot x}{h}$$

(٦)



$$h = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$h = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\text{صباح } \frac{r \cdot h}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$l = \frac{r \cdot h}{r} \leftarrow \frac{r \cdot h}{r} = l$$

$$r = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{r}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{r \cdot h}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$h = \frac{r \cdot h}{r} \text{ عندما } r = h$$

$$h = \frac{r \cdot h}{r} \therefore \frac{1}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\text{صباح } \frac{r \cdot h}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{r \cdot h}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{r \cdot h}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{r \cdot h}{r} = \frac{r \cdot h}{r}$$

$$\frac{c}{\sqrt{5}} = c \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}c}{c} \right) + c \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - c \right) \left(\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

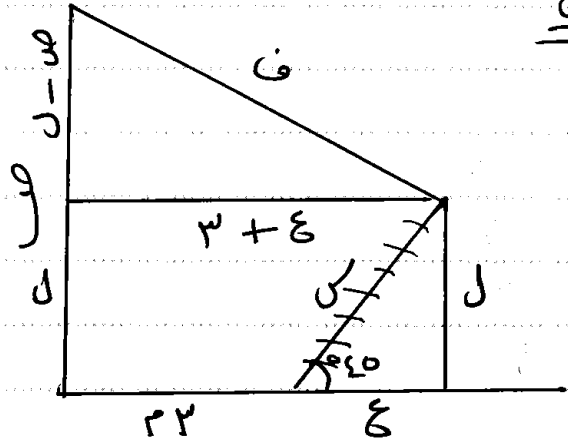
$$c \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \right) + \left(3 - \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$c(1-c) + c(0) = c \sqrt{c^2 + 5}$$

$$\frac{14}{c\sqrt{c}} = \frac{c+1}{c\sqrt{c}}$$

$$\frac{14}{\sqrt{c}} = c+1$$

٥
اكل



$$\frac{c}{\sqrt{5}} = c \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \right) + c \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - c \right) \left(\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{14}{c\sqrt{c}} = \frac{c+1}{c\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{14}{\sqrt{c}} = c+1$$

$$\boxed{\frac{14}{\sqrt{c}} = c+1} \Leftarrow$$

$$\frac{14}{\sqrt{c}} = c+1 \Rightarrow \frac{14}{\sqrt{c}} = c+1$$

$$\boxed{\frac{14}{\sqrt{c}} = c+1} \Leftarrow$$

$$f = \sqrt{(10-c) + (3+\epsilon)}$$

$$f = \sqrt{\left(\frac{14}{\sqrt{c}} - 10 \right) + \left(3 + \frac{14}{\sqrt{c}} \right)}$$

بعد ن = c

$$u = \text{السرعة} \times \text{الزمن} = c\sqrt{c}$$

$$v = c \times c = c^2$$

$$\frac{c}{\sqrt{5}} = c \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \right) + c \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - c \right) \left(\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

$$c \sqrt{\left(\frac{14}{\sqrt{c}} - 10 \right) + \left(3 + \frac{14}{\sqrt{c}} \right)}$$

النقطة الحرجة

تعريف

إذا كانت النقطة x في مجال الأفتران f فإن النقطة $(x, f(x))$ تسمى نقطة حرجة للأفتران f إذا كانت $f'(x) = 0$ غير موجودة

مثال ①
أوجد النقطة الحرجة للأفتران $f(x) = x^3 - 5x + 3$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0$
 $3x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$
نقطة حرجة

ملاحظة

يجب أن تقع النقطة الحرجة في المجال، ودايمًا أطراف الأفتران المغلقة $[a, b]$ نقط حرجة لأن $f(a)$ و $f(b)$ غير موجودة

ملاحظة

في الأفتران الكسرية عندما تكون $f'(x)$ أفتران كسري فإتينا

مثال ②
أوجد القيم الحرجة للأفتران $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

الحل

$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^3} = 0$
 $3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x - 2) = 0$
 $x = 0$ أو $x = \frac{2}{3}$

قيم x الحرجة هي $\{0, \frac{2}{3}\}$

① نضع $u = \frac{1}{x}$ فنقتطع $f(u) = u^3 - 1$

② نضع المقام = صفر

← المشتقة غير موجودة

ملاحظة هامة

① مجموعة قيم x من الحركة للأقتران الثابت هي كامل الفترة المعطاة

② مجموعة قيم x من الحركة للأقتران أكد عدد صحيح (لوحة) هي كامل الفترة المعطاة.

سؤال ⑧
 إذا كان $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ حيث x عدد ثابت وكان لهذا الأقران نقطة حرجية عند $x = 2$ فما قيمة m ؟

الحل

$f'(x) = 6x - 4 = 0$
 $f'(2) = 12 - 4 = 8 = 0$
 $8 = 0 \Rightarrow 8 = 0$

سؤال ⑦

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ حدد قيم x من الحركة

الحل

$f'(x) = 6x - 4 = 0$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
 مجموعة قيم x من الحركة هي $x = \frac{2}{3}$

سؤال ⑨

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ حدد قيم x من الحركة

الحل

عند $x = 0$ ، $f'(x) = 6x - 4 = -4$
 اطراف فترة

① عند $x = 0$ ، $f'(x) = -4 < 0$ ، $f(x)$ متناقص

عند $x = 2$ ، $f'(x) = 8 > 0$ ، $f(x)$ متزايد

متصل عند $x = 2$ ، $f'(x) = 8 > 0$ ، $f(x)$ متزايد

عند $x = 2$ ، $f'(x) = 8 > 0$ ، $f(x)$ متزايد

عند $x = 2$ ، $f'(x) = 8 > 0$ ، $f(x)$ متزايد

سؤال ⑤

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ حدد قيم x من الحركة

الحل

مجموعة قيم x من الحركة هي $x = \frac{2}{3}$

$[3, 2]$

⑩ فـ (٢) = $u + p\varepsilon + 1c = 0$ ---
 معادلة ⑩ - ⑨
 $9 = p\tau - 4 = p\tau - 4$
 $\frac{9}{\tau} = \frac{4}{\tau} = p \leftarrow$
 بالتعويض $\tau = 9$

و (٣) غير متصل عند $s=3$
 فـ (٣) غير موجود
 $s=3$ حرجه

فـ (٣) = $\left. \begin{array}{l} 6s - 1 - 1s - 1 \\ 2s - 4 + 6s - 1 \\ 2s - 1 \end{array} \right\}$

سؤال ⑪
 اذا كان للاقتران
 و (٣) = $p - s - 5 + 0$
 نقطة حرجة هي (٤٥١)
 نجد p, s ؟

$6s = 0, s = 0$ \neq ايجاد حرجه
 $6s + 6 = 0$ لا تكمل

فـ (٣) = صف (٦٥٣)
 قيم s الحرجه هي

$\{ 1 - 6, 6, 6, 3 \} \cup (6, 3)$
 او $[6, 3] \cup \{ 1 - 6, 6 \}$

الحل

و (١١) = ε
 $\varepsilon = 0 + 1 \times u - 9$ \leftarrow
 ⑩ --- $1 - = u - p$

فـ (٣) = $u - p - s$
 فـ (١١) = صف نقطة حرجه
 $0 = u - 1 \times p - c$

⑩ --- $0 = u - p - c$
 معادلة ⑩ - معادلة ⑨
 $1 = p \leftarrow$
 $1 - = u - 1$ \leftarrow
 $c = u$

سؤال ⑩

جد قيم كل من المتباينين p, u
 التي تجعل للاقتران
 و (٣) = $s^3 + p + s + 0$ نقطتان
 حرجتان عند $s = 1, s = 2$

الحل

فـ (٣) = $u + p + s + s^3$
 فـ (١٠) = $(1 -) = u + 1 - p + 3 = (1 -)$
 ⑩ --- $0 = u + p - 3$
 فـ (٢) = $u + c + p + 3 = (٢)$

سؤال ١٣

إذا كان h و h' قابليين للاشتقاق
على C فإذا كان لكل منهما نقطة
مترصة عند $s = P$ فأثبت ان
للأقران (h, h') نقطة مترصة
عند $s = P$

اكتل

وه $(P) = \text{صفر}$ وه $(P) = \text{صفر}$
لأن P نقطة مترصة لكل من h و h'

$$(h, h') = (P) = (h, h') + (P)$$

$$(h, h') = (P)$$

$$(h, h') = (h, h') + (P)$$

في P نقطة مترصة للأقران
 (h, h')

سؤال ١٣

إذا كان h و h' قابليين للاشتقاق
على C فإذا كان لكل منهما نقطة
مترصة عند $s = P$ فأثبت ان
للأقران (h, h') نقطة مترصة
عند $s = P$

اكتل

$$(h, h') = (P) = (h, h') + (P)$$

$$(h, h') = (P)$$

$$(h, h') = (h, h') + (P)$$

$$h = s \quad \cdot$$

$$h = s \quad \cdot$$

$$h = s \quad \cdot$$

$$h = s \quad \cdot$$

النقطة المترصة هي

$$(h, h') = (P)$$

$$(h, h') = (P)$$

$$(h, h') = (P)$$

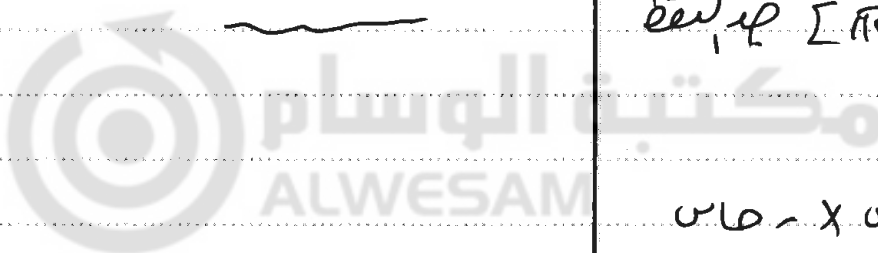
سؤال ١٤

ه $(s) = \sqrt{h}$ ه $(s) = \sqrt{h}$
ه $(s) = \sqrt{h}$

$$(h, h') = (P)$$

$$h = s \quad \cdot$$

$$h = s \quad \cdot$$



المعلم: ناجح الجمزاوي

سؤال 15

هـ (س) = ح² + ح + س [ك.6.]
 حد لبقط الحرفه .

الحل

هـ (س) = ح² + ح + س + ح² + ح + س
 =

ح² + س (1 + ح) =

ح² + س = س = ح² / ح = ح
 ايجاد

ح² + س = 1 + س ← ح = 1 - س

س = 1.0 ، 3.3 متره
 ايجاد

اللقط الحرفه

(ح / ح) ، (ح / ح)

سؤال 16

اذا كان هـ (س) = ح² + ح + س
 س ∈ [ك.6.] حد لبقط
 الحرفه

اكل

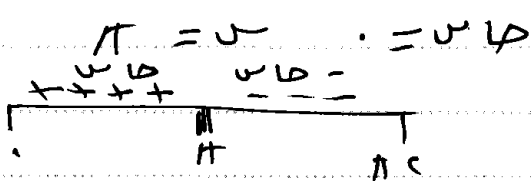
هـ (س) = 0 - ح = - ح
 ح = 0 = س
 لأن - | ح | ≥ ح ≥ | ح |

سؤال 17

هـ (س) = √ ح² + س ∈ [ك.6.]

اكل

هـ (س) = | ح + س |



ح² + س = س = ح² / ح = ح
 ح² + س = 1 + س ← ح = 1 - س
 ح² + س = 1.0 ، 3.3 متره
 ايجاد

ح² + س = س = ح² / ح = ح

ح² + س = 1 + س ← ح = 1 - س
 ح² + س = 1.0 ، 3.3 متره
 ايجاد

س = 1.0 ، 3.3 متره

عند س = ح

عند س = ح = ح² / ح = ح

سؤال ١٨

إذا كان $f(x) = x^2 + 3x - 4$ عند النقطة الحرجة:

الحل
 $f'(x) = 2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ الحل

$f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -\frac{17}{4}$ الحل

صغير

$f(-\frac{3}{2}) = -\frac{17}{4}$

سؤال ١٩

إذا كان $f(x) = x^2 + 3x - 4$

$f'(x) = 2x + 3 = 0$

أوجد النقطة الحرجة

الحل

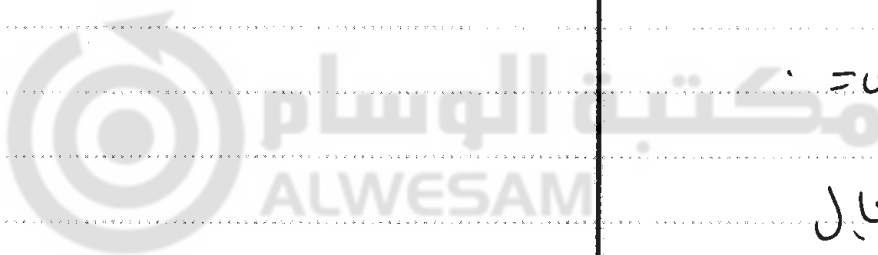
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

$f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -\frac{17}{4}$

النقطة الحرجة هي

$(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4})$



مكتبة الوسام
ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٨

جد نقطة الجرمه للأفتان
 عند (س) = $س^3 - ١٥س + ١$
 س ∈ [٣٠٣ -]

الحل

$$\begin{aligned} \text{عده (س)} &= ٣س^٢ - ١٥س - ١٢ \\ ٣س^٢ - ١٥س - ١٢ &= ٠ \\ ٣س^٢ - ١٢ &= ١٥س \\ ٣(س^٢ - ٤) &= ١٥س \\ س^٢ - ٤ &= ٥س \end{aligned}$$

النقطة الجرمه

$$\begin{aligned} (-٤, ٤) & \text{ و } (-١, ٤) \\ (٣, ٣) & \text{ و } (٣, -٣) \\ (-١, ١٧) & \text{ و } (٤, ١٥) \\ (-٣, ١٠) & \text{ و } (٣, -٨) \end{aligned}$$

تدريب ② ص ١٨

جد نقطة الجرمه للأفتان
 عند (س) = $س^٢ - ٣س + ٤$
 س ∈ [٢٠٠ -]

الحل

$$\text{عده (س)} = ٢س - ٣ = ٠$$

$$\begin{aligned} \text{عده (س)} &= (٢س - ٣) \\ \text{عده (س)} &= ٣س - ١٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٢س - ٣ &= ٣س - ١٠ \\ ٢س - ٣س &= -١٠ + ٣ \\ -س &= -٧ \\ س &= ٧ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (٧, ١١) & \text{ و } (٧, ١١) \\ (٧, ١١) & \text{ و } (٧, ١١) \\ (٧, ١١) & \text{ و } (٧, ١١) \end{aligned}$$

تدريب ③ ص ١٨

جد نقطة الجرمه للأفتان
 عند (س) = $س^٣ - ١٥س + ١$
 س ∈ [٣٠٣ -]

$$\begin{aligned} \text{عده (س)} &= ٣س^٢ - ١٥س - ١٢ \\ \text{عده (س)} &= ٣س^٢ - ١٢ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٣س^٢ - ١٥س - ١٢ &= ٣س^٢ - ١٢ \\ -١٥س &= ٠ \\ س &= ٠ \end{aligned}$$

النقطة الحرجة

$$(0, 62)$$

$$(1, 61) \text{ و } (2, 63)$$

تدريب (4) ص 181

جدد النقطة الحرجة للأقتران

$$f(x) = |x-2| - x^2$$

$$f'(x) = 2 - 2x$$

الكل
نجد تعريف القيمة المطلقة

$$|x-2| = x-2 \text{ لـ } x \geq 2$$

$$|x-2| = -(x-2) = 2-x \text{ لـ } x < 2$$

$$f(x) = x-2 - x^2 \text{ لـ } x \geq 2$$

$$f'(x) = 1 - 2x \text{ لـ } x \geq 2$$

$$f(x) = 2-x - x^2 \text{ لـ } x < 2$$

$$f'(x) = -1 - 2x \text{ لـ } x < 2$$

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0.5$$

$$-1 - 2x = 0 \Rightarrow x = -0.5$$

$$x = 0.5 \text{ و } x = -0.5$$

$$f(0.5) = 1.5 - 0.25 = 1.25$$

$$f(-0.5) = 2.5 - 0.25 = 1.75$$

$$f(2) = 0 - 4 = -4$$

$$f(0) = 2 - 0 = 2$$

نجد ان القيمة الحرجة هي

تمارين ومسائل

(صفحة ١٢)

١) $\sin(\theta) = \sin + \cos$
 $\theta \in]\pi/6, \pi/4[$

الحل
 $\sin(\theta) = \sin + \cos$
 $\cos = \sin - \sin$

$\sin = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{10}$

النقطة المحرجه

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4})$

(π, π)

السؤال الأول

جد نقطة المحرجه لكل من
 الأتيان الآتيه

٢) $\sin(\theta) = \sin^2 - \cos + 1$
 $\theta \in]\pi/6, \pi/4[$

الحل
 $\sin(\theta) = \sin^2 - \cos + 1$

$\cos = (\sin^2 - 1) + 1$
 $\cos = (\sin^2 + \cos^2) = 1$
 $\sin = 0$

النقطة المحرجه

$(\pi/6, \pi/4) = (\pi/6, \pi/4)$

$(\pi/6, \pi/4) = (\pi/6, \pi/4)$

$(\pi/6, \pi/4) = (\pi/6, \pi/4)$

٣) $\sin(\theta) = \sin + \cos$
 $\theta \in]\pi/6, \pi/4[$

الحل
 $\sin(\theta) = \sin + \cos$
 $\cos = \sin - \sin$

$\sin = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
 $\cos = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
 $\sin = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
 $\cos = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq \frac{\pi}{4} \quad \text{حيث } \theta &= \theta(\theta) \\ - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{4} \quad \text{حيث } \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} > \theta > \frac{\pi}{4} \quad \text{حيث } \theta &= \theta(\theta) \\ \text{عزوف صوره } \theta &= \theta(\theta) \\ \frac{\pi}{2} > \theta > \frac{\pi}{4} \quad \text{حيث } \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

البيضة كرمه

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ و } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ و } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ و } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{5} \theta = \theta(\theta) \text{ حيث } \theta = \theta(\theta)$$

الحل

$$\theta = \theta(\theta) \text{ حيث } \theta = \theta(\theta)$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta = \theta(\theta)$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ حيث } \theta = \theta(\theta)$$

⑤

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

صصل عند $\theta = \theta(\theta)$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta(\theta) \\ \theta &= \theta(\theta) \end{aligned} \right\}$$

← تتبع الحل

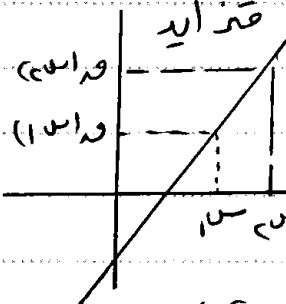
التزايد والتناقص

أولاً

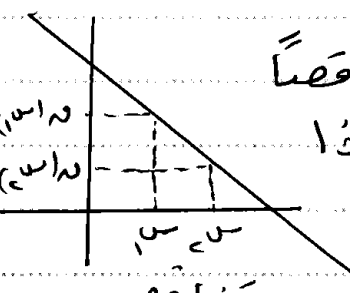
تعريف التزايد والتناقص

إذا كان f (دالة) معرف على $[a, b]$ وكان $a < x < y < b$ فإنه

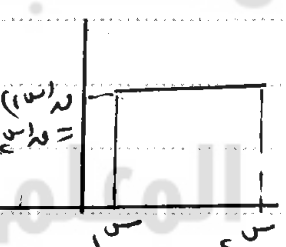
① يكون f (دالة) متزايداً إذا كان على $[a, b]$ $f(x) < f(y)$ $\iff x < y$



② يكون f (دالة) متناقصاً في $[a, b]$ إذا كان $f(x) > f(y)$ $\iff x < y$

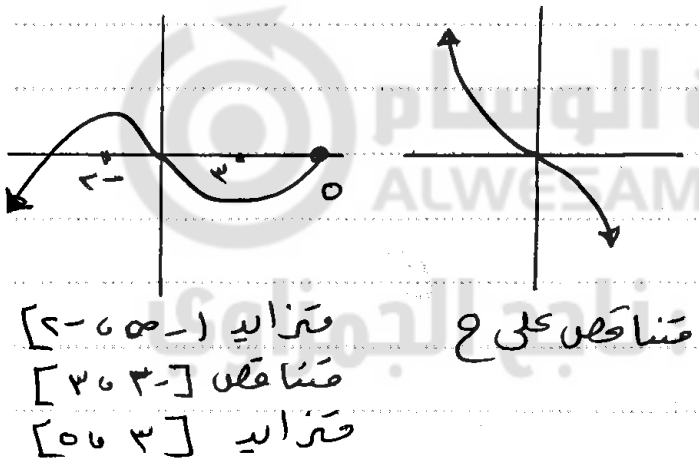
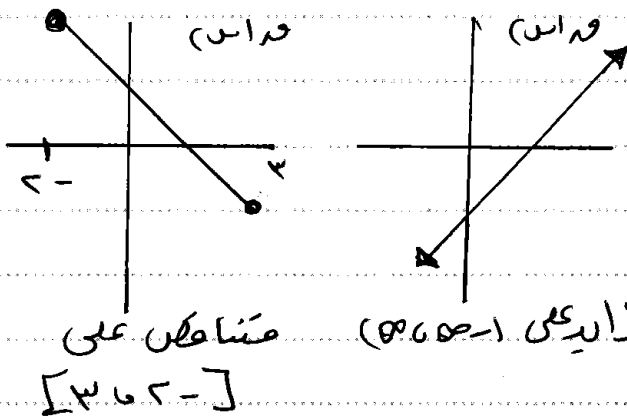


③ يكون f (دالة) ثابتاً في $[a, b]$ إذا كان $f(x) = f(y)$ $\iff x < y$



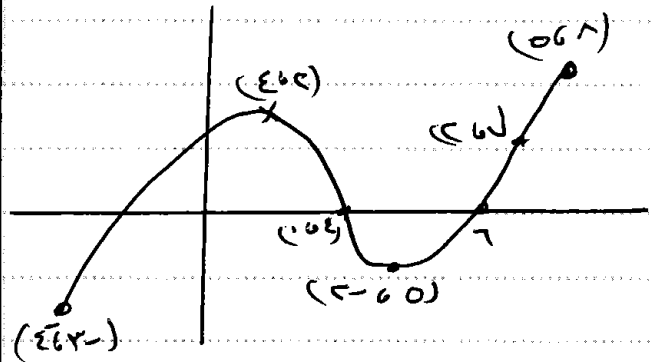
ثانياً - التزايد والتناقص من رسمه (دالة)

إذا كانت f (دالة) يرسمه بمثل منحني f (دالة) وارداً ايجاد فترات (مجالات) التزايد والتناقص للأقتران f (دالة) فمثلاً ننظر للأقتران f (دالة) من جهة اليسار إلى جهة اليمين فإذا كان صاعد للأعلى يكون متزايداً وإذا كان صابطاً للأسفل يكون متناقصاً.



سؤال ١٥

الشكل الجانبي عتلى ممتحنه (س) اوجد محالات التزايد والتناقص

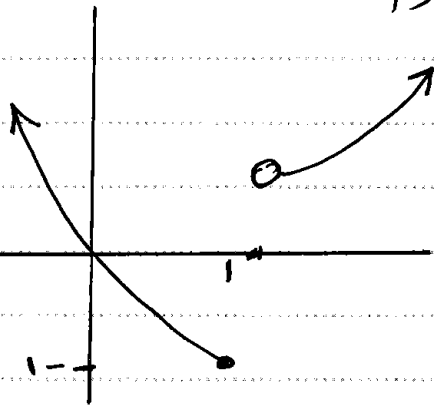


اكل

مترابيه [٢٦٣] ل [٨٥٥]
متناقصه [٥٥٢]

سؤال ١٤

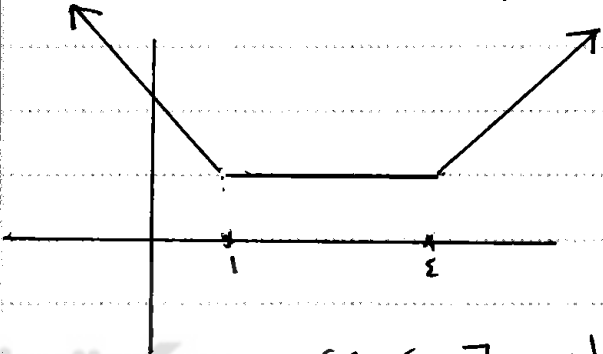
بالاعتماد على الشكل الجاور الذي عتلى ممتحنه (س) اوجد محالات التزايد والتناقص



متناقصه (١, ٥٥)
مترابيه (٥٥, ١)

سؤال ١٣

بالاعتماد على الشكل الجاور الذي عتلى ممتحنه (س) اوجد محالات التزايد والتناقص

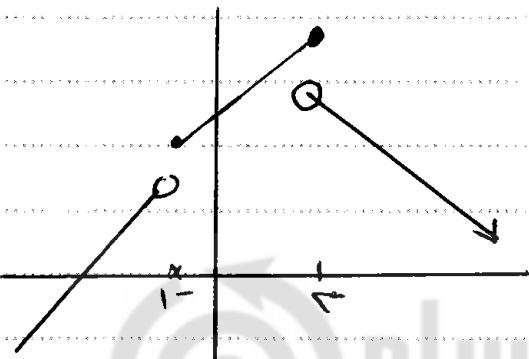


مترابيه [٤, ٥٥)

متناقصه (١, ٥٥)
ثابته [٤, ١)

سؤال ١٢

بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي عتلى ممتحنه (س) اوجد محالات التزايد والتناقص



مترابيه (١, ٥٥) [٥٥, ١)
متناقصه (٥٥, ١)

التزايد والتناقص اختبار المشتقة الأولى

نظرية

إذا كان $f'(x) > 0$ في (a, b) فإن $f(x)$ تزايدية على (a, b)
وإذا كان $f'(x) < 0$ في (a, b) فإن $f(x)$ تناقصية على (a, b)

① إذا كانت $f'(x) > 0$ في (a, b) فإن $f(x)$ تزايدية على (a, b)
كل $x \in (a, b)$ فإن $f(x) > f(a)$

② إذا كانت $f'(x) < 0$ في (a, b) فإن $f(x)$ تناقصية على (a, b)
كل $x \in (a, b)$ فإن $f(x) < f(a)$

③ إذا كانت $f'(x) = 0$ في (a, b) فإن $f(x)$ ثابتة على (a, b)
كل $x \in (a, b)$ فإن $f(x) = f(a)$

ملاحظة

① إذا رسمت محاسن لمنحنى $f(x)$ في (a, b) فإن $f(x)$ تزايدية على (a, b)
كل $x \in (a, b)$ فإن $f(x) > f(a)$

② إذا رسمت محاسن $f(x)$ في (a, b) فإن $f(x)$ تناقصية على (a, b)
كل $x \in (a, b)$ فإن $f(x) < f(a)$

ملاحظة

خطوات إيجاد إشارة $f'(x)$ في (a, b)
(محالات التزايد والتناقص)

① حدد مجال الأقران $f(x)$
② نجد $f'(x)$ في (a, b)
③ نجد قيم $f'(x)$ من الحركة للأقران

④ نضيف قيم من الحركة على خط الأعداد بالإضافة لمجال الأقران

⑤ نختبر إشارة $f'(x)$
⑥ نطبق النظرية السابقة

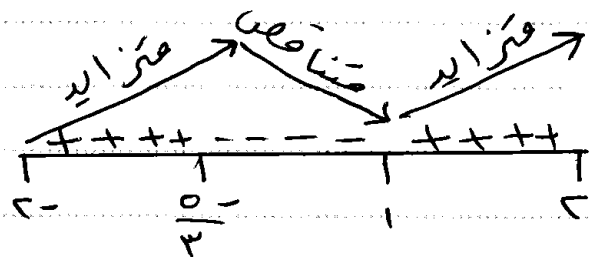
سؤال ①

إذا كان $f(x) = x^3 - 5x + 1$ اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

نبدأ بتفاضل $f(x)$ على $[-\infty, \infty]$ وقابل
لأنه كثير حدود

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$



نبدأ بتفاضل $f(x)$ على $[-\infty, \infty]$ وقابل
نبدأ بتفاضل $f(x)$ على $[-\infty, \infty]$ وقابل

سؤال ②

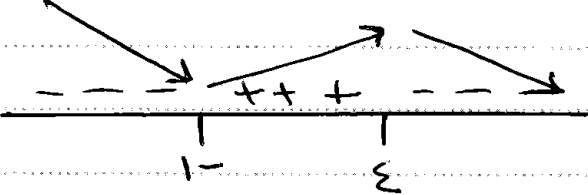
إذا كان $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

نبدأ بتفاضل $f(x)$ على $[-\infty, \infty]$ وقابل
بالقسمة على $x - 1$

$$f(x) = x^3 - 5x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 4)$$



نبدأ بتفاضل $f(x)$ على $[-\infty, \infty]$ وقابل
نبدأ بتفاضل $f(x)$ على $[-\infty, \infty]$ وقابل

ملاحظة هامة

إشارة $f'(x)$ على خط الأعداد
صحة إشارة $f'(x)$ بعد
التفاضل مباشرة (بدون
تعديل) (في الأصلية)

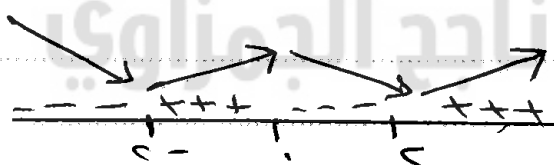
سؤال ③

اوجد مجالات التزايد والتناقص
للفترات

$$f(x) = x^3 - 8x + 16$$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$$



مثال ٤

اوجد محالات التزايد والتناقص
 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

الحل

المجال $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

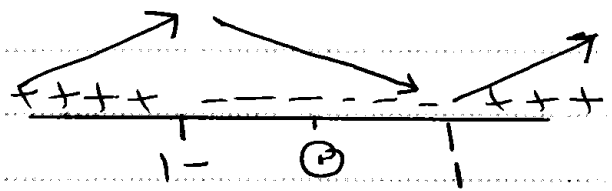
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{البط} = \text{صفر} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \text{ او } x = -1 \Rightarrow \text{المجال}$$

المقام $x = 0 \Rightarrow \text{المجال}$



متزايد $(-\infty, -1]$ ، $[1, +\infty)$

متناقص $]-1, 0[$ ، $]0, 1[$

مثال ٥

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

التزايد والتناقص

الحل
 المجال $]-\infty; +\infty[$ لا يوجد اصفار للمقام

$$f'(x) = \frac{(x^2+3) - (x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{x^2+3 - 2x^2 + 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2}$$

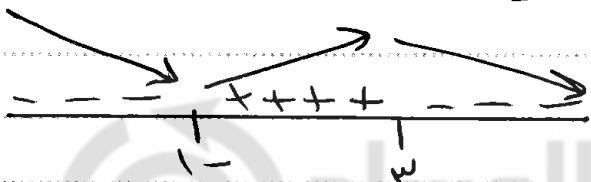
البط = صفر

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ او } x = -1$$



متزايد $]-\infty, -1[$ ، $]3, +\infty[$

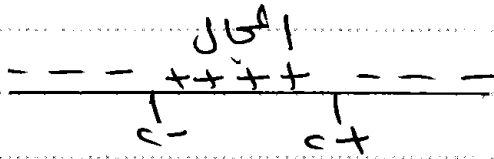
متناقص $]-1, 3[$ ، $]3, +\infty[$

سؤال ٧

دراس) = $\sqrt{4-x}$ و $\sqrt{4-x}$ أو $\sqrt{4-x}$
مجال التزايد والمناقص

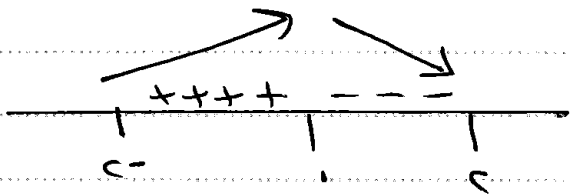
الحل

المجال $4-x \geq 0$
 $x \leq 4$



دراس) = $\sqrt{4-x}$ = $\sqrt{4-x}$

السطح = صفر $\Rightarrow x = 4$ \exists المجال
المقام = 0 $\Rightarrow x = 4$ \exists المجال



مترابيد $[-4, 0]$
مناقص $[0, 4]$

سؤال ٦

دراس) = $\sin(x)$ و $\cos(x)$
حد قيم من $\pi/2$ و $3\pi/2$ و 0 و 2π
والتناقص

الحل

دراس) متصل (افتران صبيبت تمام)
 $[\pi, 2\pi]$

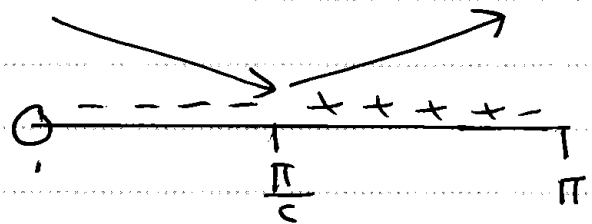
دراس) = $\sin(x)$

$\leftarrow \sin(x) \leq 0$

$\sin(x) = 0$ $\Rightarrow x = \pi, 2\pi$

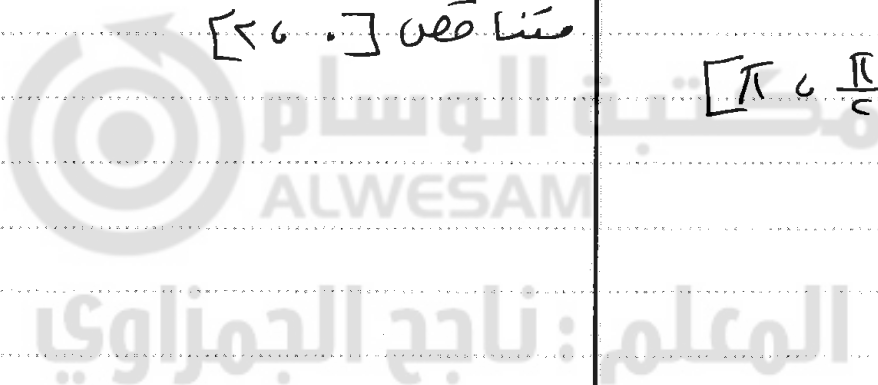
$\sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi, 2\pi$ \exists المجال

$\sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi, 2\pi$ \exists المجال
قيم من الكسرة هي $\{\pi/2, 3\pi/2\}$



مناقص على $[\pi/2, \pi]$

مترابيد على $[\pi, 3\pi/2]$

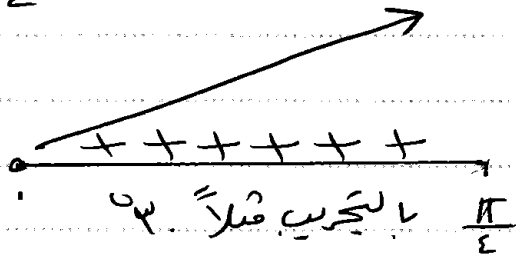


سؤال ٩

اثبت ان $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 افترة $\sin(x)$ في $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

الحل

نأخذ $\sin(x)$ متصل على $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
 $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 $\sin(x) = \cos(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$



هذه فترة $\sin(x)$ في $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

سؤال ٨

نأخذ $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 هدفترات التزايد والتناقص

الحل

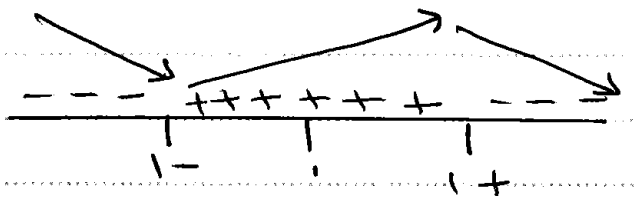
$$\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

$$\sin(x) = \cos(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \tan(x) = 1$$

البي = صفر $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
 $\leftarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) = 1$
 $\leftarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x) = 0$

المقام = صفر $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ في المجال



فترة $\sin(x)$ في $[0, \frac{\pi}{2}]$

فترة $\cos(x)$ في $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

سؤال ١٠

اذا كان $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 موجبان في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$
 وكان $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 هوانا متناقص في $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

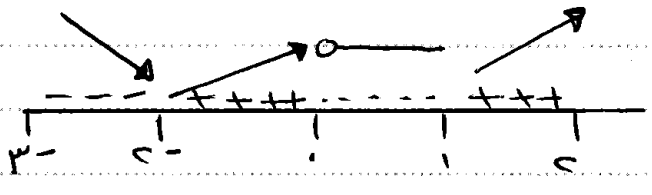
اثبت ان $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 ل $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$

على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

نأخذ $\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 في $[0, \frac{\pi}{2}]$

سؤال ١٩



متناقض $[-2, 3]$
 متزايد $[-1, 2]$ و $[2, 3]$
 ثابت $(0, 1)$

$$\left. \begin{array}{l} (s+2) - 2 \geq s \\ (s+2) - 3 \leq s \\ |s+1| \leq 1 \end{array} \right\} = (s) \text{ عند } s=1$$

لوجد محالا = التزايد و التناقض
 في الفترة $[-2, 3]$

سؤال ١٦

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 1 \\ s + \frac{4}{s} \leq 1 \end{array} \right\} = (s) \text{ عند } s=1$$

اكل

$$0 = (1) \text{ كما } (s + \frac{4}{s}) = 1$$

كما $s = 1$ غير متصل عند $s=1$

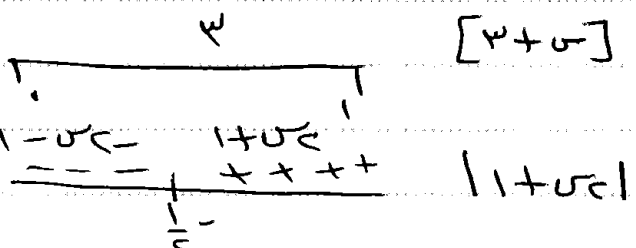
$$\left. \begin{array}{l} s \geq 1 \\ s - \frac{4}{s} \leq 1 \\ \text{غير موجود } s = 160 \end{array} \right\} = (s) \text{ عند } s=1$$

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 1 \\ \frac{3}{s} \leq 1 \\ \frac{s-4}{s} \leq 1 \end{array} \right\} = (s) \text{ عند } s=1$$

غير موجود $s=160$
 تابع الحل

الحل

نعيد تعريف الأفتان



$$\left. \begin{array}{l} (s+2) - 2 \geq s \\ (s+2) - 3 \leq s \\ |s+1| \leq 1 \end{array} \right\} = (s) \text{ عند } s=1$$

وه متصل عند $s=1$
 و غير متصل عند $s=160$

$$\left. \begin{array}{l} (s+2) - 2 \geq s \\ \text{صفر} \\ 2 \leq s \end{array} \right\} = (s) \text{ عند } s=1$$

اصفار اشتقة $(s+2) - 2 = 0$

$$s = 2$$

ممن من الحرجه هي

؟ $0, 1, 2, 3, 160, 160$

سؤال ١٨

هـ (س) = -٤ س + حاس
 اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

هـ متصل وقابل للاشتقاق على ح
 هـ (س) = -٤ س + حاس =
 حياس = ٤ متصل

١- حياس د ١

٤- ٤- ٤-

٥- د -٤ + حياس د -٢ س
 تناقص على ح

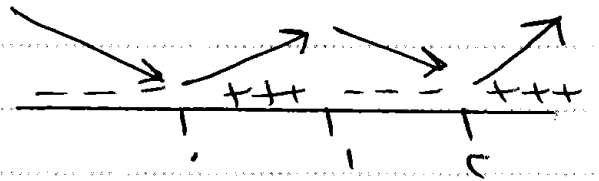
هـ (س) = ٣ - س = ٠ ∩ المجال

س = ٤ - س = ٠ ∩

س = ٤ - س ≠ ٠

س = ٤ ∩ س = ٤ ∩

١٢٥
 صم من الخرجه هي ١٠٠٠٠٠



هـ تناقص (٠, ٤) ∩ [٤, ٦)
 حياس [١, ٥) ∩ (٥, ٦)

سؤال ١٧

هـ (س) = ٩ - س - حياس
 اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

هـ متصل على ح هـ (س) = ٩ - س + حياس
 ٩ - س + حياس = ٠ ∩ حياس ≠ ٩ - س
 حياس

لأن ١ - حياس د ١

٩ + ١ > ٩ + حياس د ١ + ١

٨ د ٩ + حياس د ١٠

هـ (س) = ٣

هـ حياس د على ح

سؤال ١٩

اذا كان هـ (س) = ٤ - س - حياس
 س ∩ [٢, ٤) اوجد مجالات
 التزايد والتناقص للأقران
 هـ (س)

الحل

هـ (س) = ٤ - س - حياس

هـ (س) = ٤ - س - حياس = ٠ ∩

١٣ = (١ - س) ∩

س = ١ ±



سؤال (٢٠)

إذا كان $هـ = هـ(س)$ = $هـ(س)$ لكل $س$ في $م$ ثابتة
 $هـ(س) = هـ(س) = ثابت$

البرهان

نفرض $ل(س) = هـ(س) - هـ(س)$
 بالاشتقاق
 $ل'(س) = هـ'(س) - هـ'(س) = هـ'(س) - هـ'(س)$
 وبما أن $هـ(س) = هـ(س)$
 $ل'(س) = هـ'(س) - هـ'(س)$
 $ل'(س) = هـ'(س) - هـ'(س) = ثابت$

سؤال (٢١)

إذا كان $هـ(س) = هـ(س)$ لكل $س$ في $م$ ثابتة
 $هـ(س) = هـ(س) = ثابت$

البرهان

$ل(س) = هـ(س) + هـ(س)$
 $ل'(س) = هـ'(س) + هـ'(س)$
 بما أن $هـ(س) = هـ(س)$

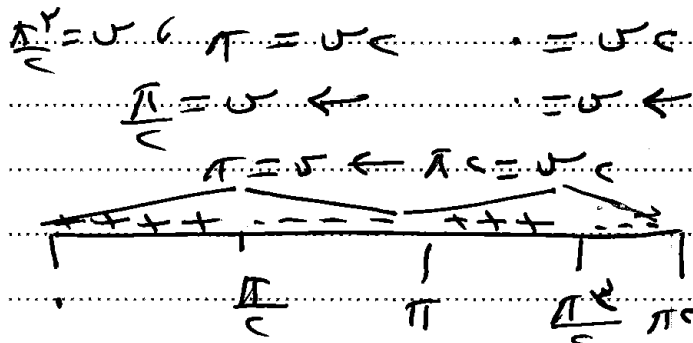


مكتبة الوسام: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

الحل

حد فترات التزايد و التناقص
 للأقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 3$



فترات التزايد: $[-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1, 1 + \sqrt{2}]$

فترات التناقص: $[1 - \sqrt{2}, 1] \cup [1 + \sqrt{2}, \infty]$

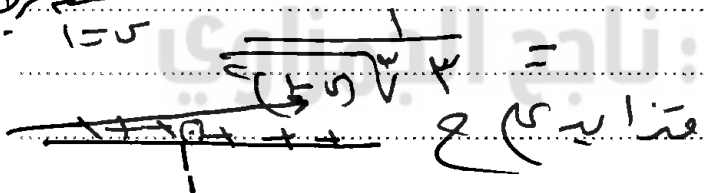
تدريب 3) ص 186

حد فترات التزايد و فترات التناقص للأقتران

فد $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

$f'(x) = \frac{1}{3} (1-x)^{-2/3} = \frac{1}{3} (1-x)^{-2/3}$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

نقط حرجية
 $x = 1$

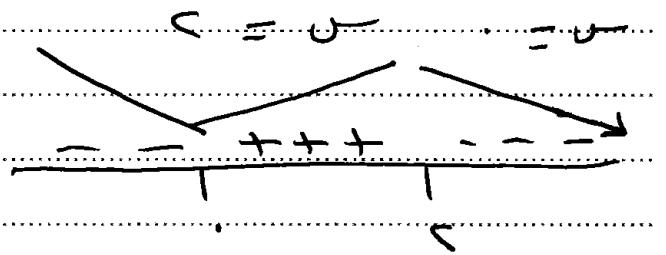


تدريب 1) ص 185

حد فترات التزايد و التناقص
 للأقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 0$
 $x^2 - 2x - 1 = 0$
 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$



فترات التناقص: $[-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1, 1 + \sqrt{2}]$

فترات التزايد: $[1 - \sqrt{2}, 1] \cup [1 + \sqrt{2}, \infty]$

تدريب 2) ص 185

حد فترات التزايد و فترات التناقص
 للأقتران $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

$f'(x) = \frac{1}{3} (1-x)^{-2/3}$

تمارين ومسائل

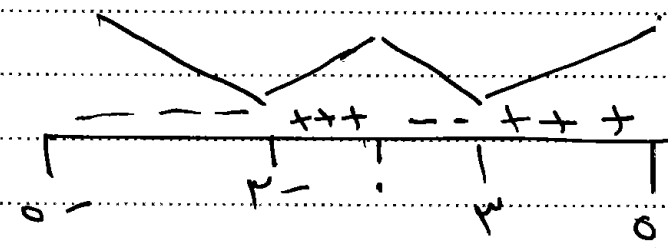
صفحة (188)

$3 \rightarrow 5, 3, 2, 5$ هي
 هي
 $3, 2, 5$ هي
 $3 \rightarrow 5, 3, 2, 5$ هي

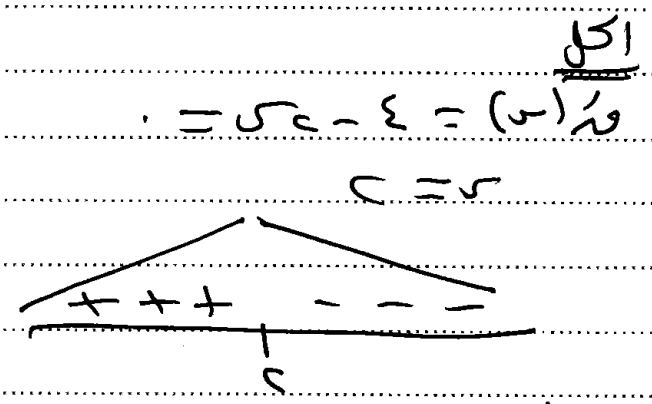
السؤال الأول
 حدد فترات التزايد وفترات
 التناقص لكل من الأقرانات
 الآتية

Ⓐ) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

$f(x) = x^2 - 5x + 3$



فترات: $[0, 2.5]$ و $[2.5, 5]$
 تناقص: $[2.5, 5]$ و $[0, 2.5]$



فترات: $[0, 2]$ و $[2, 4]$
 تناقص: $[2, 4]$

Ⓒ) $f(x) = x^2 - 10x + 16$

Ⓓ) $f(x) = x^2 - 19x + 90$

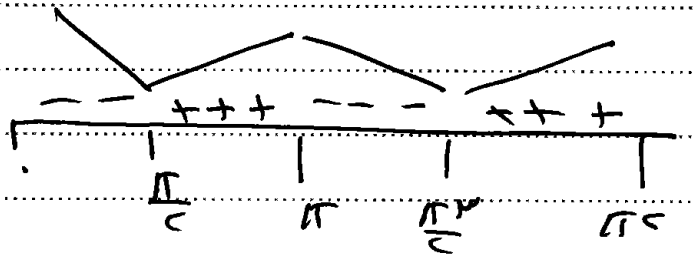
اكمل
 $f(x) = x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$
 $c = 5$
 $f(x) = x^2 - 10x + 16$
 $f(x) = x^2 - 10x + 16$

س $[0, 9]$
 $f(x) = x^2 - 19x + 90 = (x-9)(x-10)$
 $c = 5$
 $f(x) = x^2 - 19x + 90$
 $f(x) = x^2 - 19x + 90$

$f(x) = x^2 - 10x + 16$
 $f(x) = x^2 - 10x + 16$
 $f(x) = x^2 - 10x + 16$
 $f(x) = x^2 - 10x + 16$

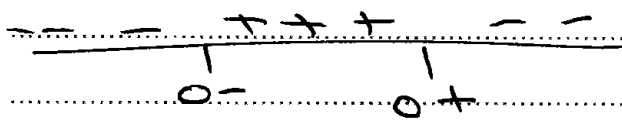
④ $\sqrt{c^2 - 5c} = f(c)$

مجاله $c \geq 0$



مناطق $[0, \pi]$ و $[\pi, \pi^2]$

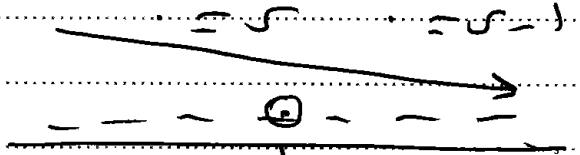
مناطق $[\pi^2, \pi^2/c]$ و $[\pi^2/c, \pi^2]$



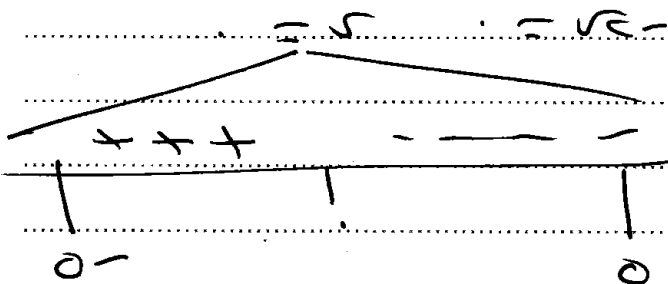
$f(c) = \sqrt{c^2 - 5c}$

⑤ $f(x) = (x-1)^3 - 3x^2$

الكل
 $f(x) = (x-1)^3 - 3x^2$
 $f'(x) = 3(x-1)^2 - 6x$
 $f'(x) = 0$



مناطق كل ج

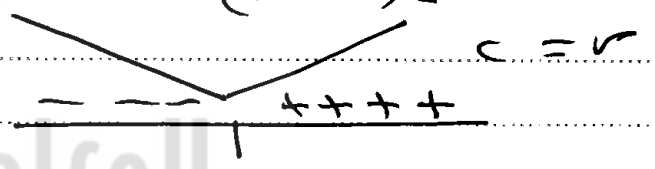


مناطق $[0, 1]$ و $[1, \infty)$

مناطق $[0, 1]$ و $[1, \infty)$

⑥ $f(x) = (x-2)^4 - 4x^3$

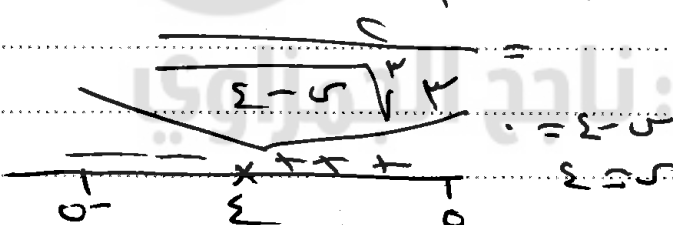
$f(x) = (x-2)^4 - 4x^3$
 $f'(x) = 4(x-2)^3 - 12x^2$
 $f'(x) = 0$



مناطق $(-\infty, 2]$ و $[2, \infty)$

⑦ $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2} - [0, 0]$

$f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$
 $f'(x) = \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3}$
 $f'(x) = 0$



⑧ $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

$[x \in]$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}) + 1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{15}{16}$

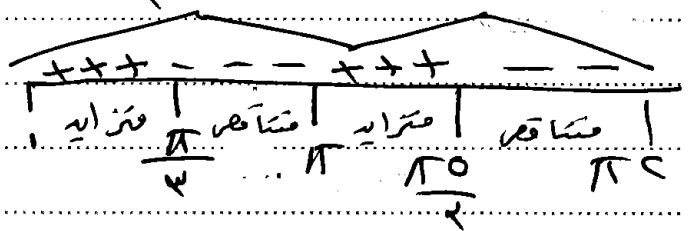
$f(0) = 1$

$f(1) = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$f(1) = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$f(0) = 1$

$f(0) = 1$



ⓑ

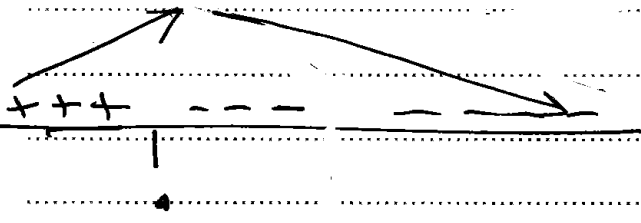
⑨ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

⑤ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

متزايد (٠, ٥٥٥٥)

متناقص (٥٥٥٥, ٥٥٥٥)



⑥ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

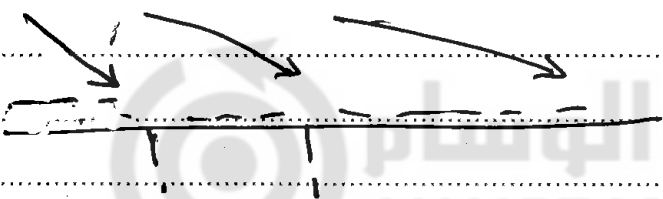
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0$

محل عند $x = 1$

⑦ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$f(0) = 1$



متناقص (٥٥٥٥, ٥٥٥٥)

السؤال الثالث ص ١٨٨

إذا كانت $f(x)$ افترنا ناصصلاً
 على الفترة $[a, b]$ وقابلًا للاشتقاق
 على الفترة (a, b) وكان
 $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$
 وكان $f(a) = f(b) + 3$
 فاستنتج انه $f(x)$ متزايد على
 الفترة $[a, b]$

اكمل

$f'(x) = f'(b) + 3$

$f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$

$f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$
 متزايد

$f'(x) = f'(b) + 3 < 0$ لكل $x \in (a, b)$

$f'(a) < 0$

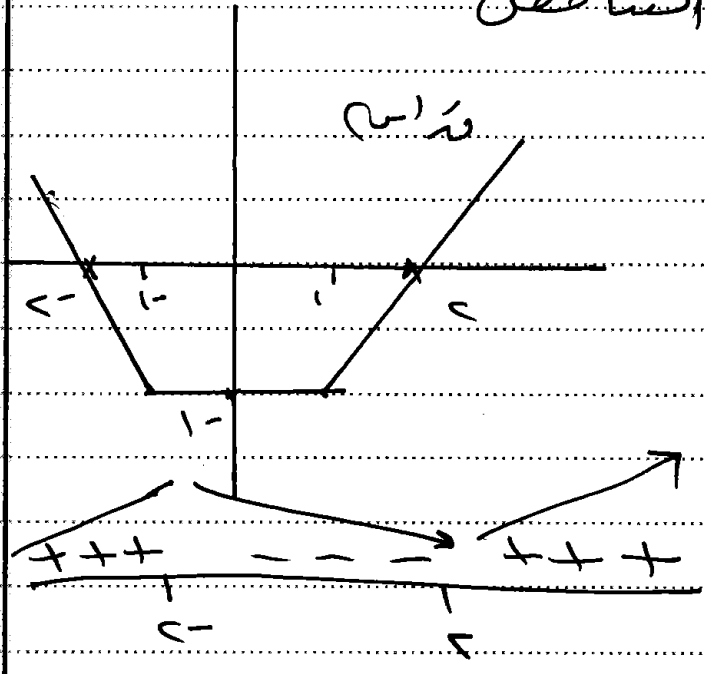
$f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$

$f'(x) < 0$ متزايد

(a, b)

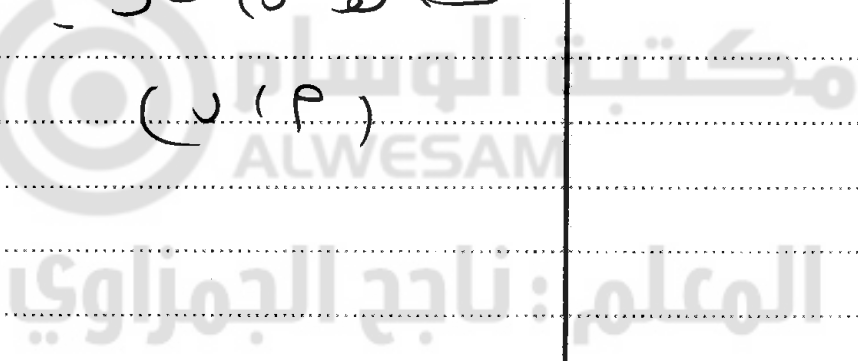
السؤال الثاني ص ١٨٨

عمل الشكل مخرج افتران
 المستقيمة الأولى للأفتران
 حدد فترات التزايد وفترات
 التناقص



متزايد $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$

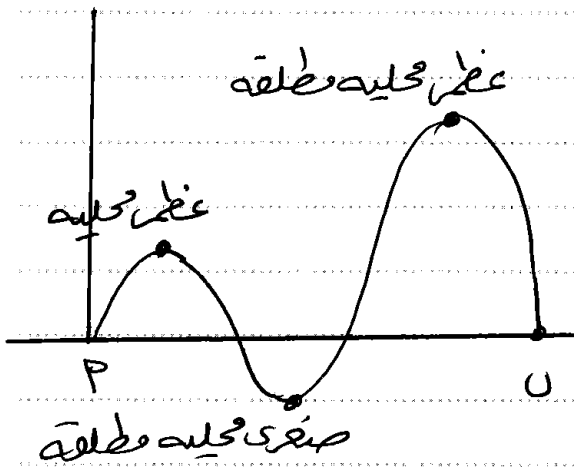
متناقص $[2, \infty)$



القيم القصوى

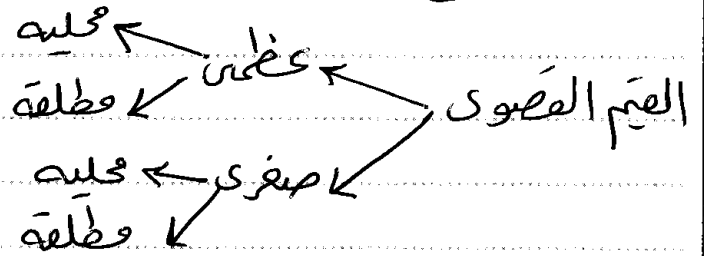
٣) تسمى (سد، سد) نقطة عظمى مطلقة للأقتران f إذا كانت $f(x) \leq f(a)$ لكل $x \in [a, b]$

٤) تسمى (سد، سد) نقطة صغرى مطلقة للأقتران f إذا كانت $f(x) \geq f(a)$ لكل $x \in [a, b]$



القيمة العظمى المحلية المطلقة هي أكبر القيم العظمى المحلية
القيمة الصغرى المحلية المطلقة هي اصغر القيم الصغرى المحلية

يقصد بالقيم القصوى هي القيم الصغرى أو العظمى للأقتران



تعريف

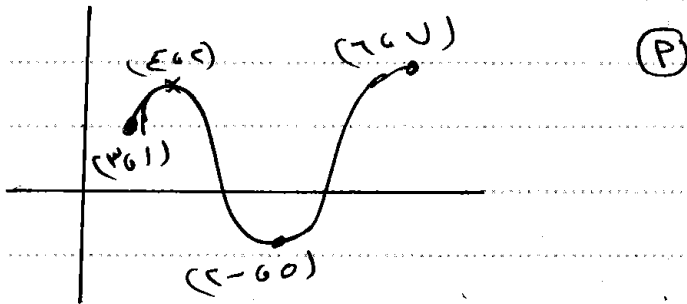
إذا كان f متصفاً على $[a, b]$ وكانت $a, b \in [a, b]$

١) تسمى (سد، سد) نقطة عظمى محلية للأقتران f ، إذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة مثل I تحوي العدد a بحيث أن $f(x) \leq f(a)$ لكل $x \in I$

٢) تسمى (سد، سد) نقطة صغرى محلية للأقتران f ، إذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة مثل I تحوي العدد a بحيث أن $f(x) \geq f(a)$ لكل $x \in I$

ملاحظات هامة

مثال ①
بالاعتماد على الشكل المجاور الذي
عُيّن منحنى $f(x)$ حدد قيم
القصى وسى نوعها .



عند النقطة $(5, 2)$ عظمى محلية $= 2$
عند النقطة $(7, 6)$ صغرى محلية وطلقة
وأي $= 7$
عند النقطة $(3, 6)$ عظمى مطلقة
وأي $= 3$

① عظمى محلية : هي أعلى نقطة لها
حولها (محلية)

② صغرى محلية : هي أدنى نقطة
لها حولها (محلية)

③ عظمى مطلقة : هي أعلى نقطة
على الاقتران في الفترة $[a, b]$

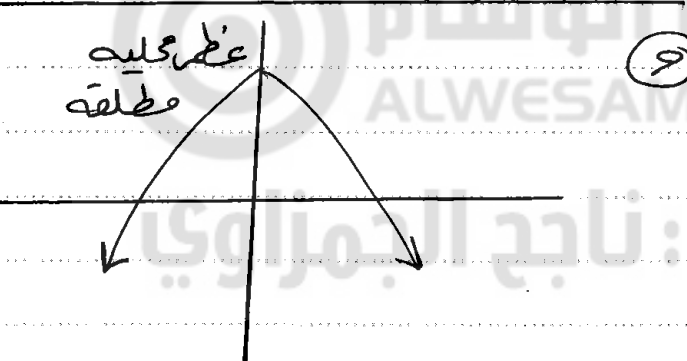
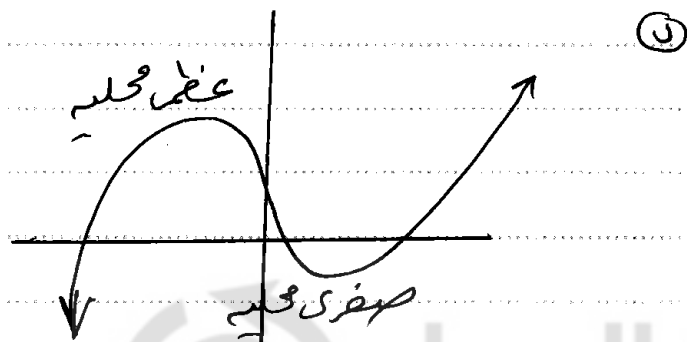
④ صغرى مطلقة : هي أقل نقطة
على الاقتران $[a, b]$

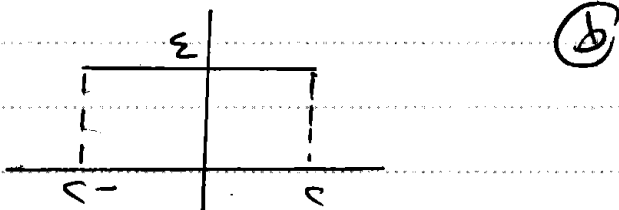
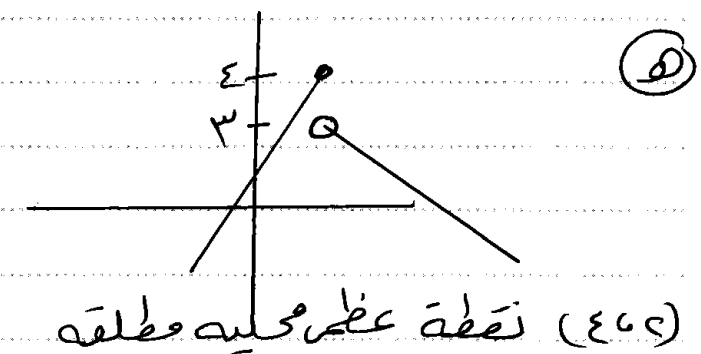
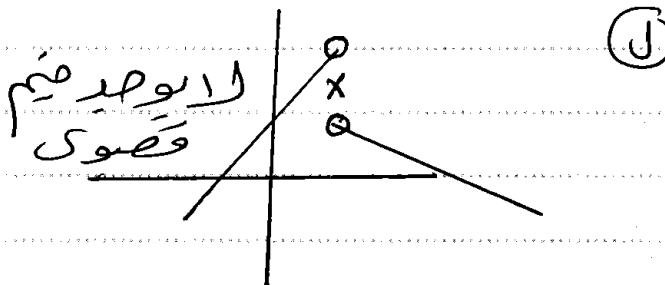
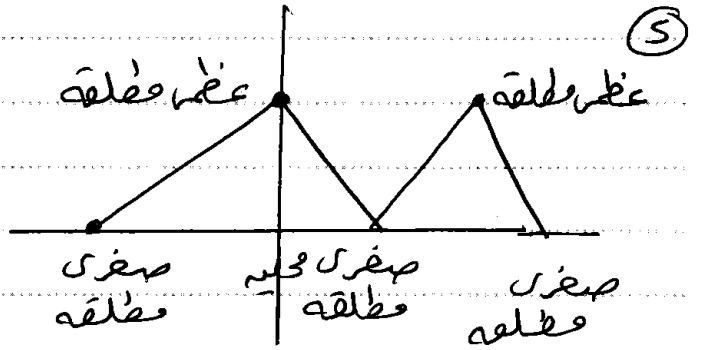
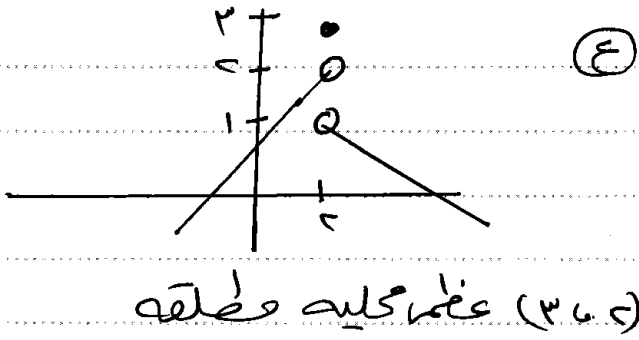
⑤ الاطراف صَحِيل ان تكون محلية
ولكن اجمال ان تكون مطلقة

⑥ كل وصوى مطلقة هي محلية
وليس كل وصوى محلية مطلقة
باستثناء الاطراف

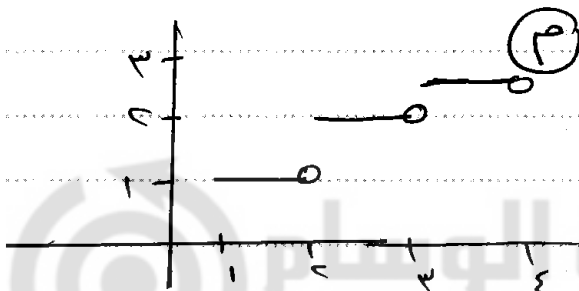
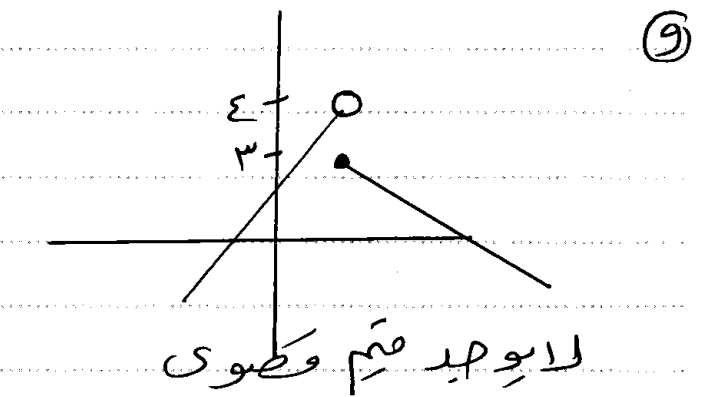
$(3, 6)$ تسمى نقطة عظمى
محلية

④ : هي عظمى محلية
③ : الاصلان التي للنقطة
العظمى المحلية

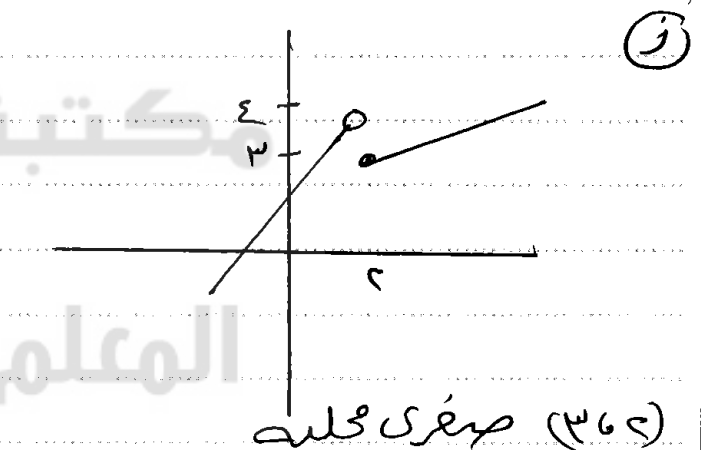




٤ قيمة و صوى محلي و مطلق
 (١,١) = (٢,٢) كل من (١,١) و (٢,٢)



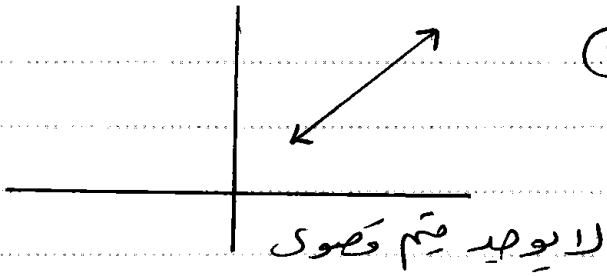
٣ قيمة عظم مطلق
 ١ قيمة صغرى مطلق
 ١,٢,٣,٤ قيم صغرى محلي



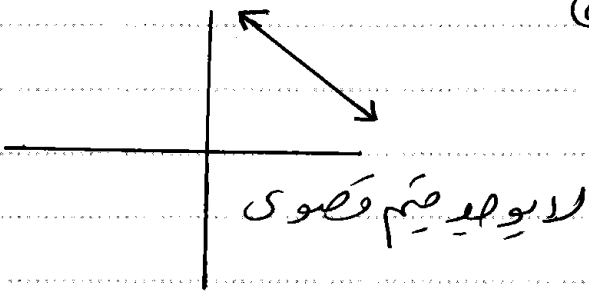
سؤال ٥

الرسم في كل مما يلي عيّل به (س)
 جد الامداد التي ينبغي للعتم الصوى

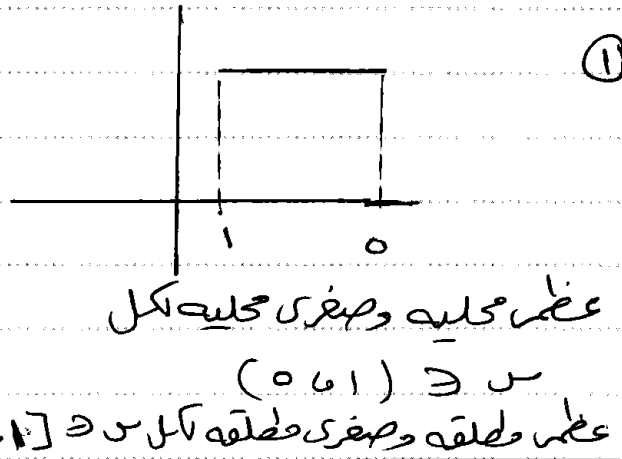
٤



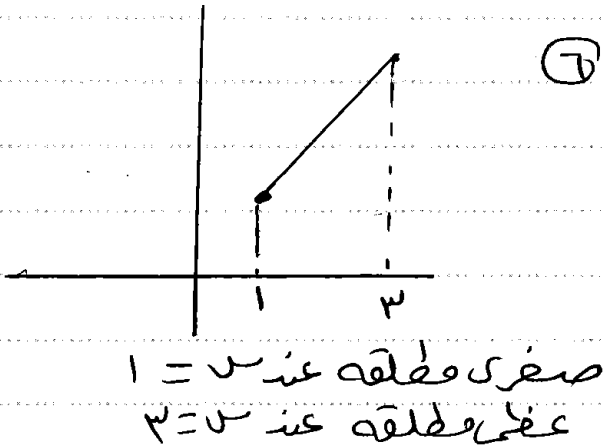
٥



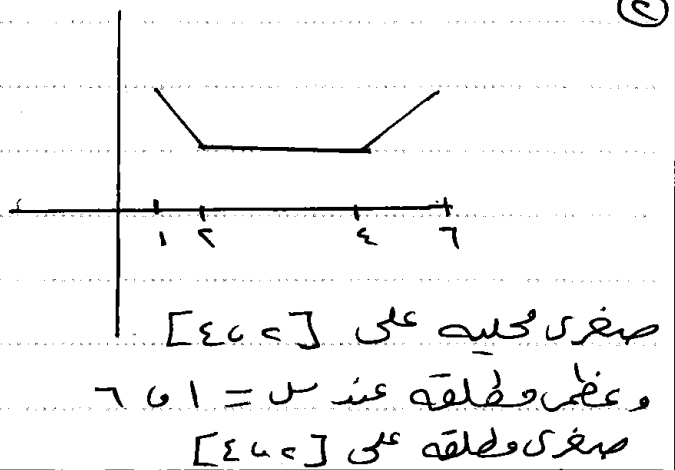
١



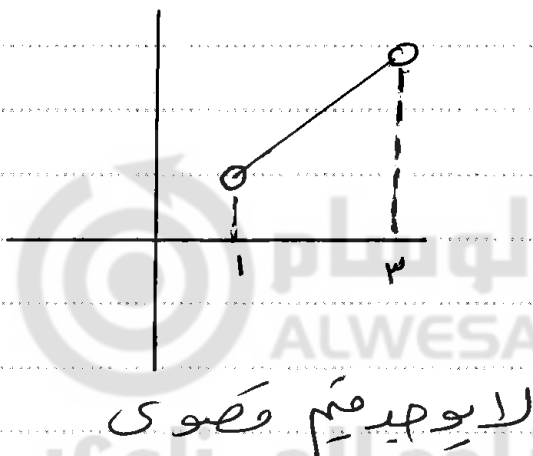
٦



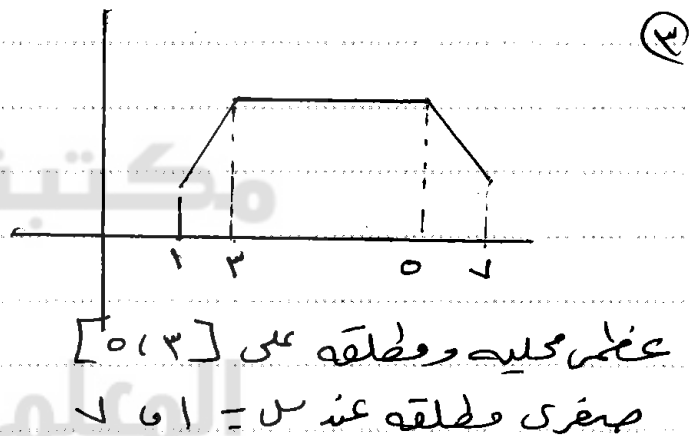
٢



٧



٣



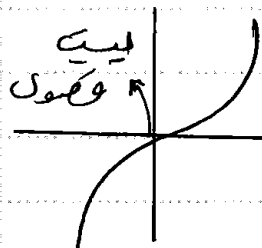
نظرية

إذا كانت (a, b) نقطة
قصوى فان
هـ $(a) =$ صفر أو هـ (a) غير موجود

عكس النظرية

إذا كانت هـ $(a) =$ صفر أو
هـ (a) غير موجودة فليس
بالضرورة ان تكون النقطة
 (a, b) قصوى

مثال



$$هـ (a) = 0$$

$$هـ (a) = 0$$

$$هـ (a) = 0$$

ولكن $(0,0)$ ليست قصوى

ملاحظة

النقطة القصوى توجد عند

① القيم والقيعان

② الأطراف

③ نقط الانفصال

④ الرؤوس الحادة

وغيرها عندها مشتقة = صفر

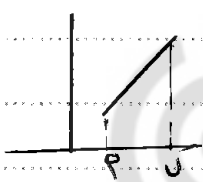
أو غير موجود

اختبار المشتقة الأولى لمعرفة القيم القصوى

ملاحظات صافية حول القيم القصوى

- ١) كل نقطة قيمة قصوى مطلقة تكون محلياً لكن ليس كل محلياً وطلقة
- ٢) كل نقطة قيمة قصوى تكون نقطة حرجة لكن ليس كل حرجة قصوى
- ٣) اذا كان $f'(a)$ متصلاً على $[a, b]$
- ٤) عند بداية فترة التزايد أو نهاية فترة التناقص يوجد نقطة قيم محلياً
- ٥) عند بداية فترة التناقص أو نهاية فترة التزايد يوجد نقطة قيم محلياً

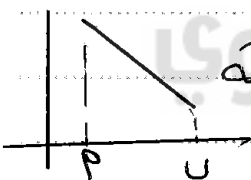
٤) اذا كان $f'(a)$ متزايداً على $[a, b]$



١) (a, b) صغرى مطلقة

٢) (a, b) عظمى مطلقة

٥) اذا كان $f'(a)$ متناقصاً على $[a, b]$



١) (a, b) عظمى مطلقة

٢) (a, b) صغرى مطلقة

نظرية

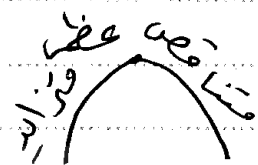
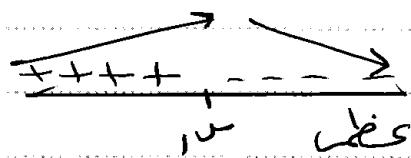
اذا كان $f'(a)$ متصلاً على $[a, b]$ وقابل للتفاضل على (a, b) وكانت a و b نقطه حرجه فان

١) اذا كانت $f'(a) < 0$ لكل

$a < x < b$ وكان $f'(a) \geq 0$

لكل $a < x < b$ فان $f'(a)$

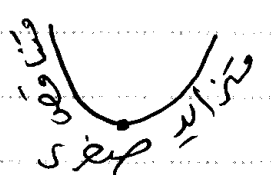
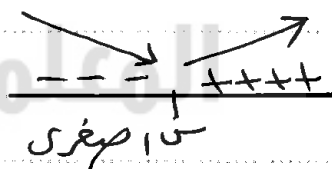
قيمة عظمى محلياً للأقتران



٢) اذا كان $f'(a) \geq 0$ صغرى لكل $a < x < b$

وكان $f'(a) \leq 0$ صغرى لكل $a < x < b$

فان $f'(a)$ قيمة صغرى محلياً لـ f



٦) عند نقط القطب القطبي يكون المنقعه صفر أو غير موجودة

٧) في حالة وجود أكثر من نقطة عظمى فان الاصلاتي اصادي الأكبر هو الذي يقرر العظمى المطلقة

٨) في حالة وجود أكثر من نقطة صغرى فان الاصلاتي اصادي الأصغر هو الذي يقرر الصغرى المطلقة

ملاحظة

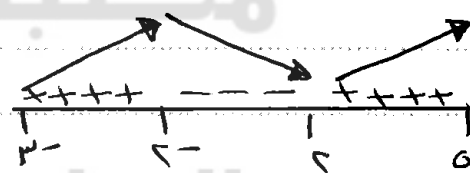
ملاحظة في المثال السابق انه عند $s = -3$ يوجد قيمة صغرى محلية وهذا لا يجوز الاطراف يكون عندها مطلقه فقط لذلك فخطب.

مثال ١

هـ (س) = $s^3 - 5s^2 + 2s$ حيث $s \in]-3, 3[$ او بعد قيم s بحره ثم اخبرها لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة

الحل

هـ (س) = $s^3 - 5s^2 + 2s = 0$
 $s(s^2 - 5s + 2) = 0$
 $s = 0$ أو $s = 1$ أو $s = 4$



عند $s = -3$ قيمة عظمى محلية = 18
 عند $s = 1$ قيمة صغرى محلية = 0
 هـ (س) = 12

مثال ٥

هـ (س) = $s^3 - 3s^2 + 3s - 3$ حيث $s \in]-3, 3[$ او بعد قيم s بحره ثم اخبرها لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة

هـ (س) = $s^3 - 3s^2 + 3s - 3$ وقابل للاشتقاق على $(-3, 3)$

هـ (س) = $s^3 - 3s^2 + 3s - 3 = 0$
 $s^2 - 2s + 1 = 0$
 $(s - 1)^2 = 0$
 $s = 1$



هـ (س) = $(s - 1)^2 = 0$ قيمة عظمى مطلقة طرفية
 هـ (س) = $(s - 1)^2 = 0$ قيمة عظمى محلية
 هـ (س) = $(s - 1)^2 = 0$ قيمة صغرى محلية
 هـ (س) = $(s - 1)^2 = 0$ قيمة صغرى مطلقة طرفية

مسألة (٣)

عند $s = 0$ هي قيم s الحرجة
و هي محالات التزايد والتناقص
والقيم القصوى

الحل
عند $s = 0$ هي قيم ثابتة
 $s = 0$ $s = 0$
قيم s حرجة هي $s = 0$

القيمة للأقتران هي $s = 0$ عند اي
نقطة في s
القيمة للأقتران هي $s = 0$ عند
اي نقطة في s

s : مجموعة من القيم العظمى والصغرى
الحالية والخلقة للأقتران هي

مسألة (٤)

عند $s = 0 = 3s^3 - 3s^2 + 3s + 1$

الحل
عند $s = 0 = 3s^3 - 3s^2 + 3s + 1$
بالقسمة على $s - 1$
 $s^3 - s^2 + s + 1 = 0$

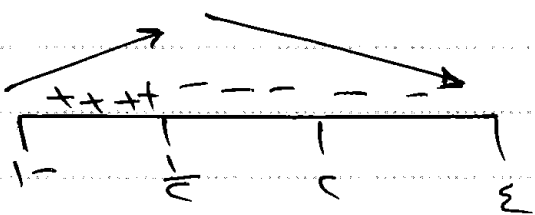
$(s + 1)(s - 1) = 0$
 $s = -1$ $s = 1$
عند $s = 1$ هي القيم
عند $s = -1$ هي القيم

مسألة (٥)

اذا كان $s = 0$ هي قيم s الحرجة
في $s = 0$ هي قيم s الحرجة
فترات التزايد والقيم القصوى

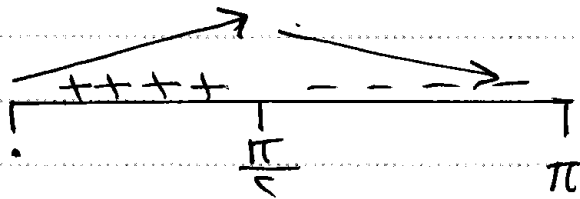
الحل

هو متصل وقابل للاشتقاق
عند $s = 0 = 3s^3 - 3s^2 + 3s + 1$
 $3s^2 - 6s + 3 = 0$
 $s^2 - 2s + 1 = 0$
 $(s - 1)^2 = 0$
 $s = 1$
 $s = 1$



عند $s = 0$ هي قيم s الحرجة على $[1/2, 1]$
عند $s = 1/2$ هي قيم s الحرجة
وهي $s = 1/2$

عند $s = 1$ هي القيم
عند $s = 1$ هي القيم



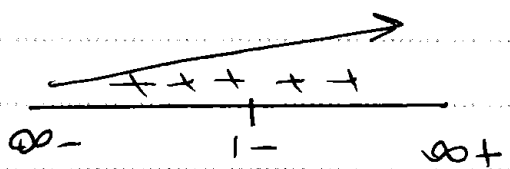
$1 = \sqrt{\pi} = (\frac{\pi}{2})$ فيه عظم مطلقه
 $0 = 1 = 0$ فيه صغرى مطلقه
 $0 = (\pi)$ فيه صغرى مطلقه

سؤال ٦

في $(s) = (1+s)^3$ حدد القيم
 القصوى المحليه .

الحل

$(s) = (1+s)^3 \leftarrow s = -1$



لا يوجد قيم قصوى
 في $s = -1$

$s = -1$ نقطة عرجه لكنه لا
 يوجد عندها قيمة قصوى .

سؤال ٨

في $(s) = \text{جتا } s - \text{حاس } s$
 $s \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ اوجد القيم القصوى

الحل

في $(s) = \text{جتا } s - \text{حاس } s$ قابل للاشتقاق

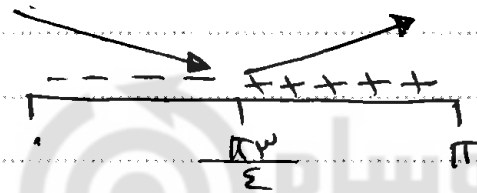
$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

$(s) = \text{جتا } s - \text{حاس } s = 0$

$\leftarrow \text{حاس } s = \text{جتا } s$ بالقسمة على $\text{جتا } s$

$1 - \text{تجا } s = 1 \leftarrow \text{تجا } s = 0$

$s = \frac{\pi}{2}$ أو $s = \frac{3\pi}{2}$



$(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ صغرى محليه مطلقه

$(1, 0)$ عظم مطلقه

عند $s = \pi$ لا يوجد

سؤال ٩

حدد نقطة القيم القصوى المحليه
 للأفقران (s) و $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

الحل

$(s) = \frac{\text{جتا } s}{\text{حاس } s}$

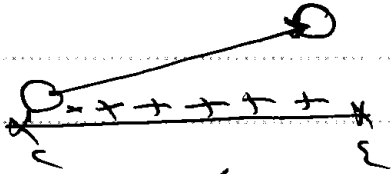
$\frac{\text{السطر}}{\text{المقام}} = \text{صفر} \leftarrow \text{جتا } s = 0$
 $s = \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{6} \neq s = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\text{حاس } s}{\text{المقام}} = \text{صفر} \leftarrow s = \pi \geq \frac{\pi}{6} \geq \pi$

$\neq \pi < \frac{\pi}{6}$

اصفر من (2) = 15
لا يوجد أكبر من (2)

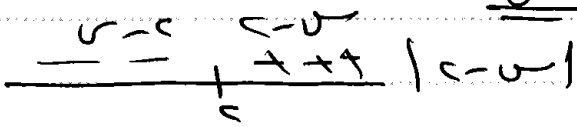
④ (462)



لا يوجد أكبر من (2) أو أصغر من (2)

وهذا = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
وهو تقطع لقيم القوى المحلية
للأقتران .

اكل



وهذا = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
وهو تقطع لقيم القوى المحلية
للأقتران .

وهذا = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
وهو تقطع لقيم القوى المحلية
للأقتران .

مصل

وهذا = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
وهو تقطع لقيم القوى المحلية
للأقتران .

$3 - 1 = 2$

$4 - 2 = 2$

$3 = 3$ و $4 = 4$
من

سؤال ④

وهذا = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
وهو تقطع لقيم القوى المحلية
للأقتران .

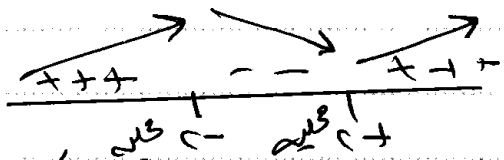
① ع [262]

③ [260] ④ (462)

اكل

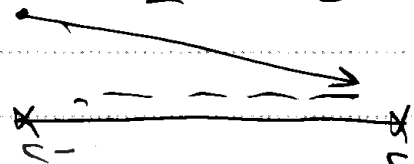
وهذا = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
وهو تقطع لقيم القوى المحلية
للأقتران .

① على ع



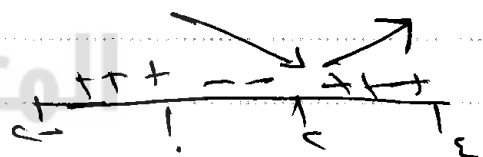
لا يوجد مطلقاً، لا يوجد أكبر
أو أصغر قيمة

③ على [262]



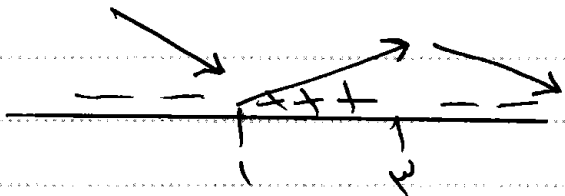
أكبر من (2) = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$
اصغر من (2) = $3 - 1 = 2$ أو $4 - 2 = 2$

⑤ على [262]



$c < s = 2 - c \leftarrow s = 1 \Rightarrow$ مجال

$\frac{10-c}{s} \leftarrow s = 0 \Rightarrow$ المجال \neq

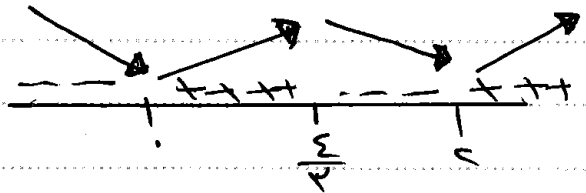


عدد (1) = 1 (صفرى محليه)
عدد (3) = 0 (علمى محليه)

$s = 2 - c = 0$

$s = (2 - c) = 0$

$s = 0 \Rightarrow s = \frac{2}{2} = 1 \neq$



عدد (2) = $\frac{2-c}{s} = 0$ علمى محليه
صفرى محليه ومطلقة
عدد (3) = 0
صفرى محليه ومطلقة

سؤال 10

اوجد نقطه القيم القصوى
للأغراض

$\left. \begin{array}{l} s < 2 \\ s < s \end{array} \right\} = (s) = 1 + c$
 $\left. \begin{array}{l} c < 2 \\ c < s \end{array} \right\} = (s) = 0 - c$

عدد (2) = 4 -
كما عدد (3) = 0
 $\leftarrow s$ كما عدد (2) = 0
 $\leftarrow c$

مفصل عند $c = 0$ غير موجوده

$\left. \begin{array}{l} s < 2 \\ s < s \end{array} \right\} = (s) = c$
غير موجوده $c = s$

$s = 0 \Rightarrow s = 0$



عدد (1) = 1 (صفرى محليه)
عدد (2) = 0 (لا يوجد)

سؤال 11

$\left. \begin{array}{l} s < 2 \\ s < s \end{array} \right\} = (s) = 2 - c + s$
 $\left. \begin{array}{l} c < 2 \\ c < s \end{array} \right\} = (s) = \frac{10-c}{s}$

الحل

عدد (2) = $\frac{10-c}{s} = 0$

كما $\frac{10-c}{s} = 2 - c + s$

$c < 2$

مفصل عند $s = 3$

$\left. \begin{array}{l} s < 2 \\ s < s \end{array} \right\} = (s) = c - s$
 $\left. \begin{array}{l} c < 2 \\ c < s \end{array} \right\} = (s) = \frac{10-c}{s}$
غير موجوده $s = 3$

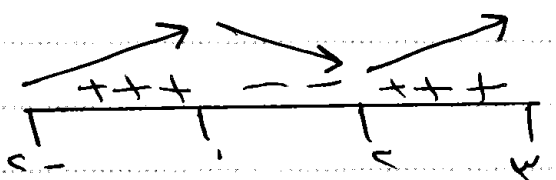
سؤال (١٤)

ما ستد اام المشتقة بين ان
 $10 \geq 10 - 3 - 3 + 5 \geq 0$
 س $\geq [300]$

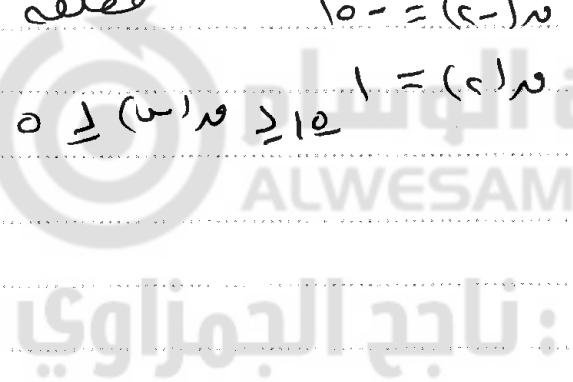
اكل

تقرض ان $(س) = س - 3 - 3 + 5$
 وزيد ايتا = ان (٥) فيه عظمى
 وطلقة وان $(10-)$ فيه
 صغرى وطلقة

د $(س)$ متصل على $[300]$
 عه قابل للاشتقاق على (300)
 $(س) = س - 3 - 3 + 5 = 5 - 6س + 3س^2$
 $(س) = س - 3 - 3 + 5 = 5 - 6س + 3س^2$
 $س = 6 - 3 = 3$



ن $(١) = ٥ = ٥$ عظمى مطلقه
 ن $(٣) = ٥ = ٥$ صغرى مطلقه
 ن $(٥) = ١٥ = ١٥$ مطلقه
 ن $(٦) = ١ = ١$



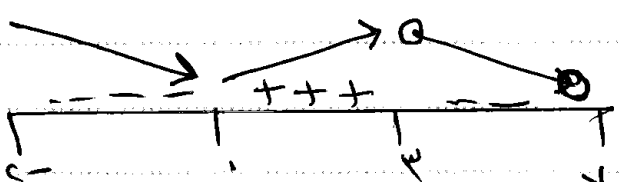
سؤال (١٣)

احمد اعظم لقصوى للأقتران
 $3 \geq 3 - 5 + 3 \geq 3$
 $10 - 3 - 3 + 5 \geq 10$

اكل

د $(س) = 12$
 كفاية $(س) = 12$ كفاية
 عظمى $(س) = 12$
 غير متصل $(س)$ غير موجودة

د $(س) = 12$
 $3 \geq 3 - 5 + 3 \geq 3$
 $10 - 3 - 3 + 5 \geq 10$
 غير موجودة $(س) = 12$



س $= 0$
 د $(س) = 12$ كفاية مطلقه
 ن $(٥) = ٩ = ٩$
 عند $س = ٥$ يوجد صغرى محليه
 وكانه سهل عند $س = ٥$ هي صغرى مطلقه
 لمعرفة ذلك نقارنها مع ٥

كفاية $(س) = 12$
 صغرى محليه فقط
 $(٥) = ٩$

ملاحظة

إذا كانت (u, P) نقطة
قصوى فإن

① $u = (P)$

② $u = (P)$ = صفر أو غير موجودة

وعندما يكون حد (u) كبير جداً

فإن $u = (P)$ = صفر

اكمل

حد $(c) = 1 \leftarrow (c) P \leftarrow 1 = 0 + c \times u - (c) P$

$1 = 0 + u \times c - P \times c$

① $0 = u - P \times c$

حد $(c) = 0 = (c) u \leftarrow$ حد $(u) = c = P \times c - u$

حد $(c) = 0 = u - P \times c$

مما دالة ① - ② $\leftarrow P \times c = c - u$

$1 = P \leftarrow$

بالكيفية $c = u \leftarrow c = u - c \leftarrow u = c$

سؤال 15

إذا كان حد $(u) = P \times c - u$
وكان له قيمة صغرى محليّة عند
 $u = 1$ أوجد قيمة P

سؤال 14
إذا كان حد $u = 3 - 2x$ و $[u]$
الحد القيم القصى

اكمل

حد $u = 3 - 2x \leftarrow$ حد $u = 3 - 2 \times \sqrt{x}$

$u = 3 - 2 \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{3 - 2 \times \frac{4}{3}}{3} = \frac{3 - \frac{8}{3}}{3} = \frac{1}{3}$

اكمل

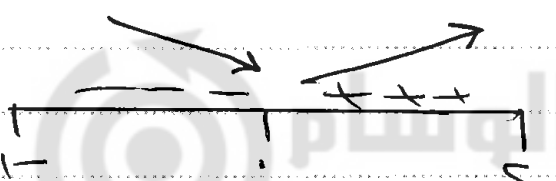
حد $(u) = P \times c - u = 1 \times c - 1 = c - 1$

حد $(u) = 0 = c - 1$

$c = 1 \leftarrow P \times c = 1 \times P = 1$

سؤال 16

إذا كان للاقتبان
حد $(u) = P \times c - u = 0 + c - u = c - u$
نقطة قصوى محليّة هي $(1, 1)$
أوجد (u, P)

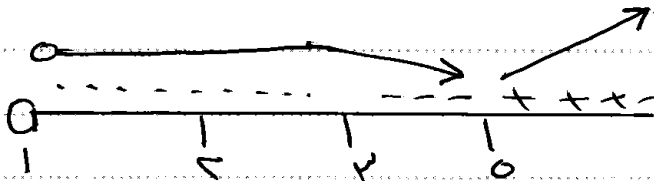


حد $(u) = 0 =$ صغرى محليّة بطلقة

حد $(c) = 1 = u =$ عظمى بطلقة

حد $(u) = 1 = (1 - 1) =$ لا يوجد

١٨ حل



مدا (س) ثابت في الفترات

(٢,١) و (٣,٢)

مدا (س) متناقص في [٢,٣]

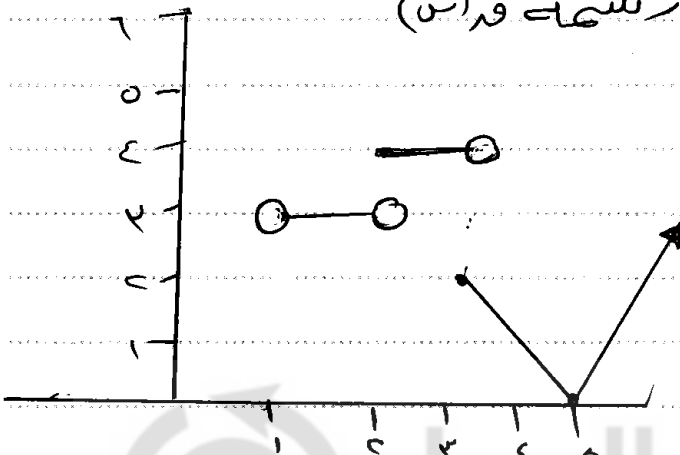
مدا (س) متزايد في [٤,٥]

الفترات (٢,١) و (٣,٢) مجموعتين
القيم العظمى والصغرى

(٣,٣) و (٣,٣) = (٣,٣) لقيمة عظمى

عظمى أو صغرى

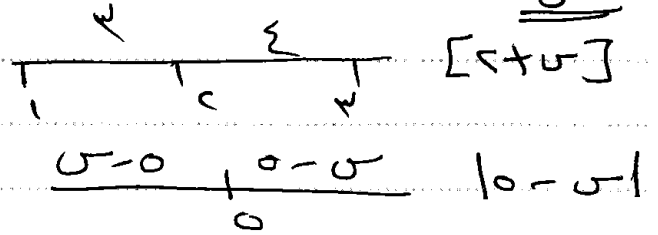
رسماء مدا (س)



$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 2 \\ 2 \leq s \leq 3 \\ 3 \leq s \leq 4 \\ 4 \leq s \leq 5 \end{array} \right\} = \text{مدا (س)}$$

حد قيم من الكرجه ، فترات لتزايد
والتناقص القيم القصوى المحلية
والحلقة .

الحل



$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 2 \\ 2 \leq s \leq 3 \\ 3 \leq s \leq 4 \\ 4 \leq s \leq 5 \end{array} \right\} = \text{مدا (س)}$$

مدا (س) غير متصل عند $s=2$ و $s=3$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 2 \\ 2 \leq s \leq 3 \\ 3 \leq s \leq 4 \\ 4 \leq s \leq 5 \end{array} \right\} = \text{مدا (س)}$$

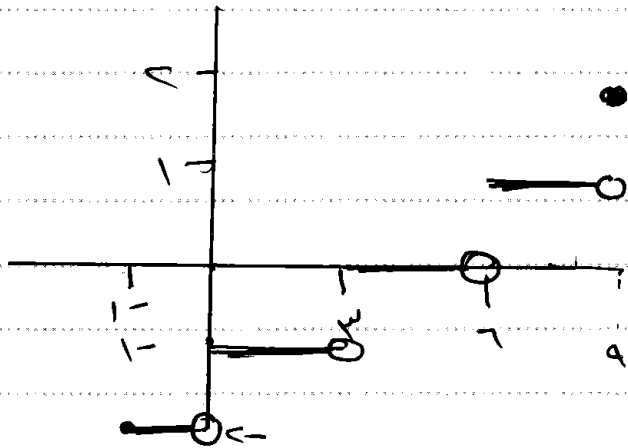
قيم من الكرجه

$$\{ (2,0), (3,1), (4,2), (5,3) \}$$

مثال ١٩

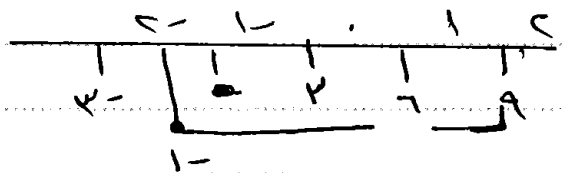
لا نستطيع الحكم حسب اختيار المشتقة الأولى لذلك نرسم الأقطار

عدد اس = $\left[1 - \frac{س}{3} \right]$ س و $[9, 1]$ الأقطار
 صدم من احرصه والقيم لقصوى



اكل

طول الدرهم = 3 ، $1 - \frac{س}{3} = 1$
 $3 = س$ ←



عليه اختيار كل فترة جزئية تعطى قيم عظمى أو صغرى محلية والقيم هي $1 - 0.62 - 0.16$

اما المثلقات فالفترة $[0.16, 0.62]$ تعطى عمودية من القيم الصغرى المحلية والطفقة وهي $0.62 - 0.16 = 0.46$ وعند $س = 9$ تكون قيمة عظمى وطفقة = 0.16

عدد اس =	1 -	2 -	3 -
	1 -	2 -	3 -
	صف	صف	صف
	1 -	2 -	3 -
	4 = س		

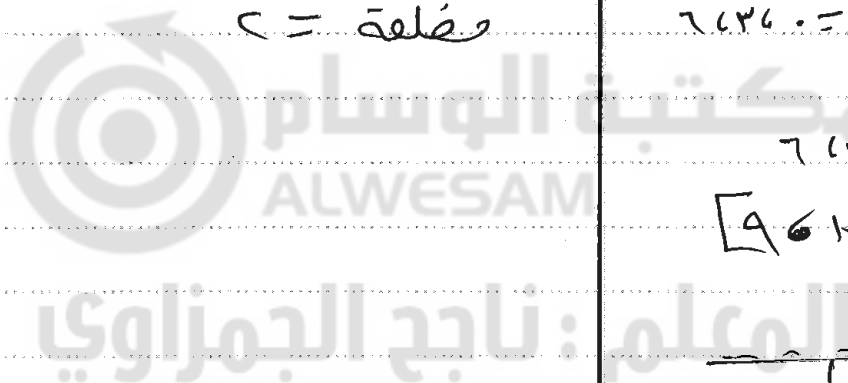
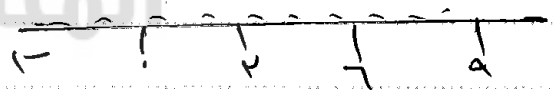
عدد اس =	صف	صف	صف	صف
	1 -	2 -	3 -	4 -
	صف	صف	صف	صف
	1 -	2 -	3 -	4 -

عدد اس غير متصل عند $س = 0.16$

عدد اس غير متصلة عند $س = 0.62$

$س = 0.16 - 0.62 = 0.46$

قيم من احرصه هي $[9, 1]$



سؤال (٢٠)

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

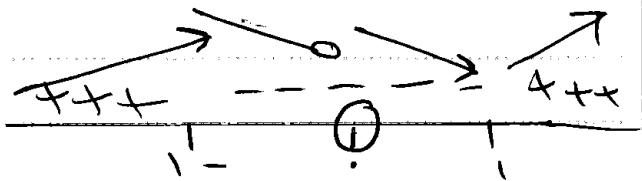
حدد قيم x من الحرجة ، مجالاً =
التزايد والتناقص القيم القصوى

الحل

دراسة متصل على $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\iff x = \pm 1 \leftarrow \text{قيم من الحرجة } \{1, -1\}$$



دراسة متزايد $]-\infty; -1[$ و $]1; +\infty[$
تناقص $]-1; 0[$ و $]0; 1[$

$$f(-1) = (-1) + \frac{1}{-1} = -2$$

$$f(1) = (1) + \frac{1}{1} = 2$$

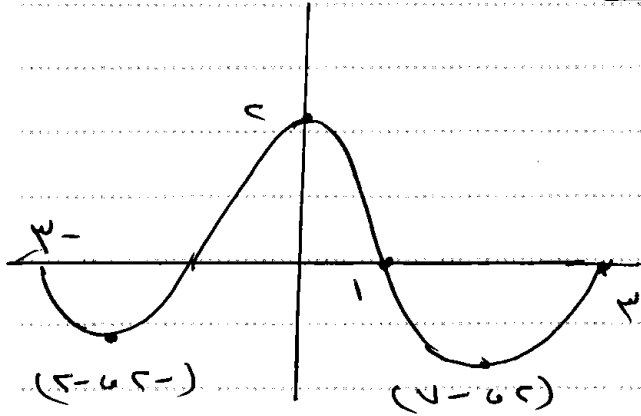
لا يوجد قيم قصوى مطلقة



إيجاد التزايد والتناقص والقيم القصوى والحدية

من الرسم

① إذا كانت الرسمة للأقتران $f(x)$



② إذا كان الأقتران صاعداً يكون
تزايداً ، وإذا كان الأقتران
صاعداً (نازلاً) يكون الأقتران
تناقصاً

الحل

① من تزايد على $[-0.5; 2]$ ، $[2; 5]$
من تناقص $[-0.5; 1]$ ، $[2; 3]$

② $(-0.5; 2)$ صغرى محلياً
 $(2; 5)$ عظمى محلياً وطلقه
 $(-0.5; 1)$ صغرى محلياً وطلقه

③ النقطة الحرجة

(-0.5) ، (1) ، (2) ، (3)
 (-0.5) ، (2) ، (3)

④ $f'(1) = 0$
 $f'(2) = 0$ ، $f'(3) = 0$ ، $f'(5) = 0$

⑤ $f'(1) = 0$ ، $f'(2) = 0$ ، $f'(3) = 0$
 $f'(5) = 0$ غير موجودة طرفاً فتحة

④ تكون النقطة الحرجة للأقتران
عند $x=0$ عند الرؤوس المدببة
الطرف الأقتران ، نقاط الاتصال
التي \in المجال ، القيم والقيعان
وكذلك القيم القصوى .

سؤال

إذا كان الشكل بجانبه على فحوى
عند $x=0$ يعرف على $[-3; 3]$

إجابة

① مجالات التزايد والتناقص

② القيم القصوى

③ النقطة الحرجة

④ $f'(1) = 0$ ، $f'(2) = 0$ ، $f'(3) = 0$ ، $f'(5) = 0$

٦) اذا كانت الرسمه تمثله (س)

مسئله ١

الشكل ايجاور عيل منحرفه (س)
صيت هـ (س) معرف على $[-٣٥, ٣]$

ارصد

١) مجالات التزايد والتناقص لـ (س)

٢) القيم القصى

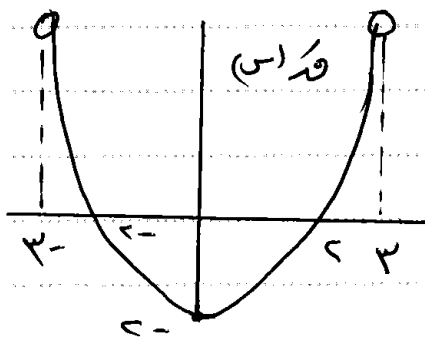
٣) نقطه الحرجه

٤) مجالات التزايد والتناقص للأصل

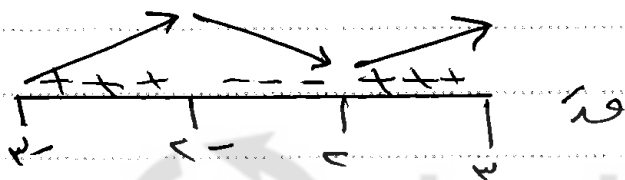
هـ (س)

٥) النقطه القصى المحليه للدورات

وـ (س)



الكل



١) مجالات التزايد هي $[-٣, -١]$ ، $[١, ٣]$

مجالات التناقص هي $[-١, ١]$

٢) القيم القصى

٣) نقطه الحرجه

← نتيج اكل

لايجاد مجالات التزايد والتناقص
من خلال رسمه هـ (س) نتبع
الخطوات التاليه

١) نجد النقطه الحرجه و هو اطراف
القدرات ، نقاط الانفصال
نقاط تقاطع هـ (س) مع محور السينات

٢) نرسم خط الاعداد ونضع عليه
النقطه الحرجه

٣) نعين اشارة هـ (س) على خط
الاعداد وذلك

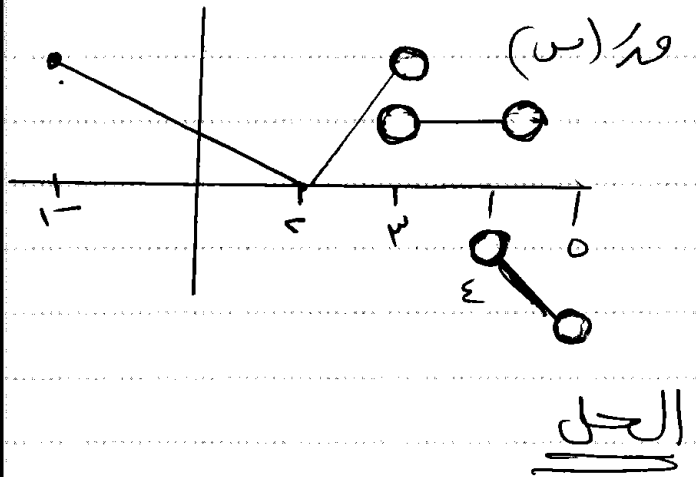
٤) ضوفه محور السينات - هـ
موجبه

٥) نتت محور السينات هـ
سالبه

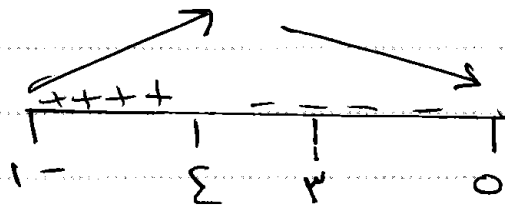
٦) نجد المطلوب

سؤال ٣

الشكل الجانبي يمثل صحنه (س) المعرفة على $[-٥, ١]$ اوجد
 ١) محالات التزايد ولتقاطعها لمح
 ٢) قيم x الحرجه له



الحل



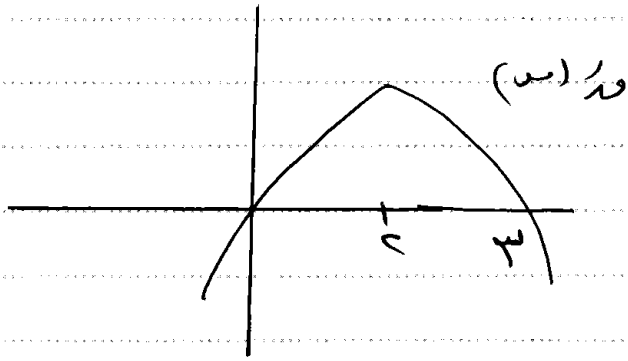
فـه قـتـزـاـيـد عـلـى $[-٤, ١]$
 فـه قـتـا قـصـ عـلـى $[٥, ٤]$
 قيم x الحرجه هي

$$\{-١, ٤, ٥, ٣, ٦, ٢, ١, ٥\}$$

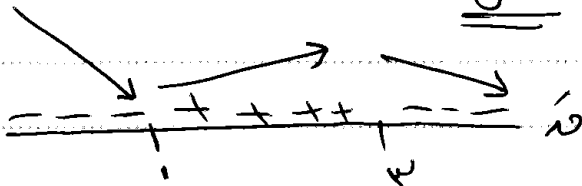
سؤال ٤

بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي
 يمثل صحنه (س) اوجد مايلي

١) قـتـرات التـزـاـيـد ولتقاطعها لمح
 ٢) قيم x الحرجه له



الحل



فـه قـتـا قـصـ عـلـى $(-٥, ٣]$
 فـه قـتـزـاـيـد عـلـى $[٣, ٥]$

(٥, ٣) نقطه صفرى محليه
 (٣, ٥) نقطه عظمى محليه

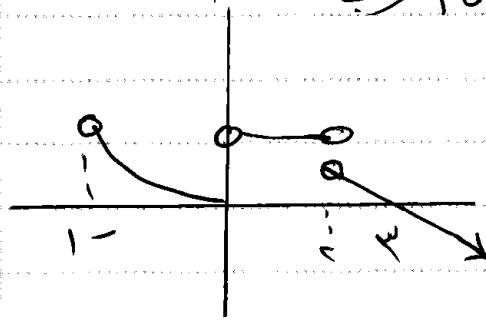
سؤال ٥

يعمل الشكل بجانبى متخني لمتنقه
الزاوي للأقتران (س) او ب
١) مجال = لزايد ولتناقص

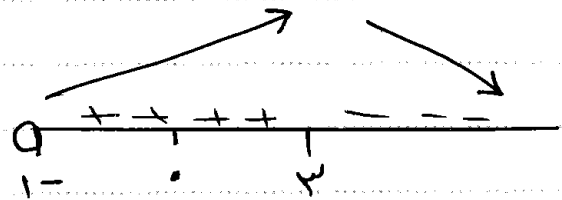
٢) القيم القصوى

٣) قيمها الحرجه

و (س)



اكل



١) فترائيد (- ٣٥١)

فتناقص [٣ ، ٥٥)

٢) عند (٣) و (١٣) قيمه عظمى

محلله

٣) لنقطه الحرجه

$$س = \{ -١٠٠٠ , ١٠٠٠ \}$$



المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ⑤ ص ١٩١

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى

لـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ (لا أفقاري)

وـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ (واري)

سـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ [٥٠٦٠]

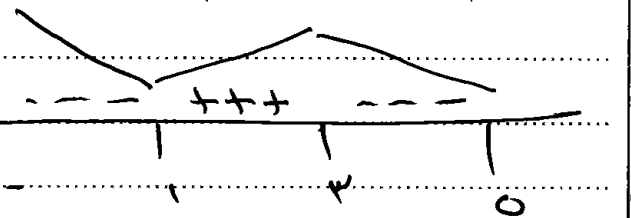
الحل

فـ (س) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$(3x - 1)(x - 2) = 0$

$x = \frac{1}{3} \quad x = 2$



عند $x = \frac{1}{3}$ قيمة صغرى محلية $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$

عند $x = 2$ قيمة عظمى محلية $f(2) = -1$

$x = \frac{1}{3}$ $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$ قيمة عظمى مطلقة

$x = 3$ $f(3) = 2$ قيمة صغرى مطلقة

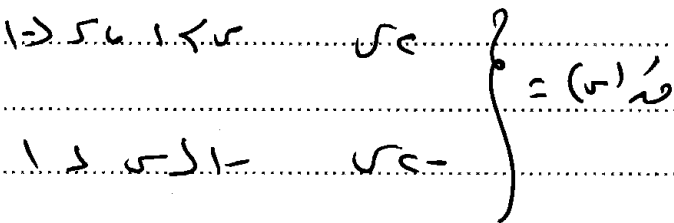
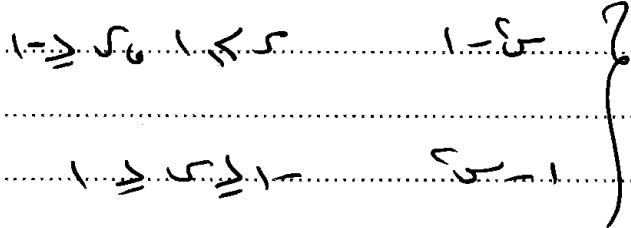
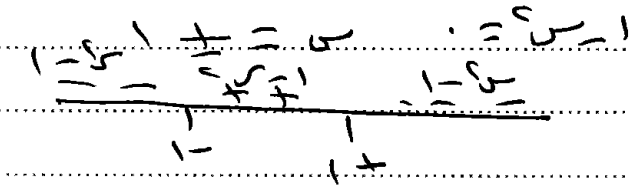
تدريب ⑥ ص ١٩٢

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى

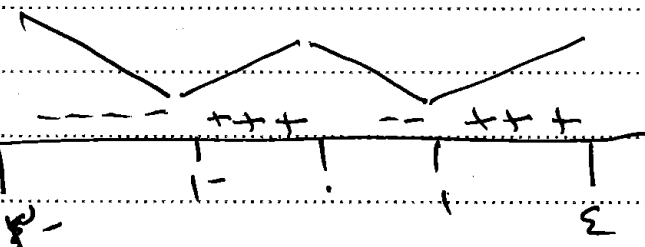
لـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ (لا أفقاري)

وـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ (واري)

الحل



عند $x = \frac{1}{3}$ قيمة صغرى محلية $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$



عند $x = \frac{1}{3}$ قيمة صغرى محلية $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$

عند $x = 2$ قيمة عظمى محلية $f(2) = -1$

$x = \frac{1}{3}$ $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$ قيمة عظمى مطلقة

$x = 3$ $f(3) = 2$ قيمة صغرى مطلقة

عند $x = \frac{1}{3}$ قيمة صغرى محلية $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$

عند $x = 2$ قيمة عظمى محلية $f(2) = -1$

$x = \frac{1}{3}$ $f(\frac{1}{3}) = -\frac{17}{27}$ قيمة عظمى مطلقة

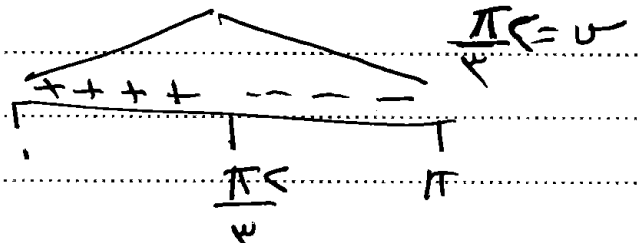
$x = 3$ $f(3) = 2$ قيمة صغرى مطلقة

تدريب (3) ص 193

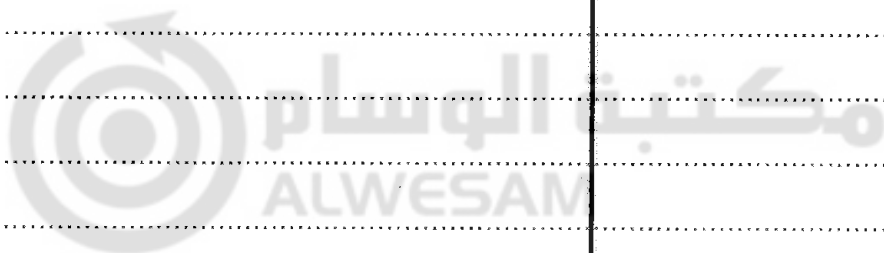
جد القيم لعضو الحلبة (إن و غير)
 للأعداد $s = 3 + 2$ $s = 3$
 $s \in [2, 3]$

اكل

$s = 3 + 2 = 5$
 $s = 3 = 3$



عند $s = \frac{\pi}{3}$ فيه عظمى المطلقة و $(\frac{\pi}{3})$
 $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
 عند $s = \dots$ و (π) = عظمى المطلقة
 $s = \pi = \dots$ و (π) = عظمى المطلقة



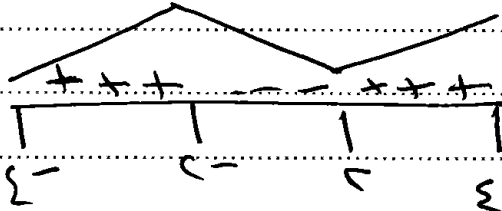
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (١٩٤)

المسؤال الأول

$$س = ٤ \iff س = ٣ + ١$$



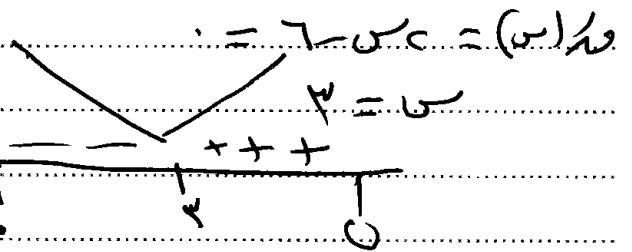
عدد القيم المقبول (الحل) والمطلقة (البيان وحيد) لكل من الإقترايات التالية

س = ٣ قيمة غير مطلقة عدد (٣) = ١٦
 س = ٢ قيمة غير مطلقة عدد (٢) = ١٦

(١) عدد (٣) = س - ٦ + ٩ = [٥٦]

س = ٤ عدد (٤) = ١٦ مطلقه فقط
 س = ٤ عدد (٤) = ١٦ مطلقه فقط

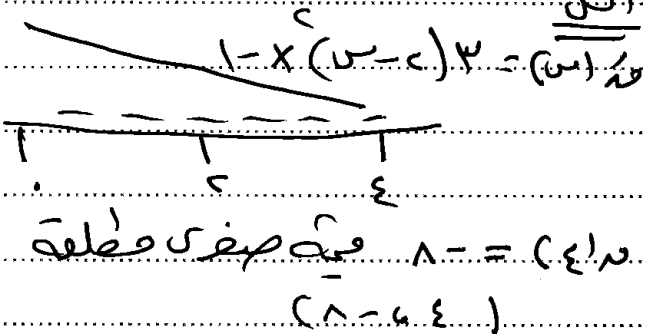
اكمل



عدد س = ٣ قيمة غير مطلقة قيمتها
 عدد (٣) = ٩ + ١٨ - ٩ = (٣٠٣)

(٢) عدد (٣) = (س - ٣) = [٤٦]

اكمل



عدد (٣) = ٨ = قيمة غير مطلقة
 (٨ - ٤ - ٤)

عدد س = ٠ عدد (٠) = ٩ قيمة غير مطلقة
 س = ٥ عدد (٥) = ٤ لا يوجد

س = ٨ = (٠) = ٨ = قيمة غير مطلقة
 (٨ - ٠ - ٠)

(٣) عدد (٣) = س - ٣ = [٤٦]

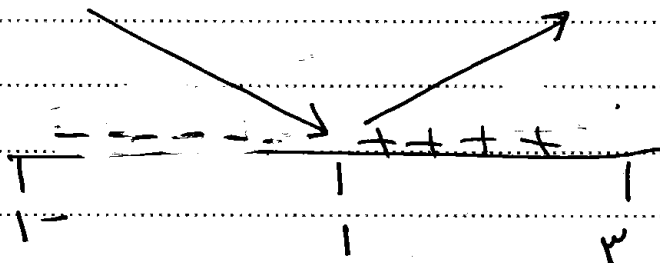
اكمل

عدد (٣) = ٣ - ١٢ =

$$\left. \begin{aligned} 1 \geq s \geq 1 & \quad (s-1)^2 \\ 3 \geq s \geq 1 & \quad (s-1)^2 \end{aligned} \right\} \text{وهذا (س)} =$$

مفصل عند $s=1$

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq s \leq 1 & \quad s^2(s-1) - 1 - 1 \\ 1 \leq s \leq 3 & \quad s^2(s-1) \end{aligned} \right\} \text{وهذا (س)} =$$

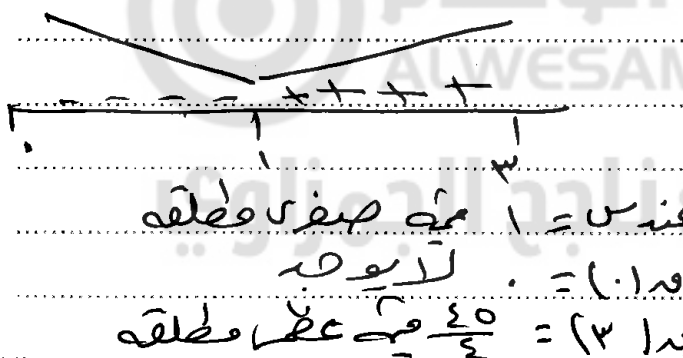


عند $s=1$: (1, 1) = صفر في منطقة
عظمى مطلقة
عند $s=1$: (1, 1) = صفر في منطقة
عظمى مطلقة
عند $s=3$: (3, 1) = صفر في منطقة
عظمى مطلقة

(9) وهذا (س) = $\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{3} s^3$ [3, 0]

وهذا (س) = $s^3 - 3s = 0$

$s^3 = (s-1)s^2 = 0$: $s=0, s=1$

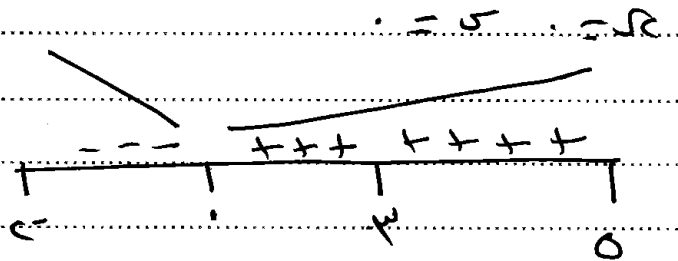


السؤال الاول

(5) وهذا (س) = $\left. \begin{aligned} 1 \leq s \leq 2 & \quad s^2 + 1 \\ 3 \geq s \geq 1 & \quad s^2 + 1 \end{aligned} \right\}$

مفصل عند $s=3$

وهذا (س) = $\left. \begin{aligned} 1 \leq s \leq 2 & \quad s^2 \\ 2 \leq s \leq 3 & \quad s^2 \end{aligned} \right\}$ غير موجودة
 $s=0, s=3$



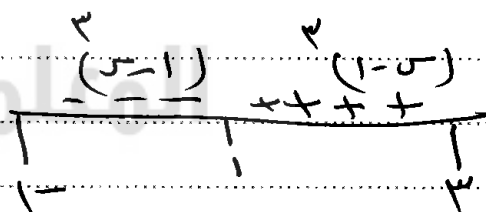
عند $s=0$: (0, 1) = صفر في منطقة
عظمى مطلقة

عند $s=3$: (3, 1) = صفر في منطقة
عظمى مطلقة

عند $s=5$: (5, 1) = صفر في منطقة
عظمى مطلقة

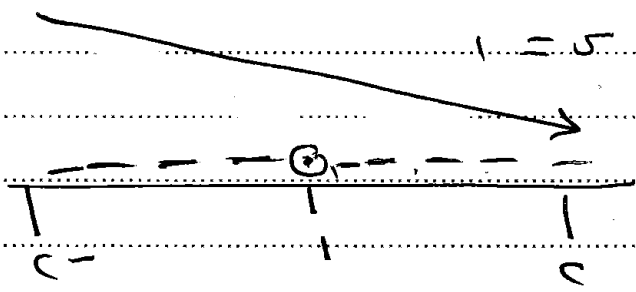
(10) وهذا (س) = $|s^2(s-1)|$ [3, 0]

$s^2 = 0$: $s=0, s=1$



④ $f(x) = (x-1)^2$ [٢٥٤-]

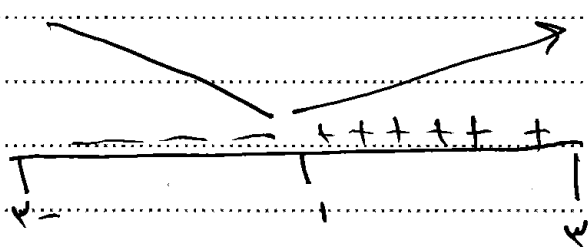
$f(x) = (x-1)^2$
 $1-x^2 = (x-1)^2$
 $1-x^2 = x^2 - 2x + 1$
 $0 = 2x^2 - 2x$
 $0 = 2x(x-1)$
 $x=0$ or $x=1$



عند $x=0$ و $x=2$ هي نقطتي تقاطع
 عند $x=1$ هي نقطة صفرية مطلقة

⑤ $f(x) = (x-1)^4$ [٣٦٣-]

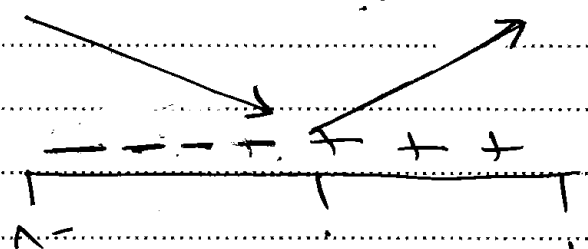
$f(x) = (x-1)^4$
 $1-x^2 = (x-1)^4$
 $1-x^2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
 $0 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$
 $0 = x(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$
 $x=0$ or $x=1$ or $x=2$



عند $x=0$ و $x=2$ هي نقطتي تقاطع
 عند $x=1$ هي نقطة صفرية مطلقة
 لا يوجد
 عند $x=1$ و $x=3$ هي نقطتي تقاطع
 عند $x=2$ هي نقطة صفرية مطلقة

⑥ $f(x) = \sqrt{x}$ [١٦٨-]

$f(x) = \sqrt{x}$
 $1-x = \sqrt{x}$
 $1-x^2 = x$
 $1-x^2-x=0$
 $(1-x)(1+x)-x=0$
 $1-x-x+x^2=0$
 $x^2-2x+1=0$
 $(x-1)^2=0$
 $x=1$

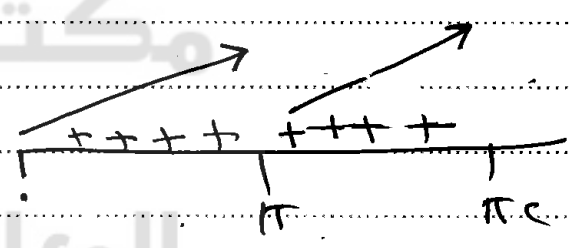


عند $x=1$ هي نقطة صفرية مطلقة
 عند $x=0$ هي نقطة تقاطع مع المحور
 لا يوجد

عند $x=1$ و $x=2$ هي نقطتي تقاطع
 عند $x=1$ هي نقطة صفرية مطلقة
 عند $x=2$ هي نقطة صفرية مطلقة

⑦ $f(x) = x^2 + x$ [٢٥٥٠-]

$f(x) = x^2 + x$
 $1-x = x^2 + x$
 $1-x-x^2-x=0$
 $1-2x-x^2=0$
 $x^2+2x-1=0$
 $x = -1 \pm \sqrt{2}$
 $x = -1 + \sqrt{2}$ or $x = -1 - \sqrt{2}$

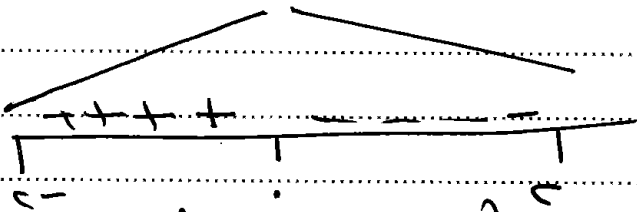
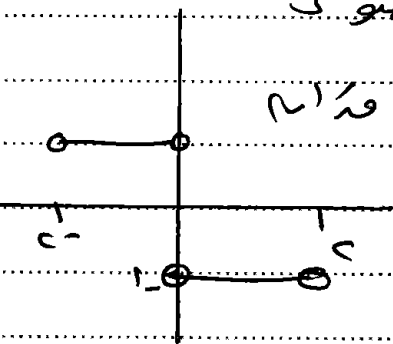


عند $x = -1 + \sqrt{2}$ و $x = -1 - \sqrt{2}$ هي نقطتي تقاطع
 عند $x = -1 + \sqrt{2}$ هي نقطة صفرية مطلقة
 عند $x = -1 - \sqrt{2}$ هي نقطة صفرية مطلقة

السؤال الثاني ص ١٩٤

١١ عمودية فيم هي الكرجه
١٢ محالات التزايد والتناقص
١٣ الضم البصوي

اذا كان للأقتران $f(x)$ قيمة
عظمى محليه عند $x=3$
بين ان للأقتران
 $f(x) = (x-1)^3 - 3x^2$
صفرى محليه عند $x=6$ و $x=8$

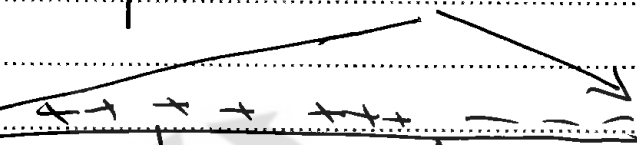
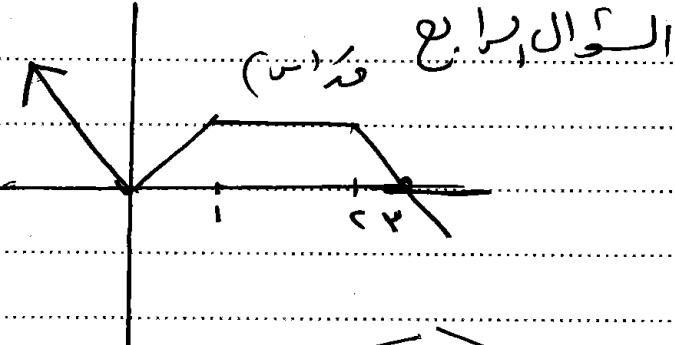


من كرجه { ٣, ٦, ٨ }
قترانيد [٣, ٦] متناقص [٦, ٨] متناقص
عند $x=3$ فيه عظمى مطلقة

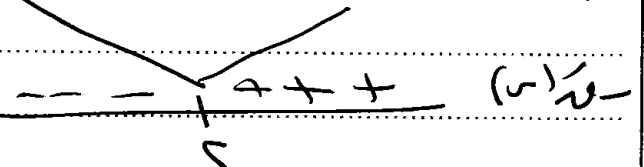
فد $f(x)$
لأنه عند $x=3$ فيه عظمى

$f(x) = (x-1)^3 - 3x^2$
دائماً موجبا يوجد
الاشارة

بالفرض فد $f(x)$ في سالب



الكرجه { ٣, ٦ }
قترانيد (٣, ٦] متناقص [٦, ٨)
عظمى مطلقة عند $x=3$



عند $x=3$ فيه صفرى محليه
لأنه $f(x) = (x-1)^2 - 3x^2$
 $f(3) = 0$

السؤال الثالث ص ١٩٥

عظمى الكرجه الذي عليه
المتصلة الأولى للأقتران
المتصل على [٣, ٦] عظمى
جداً كلاهما أي

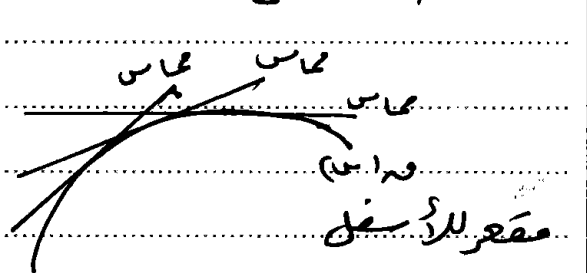
التقعر

اختبار التقعر

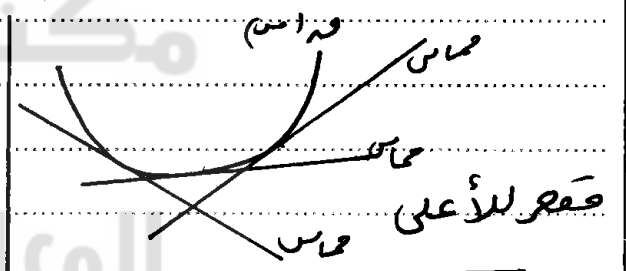
تعريف

إذا كان f اقتراناً متصلاً على الفترة I ،
 [١.٤.٤] ، وكان لكل $x \in I$ ،
 فهـ (س) معرفين على الفترة I (١.٤.٤) ،
 فإنه

إذا كان f اقتراناً متصلاً على الفترة I ،
 [١.٤.٤] ، ومابلاً للأشكال على
 الفترة I (١.٤.٤) ، فيكون f :
 (١) مقعراً للأسفل على الفترة I [١.٤.٤] ،
 إذا وقعت جميع مماساته فوقه f ،
 في الفترة I [١.٤.٤] ،
 (٢) يكون متحنياً الأقراناً f مقعراً
 للأسفل على الفترة I [١.٤.٤] ، إذا
 كان f (س) $>$ لكل $x \in I$ (١.٤.٤) ،
 (٣) يكون متحنياً الأقراناً f مقعراً
 للأسفل على الفترة I [١.٤.٤] ، إذا
 كان f (س) $<$ لكل $x \in I$ (١.٤.٤) ،
 خطوات إيجاد مجالات التقعر



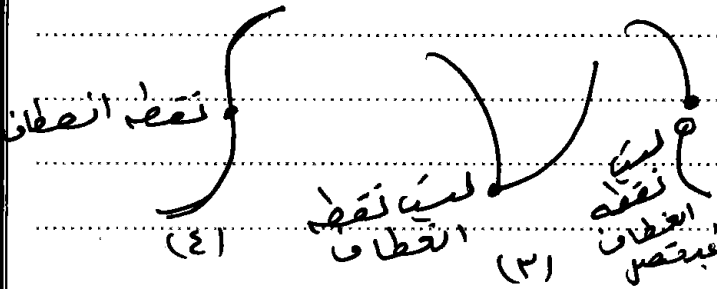
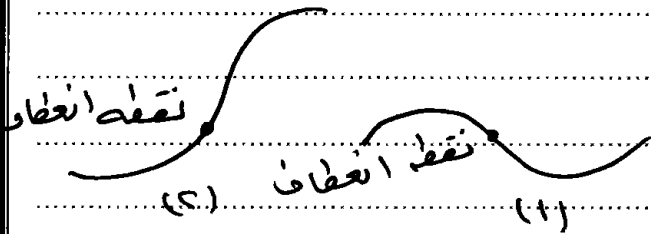
(٤) مقعراً للأعلى على الفترة I [١.٤.٤] ،
 إذا وقعت جميع مماساته تحت f ،
 في الفترة I [١.٤.٤] ،
 (٥) نجد مشتقه f' متناقصاً ونجد
 أيضاً $f'' < 0$ ،
 (٦) نعين الأصفار على خط الأعداد
 (٧) نحدد إشارة المشتقة f' مع
 خط الأعداد ،
 (٨) فهـ (س) $<$ ، مقعر للأسفل
 وهـ (س) $>$ ، مقعر للأسفل



نقطة الانعطاف

تعريف

إذا كان f دالة متصلة على فترة مفتوحة تحتوي على a ، وكان منحنى f في a يغير اتجاه تقعره عند a فإن النقطة $(a, f(a))$ تسمى نقطة انعطاف لمنحنى f .



نلاحظ أن المماس عند نقطة الانعطاف يقطع منحنى الأفتزان لأنه المنحنى في إحدى جهتي هذه النقطة يقع تحت المماس وفي الجهة الأخرى يقع فوقه المماس.

لا يوجد نقط انعطاف في الشكل رقم (٣) لعدم وجود مماس عند النقطة.

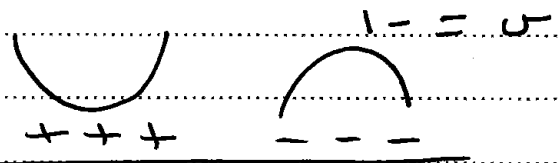
مثال ①

حدد فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الدفتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$



فقر للأعلى على $]-1, 1[$
فقر للأسفل على $]1, 2[$

مثال ②

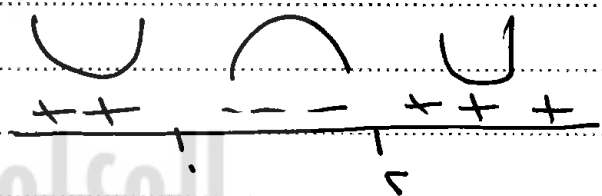
حدد فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الأفتزان $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

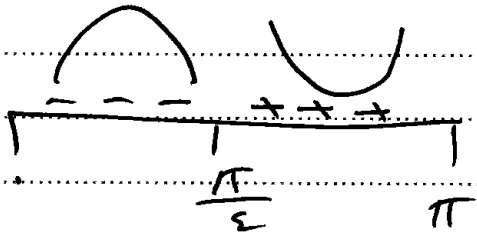
الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$\Delta = 64 - 72 = -8 < 0$$





مقصّر للأعلى $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
مقصّر للأسفل $[0, \frac{\pi}{2}]$

نقطة الانعطاف $(\frac{\pi}{2}, 0)$
 $(\frac{\pi}{2}, 0) =$

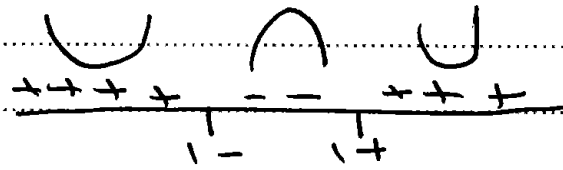
سؤال 1

حدد فترات التفرع للأعلى والأسفل ونقطة الانعطاف للأفتران $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 2$

الحل

و١ (س) = $x^3 - 12x^2 + 36x - 2$
و٢ (س) = $3x^2 - 24x + 36 = 12 - 12x + 12x - 12x + 36 = 12 - 12x + 36 = 48 - 12x$

$12 - 12x = 0 \Rightarrow 12(1-x) = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$
 $x=1, x=3$



مقصّر للأعلى $[1, 3]$ و $[0, 1]$ و $[3, \infty)$
مقصّر للأسفل $[-1, 1]$
نقط الانعطاف

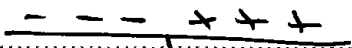
$(1, 1)$ و $(3, 1)$
 $(-1, -1)$ و $(3, -1)$

سؤال 3

و١ (س) = $x^3 + 3x^2 - 12x + 2$
او حدد فترات التفرع ونقطة الانعطاف

الحل

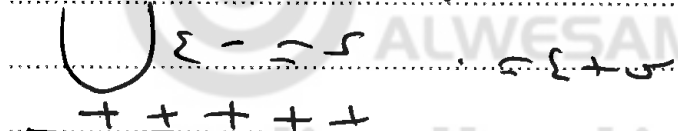
و١ (س) = $x^3 + 3x^2 - 12x + 2$
نجد أعمال



س د $[-1, 1]$ و $[3, \infty)$

و٢ (س) = $3x^2 + 6x - 12 = 3(x^2 + 2x - 4)$
و٣ (س) = $2x + 6 = 2(x + 3)$

$2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$



مقصّر للأعلى $[-3, 1]$ و $[3, \infty)$
للايوحد نقط الانعطاف

سؤال 5

و١ (س) = $x^3 - 3x^2 + 6x - 2$
حدد مجالات التفرع ونقطة الانعطاف

الحل

و١ (س) = $x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

و٢ (س) = $3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2)$

$3x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i$

سؤال ٥

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 8 \\ s < 12 \end{array} \right\} \text{هـ (س) = } \text{حد محال = التفرع}$$

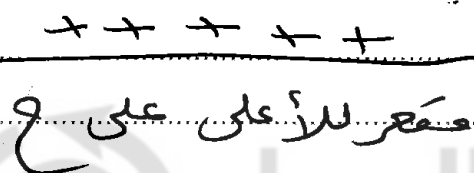
اكل

متصل عند $s = 2$

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 2 \\ s < 5 \end{array} \right\} \text{هـ (س) = } \text{غير موجوده}$$

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 2 \\ s < 4 \end{array} \right\} \text{هـ (س) = } \text{غير موجوده}$$

لا يوجد نقط انعطاف
هـ (س) دائما موجب



مقطع للأعلى على ح

سؤال ٤

$$\text{هـ (س) = } s + \frac{1}{s} \neq 0$$

حد قرات التفرع ونقط الانعطاف

اكل

هـ (س) غير معرف عند $s = 0$

$$\text{هـ (س) = } s - \frac{1}{s}$$

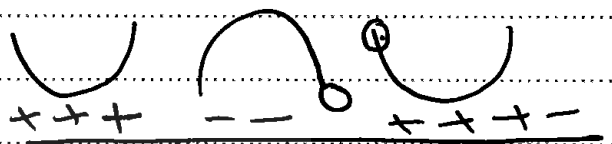
$$\text{هـ (س) = } s + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 1}{s}$$

$$\ll s^2 + 1 > 0$$

اصفا - لبط $s = 0$

$$\boxed{s = 1} \quad s = 3$$

اصفا - المقام $s = 0$ تحمل غير معرف



مقطع للأعلى [١ - ٣] (٠.٦.٠)

مقطع للأسفل [٠.٦.١]

نقط انعطاف (٠.٦.١)

سؤال ٦

حدد فترة التغير ونقطة الانعطاف
 $f(x) = x^3 - 19x^2 + 9x$

الحل

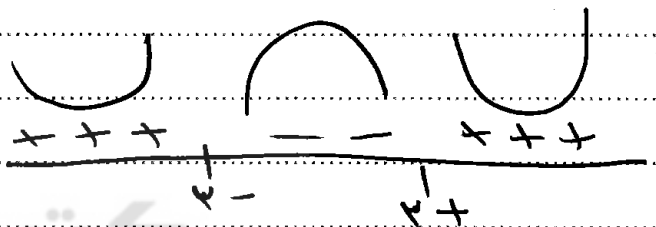
نعيد تعريف $f'(x) = 3x^2 - 38x + 9 = 0$

$\leftarrow x = 2 \pm \dots$

$$\left. \begin{aligned} & x^2 - 12.5x + 3 = 0 \\ & x = 12.5 \pm \sqrt{12.5^2 - 3} \end{aligned} \right\} \text{فترة (س)}$$

$$\left. \begin{aligned} & x = 12.5 \pm \sqrt{156.25 - 3} \\ & x = 12.5 \pm \sqrt{153.25} \end{aligned} \right\} \text{فترة (س)}$$

$$\left. \begin{aligned} & x = 12.5 \pm \sqrt{153.25} \\ & x = 12.5 \pm 12.38 \end{aligned} \right\} \text{فترة (س)}$$



فترات التغير: $(-\infty, 2]$ و $[12.5, \infty)$ للارتفاع
 و $(2, 12.5]$ للنخفاض

نقطة الانعطاف: $(2, 9)$ و $(12.5, -153.25)$

سؤال ٧

حدد فترة التغير ونقطة الانعطاف
 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 19x + 9$

الحل

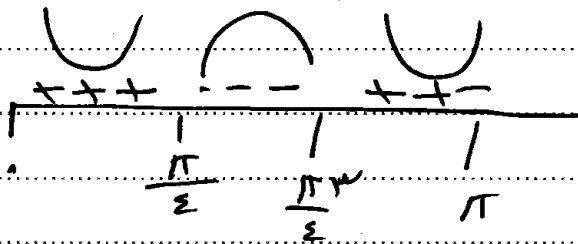
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 19 = 0$
 $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f''(-1) = 6(-1) + 6 = 0$
 $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$
 $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\frac{\pi}{2} = x \text{ أو } \sqrt{c} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = x \text{ أو } \frac{\pi}{2} = \sqrt{c}$



فترات التغير: $(-\infty, -2]$ و $[2.5, \infty)$ للارتفاع

و $(-2, 2.5]$ للنخفاض

نقطة الانعطاف

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = ((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = ((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

بجس

$$f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x-1} \quad x \in]-1; 1[$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{-\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{2\sqrt{(1-x)(x-1)}}$$

$$= \frac{-\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{2(x-1)}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x})}{2(x-1)}$$

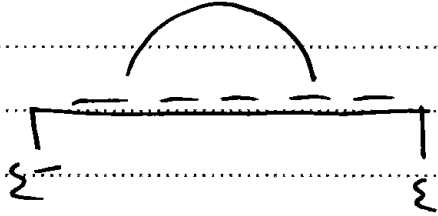
$$= \frac{-(\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x})}{2(x-1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{2(x-1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{2(x-1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}}{2(x-1)}$$

المقام = 0 $\Leftrightarrow x = 1$ \leftarrow ليس في المجال
 المقام = 0 $\Leftrightarrow x = -1$ \leftarrow ليس في المجال



مقر للارتق [-1 ; 1]

لا يوجد نقطة انعطاف

سؤال 8

فد (س) = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 3$
 اوجد قيمته التفرع

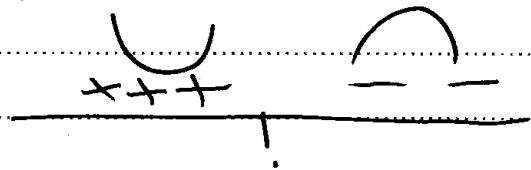
اكل

فد (س) = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 3$

فد (س) = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 3$

$$f'(x) = x^2 - 2x + 2$$

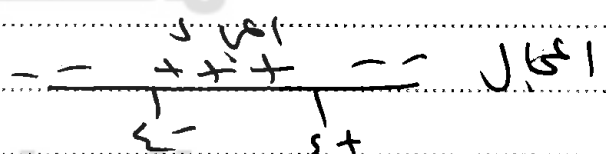
المقام = 0 $\Leftrightarrow x = 0$ \leftarrow ليس في المجال



مقر للأعلى (-1.600)
 للأسفل [0.600]
 نقطة الانعطاف (0.600)

سؤال 9

فد (س) = $\sqrt{x-1}$



فد (س) = $\sqrt{x-1}$

فد (س) = $\sqrt{x-1}$

سؤال 17

جد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثالثة
بحر بالنقطة (0,6) ويكون منب
(2,6) نقطة انعطاف افقيه

الحل

$$\begin{aligned} \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \\ \text{وه (س)} &= P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta \end{aligned}$$

$0 = 6$

$3 = (1)$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

وه (1) = نقطة انعطاف افقيه

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

معادلة 1 - 2

$3 = 0 + u - P - \alpha$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

$0 = 6 + \alpha + \delta + P$

ملاحظة

اذا كانت (0,6) على نقطة
الانطاف فان

1) $u = P$

2) $0 = P$ أو $0 = \alpha$ غير موجود

ولكنه اذا كان u كثير حدود
فان $0 = P$ صفر

3) اذا كان لا انعطاف افقي

فان $0 = P$ صفر

سؤال 18

اذا كان لمنحنى $P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$
نقطة انعطاف عند (0,6) محز
صفا u, P

الحل

وه (س) $0 = P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$

وه (س) $0 = P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$

وه (1) $0 = P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$

$0 = P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$

لكنه (1) =

$0 = P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$

بعض $P = 0$

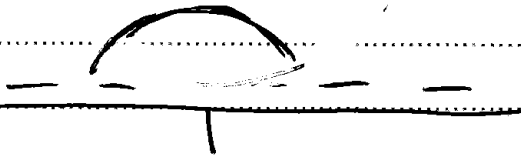
$0 = P = s^3 + u s^2 + \alpha s + \delta$

تدريبات الكتاب

$$\text{عد (س)} = \frac{2}{9} = \frac{2}{9} \text{ س}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \sqrt[3]{9} = \frac{2}{9} \sqrt[3]{9}$$

$$\text{س} = 3 \text{ : } 3 \text{ : } 3$$



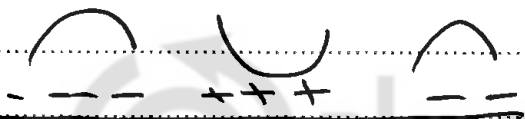
مقعر للأعلى على ع

تدريب (٣) قن

إذا كان عد (س) = $6 - 3\text{س} - 4\text{س}^2$
حدد نقط الانعطاف

الحل

$$\begin{aligned} \text{عد (س)} &= 6 - 3\text{س} - 4\text{س}^2 \\ \text{عد (س)} &= 6 - 3\text{س} - 4\text{س}^2 \\ &= 6 - 3\text{س} - 4\text{س}^2 \\ \text{س} &= 3 \end{aligned}$$



نقط الانعطاف ٣
(٠, ٦) = (٠, ٦)

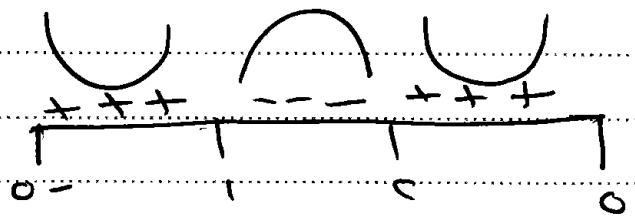
(٣, ٦) = (٣, ٦)

تدريب (١) ص ١٩٨

حدد فترة التفر للأعلى وللأسفل
لمنحنى الأقران عد ص
عد (س) = $2\text{س}^2 - 6\text{س} + 4\text{س}^2$
س ∈ [٥, ٥]

الحل

$$\begin{aligned} \text{عد (س)} &= 2\text{س}^2 - 6\text{س} + 4\text{س}^2 \\ \text{عد (س)} &= 2\text{س}^2 - 6\text{س} + 4\text{س}^2 \\ &= (2\text{س}^2 - 6\text{س} + 4\text{س}^2) \\ &= (2\text{س}^2 - 6\text{س} + 4\text{س}^2) \\ \text{س} &= 2 \end{aligned}$$



مقعر للأعلى على [١, ٥] و [٥, ٥]
مقعر للأسفل [٥, ١]

تدريب (٥) ص ١٩٩

ليكن عد (س) = $\frac{2}{3}\text{س}$ حدد مجالات
التفر للمنحنى عد

الحل

$$\text{عد (س)} = \frac{2}{3}\text{س}$$

تدريب (5) ص 10

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ فما قيمة $\cos \theta$ ؟
 مع $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ حيث θ نقطة على الدائرة

الحل

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

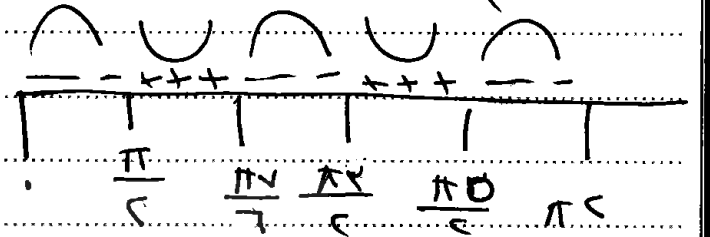
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 + \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad \frac{4\pi}{3}$$



نقطة θ هي

$$\frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad \frac{4\pi}{3}$$

اياد مجالان التفر من الرسمة

① رسمة (د) (س)

ككون من الشكل مباشره

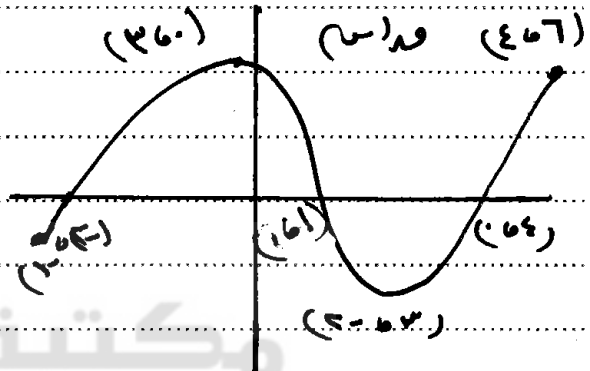
مقر للاسفل

مقر للاعلى

② مسألة

عقل الشكل الجاور منحنى (د) (س) وهو كسره حدود من لدرجه الثالثه المعرف على $[-6, 6]$ او هبقتان

التفر ونقطة الانعطاف



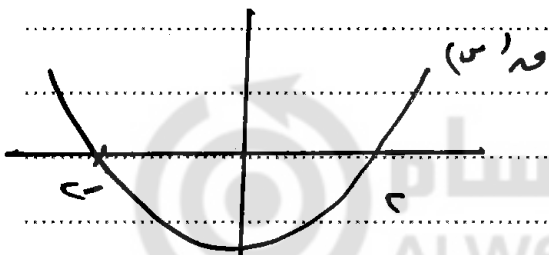
مقر للاعلى $[6, 6]$

مقر للاسفل $[-6, -6]$

(١) نقطة انعطاف

③ مسألة

الشكل الجاور عقل (د) (س) او هب مجالان التفر



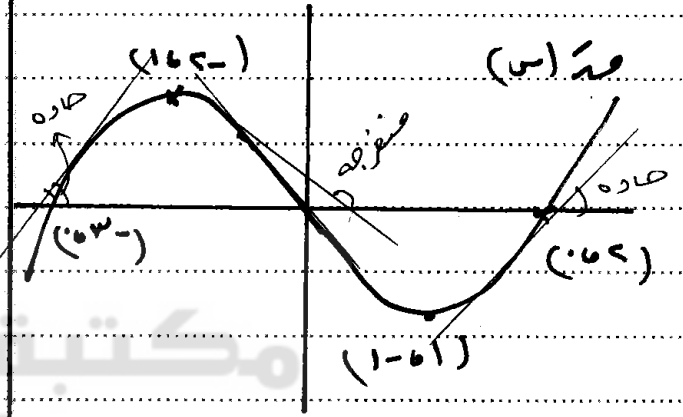
مقر للاعلى $[-6, 6]$

③ رتبة فرد (س)

يحدد إشارة $f'(x)$ وذلك عند ضرب رسم مماسات لـ $f(x)$ فإذا كان المماس ليضع زاوية حادة تكون $f'(x)$ موجبة ، وإذا كان المماس لـ $f(x)$ ليضع زاوية منفرجة تكون $f'(x)$ سالبة

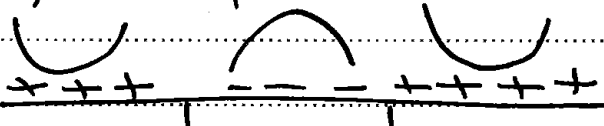
مثال ①

بالاعتماد على الشكل التالي الذي يمثل منحنى $f(x)$ حيث $f'(x)$ كثر جدو من الدرجة الرابعة ويعرف على f أو جد مجال التفرع ونقط الانعطاف



لوحنا مماسات في $x = -2$ نلاحظ أنها ليضع زاوية حادة وهي لفرته $[-2, -1]$ زاوية منفرجة $[-1, 1]$ حادة $[1, \infty)$

فكلون إشارة $f'(x)$ ليضع

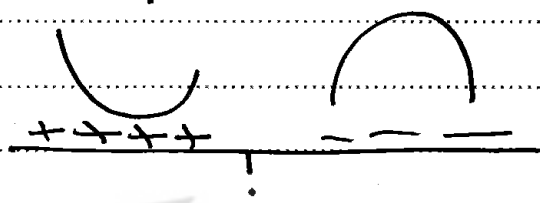
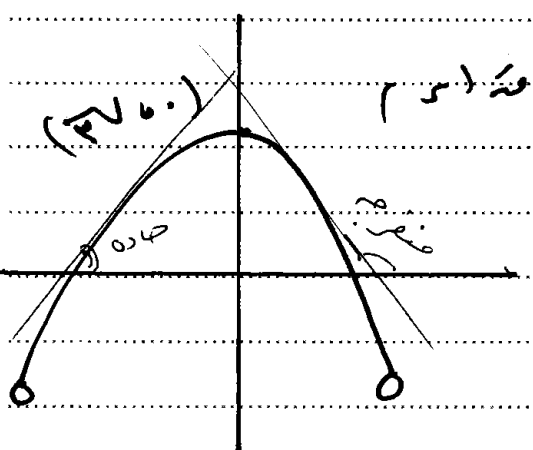


(١,٦) و (١, -٦) نقط الانعطاف

مثال ②

الشكل بجانب عتلى $f(x)$

أوجد مجال التفرع ونقط الانعطاف



مقرر الأعلى $[-\infty, 0]$

مقرر الأسفل $[1, \infty)$

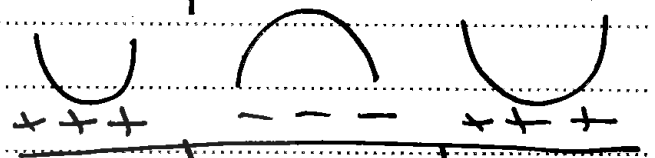
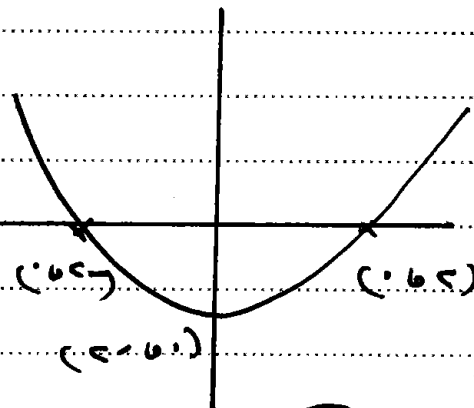
(١, -٦) نقط الانعطاف

٣) اذا كانت لبركة هـ (س) البركة

يتم ايجاد مجالات التقعر وذلك بتفسير البركة على قطب للاعداد حيث لا فوه محور لسيات تكون هـ موجب، تحت محور لسيات تكون هـ سالب، ونقط تقاطع منحني هـ مع محور لسيات هي نقط الانعطاف

١) مسألة

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحني هـ اوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



مقرر لأعلى (-٥٥٥-٥)

[٥٥٥]

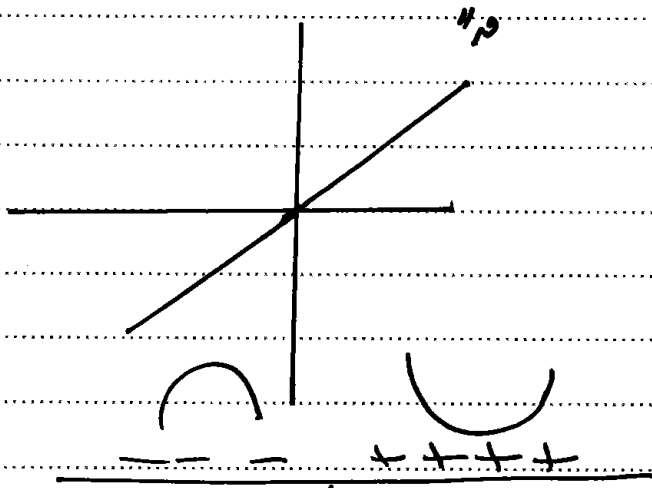
للأسفل [-٥٥٥]

نقط الانعطاف

(-٥٥٥) (٥٥٥)

٥) مسألة

بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي يمثل منحني هـ اوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف

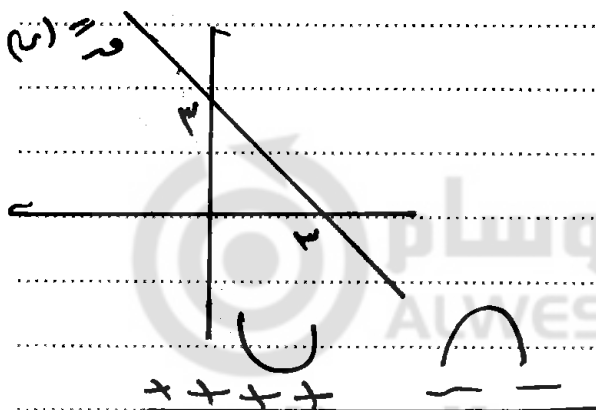


مقرر لأعلى [٥٥٥٠]

للأسفل [٥٥٥٠]

٣) مسألة

على الرسم المجاور هـ اوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف

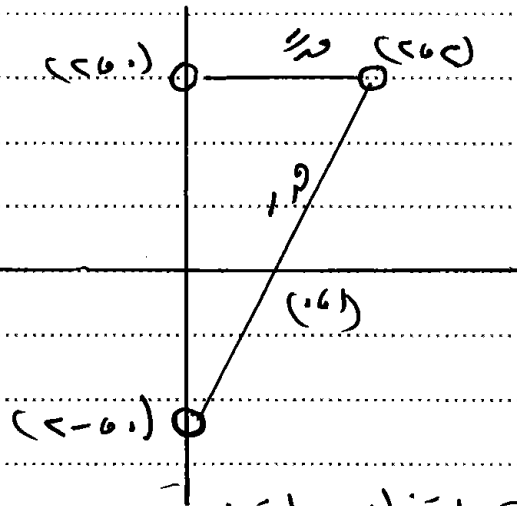


مقرر لأعلى (-٥٥٥٥) للأسفل [٥٥٥٥]

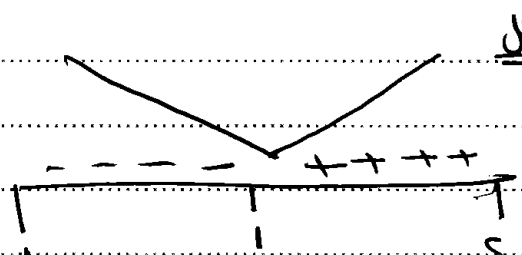
(٥٥٥٥) (٥٥٥٥) نقط الانعطاف

سؤال ٤

الشكل المجاور يمثل منحني
 عند (س) 6 مئة (س) للأفتان (س) و (س)
 المعروف على لفتة [٤٠٠] يجب
 عند لفتة التالي



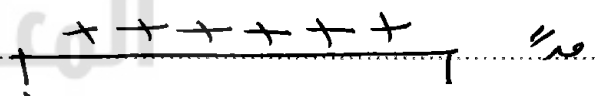
٥ محالات لفتة و لفتة
 للأفتان (س)



فتان [٤٠٠] 6 مئة [٤٠٠]

٥ الفم لفتة
 عند س = ١ مئة لفتة

٣ محالات لفتة



مئة لفتة على [٤٠٠]

اختيار المشتقة الثانية للقيم القصوى

تعريف

الخطوات

نجد القيم القصوى من المشتقة الثانية كالتالي

إذا كانت $f''(x) > 0$ عند $x = a$ فإن $f(a)$ هي قيمة صغرى محلية عند $x = a$ وكانت $f''(x) < 0$ فإن $f(a)$ هي قيمة عظمى محلية عند $x = a$

① نجد أيضا المشتقة الأولى فقط

① إذا كان $f''(x) = 0$ وكانت $f''(x) < 0$ فإن للأقتران $f(a)$ هي قيمة صغرى محلية عند $x = a$ وهي $f(a)$

② نجد المشتقة الثانية ونحوض أيضا المشتقة الأولى منها فإذا كان

② إذا كان $f''(x) = 0$ وكانت $f''(x) > 0$ فإن للأقتران $f(a)$ هي قيمة عظمى محلية عند $x = a$ وهي $f(a)$

③ $f''(x) = 0$ و $f''(x) < 0$

عند $x = a$ هي قيمة صغرى

④ $f''(x) = 0$ و $f''(x) > 0$

عند $x = a$ هي قيمة عظمى

⑤ $f''(x) = 0$ و $f''(x) = 0$

لفصل

③ إذا كان $f''(x) = 0$ وكانت

$f''(x) = 0$ فإن لإختيار

نصل فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الأولى

ملاحظة إذا نزل السؤال على استخدام

إختيار المشتقة الثانية علينا أن نحل السؤال بهذه الطريقة

ان نحل السؤال بهذه الطريقة

سؤال ①

لكل من الأقرانات التالية جد الضم
الظهي والصفري المحلي باستخدام
اختبار المشتقة الثانية

① $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$

الحل

$f'(x) = 9x^2 - 10x$
 $9x^2 - 10x = 0$
 $x(9x - 10) = 0$
 $x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \frac{10}{9}$

$f''(x) = 18x - 10$

$f''(0) = -10 < 0$ \therefore $x = 0$ هي
صفري محلي

$f''(\frac{10}{9}) = 10 > 0$

$f''(\frac{10}{9}) = 10 > 0$ \therefore $x = \frac{10}{9}$ هي
صفري محلي

$f(\frac{10}{9}) = (\frac{10}{9})^3 - 5(\frac{10}{9})^2 + 1 = 0.545$

② $f(x) = 5 + \frac{x}{5} + x^2$

الحل

$f'(x) = 1 + \frac{1}{5} + 2x$

$1 + \frac{1}{5} + 2x = 0$

$\leftarrow x = -\frac{3}{10}$

$f''(x) = 2$
 $f''(-\frac{3}{10}) = 2 > 0$

$f(x) = \frac{1}{x^3}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^4}$
 هي صفري محلي
 $(-1, 0)$

$f''(x) = \frac{4}{x^5}$

هي صفري محلي
 $(-1, 0)$

③ $f(x) = 5x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 15x^2 - 12x$
 $15x^2 - 12x = 0$
 $3x(5x - 4) = 0$
 $x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \frac{4}{5}$

$f''(x) = 30x - 12$

$f''(0) = -12 < 0$ \therefore $x = 0$ هي صفري محلي

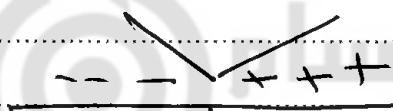
$f''(\frac{4}{5}) = 12 > 0$

$f''(\frac{4}{5}) = 12 > 0$ \therefore $x = \frac{4}{5}$ هي صفري محلي

$f(\frac{4}{5}) = 5(\frac{4}{5})^3 - 6(\frac{4}{5})^2 = 0.545$

$f''(0) = -12 < 0$ \therefore $x = 0$ هي صفري محلي

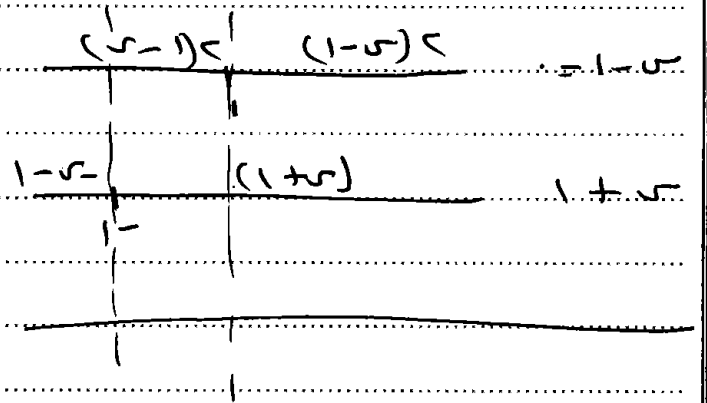
لذلك نعو دلائلنا \therefore المشتقة الأولى



بمساعدة \therefore هي صفري محلي ومطلقة
 $(0, 0)$

⑤ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

بعد تعريف الأقران



$$\left. \begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2x - 1 &= (x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)(x-1)(x-1) \end{aligned} \right\} = (x-1)^3$$

$$\left. \begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2x - 1 &= (x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)(x-1)(x-1) \end{aligned} \right\} = (x-1)^3$$

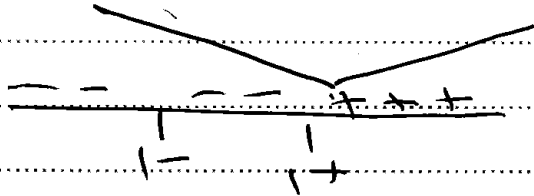
$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2 \\ x^3 - 3x^2 + 2x - 1 &= (x-1)^3 \end{aligned}$$

لا يوجد أيضا للاقران

لا يوجد قيم صفوى

لذلك اذا اردنا إيجاد القيم

العقوى عند $x = -1$ و $x = 1$
 (انه وجبت) نذهب للاختيار
 المشتقة الأولى لانه اختيار
 المشتقة الثانية فنل انه
 صفر (1) و صفر (-1) غير موجوده



عند $x = 1$ صفوى محليه مقلقة
 (1-0-1)

سؤال ⑤

جد قيم أقصى محليه للأقران
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ حيث $x \in]-\infty; +\infty[$
 اختيار المشتقة الثانية

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2}$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(1) = 6(1) - 6 = 0$$

$$f''(1) = 6(1) - 6 = 0$$

تمارين ومسائل

ص ٢٠٤

السؤال الأول

حدد فترات التفرع لكل من منحنيات الأمتيانات التالية:

(٦) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

الحل

المجال

$$\frac{---}{x-4} \quad \frac{+++}{x+4} \quad \frac{---}{x-4}$$

٦ (س) = $\frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 16}}{x}$

٧ (س) = $\frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 16}}{x^2 - 16}$

المقام $(x^2 - 16) <$

$$\frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 16}}{x(x-4)(x+4)}$$

المقام = $x(x-4)(x+4)$

$x = 0, \pm 4$ المجال



مفرد لأعلى $[-4, 4]$

لا يوجد نقطة انعطاف

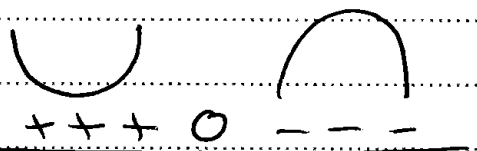
(٩) $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 4}$

الحل

٩ (س) = $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

١٠ (س) = $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

المقام = $x^2 - 4$ المجال



مفرد للأعلى $(-∞, 0)$

مفرد للأسفل $[0, ∞)$

لا يوجد نقطة انعطاف

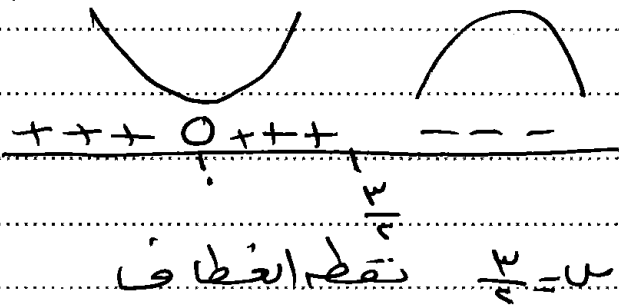
المجال

$$f(x) = \left(\frac{x^4}{1-x} + \frac{x^2}{x-4} \right)$$

$$= \left(\frac{x^4}{1-x} + \frac{x^2}{x-4} \right)$$

$$= \frac{x^4 + x^2 - 4x^4 - 4x^2}{x-4}$$

السطح = صفر $\Rightarrow x = \frac{2}{3}$
 المقام = صفر $\Rightarrow x = 4$ (منه \neq عميل)



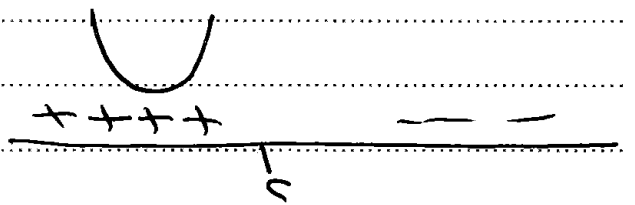
السؤال الأول

$$\textcircled{4} \quad \left. \begin{array}{l} x > 1 \\ x < 4 \end{array} \right\} \text{وهو (س)}$$

مفصل عند $x = 4$

$$\left. \begin{array}{l} x > 4 \\ x = 4 \\ x < 4 \end{array} \right\} \text{وهو (س)}$$

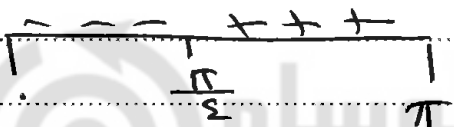
$$\left. \begin{array}{l} x > 4 \\ x = 4 \\ x < 4 \end{array} \right\} \text{وهو (س)}$$



مفصل للأعلى $[-\infty, 4)$
 لا يوجد فقط الخطاف

$$\textcircled{5} \quad \text{وهو (س)} = \text{حاصل} - \text{حاصل} + 1 \text{ من } [0, \pi]$$

الحل
 وهو (س) = - حاصل - حاصل
 وهو (س) = - حاصل + حاصل =
 حاصل = حاصل $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$



مفصل للأعلى $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

مفصل للأسفل $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\textcircled{5} \quad \text{وهو (س)} = \left(\frac{1-x}{x} \right)$$

الحل
 وهو (س) = $\left(\frac{1}{x} - 1 \right)$

$$\text{وهو (س)} = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \frac{1}{x}$$

$$\text{وهو (س)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

السؤال الثاني

حدد نقط الانعطاف (لجان وحيثه)
لكل من منحنيات الأقرانات الآتية

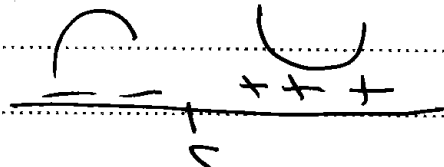
١٩) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 2$
 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

الحل

نقطة (س) = $3x^2 - 4x + 5 = 0$

نقطة (س) = $3x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 60 = -44 < 0$



نقطة الانعطاف (س) = (١٠٠)

٢٠) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$

الحل

نقطة (س) = $3x^2 - x + 3 = 0$

نقطة (س) = $3x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 36 = -35 < 0$

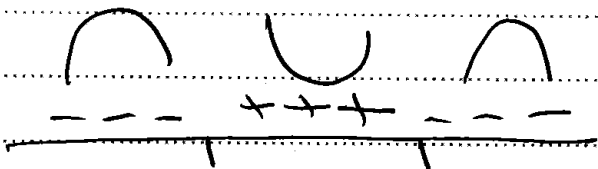
$\Delta = 1 - 36 = -35 < 0$

نقطة (س) = $3x^2 - x + 3 = 0$

٢١) $f(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x$

نقطة (س) = $3x^2 + 4x - \frac{4}{3} = 0$

$\Delta = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} > 0$



نقطة الانعطاف

(١.٦١) و (٠.٦١)

٢٢) $f(x) = x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2x + 3$

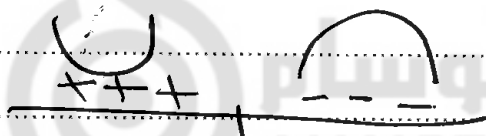
الحل

نقطة (س) = $3x^2 - \frac{6}{5}x + 2 = 0$

نقطة (س) = $3x^2 - \frac{6}{5}x + 2 = 0$

$\Delta = \frac{36}{25} - 24 = -\frac{576}{25} < 0$

نقطة (س) = $3x^2 - \frac{6}{5}x + 2 = 0$



نقطة الانعطاف (١.٦٠)

السؤال الثاني

٢) و(س) = س - س - س

س ∈ [π/٤ - π/٤]

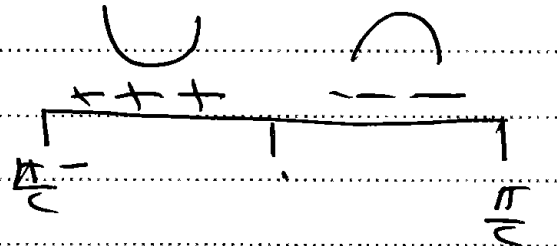
الحل

و(س) = ١ - قاس

و(س) = س - قاس س

س - قاس س = س - قاس س

س - قاس س = س



(٠, ٠) نقطة انعطاف

السؤال الثالث

جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكل من الأقرانات الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية وان امكن ذلك

٣) و(س) = س - س - س [π/٤ - π/٤]

الحل

و(س) = س + س

و(س) = س - س + س

و(س) = س

س - س = س

س = π/٤ س = π/٤

و(π/٤) = ١/٤ + ١/٤

و(π/٤) = ١/٤

منه عظمى محلية

و(π/٤) = ١/٤ + ١/٤ + ١/٤

و(π/٤) = ١/٤

منه صغرى محلية

٤) و(س) = س - س س ∈ [٠ - ٠]

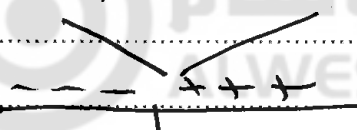
الحل

و(س) = س - س = س

و(س) = س - س

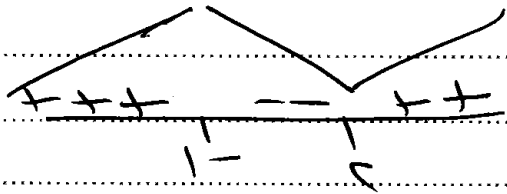
و(٠) = ٠ - ٠ = ٠

منه عظمى محلية



س = ٠ - ٠ = ٠

نخدم اجتهاد، المنهج لأولى



عند $s = 1$ جميعها على
 $s = 2$ جميعها صفرية محله

(٥) $(s) = \frac{128}{s} + s = 7s$

الكل
 $= \frac{128}{s} - s = 7s$

$128 = 7s \Rightarrow \frac{128}{7} = s$
 $18 = 7s \Rightarrow \frac{18}{7} = s$

$\frac{128 \times 128 + 7}{7} = (s)$

$\frac{16384 + 7}{7} =$

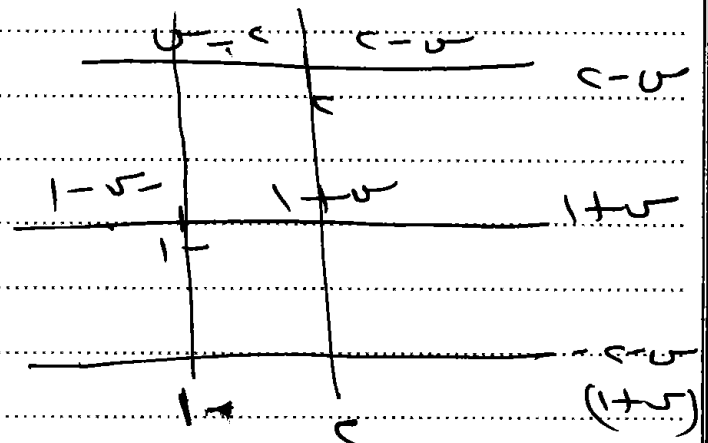
$\frac{16391}{7} = (4) 2341$

$1 < 2 = 4 + 2 =$
 صفرية محله

المؤال لثابت

(٦) $(s) = 2 = 1 - s - 1 + s + 1 + s$
 $s = 2$

تعريف التعريف



$2 \times s$ $s + 1 - s - 1 + s$
 $2 \times s$ $s + 1 - s - 1 + s$
 $1 - s$ $s + 1 + s + s + s$

$2 \times s$ $3 - s$
 $2 \times s$ $1 + s - 1 + s$
 $1 - s$ $2 + s$

$2 \times s$ 1
 $1 - s$ $1 - s$
 $1 - s$ 1

لا يوجد ايضا له منتهى

السؤال الخامس

السؤال الرابع

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$
 هو $f(x) = \frac{1}{x}$ ، هو $f(x) = \frac{1}{x^2}$
 فأجب عما يأتي

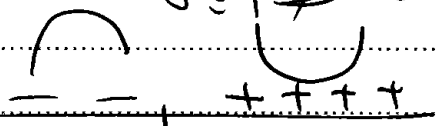
عين قاعدة لايفرانت
 $f(x) = x^2 + x + 1$
 الذي يمر منحناه بالتقط (٥,٦)
 ومعادلة المماس لمنحناه عند
 نقطة $P(1, 2)$ هي
 $3x + y - 7 = 0$

Ⓜ) كانت معادلات التقعر لكل
 من الأفتان

فـ (١) $f(x) = \frac{1}{x}$ فـ (٢) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

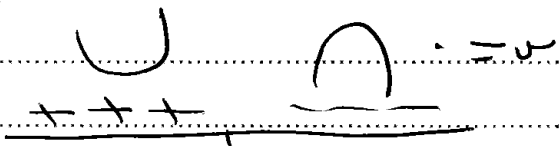
$\frac{1}{x^2}$

المقام = x^2



مقعر للأعلى (٥,٦) ، لا تقعر للأسفل (١,٦)

فـ (١) $f(x) = \frac{1}{x}$ فـ (٢) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
 فـ (٣) $f(x) = \frac{1}{x^3}$



مقعر للأعلى (٥,٦) ،
 مقعر للأسفل (١,٦)

الكل

بـ بالتقط (٥,٦)

Ⓛ) $0 = x^2 + x + 1$

فـ (٢) = ميل المماس

$3 = -$

فـ (١) $f(x) = x^2 + x + 1$

Ⓜ) $3 = x^2 + x + 1$

(١,٦) نقطة انعطاف

فـ (٣) = صفر

فـ (١) $f(x) = x^2 + x + 1$

Ⓝ) $0 = x^2 + x + 1$

الصبا فـ (٢) = ١

$0 = x^2 + x + 1$

Ⓞ) $0 = x^2 + x + 1$

أعمل حل نظام معادلات بطريقة
 الحذف

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) لسوية

١٠ إذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 10$ حد القيم القصوى المحلية للأقتران و بين نوعها .

١٠ مثل الشكل المجاور مخطى الأقتران $f(x)$ و على مجاله D مجموعة قيم x التي يكون للأقتران $f(x)$ عندها نقطة حرجية

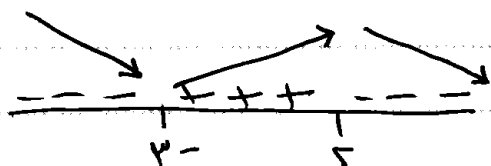
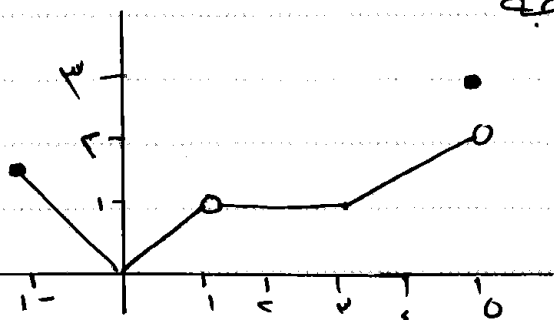
الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 = 0$$

بالقسمة على ٣

$$x^2 - 2x + \frac{5}{3} = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot \frac{5}{3} = 4 - \frac{20}{3} = \frac{12 - 20}{3} = -\frac{8}{3} < 0$$



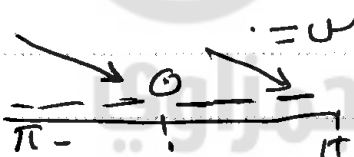
وهذا $(-1, 3) =]-1, 3[$ صفرى محليه
وهذا $(2, 3) =]2, 3[$ عظمى محليه

- (أ) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (ب) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup]3, 6[$
- (ج) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup]3, 6[$
- (د) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup]3, 6[$

٣٠ لكيه $f(x) = x^2 - 4x + 5$ حد الأقتران التي يكون و متناقصاً

الأجابة (ب)

الحل $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

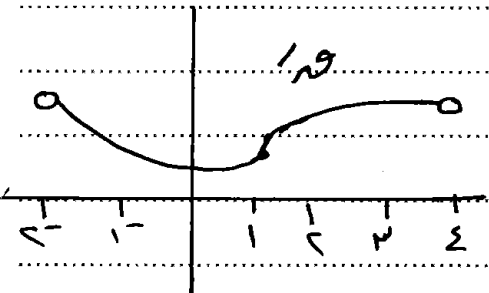


وهذا $[-\pi, \pi]$ متناقصاً على

وزارة (٢٠١٩) مستوى

وزارة (٢٠١٨) صيف

١) إذا كان الشكل المجاور على
مخني المنقعة الأولى للأقتران
وهو المتصل على $[-٤, ٤]$ فإن مخني
الأقتران قد يكون مقعرًا للأعلى
في الفترة



- (٤) $[-٤, ٤]$ (٥) $[٤, ٤]$
(٦) $[-٤, ٤]$ (٧) $[-٤, ٤]$

الحل

أخذ كميات له \leftarrow هـ

وتكون الزاوية حادة في $[٤, ٤]$
 \leftarrow هـ (س) \leftarrow على $[٤, ٤]$ (٥)

٢) إذا كان هـ (س) = $٣ - ٤ + ٤ + ٤ + ٤$
س = $[٤, ٤]$ أو هـ (س) أي
١) الفترة (الفترة) التي يكون فيها
هـ متزايدًا
٢) القيم القصوى المطلقة للأقتران
هـ وبين نوعها

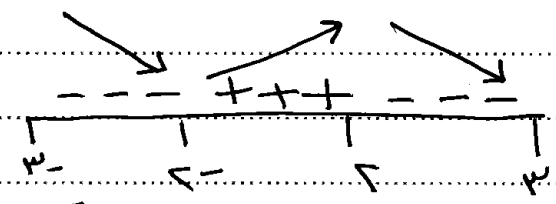
٣) نقطة الانعطاف لمخني هـ أن
وجدت

\leftarrow تابع لكل

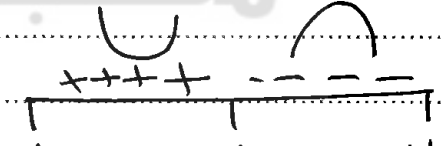
إذا كان هـ (س) = $٤ - ٣ - \frac{1}{3} س$
س = $[-٣, ٣]$ هـ (س) أي
٢) الفترة (الفترة) التي يكون فيها
هـ متزايدًا
٣) القيم القصوى المطلقة للأقتران
هـ وبين نوعها
٤) الفترة التي يكون فيها مخني
هـ مقعرًا للأسفل

الحل

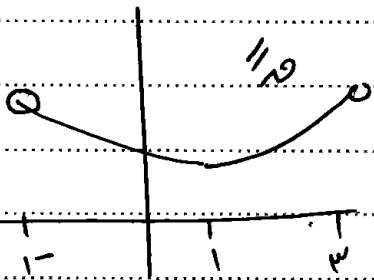
هـ (س) = $٤ - ٣ - \frac{1}{3} س$
 $٣ \pm = س$



- ١) هـ متزايد على $[-٢, ٢]$
٢) هـ (س) = $٣ - ٤ + ٤ + ٤ + ٤$
هـ (س) = $[-٢, ٢]$ هـ (س) مطلقة
هـ (س) = $[-٢, ٢]$ هـ (س) مطلقة
٣) هـ (س) = $٣ - ٤ + ٤ + ٤ + ٤$
٤) هـ (س) = $٣ - ٤ + ٤ + ٤ + ٤$



هـ مقعرًا للأسفل على $[٣, ٤]$

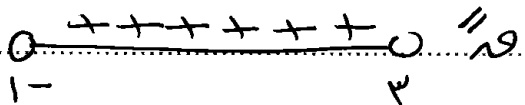


(١٠) (٣٠١) - (٣٠١)

(١١) (٣٠١) - (٣٠١)

مقطع

إشارة من بعضنا التزايد لعدة
نفس الرسمة على خط الأعداد



مقطع (٣٠١) - (٣٠١) (١١)

١٢ إذا كانه (٣٠١) = ١/٤ س - ٤ س + ٣

حيث س ∈ (٣٠١) نجد كل ما يأتي

(١) الفترة (الفترات) التي يكون فيها
وهو متناقصاً

(٢) القيم القصوى المطلقة للأفتران
وهو (٣٠١) و (٣٠١) وبين نوعها

(٣) الفترة (الفترات) التي يكون فيها
وهو مقعر للأفضل

الحل

$$٣ = ٤س - ٣س + ٣$$

$$٣ = (٣ - ٤)س = ٣ - ٤س$$

$$٣ = ٤س - ٣$$

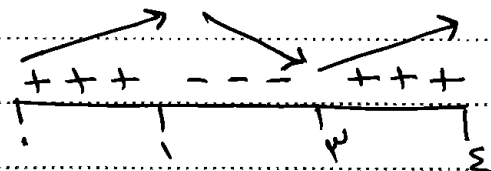
$$٣ = ٤س - ٣س + ٣ = ٤س - ٣س + ٣$$

بالقسمة على (٣)

$$١ = ٤س - ٣س + ٣$$

$$١ = (٣ - ٤س) (٣ - ٤س)$$

$$٣ = ٤س - ٣س + ٣$$



(١) من فتران على [٣٠١] و [٣٠١]

(٢) من (٣٠١) = ٤س - ٣س + ٣

من (٣٠١) = ٤س - ٣س + ٣

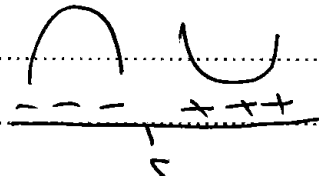
من (٣٠١) = ٤س - ٣س + ٣

من (٣٠١) = ٤س - ٣س + ٣

(١١)

$$٣ = ٤س - ٣س + ٣$$

$$٣ = ٤س - ٣س + ٣$$



نقطة لإعطاء (٣٠١)

فترة (٣٠١) صيف

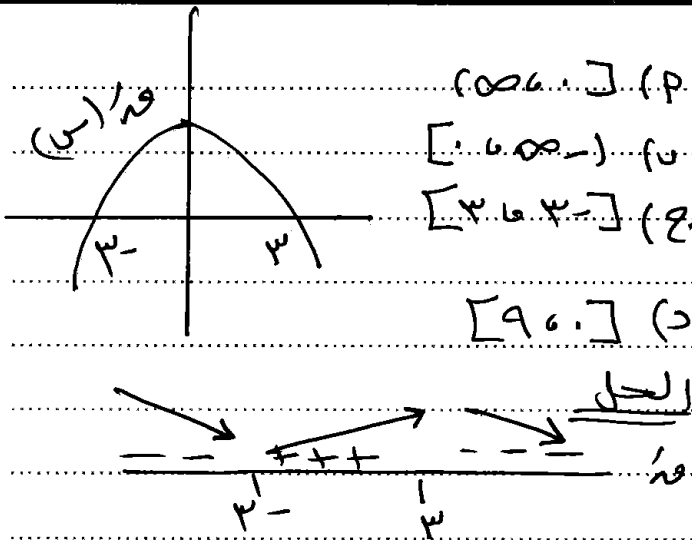
١٢ إذا كانه الشكل المجاور على يمين

المنطقه التي يتبع للأفتران

الممثل على [٣٠١] ، فاض لإفتران

وهو يكون فتراناً في الفترة

←



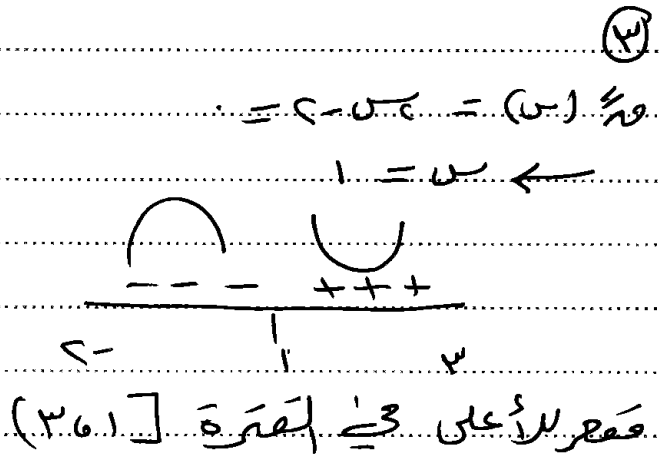
(١) [٥٥٠] (١٠)

(١١) [٠٠٥٥] (١٠)

(١٢) [٣٦٣] (١٠)

(١٣) [٩٠] (١٠)

الجواب [٣٦٣] (١٤)



مقرراً على في الفترة [٣٠٦] (١٥)

وزارة (١٠) صهيبة

(١٦) إذا كان $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ فكم عدد الجذور الحقيقية لـ $f(x)$ في الفترة $[0, 10]$ ؟
 (١٧) الفترة (الفترة) التي يكون فيها
 الأعداد $f(x)$ متناقصاً
 القيم القصوى المطلقة وبين

نوعاً
 (١٨) الفترة (الفترة) التي يكون
 فيها $f(x)$ متناقصاً
 نقطة الخطأ

الحل

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 8 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 6x - 8 < 0 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$$

تبع كل

(١) إذا كان $f(x)$ كثير الحدود من
 الدرجة الرابعة فإن أكبر عدد ممكن
 من النقاط الحرجة للأعداد $f(x)$
 على $[0, 10]$ هو :
 (١) ٣ (٢) ٤ (٣) ٦ (٤) ٥

الحل
 من الدرجة الرابعة ←
 من الدرجة الثالثة ←
 أكبر عدد الحزور (اصفار)
 المتبقية = ٣

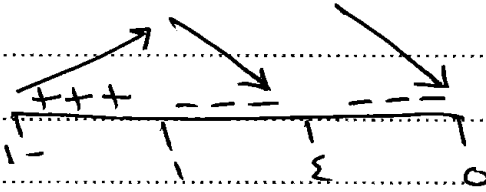
الجواب (د)

(٢) إذا كان التفاضل المتناقص
 متناقصاً في الفترة الأولى للأعداد
 $f(x)$ فإن مجال التزايد للأعداد
 $f(x)$ هو

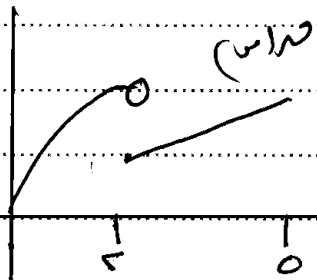
وزارة (٢٠١١) سنوية

تاريخ الحل

١) إذا كان الشغل الجاور الخليل
فمخني دراسا المعروف على [٥٠٠] فان
النقطة (٢، ٥٠) هي نقطة



١) مرصنا قبل [٤٠٤] ل [٥٠٤]



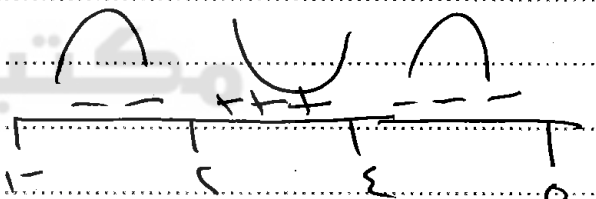
٢) نقطة انعطاف
٣) فيه عظمى محله
٤) فيه صفري محله
٥) فيه صفري مطلقه

٢) دراسا = ٢٧ قيمة عظمى مطلقه
٣) دراسا = ١٠٠ قيمة صفري مطلقه
٤) دراسا = ٥ لا يوجد صفري محلي

الحل - اجواب (٢٠)

٢) إذا كان الأفتان دراسا فاصلاً
على الفترة [٣، ٥] ، وقابللاً للاشتقاق
على (٣، ٥) ، وكانت جميع الخانات
المربوطة لمخني مرصني الفترة (٣، ٥)
تصنع زاوية حادة مع الاتجاه لوجوب
لمحور السينات فأي إشارات الايبه
صحيحه بالنسبه للأفتان مرصني
٣) دراسا فتناقص على الفترة [٣، ٥]
٤) دراسا فتناقص على الفترة [٣، ٥]
٥) دراسا فتناقص على الفترة [٣، ٥]

٣) و٢) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
٤) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
٥) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
٦) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
٧) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
٨) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
٩) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س
١٠) دراسا = (٤ - س) + ٤ - س



٢) نقطه الانعطاف [٤٠٤]

٣) زاوية حاده = ٥٠ دراسا
٤) نقطه الانعطاف (١٦٠٤) و (٥٤٠٤)

وزارة (١١.١) صيغة

- ١) إذا كان عداس) افتقران كثير حدود
 فـ (١) = صفر ، فـ (١) × فـ (٢) <
 فـ (٢) > ، فان المقطع
 (١) و (١) هي نقطة

- ١) صفة عظمى مطلقة
 ٢) صفة عظمى محلية
 ٣) قيمة صفر محلية
 ٤) صفة صفر مطلقة

الحل

- ١) و (١) = صفر ، فـ (١) × فـ (٢) <
 فـ (٢) > ، فان المقطع
 (١) و (١) هي نقطة
 ٢) صفة عظمى محلية
 ٣) قيمة صفر محلية
 ٤) صفة صفر مطلقة

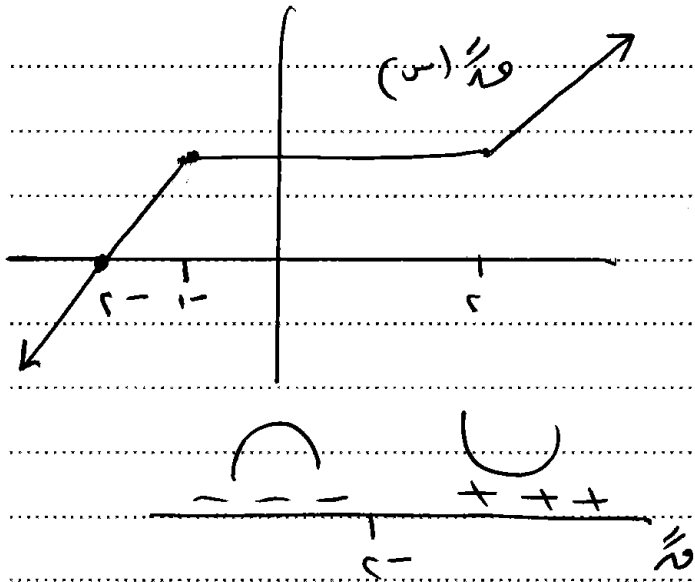
- ٥) إذا كان عدداً حقيقياً في الفترة [١, ٤]
 وكان فـ (١) = فـ (٤) = ١ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) > ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) < ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤

- ٣) إذا كان عداس) = فـ (١) - فـ (٢) = ٣
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤

الحل

فـ (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤
 و (١) = ٤ ، فـ (١) = ٤ ، فـ (٢) = ٤

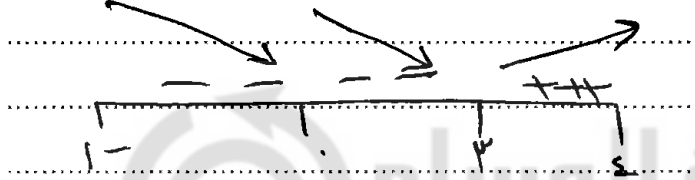
- ١) و (١) = صفر ، فـ (١) × فـ (٢) <
 فـ (٢) > ، فان المقطع
 (١) و (١) هي نقطة
 ٢) صفة عظمى محلية
 ٣) قيمة صفر محلية
 ٤) صفة صفر مطلقة



(٤) $2 - 1$ نقطة انعطاف

(٥) اذا كان $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
 للأقتران $f'(x) = 0$ وسين نوع

الحل
 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
 $3x^2 - 8x + 3 = 0$
 $x = 1, x = 3$



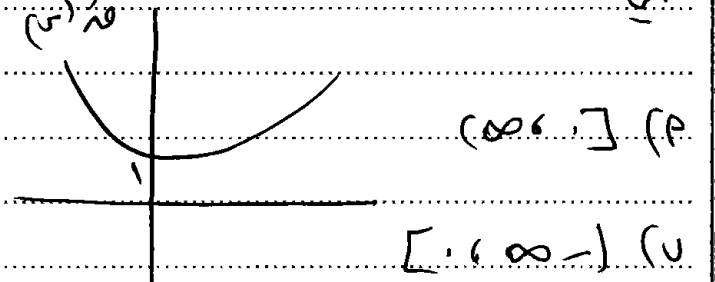
ن (٣) = $3 - 4 + 3 = 2$ فيه صفري عليه وطلقه
 ن (١) = $1 - 4 + 3 = 0$ ، ن (٤) = صفري
 ن (١) = $1 - 4 + 3 = 0$ فيه عظم وطلقه

الحل

صيا تعريف التزايد والتناقص

١. $f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x)$ متزايد
 ٢. $f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x)$ متناقص
 قصر للأعلى [٥، ٤]

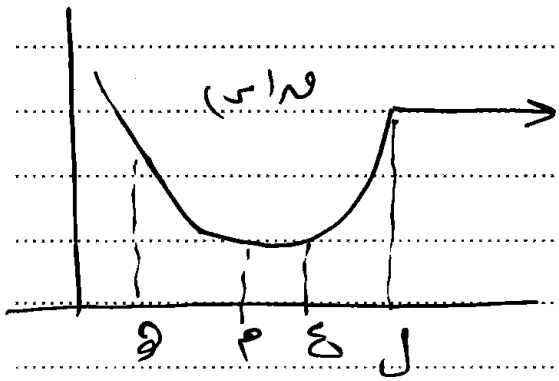
(٣) اذا كان الشكل ايجابا غير متناهي
 المتتمة الأولى للأقتران $f'(x)$
 فان فترة التزايد للأقتران $f(x)$
 هي



(٤) [٥، ٠]
 (٥) [٠، ٥]
 (٦) [٥، ٥]

(٥)

(٤) اذا كان الشكل ايجابا غير متناهي
 المتتمة الثانية للأقتران $f(x)$
 المعروف على f فان مجموعة جميع
 قيم x التي يكون عندها للأقتران
 نقطة انعطاف هي



عند $x=1$ عالية متناقص
 عند $x=2$ صوية بقصر للأعلى
 عند $x=3$ التصل هي (هـ)

(٣) إذا كان لمنحنى الأفتزان

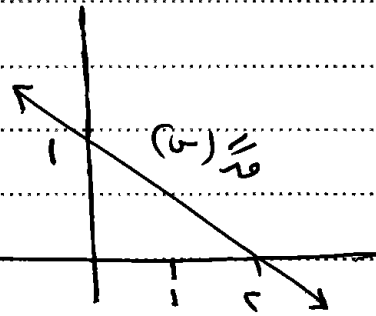
عند $x=1$ صبا $s = P - P$ عند نقطة
 انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$ عند صبة
 انعطاف P
 $\frac{1}{2} (P) - \frac{1}{2} (P) = 0$
 $\frac{1}{2} (P) - \frac{1}{2} (P) = 0$

الحل

عند $x=1$ = صبا $s = P - P$
 عند $x=2$ = صبا $s = P - P$
 عند $x=3$ = صبا $s = P - P$
 $\frac{1}{2} = P - P = P - \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} = P$ (٥)

وزارة (٢٠١٢) ستويه

(١) إذا كان الشكل الجار مثلثي
 عند $x=1$ للأفتزان عند يعرف
 على x وكان للأفتزان عند
 نقطه صبة عند $s = 1$ فان
 هذا (١) صبة



(٢) صبة عليه (٥) عظم عليه
 (٣) صبة وقلقه (٤) عظم وقلقه

اكل

$s = 1$ نقطه صبة عند $(1) = صبة$

عند (1) صبة من اسه
 صبة احصيا لنتق لتأينه
 عند (1) صبة صبة عليه

(٥)

(٥) إذا كان الشكل الجار مثلثي

الأفتزان عند $x=1$ يعرف على x فان
 قيمته s التي تكون عندها لنتقه
 الأولى صبة و لنتقه لتأينه
 صبة للأفتزان عند $x=1$ هي

الحل

$$٢ - (٩ + ٥ - ٣) = ٣$$

$$٢ - ٧٩ + ٣ = ٣$$

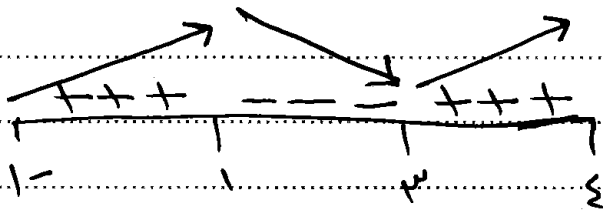
$$٩ + ٧٩ = ٣$$

بالقسمة على ٣

$$= ٣ + ٧٩ - ٣ = ٣$$

$$= (٣ - ١) (٣ - ١)$$

$$٣ = ٣, ١ = ١$$



فقرات ١ و ٣ [١, ٣] و [٣, ٤]

١ = (١ - ١) فقرة مفرقة مطلقه

٢ = (١ - ١) فقرة مفرقة مطلقه

٣ = (٣ - ١) فقرة مفرقة مطلقه

٤ = (٣ - ١)

٤ = ٤

٤) اذا كان

٣ = ٣ - ٣ فان

بعض الأقران (٣) مفرقة

في الفترة [٣, ٤]

(٣) (٤) (٥) (٦)

(٧) (٨) (٩) (١٠)

الحل

$$١ - ٣ = ٣$$

$$١ - ٣ = ٣$$

$$١ - ٣ = ٣$$

$$١ - ٣ = ٣$$

$$١ - ٣ = ٣$$

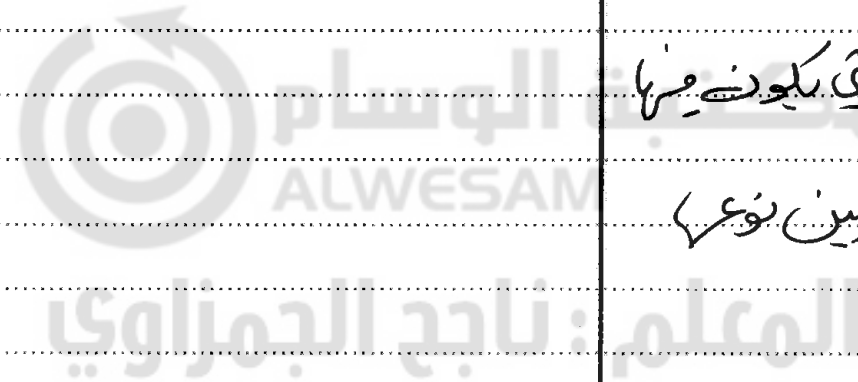
(٣) (٤)

٥) اذا كان (٣) = (٣ - ٣) - ٢

٣ = (٣ - ٣) مفرقة

١) الفترة (٣) التي يكون فيها مفرقة

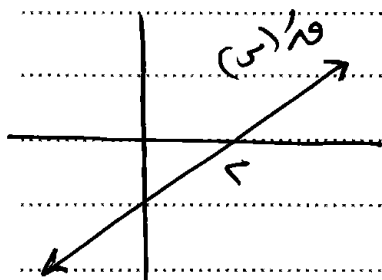
٢) القيم المعكونة بين نوع



فترة زايدي [٢٦٠] صاعده

(١)

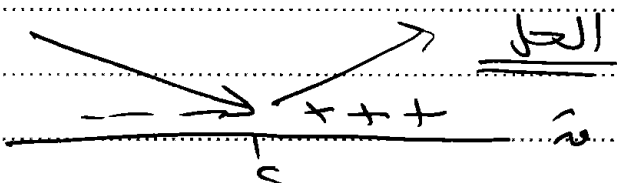
(٣) اذا كان θ اقتران كثير حدود وكان لكل المجاور عميل فمخني المنة الاولى للاقتران θ فان مخني θ يكون فترة زايديا مخني الفترة



(١٠) (١٠٠٠٠٠٠٠)

(١١) (٢٦٠٠٠٠٠٠)

(ج) [١٠٠٠٠٠٠٠] (د) [١٠٠٠٠٠٠٠]



الاجابه (٩) [١٠٠٠٠٠٠٠]

وزارة (٣٠٣) شتوية

(١) اذا كان θ مجموعة الاعداد الطبيعية لشيء

للنقطه الحرجه للاقتران θ هي

(١٠) {١٠٠٠٠٠٠٠٠} (١١) {٢٦٠٠٠٠٠٠}

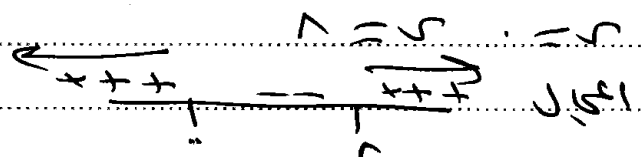
(١٢) {٤} (١٣) {١٠٠٠٠٠٠٠}

الحل

$$\frac{10 - 5x}{\sqrt{10 - 5x}} = \frac{10 - 5x}{\sqrt{10 - 5x}}$$

$$10 - 5x = 10 - 5x \rightarrow x = 2$$

الحال



(ب) {١٠٠٠٠٠٠٠}

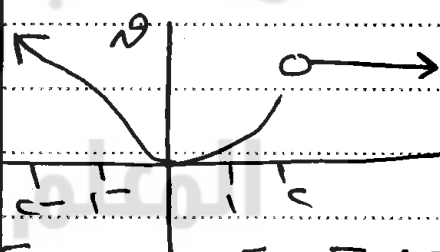
(٣) اذا كان θ = $10 - \frac{1}{4}x$

س = [٣٦٣] حد

(١) فترات التزايد والتناقص

(٢) القيم العظمى والصغرى المحلية

(٥) اذا كان لكل المجاور عميل فمخني الاقتران θ فان الاقتران θ فترة زايديا مخني الفترة



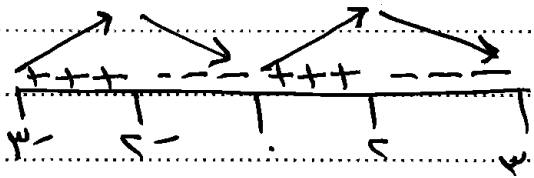
(١٠) [١٠٠٠٠٠٠٠]

(١١) [٢٦٠٠٠٠٠٠] (١٢) [١٠٠٠٠٠٠٠]

$$\frac{10 - 5x}{\sqrt{10 - 5x}} = \frac{10 - 5x}{\sqrt{10 - 5x}}$$

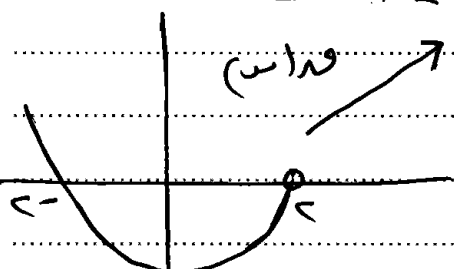
تابع اكل

$s = (s - s) = 0$
 $s = s \quad s \pm = s$



وهو متزايد $[-3, 1] \cup [2, \infty)$
 متناقصا $[-1, 2] \cup [2, \infty)$
 له قيمته صفرية محليته
 له $(1, 2) = \infty$ قيمة عظمى محليه
 له $(-\infty, 1) = \infty$ قيمة عظمى محليه

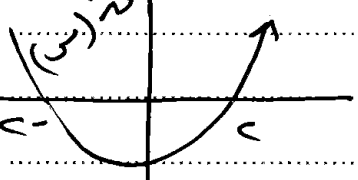
٢) اذا كان لكل الجذور ممثل محلي
 الأفتريان هو العرف على ∞ فان الأفتريان
 هو متزايدا في الفترة



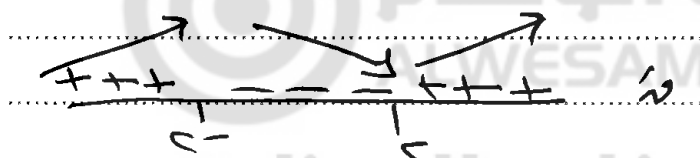
(أ) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
 (ب) $(1, 2)$
 (ج) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

اكل صاعد من $[-1, \infty)$ متزايد
 (٢)

٣) اذا كان لكل الجذور ممثل محلي
 المتبقية الأولى للأفتريان
 كثيرا محدود هو ، فان متحني هو
 متناقصا في الفترة



(أ) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
 (ب) $(1, 2)$
 (ج) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
 (د) $(1, 2)$



(٢) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ متناقصا
 (د)

وزارة (٢٠١٣) صيف

٤) اذا كان $v = 1 - s$
 فان مجموعة قيم s التي يكون عندها
 قيم حرجه هي

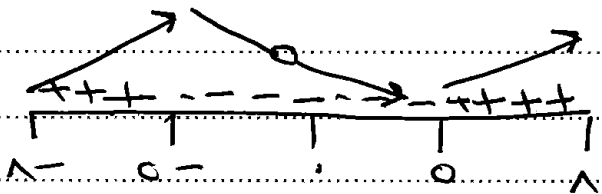
(أ) $\{1, 2\}$
 (ب) $\{1, 2, 3\}$
 (ج) $\{1, 2\}$
 (د) $\{1, 2, 3\}$

الحل
 مجال v
 $v = 1 - s$

$v = 1 - s$
 $s = 1 - v$
 $s = 1 - v$
 $s = 1 - v$
 المجال v
 الجواب (د)

الحل

$$\begin{aligned} \text{و (س)} = 1 & \leftarrow \frac{0}{3} = 1 \\ \text{و (س)} = 0 & \leftarrow \frac{0}{3} = 0 \end{aligned}$$



١) قتراب $[-0.1, 0]$ ، $[0, 0.1]$
 متناقص $(-0.1, 0)$ ، $(0, 0.1)$
 أو $[-0.001, 0]$ ، $[0, 0.001]$

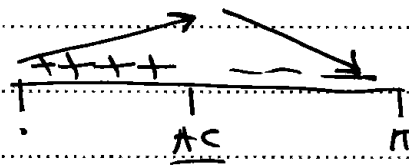
٢) $0 - 1 = -1$ عظم عليه
 $0 - 0 = 0$ صغر عليه

٤) اذا كانت $0 < (س) < 1$ ، $\frac{1}{3} + 0 < (س) < 1 + \frac{1}{3}$
 هي الفترة الأولى للأقتراب في
 المتحول على الفترة $[\frac{1}{3}, 1]$ فإن
 للأقتراب $0 < (س) < 1$ عظم عليه
 عند $س = 1$

٢) صغر $0 < (س) < 1$ ، $\frac{1}{3} + 0 < (س) < 1 + \frac{1}{3}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{و (س)} = 1 & \leftarrow \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\ \text{و (س)} = 0 & \leftarrow \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \\ \text{و (س)} = 0 & \leftarrow \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



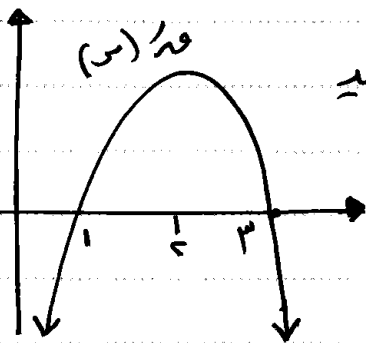
عند $س = 0$ عظم عليه
 $\frac{1}{3}$ (5)

٥) اذا كان $0 < (س) < 1$ ، $\frac{1}{3} + 0 < (س) < 1 + \frac{1}{3}$
 $س \in [-0.1, 0.1]$ عظم عليه
 عند كلاهما أي
 ١) قتراب $[-0.1, 0.1]$ والتناقص للأقتراب

٥) القيم القصوى عظم عليه للأقتراب
 عند $(س = 0)$ و $(س = 1)$

وزارة (٢٠١٤) صيف

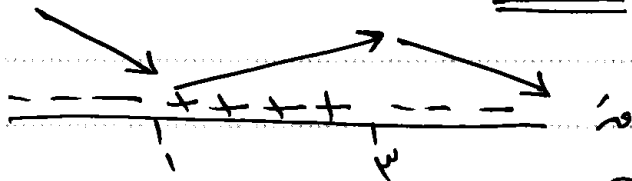
بالاعتماد على الشكل المجاور الذي
يُعطى صغرى $f(x)$ ، صغرى $f(x)$ ،
كثير حدود $f(x)$ ما يأتي .



١) فترات التزايد
والتناقص

٢) قيم x التي يكون عندها للأقتران
حدس) قيم قصوى محليّة .

الحل



١) فترات التزايد [١ ، ٣]

٢) فترات التناقص [٣ ، ١]

٣) صغرى محليّة عند $x=2$
عظمى محليّة عند $x=3$

وزارة (٢٠١٤) لسكويه

إذا كان $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$
صغرى $f(x)$ في القيمة القصوى
المحليّة ان وجدت .

الحل حدس) = $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

حدس) = $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

$f'(x) = \frac{2x + 1}{3\sqrt[2]{x^2 + x}}$

$f'(x) = \frac{2x + 1}{3\sqrt[2]{x^2 + x}}$

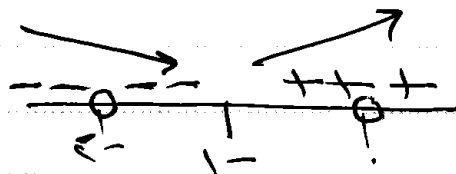
السطح = صغرى $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

$1 = x$

المقام $x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$ ، $x = 0$ ، $x = -1$

$x = -1$



حدس) = $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

صغرى محليّة

وزارة (٢٠١٥) صيف

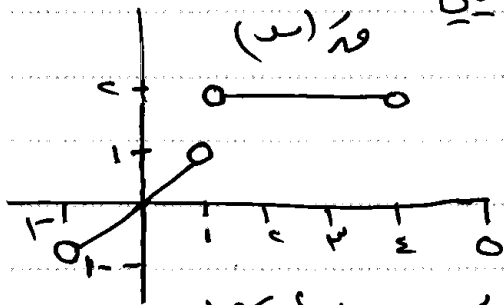
وزارة (٢٠١٥) شتوية

إذا كان الأقران (s, c) متصل على الفترة $[-٤, ١]$ حسب

إذا كان (s, c) - $c = s$ - c أي $s \geq c$ في $[-\pi, 0]$ غير ما يأتي

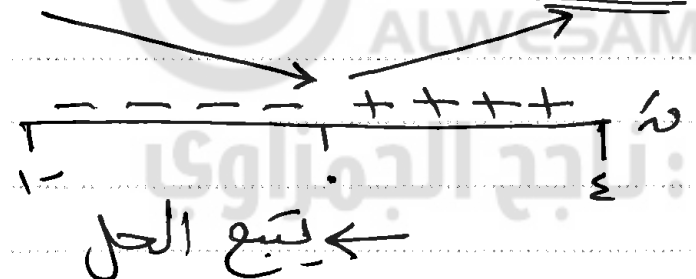
$$\left. \begin{aligned} & s + c + 2 \geq 1 \\ & s + c + 1 \geq 2 \end{aligned} \right\} \text{وهذا هو (s, c)}$$

وحيث معنى f متصلة الأولى للأقران (s, c) كما في الشكل أعلاه هكذا مما يلي (s, c)



١. النقطة الحرجة للأقران (s, c)
٢. فترات التزايد والتناقص
٣. قيم s التي يكون عندها للأقران (s, c) قيم قصوى محلية
٤. قيم كل من s و c التي يكون عندها $s = c$

وهذا هو (s, c)



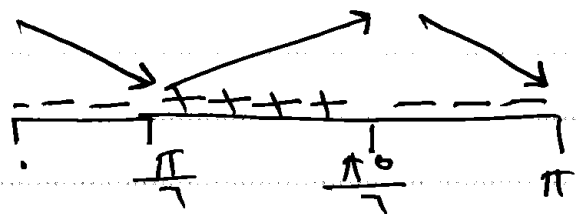
تابع الحل

١. مجالات التزايد والتناقص للأقران (s, c)
٢. القيم العظمى والصغرى المحلية للأقران (s, c) (أن وجدت)

الحل

$$\begin{aligned} & s = c - 1 \\ & \leftarrow s = c - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{3} = s < c = \frac{\pi}{2} \\ & \leftarrow \frac{\pi}{3} = s < c = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



١. فترات التزايد $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ وتناقص $[-\pi, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$

٢. عند $s = \frac{\pi}{3}$ صغرى محلية وهي $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ وعند $s = \frac{\pi}{2}$ عظمى محلية وهي $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

وزارة (٢٠١٦) صيف

إذا كان $s = \frac{1}{3}$ من $(s-2)$ $\frac{1}{4}$
 $s \in]-1; 0[$ جد كلاهما أي

(١) الفترة (الفترات) التي يكون فيها
 الأقران s متزايداً

(٢) الفترة (الفترات) التي يكون فيها
 الأقران s متناقصاً

(٣) القيم القصوى المحلية للأقران
 s و s

الحل

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}(s-2) \Rightarrow s = \frac{1}{3}(s-2)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}(s-2)$$

$$s = \frac{1}{3}(s-2) \Rightarrow s = \frac{1}{3}(s-2)$$

$$s = \frac{1}{3}(s-2)$$

$$s = \frac{1}{3}(s-2)$$

السطح = صفر

$$s = 1 \leftarrow s = 1$$

المقام = صفر $s = 2$ غير موجود

$$s = 2 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 2$$

بشع $s = 2$

المقام = صفر

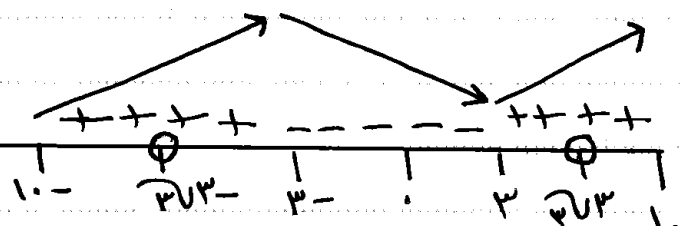
و s غير موجودة

$$s = 2 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \Rightarrow s = 2$$



١) متزايد

$$s \in]-1; 0[\cup]3; 10.6[$$

$$s \in]-1; 0[\cup]3; 10.6[$$

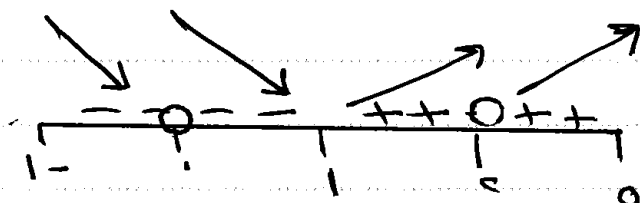
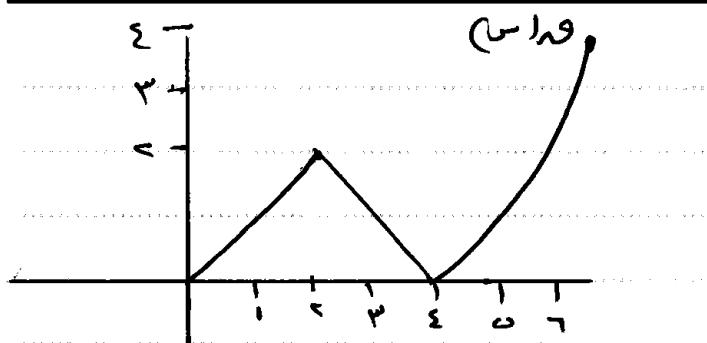
٢)

عند $s = 3$ قيمة عظمى محلية

$$s = 3 \Rightarrow s = 3$$

عند $s = 3$ قيمة صغرى محلية

$$s = 3 \Rightarrow s = 3$$



الحل

(١)

التقط بحرصه

(١٠٠) طرفه قتره

(٢٠٢) المنطقه غير موجوده

(٣٠٤) المنطقه غير موجوده

(٤٠٦) طرف قتره

(٢) وه (س) > . في لقره

(٤٠٢) قتره

(٥)

لكليه وه (س) = س - س^٣ اس

س و [٤٠٤] هـ كلاهما ياتي

(١) قتران التزايد والسناقص

للا قتران وه (س)

(٢) اقيم العظم والصغرى تحليليه

للا قتران وه (س) (وان وهدن)

الحل

وه (س) = س^٣ - س^٤ = ١٢

س^٤ = ٤ ← س = ٢ ±

← تتبع كل

(١) وه قتران [٥٠١]

(٢) وه قتران [١٠١-]

(٣) عند س = ١ قيمه صغرى

محليه وطلقه وهي

وه (١) = ١ -

وزارة (٢٠١٧) شتوية

(١) بالاعتماد على لكل الجوار لذي

تعمل صغرى الاقتران وه (س)

س و [٦٠٠] هـ كلاهما ياتي

(١) لسطه بحرصه للاقتران وه (س)

(٢) محبوه صغرى س التي يكون عندها

وه (س) > .

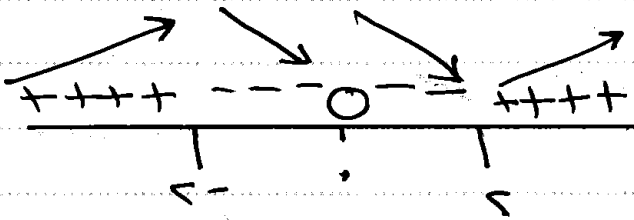
$$\leftarrow \frac{3s^3 - 28}{s^2}$$

$$\leftarrow 3s^3 - 28$$

$$s^2 = 16$$

$$\leftarrow s = \pm 4$$

الحمام $s = 0$: \neq أبحال



① فترة زائد

$$(-\infty - 6 \infty) \cup (6 \infty \infty)$$

متناقص

$$(-\infty - 1) \cup (1 \infty \infty)$$

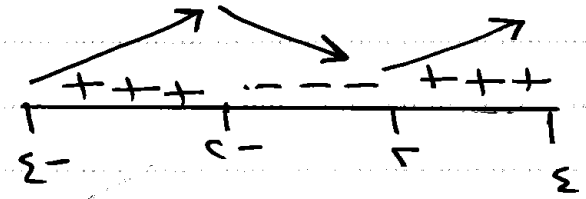
②

عند $s = -2$ قيمة عظمى محلية

$$\text{وهي } (-2) = -32$$

عند $s = 2$ قيمة صغرى محلية

$$\text{وهي } (2) = 32$$



① فترة زائد $[-2 - 0]$ و $[2 \infty \infty]$

فترة قص $[-\infty - 2]$

② $(-16 - 2)$ قيمة عظمى

محلية وقلقة

$(16 - 2)$ قيمة صغرى محلية وقلقة

$(16 - 2)$ قيمة عظمى وقلقة

$(-16 - 2)$ قيمة صغرى وقلقة

وزارة (٢٠١٧) صغرى

$$\frac{28}{s} + s^3 = \text{لكليه وراس}$$

$s \neq 0$
 هياكله عاياتي

① فترات التزايد والتناقص

② القيم العظمى والصغرى

المحلية للأقتران وراس

الحل

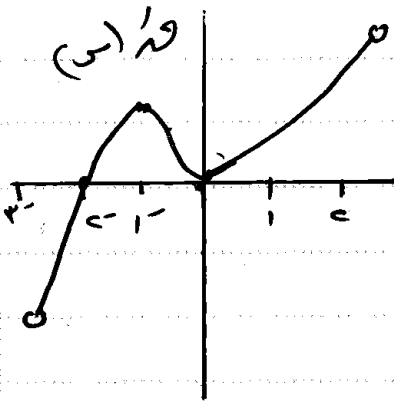
$$\text{و } (s) = 3s^3 - \frac{28}{s}$$

وزارة (٢٠١٨) سنوية قديم

٥ إذا كان $f(x) = (x-1)(x-4)$ $s \in]0, 2[$ حدلا مما يأتي

- (أ) حالات التزايد والتناقص للأقتران $f(x)$
 (ب) القيم العظمى والصغرى المحلية للأقتران $f(x)$ (إن وجدت)

١ إذا كان لسطل المجاور عميل مخفى المشتبه الأوك للأقتران $f(x)$ يعرف على $]-3, 3[$ فان مجموعة القيم الحرجة للأقتران $f(x)$ هي



- (أ) $\{-3, -1, 1, 3\}$
 (ب) $\{-3, 1, 3\}$
 (ج) $\{-1, 1\}$
 (د) $\{-3, 1, 3\}$

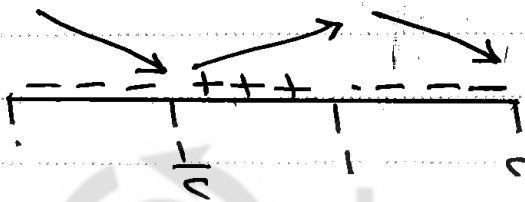
الاجابه ٥

٢- طرف قتره
 - نقطة تقاطع المشتق مع محور السينات
 $f'(x) = (x-1)(x-4) = 0$

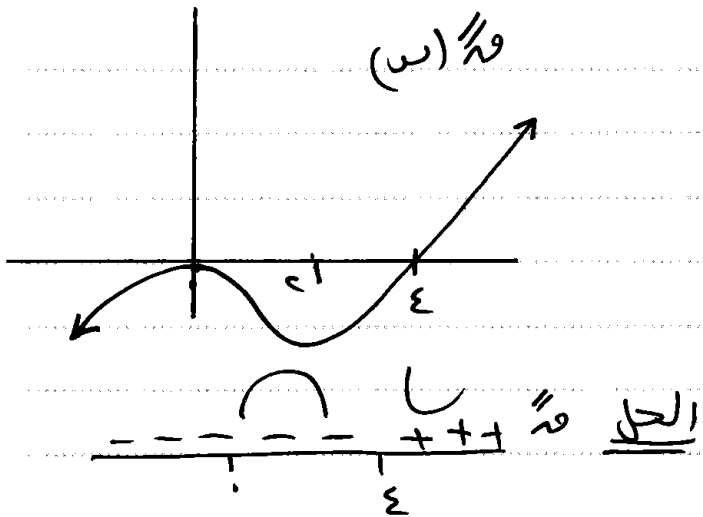
الحل

$$f(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$$

$$f'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$$



(أ) قتران $f(x)$ متناقصا $] و متزايدا $]
 (ب) عند $s = \frac{1}{2}$ قيم صغرى محلية وهي $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{4}$
 عند $s = 1$ قيم عظمى محلية وهي $f(1) = 0$
 عند $s = 2$ قيم صغرى محلية وهي $f(2) = 0$$$

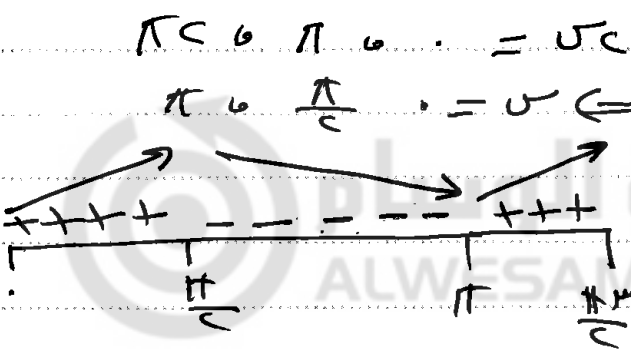


عند $x = 2.5$ نقطة الخطاف (P)

(٣) اذا كان

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ و $x = 4$
 (١) مجالات التزايد والتناقص
 (٢) القيم القصوى المحلية
 (٣) الفترة البعدية التي يكون فيها $f'(x) > 0$ وقعرًا للأعلى

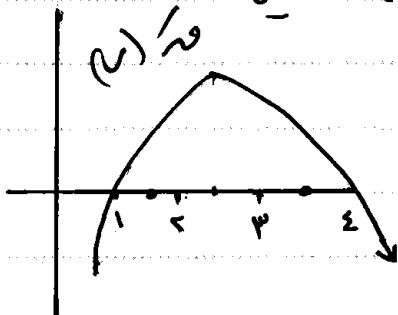
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ و $x = 4$
 $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 < x < 4$
 $f'(x) < 0 \Rightarrow x < 1$ و $x > 4$



← يتبع كل

وزارة (٠١٨) سكويه مدريد

(١) اذا كان لكل الجوار عتلى
 معنى الأقران $f'(x)$ يعرف
 على x ، فان الفترة التي يكون
 فيها $f'(x) < 0$ هي



- (أ) $[4, 5]$
- (ب) $(-\infty, 4]$
- (ج) $[1, 4]$
- (د) $(-\infty, 5)$
- (هـ) $(5, \infty)$

الكل
 $f'(x) < 0 \Rightarrow$ فترة متزايد

(٥) $[-\infty, 5]$

(٢) اذا كان لكل الجوار عتلى
 المشتقة الثانية للأقران $f''(x)$
 يعرف على x ، فان مجموعة قيم
 x التي يكون عندها للأقران
 هي نقطة الخطاف هي

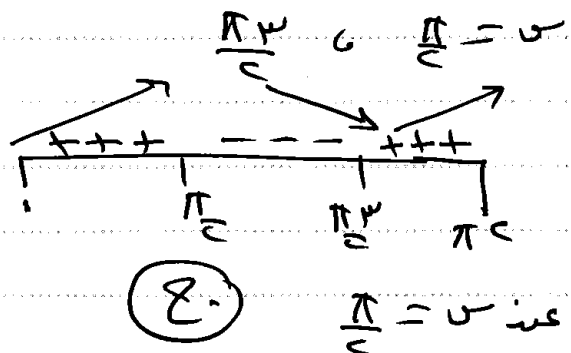
- (أ) $\{4\}$
- (ب) $\{2.5\}$
- (ج) $\{1, 2.5, 4\}$
- (د) $\{1, 4\}$
- (هـ) $\{2.5\}$

وزارة (٥.١٨) صفت جد

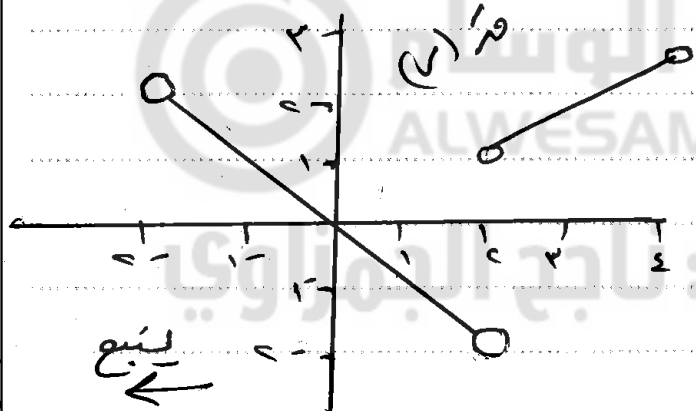
① إذا كان $f(x) = \cos x$
 جد $\exists \in]\pi, 2\pi[$ فان $f(x) = \cos x$
 التي يكون عند π للأقتران $f(x)$
 صفة عظمى سأوي

② صفر $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$ π

العل



③ الشكل أجد - عمل صفت
 المشتقة الأوى للأقتران $f(x)$
 المتصل على $]-\infty, \infty[$ اعقد
 على ذلك في إيجاد كل ما يلي

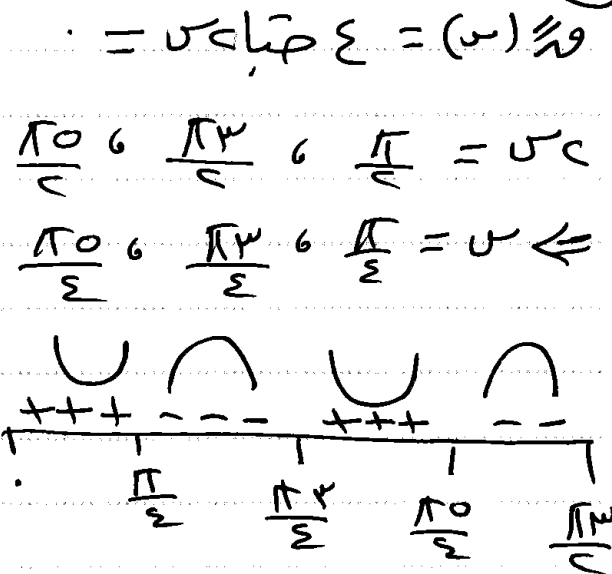


① π π $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{5}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{7}$ $\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{9}$ $\frac{\pi}{10}$ $\frac{\pi}{11}$ $\frac{\pi}{12}$

② عند $\pi = \frac{\pi}{2}$ عظمى محلية وهي
 $\frac{\pi}{2} = (\frac{\pi}{2})$

③ عند $\pi = \frac{\pi}{3}$ صفرى محلية وهي
 $\frac{1}{2} = (\frac{\pi}{3})$

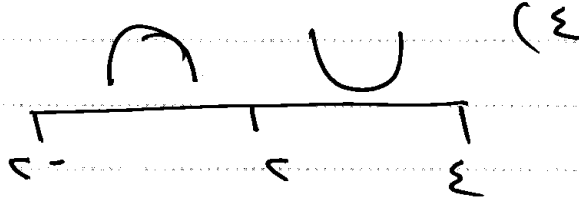
④



مقر للأعلى

$[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$ $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}]$ $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{7}]$ $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{9}]$ $[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{11}]$ $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{13}]$

وهـ متناقص على $[-٢٠٠]$
 و $٠ < (١) < ١$. قصر للاسفل
 على $[-٢٠٠]$



عند $٢ = ٠$ يوجد تقصا اعطاف

(٥) و $(٠) =$ ميل مماس و $(١) =$
 عند $٠ = ١$

$$١ - = \frac{١ - ٢}{١ - ٢} = \frac{١٣ - ٢٥}{١٣ - ٢٥} =$$

و $(٢) =$ غير موجود

لان و $(٢) =$ غير موجود

Ⓢ اذا كان $٠ < (١) =$ اذا كان $٠ < (١) =$
 فان مجموعة $٠ < (١) =$ التي يكون عندها
 للأقتران و $(١) =$ تقطع حرجه

٢) \emptyset (١) $\{٨\}$ (٢) $\{٦٠, ٩\}$

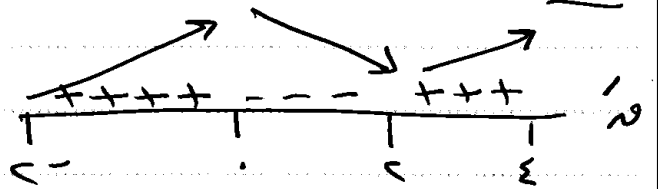
(٣) $\{١٦, ٨, ١, ٠\}$

و $(١) =$ $\frac{١٦ - ٢٥}{١٦ - ٢٥}$

← يتبع كل

- ١) قتران لزيادة والتناقص للأقتران
 و $(١) =$
- ٢) قيم $٠ < (١) =$ التي يكون عندها للأقتران
 و $(١) =$ قيم قصوى محليه جيناً
 نوعها (أن وليت)
- ٣) حالات التقصير للأقتران و $(١) =$
- ٤) قيم $٠ < (١) =$ التي يكون عندها للأقتران
 و $(١) =$ نقطة اعطاف
- ٥) و $(٠) =$ و $(٢) =$

اكل



١) و قتران $[-٢٠٠]$ و $[٤٠٠]$
 متناقص $[٢٠٠]$

(٢) عند $٠ =$. عظيمة محليه
 عند $٠ =$ صفري محليه

(٣) و $(١) < ٠$. عندها و قتران
 قصر للاعلى

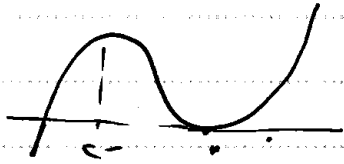
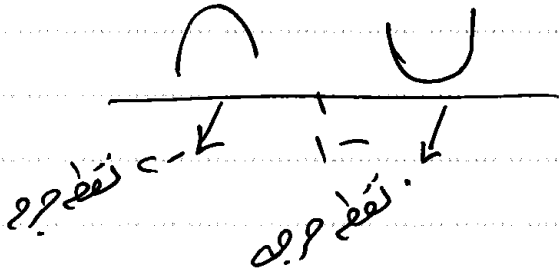
و $(١) < ٠$. عندها و متناقص
 قصر للاسفل

و قتران على $[٤٠٠]$

← قصر للاعلى $[٤٠٠]$

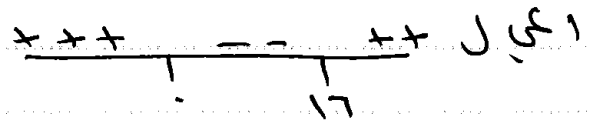
الحل

و (س) < . ← فـ متزايد
و (س) > . ← فـ متناقص



← متناقص في $[-0.6, 0.5]$

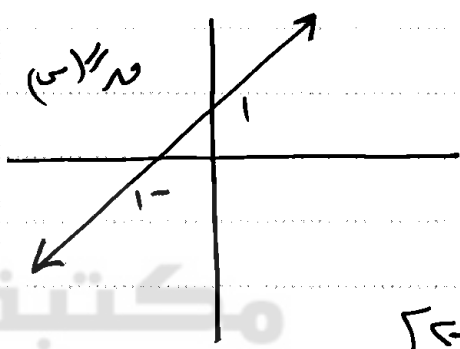
السطح =
 $5 - 16 = -11$
 الختام =
 $5 - 16 = -11$
 $5 = 5$
 $16 = 5$



(2)

(3)

إذا كان الكحل أجاور - ميل منحنى
 المنطقه الثابت للأقتران كثير
 الحدود و (س) وكان للأقتران
 و (س) نقطه حرجيه عند $s = -0.6$
 $s = 0.5$ فان منحنى و (س)
 متناقص في لقطره



- (P) $[-0.6, 0.5]$
- (U) $[-0.6, 0.5]$
- (E) $[0.5, 0.6]$
- (D) $[0.5, 0.6]$



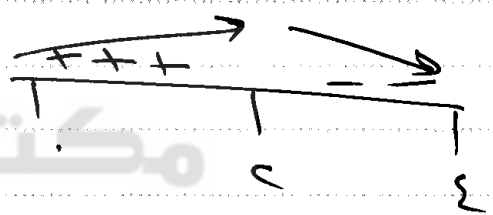
وزارة (2018) صفت

Ⓐ إذا كان $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ فان لقطره التي يكون فيها الاقتران $h(x)$ متناقصاً هي

- (A) $[-4, \infty)$ (B) $[-6, 0]$
 (C) $[-\infty, 0]$ (D) $[-6, \infty)$

اكل

المجال $x^2 - 4 \geq 0$
 $x(x-2)(x+2) = 0$
 $x = -2, 0, 2$
 $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$



متناقص $[-6, \infty)$

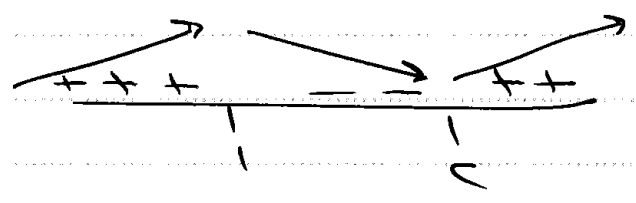
(2)

Ⓒ

إذا كان $h(x) = x^2 - 4x + 2$ فان لقطره العظمى المحلّية للاقتران $h(x)$ عند s كادي

- (A) صفر (B) $(2, 1)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(2, 0)$

اكل $h(x) = x^2 - 4x + 2$
 $h'(x) = 2x - 4 = 0$
 $x = 2$
 $h''(x) = 2 > 0$
 $h(2) = 2^2 - 4(2) + 2 = -2$



عند $s = 1$ عظمى محلّية

(1)

Ⓓ إذا كان للاقتران $h(x) = x^2 - 4x + 2$ صفر محلي عند $s = 1$ صفت

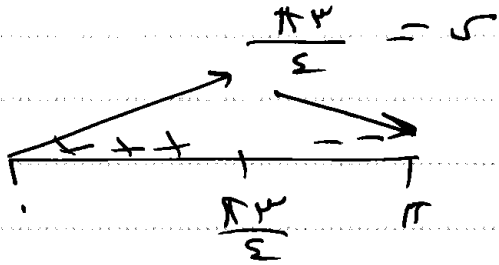
ثابت فان الاقتران متزايد في لقطره

- (A) $[-1, \infty)$ (B) $[-1, 1]$

(C) $[-1, 1]$ (D) \emptyset
 ← لسع اكل

حاس = - حباس

← حاس = 1 -



عند $s = \frac{\pi^2}{2}$ هي نقطة

ص(1) = 1 -

ص(pi) = حاس - حباس

1 + = -

عند $s =$ هي نقطة

الاجابة (P)

الحل

ص(س) = 3 + 3(س - 2) = ص(س)

ص(1) = صفر

= 3 + 3(س - 2) = ص(س)

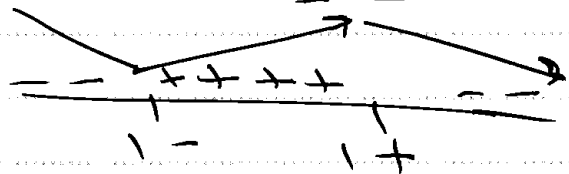
= 3 - 12 + 3س

0 = 3 ← = 3س - 10

ص(س) = 3س - 3 = ص(س)

= 3(س - 1)

1 + = 3



عزايه [1, 3] (U)

(E)

اذا كان ص(س) = حاس - حباس
 $s \in]0, \pi[$ فان قيمة س
 التي يكون عندها للأقتران ص(س)
 هي نقطة مطلقة هي

ص(س) = 3س - 3 = ص(س)

الحل

ص(س) = حباس + حاس =

ورقة عمل

النقطة الحرجة / التزايد والتناقص / القيم القصوى / التفرع

الأسئلة الموضوعية

صنودائره حول اجابه لصحيحه

٤) اذا كان $f(x)$ معرف على $[360]$ وقابل للاشتقاق على (360) حيث $f'(x) = x - 5$ فان عدد النقاط الحرجة للأقتران $f(x)$ يساوي

١٢) ٥ ١٥) ٤ ١٦) ٣ ١٧) ٢

٥) اذا كان للأقتران $f(x) = x^3 - 3x^2$ قيمة صفرى محليه عند $x = 2$ فان قيمة الثابت m تساوي

١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

٦) اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ فان جميع قيم x التي يوجد عندها نقطه حرجه للأقتران $f(x)$ هي $[360]$

٧) اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ فان جميع قيم x التي يوجد عندها نقطه حرجه للأقتران $f(x)$ هي $[360]$

١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

١) اذا كان $f(x) = x^3 - 12x + 5$ فان اصفريه للأقتران $f(x)$ هي

١٢) ٥ ١٥) ٤ ١٦) ٣ ١٧) ٢

٢) اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ فان مجموع قيم x التي يكون للأقتران $f(x)$ عندها نقطه حرجه هي

١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

٣) اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ فان مجموع قيم x التي يكون للأقتران $f(x)$ عندها نقطه حرجه هي

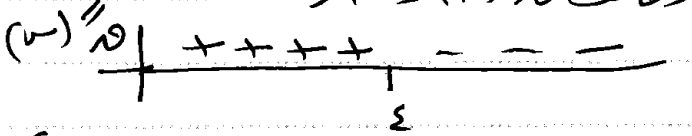
١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

٤) اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ فان مجموع قيم x التي يكون للأقتران $f(x)$ عندها نقطه حرجه هي

١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

١٢) ١ - ١٥) ١ ١٦) ٢ ١٧) ٣

١٨) اذا كان $f(x)$ كثير حدود وكان
الحل الجوار - بين اشارة $f'(x)$
وكانت $f'(x) = 3$ صفر



فان احدى اعداد $f(x)$ لثابته صحيحة دائماً

١٤) $f'(x) = 3$ صفر

١٥) $f'(x) = 4$ صفر

١٦) $f'(x)$ قيمته صفري محلي

١٧) $f'(x)$ قيمته عظمى محلي

١٩) $f'(x) = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ 2 < x < 3 \end{array} \right.$

٢٠) $f'(x) = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ 2 < x < 3 \end{array} \right.$

فان عدد النقطة الحرجة للأعداد $f(x)$

٢١) اذا كان $f(x) = x^2 + 1$ فان

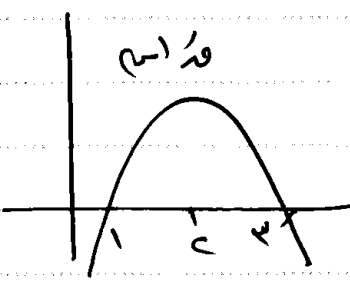
٢٢) $f'(x)$ غير موجود

٢٣) $f'(x)$ قيمته عظمى

٢٤) $f'(x)$ قيمته صفري

٢٥) $f'(x)$ قيمته عظمى $f(x)$ نقطة العطف

١٥) الشكل الجوار بين منحنى $f(x)$
فان مجموع كل الميانيه $f'(x) < 0$ هو



٢٦) (٣٥١)

٢٧) (٥٥٤)

٢٨) (٢٥٥٥)

٢٩) (١٤٥٥٥) و (٥٥١٣)

٣٠) $f(x)$ صرفاً على x

٣١) $f'(x) = \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^2}$ فان عدد نقطة
الحرجة لـ $f(x)$

٣٢) ٠ ١ ٢ ٣

٣٣) اذا كان الاقتران $f(x)$ متصلاً

على $[0, 1]$ $f'(x) < 0$ $\forall x \in [0, 1]$ $f(x)$ $\forall x \in [0, 1]$

٣٤) فان احدى اعداد $f(x)$ لثابته صحيحة

دائماً

٣٥) لا يوجد لـ $f(x)$ نقطة انعطاف في $(0, 1)$

٣٦) لـ $f(x)$ قيمته عظمى محلي عند $x = 0$

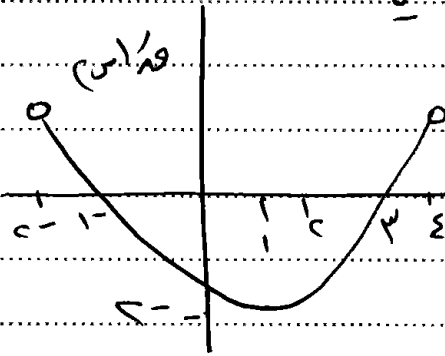
٣٧) $f(x)$ مقعر للأعلى على $[0, 1]$

٣٨) $f(x)$ قيمته عظمى محلي عند $x = 1$

٢١) اذا كانت النقطة (٢١) نقطة انعطاف لمحتى الأفتوان $h(x)$ وكانت $h'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ ثابت فان $h''(2) = ?$

- ٢٢) ٤ (أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ١٥ (د) ٢٤ (هـ)

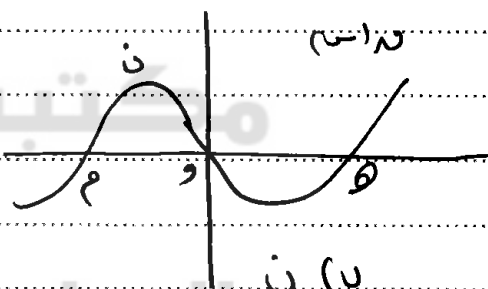
٢٢) اذا كان لكل الجوار ميل محتى $h(x)$ فان نقطة انعطاف محتى $h(x)$ هي



- ٢٣) (١) (٢-٣) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

- ٢٤) (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

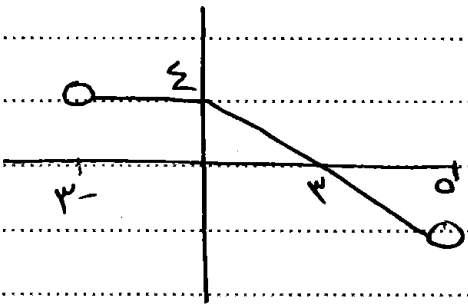
٢٣) بالاعتماد على لكل الجوار الذي ميل محتى $h(x)$ فان النقطة التي يكون عندها $h''(x) = 0$ هو



- ٢٤) (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

- ٢٥) (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

٢٤) الشكل المجاور ميل محتى $h(x)$ في $x=3$ فان محتى $h(x)$ يكون



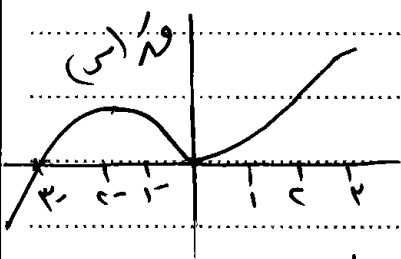
٢٥) مقصراً للأسفل في $[0, 5]$

٢٦) مقصراً لأعلى في $[2, 3]$

٢٧) متناقصاً في $[0, 5]$

٢٨) متناقصاً في $[3, 5]$

٢٩) بالاعتماد على لكل الجوار الذي ميل محتى $h(x)$ فان للأفتوان قيمته صفرى عند $x = ?$



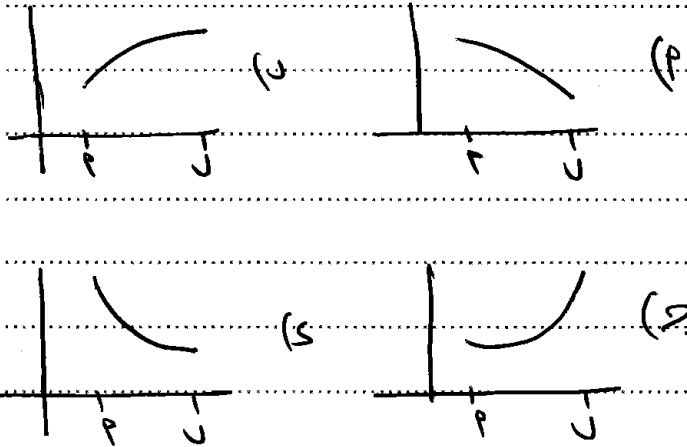
- ٣٠) ١ (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥ (هـ)

٣١) اذا كان $h(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 6$ فان قيم h التي تجعل محتى الأفتوان مقصراً للأسفل هي

- ٣٢) (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

- ٣٣) (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

(٣) اذا كان $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 ليجمع بين $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 الاشارة لعدد $h(x)$ ، $h'(x)$ ، $h''(x)$ ،
 $h(x)$ في الفترة $[a, b]$



(٣١) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 وكانت $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 خانة $h(x)$ ،
 (٢) فترة اريد على h ،
 (٣) متناقصا على h ،
 (٤) مقصرا للأعلى على h ،
 (٥) مقصرا للأسفل على h ،

(٣٢) اذا كان $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 كل $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 فان

(٢) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 (٣) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 (٤) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 (٥) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،

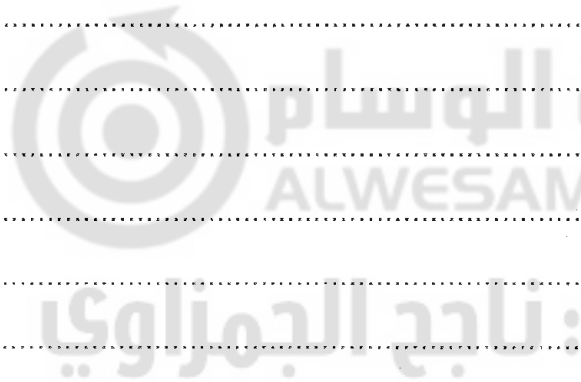
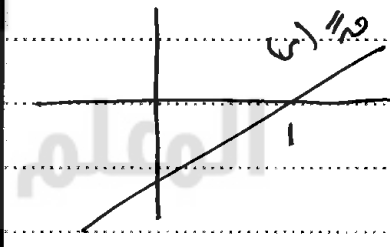
(٣٣) اذا كان $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،

لما مجموعة قيم $h(x)$ ، $h'(x)$ ، $h''(x)$ ،
 للأقران $h(x)$ ، $h'(x)$ ، $h''(x)$ ،

(٢) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 (٣) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،

(٣٤) لكل $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،

(٢) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،
 (٣) $h(x) > 0$ ، $h'(x) < 0$ ، $h''(x) > 0$ ،



بسم الله الرحمن الرحيم
إجابات الأسئلة الموضوعية

ناجح الجمزاوي
٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

المبحث : الرياضيات

التزايد والتناقص/القيم القصوى/التقعر

السؤال الأول انقل رمز الإجابة الصحيحة (ضع دائرة)

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ج	د	ب	أ	أ	ب	ج	ب	ب	د

٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١
د	أ	ج	ب	ج	ج	أ	ج	د	أ

٣٠	٢٩	٢٨	٢٧	٢٦	٢٥	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
أ	د	د	د	أ	أ	أ	ج	ب	ب

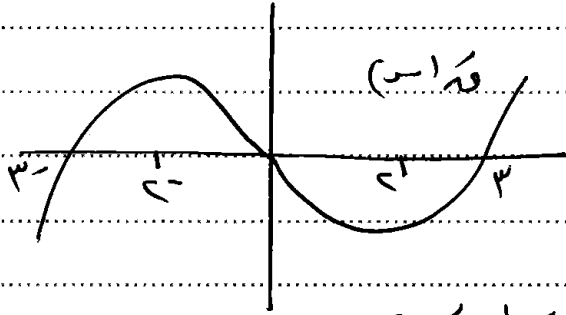
٣١
ب



المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(P) معطى $f(x)$ على الشكل المجاور الذي
 عيّن عتق $f(x)$ في (س) جد ما يأتي



- (1) النقطة الحرجة
- (2) محالات التزايد والتناقص
- (3) القيم القصوى
- (4) محالات التقعر
- (5) نقط الانعطاف

- (1) إذا كان $f(x)$ محبباً $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ - حاس
- (2) محالات التزايد والتناقص
- (3) القيم العظمى والصغرى المحلية

السؤال الثاني

لكل من لاقتراحات التالية جد

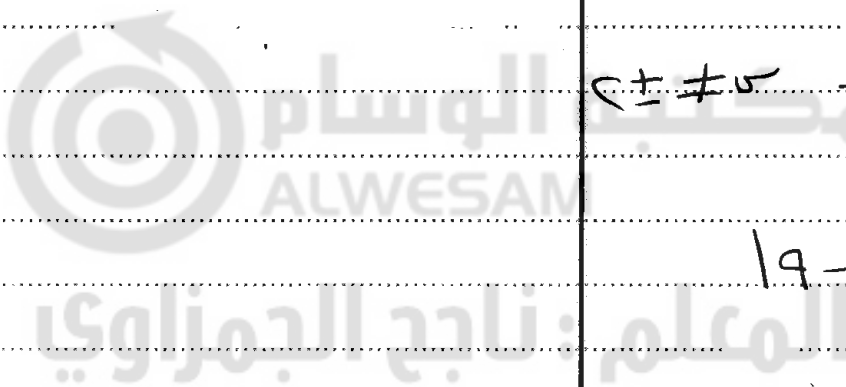
- (1) النقطة الحرجة
- (2) محالات التزايد والتناقص
- (3) القيم القصوى
- (4) محالات التقعر

(1) $f(x) = \frac{1}{x} - 3x^2 - 4x + 1$ - حاس
 $f(x) = [x^2 - 3x + 1]$

(2) $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 3x^2 + 4x - 3 & x \geq 3 \\ x + 1 & x < 3 \end{cases}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ - حاس $x \neq \pm 2$

(4) $f(x) = |x^2 - 9|$ - حاس



السؤال الخامس

١٣) إذا كان $h(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان $h(1) = 1$ ، $h(2) = 4$ ، $h(3) = 9$ ، $h(4) = 16$ ، $h(5) = 25$ ، $h(6) = 36$ ، $h(7) = 49$ ، $h(8) = 64$ ، $h(9) = 81$ ، $h(10) = 100$ ، $h(11) = 121$ ، $h(12) = 144$ ، $h(13) = 169$ ، $h(14) = 196$ ، $h(15) = 225$ ، $h(16) = 256$ ، $h(17) = 289$ ، $h(18) = 324$ ، $h(19) = 361$ ، $h(20) = 400$ ، $h(21) = 441$ ، $h(22) = 484$ ، $h(23) = 529$ ، $h(24) = 576$ ، $h(25) = 625$ ، $h(26) = 676$ ، $h(27) = 729$ ، $h(28) = 784$ ، $h(29) = 841$ ، $h(30) = 900$ ، $h(31) = 961$ ، $h(32) = 1024$ ، $h(33) = 1089$ ، $h(34) = 1156$ ، $h(35) = 1225$ ، $h(36) = 1296$ ، $h(37) = 1369$ ، $h(38) = 1444$ ، $h(39) = 1521$ ، $h(40) = 1600$ ، $h(41) = 1681$ ، $h(42) = 1764$ ، $h(43) = 1849$ ، $h(44) = 1936$ ، $h(45) = 2025$ ، $h(46) = 2116$ ، $h(47) = 2209$ ، $h(48) = 2304$ ، $h(49) = 2401$ ، $h(50) = 2500$ ، $h(51) = 2601$ ، $h(52) = 2704$ ، $h(53) = 2809$ ، $h(54) = 2916$ ، $h(55) = 3025$ ، $h(56) = 3136$ ، $h(57) = 3249$ ، $h(58) = 3364$ ، $h(59) = 3481$ ، $h(60) = 3600$ ، $h(61) = 3721$ ، $h(62) = 3844$ ، $h(63) = 3969$ ، $h(64) = 4096$ ، $h(65) = 4225$ ، $h(66) = 4356$ ، $h(67) = 4489$ ، $h(68) = 4624$ ، $h(69) = 4761$ ، $h(70) = 4900$ ، $h(71) = 5041$ ، $h(72) = 5184$ ، $h(73) = 5329$ ، $h(74) = 5476$ ، $h(75) = 5625$ ، $h(76) = 5776$ ، $h(77) = 5929$ ، $h(78) = 6084$ ، $h(79) = 6241$ ، $h(80) = 6400$ ، $h(81) = 6561$ ، $h(82) = 6724$ ، $h(83) = 6889$ ، $h(84) = 7056$ ، $h(85) = 7225$ ، $h(86) = 7396$ ، $h(87) = 7569$ ، $h(88) = 7744$ ، $h(89) = 7921$ ، $h(90) = 8100$ ، $h(91) = 8281$ ، $h(92) = 8464$ ، $h(93) = 8649$ ، $h(94) = 8836$ ، $h(95) = 9025$ ، $h(96) = 9216$ ، $h(97) = 9409$ ، $h(98) = 9604$ ، $h(99) = 9801$ ، $h(100) = 10000$ ، $h(101) = 10201$ ، $h(102) = 10404$ ، $h(103) = 10609$ ، $h(104) = 10816$ ، $h(105) = 11025$ ، $h(106) = 11236$ ، $h(107) = 11449$ ، $h(108) = 11664$ ، $h(109) = 11881$ ، $h(110) = 12100$ ، $h(111) = 12321$ ، $h(112) = 12544$ ، $h(113) = 12769$ ، $h(114) = 12996$ ، $h(115) = 13225$ ، $h(116) = 13456$ ، $h(117) = 13689$ ، $h(118) = 13924$ ، $h(119) = 14161$ ، $h(120) = 14400$ ، $h(121) = 14641$ ، $h(122) = 14884$ ، $h(123) = 15129$ ، $h(124) = 15376$ ، $h(125) = 15625$ ، $h(126) = 15876$ ، $h(127) = 16129$ ، $h(128) = 16384$ ، $h(129) = 16641$ ، $h(130) = 16900$ ، $h(131) = 17161$ ، $h(132) = 17424$ ، $h(133) = 17689$ ، $h(134) = 17956$ ، $h(135) = 18225$ ، $h(136) = 18496$ ، $h(137) = 18769$ ، $h(138) = 19044$ ، $h(139) = 19321$ ، $h(140) = 19600$ ، $h(141) = 19881$ ، $h(142) = 20164$ ، $h(143) = 20449$ ، $h(144) = 20736$ ، $h(145) = 21025$ ، $h(146) = 21316$ ، $h(147) = 21609$ ، $h(148) = 21904$ ، $h(149) = 22201$ ، $h(150) = 22500$ ، $h(151) = 22801$ ، $h(152) = 23104$ ، $h(153) = 23409$ ، $h(154) = 23716$ ، $h(155) = 24025$ ، $h(156) = 24336$ ، $h(157) = 24649$ ، $h(158) = 24964$ ، $h(159) = 25281$ ، $h(160) = 25600$ ، $h(161) = 25921$ ، $h(162) = 26244$ ، $h(163) = 26569$ ، $h(164) = 26896$ ، $h(165) = 27225$ ، $h(166) = 27556$ ، $h(167) = 27889$ ، $h(168) = 28224$ ، $h(169) = 28561$ ، $h(170) = 28900$ ، $h(171) = 29241$ ، $h(172) = 29584$ ، $h(173) = 29929$ ، $h(174) = 30276$ ، $h(175) = 30625$ ، $h(176) = 30976$ ، $h(177) = 31329$ ، $h(178) = 31684$ ، $h(179) = 32041$ ، $h(180) = 32400$ ، $h(181) = 32761$ ، $h(182) = 33124$ ، $h(183) = 33489$ ، $h(184) = 33856$ ، $h(185) = 34225$ ، $h(186) = 34596$ ، $h(187) = 34969$ ، $h(188) = 35344$ ، $h(189) = 35721$ ، $h(190) = 36100$ ، $h(191) = 36481$ ، $h(192) = 36864$ ، $h(193) = 37249$ ، $h(194) = 37636$ ، $h(195) = 38025$ ، $h(196) = 38416$ ، $h(197) = 38809$ ، $h(198) = 39204$ ، $h(199) = 39601$ ، $h(200) = 40000$ ، $h(201) = 40401$ ، $h(202) = 40804$ ، $h(203) = 41209$ ، $h(204) = 41616$ ، $h(205) = 42025$ ، $h(206) = 42436$ ، $h(207) = 42849$ ، $h(208) = 43264$ ، $h(209) = 43681$ ، $h(210) = 44100$ ، $h(211) = 44521$ ، $h(212) = 44944$ ، $h(213) = 45369$ ، $h(214) = 45796$ ، $h(215) = 46225$ ، $h(216) = 46656$ ، $h(217) = 47089$ ، $h(218) = 47524$ ، $h(219) = 47961$ ، $h(220) = 48400$ ، $h(221) = 48841$ ، $h(222) = 49284$ ، $h(223) = 49729$ ، $h(224) = 50176$ ، $h(225) = 50625$ ، $h(226) = 51076$ ، $h(227) = 51529$ ، $h(228) = 51984$ ، $h(229) = 52441$ ، $h(230) = 52900$ ، $h(231) = 53361$ ، $h(232) = 53824$ ، $h(233) = 54289$ ، $h(234) = 54756$ ، $h(235) = 55225$ ، $h(236) = 55696$ ، $h(237) = 56169$ ، $h(238) = 56644$ ، $h(239) = 57121$ ، $h(240) = 57600$ ، $h(241) = 58081$ ، $h(242) = 58564$ ، $h(243) = 59049$ ، $h(244) = 59536$ ، $h(245) = 60025$ ، $h(246) = 60516$ ، $h(247) = 61009$ ، $h(248) = 61504$ ، $h(249) = 62001$ ، $h(250) = 62500$ ، $h(251) = 63001$ ، $h(252) = 63504$ ، $h(253) = 64009$ ، $h(254) = 64516$ ، $h(255) = 65025$ ، $h(256) = 65536$ ، $h(257) = 66049$ ، $h(258) = 66564$ ، $h(259) = 67081$ ، $h(260) = 67600$ ، $h(261) = 68121$ ، $h(262) = 68644$ ، $h(263) = 69169$ ، $h(264) = 69696$ ، $h(265) = 70225$ ، $h(266) = 70756$ ، $h(267) = 71289$ ، $h(268) = 71824$ ، $h(269) = 72361$ ، $h(270) = 72900$ ، $h(271) = 73441$ ، $h(272) = 73984$ ، $h(273) = 74529$ ، $h(274) = 75076$ ، $h(275) = 75625$ ، $h(276) = 76176$ ، $h(277) = 76729$ ، $h(278) = 77284$ ، $h(279) = 77841$ ، $h(280) = 78400$ ، $h(281) = 78961$ ، $h(282) = 79524$ ، $h(283) = 80089$ ، $h(284) = 80656$ ، $h(285) = 81225$ ، $h(286) = 81796$ ، $h(287) = 82369$ ، $h(288) = 82944$ ، $h(289) = 83521$ ، $h(290) = 84100$ ، $h(291) = 84681$ ، $h(292) = 85264$ ، $h(293) = 85849$ ، $h(294) = 86436$ ، $h(295) = 87025$ ، $h(296) = 87616$ ، $h(297) = 88209$ ، $h(298) = 88804$ ، $h(299) = 89401$ ، $h(300) = 90000$ ، $h(301) = 90601$ ، $h(302) = 91204$ ، $h(303) = 91809$ ، $h(304) = 92416$ ، $h(305) = 93025$ ، $h(306) = 93636$ ، $h(307) = 94249$ ، $h(308) = 94864$ ، $h(309) = 95481$ ، $h(310) = 96100$ ، $h(311) = 96721$ ، $h(312) = 97344$ ، $h(313) = 97969$ ، $h(314) = 98596$ ، $h(315) = 99225$ ، $h(316) = 99856$ ، $h(317) = 100489$ ، $h(318) = 101124$ ، $h(319) = 101761$ ، $h(320) = 102400$ ، $h(321) = 103041$ ، $h(322) = 103684$ ، $h(323) = 104329$ ، $h(324) = 104976$ ، $h(325) = 105625$ ، $h(326) = 106276$ ، $h(327) = 106929$ ، $h(328) = 107584$ ، $h(329) = 108241$ ، $h(330) = 108900$ ، $h(331) = 109561$ ، $h(332) = 110224$ ، $h(333) = 110889$ ، $h(334) = 111556$ ، $h(335) = 112225$ ، $h(336) = 112896$ ، $h(337) = 113569$ ، $h(338) = 114244$ ، $h(339) = 114921$ ، $h(340) = 115600$ ، $h(341) = 116281$ ، $h(342) = 116964$ ، $h(343) = 117649$ ، $h(344) = 118336$ ، $h(345) = 119025$ ، $h(346) = 119716$ ، $h(347) = 120409$ ، $h(348) = 121104$ ، $h(349) = 121801$ ، $h(350) = 122500$ ، $h(351) = 123201$ ، $h(352) = 123904$ ، $h(353) = 124609$ ، $h(354) = 125316$ ، $h(355) = 126025$ ، $h(356) = 126736$ ، $h(357) = 127449$ ، $h(358) = 128164$ ، $h(359) = 128881$ ، $h(360) = 129600$ ، $h(361) = 130321$ ، $h(362) = 131044$ ، $h(363) = 131769$ ، $h(364) = 132496$ ، $h(365) = 133225$ ، $h(366) = 133956$ ، $h(367) = 134689$ ، $h(368) = 135424$ ، $h(369) = 136161$ ، $h(370) = 136900$ ، $h(371) = 137641$ ، $h(372) = 138384$ ، $h(373) = 139129$ ، $h(374) = 139876$ ، $h(375) = 140625$ ، $h(376) = 141376$ ، $h(377) = 142129$ ، $h(378) = 142884$ ، $h(379) = 143641$ ، $h(380) = 144400$ ، $h(381) = 145161$ ، $h(382) = 145924$ ، $h(383) = 146689$ ، $h(384) = 147456$ ، $h(385) = 148225$ ، $h(386) = 148996$ ، $h(387) = 149769$ ، $h(388) = 150544$ ، $h(389) = 151321$ ، $h(390) = 152100$ ، $h(391) = 152881$ ، $h(392) = 153664$ ، $h(393) = 154449$ ، $h(394) = 155236$ ، $h(395) = 156025$ ، $h(396) = 156816$ ، $h(397) = 157609$ ، $h(398) = 158404$ ، $h(399) = 159201$ ، $h(400) = 160000$ ، $h(401) = 160801$ ، $h(402) = 161604$ ، $h(403) = 162409$ ، $h(404) = 163216$ ، $h(405) = 164025$ ، $h(406) = 164836$ ، $h(407) = 165649$ ، $h(408) = 166464$ ، $h(409) = 167281$ ، $h(410) = 168100$ ، $h(411) = 168921$ ، $h(412) = 169744$ ، $h(413) = 170569$ ، $h(414) = 171396$ ، $h(415) = 172225$ ، $h(416) = 173056$ ، $h(417) = 173889$ ، $h(418) = 174724$ ، $h(419) = 175561$ ، $h(420) = 176400$ ، $h(421) = 177241$ ، $h(422) = 178084$ ، $h(423) = 178929$ ، $h(424) = 179776$ ، $h(425) = 180625$ ، $h(426) = 181476$ ، $h(427) = 182329$ ، $h(428) = 183184$ ، $h(429) = 184041$ ، $h(430) = 184900$ ، $h(431) = 185761$ ، $h(432) = 186624$ ، $h(433) = 187489$ ، $h(434) = 188356$ ، $h(435) = 189225$ ، $h(436) = 190096$ ، $h(437) = 190969$ ، $h(438) = 191844$ ، $h(439) = 192721$ ، $h(440) = 193600$ ، $h(441) = 194481$ ، $h(442) = 195364$ ، $h(443) = 196249$ ، $h(444) = 197136$ ، $h(445) = 198025$ ، $h(446) = 198916$ ، $h(447) = 199809$ ، $h(448) = 200704$ ، $h(449) = 201601$ ، $h(450) = 202500$ ، $h(451) = 203401$ ، $h(452) = 204304$ ، $h(453) = 205209$ ، $h(454) = 206116$ ، $h(455) = 207025$ ، $h(456) = 207936$ ، $h(457) = 208849$ ، $h(458) = 209764$ ، $h(459) = 210681$ ، $h(460) = 211600$ ، $h(461) = 212521$ ، $h(462) = 213444$ ، $h(463) = 214369$ ، $h(464) = 215296$ ، $h(465) = 216225$ ، $h(466) = 217156$ ، $h(467) = 218089$ ، $h(468) = 219024$ ، $h(469) = 219961$ ، $h(470) = 220900$ ، $h(471) = 221841$ ، $h(472) = 222784$ ، $h(473) = 223729$ ، $h(474) = 224676$ ، $h(475) = 225625$ ، $h(476) = 226576$ ، $h(477) = 227529$ ، $h(478) = 228484$ ، $h(479) = 229441$ ، $h(480) = 230400$ ، $h(481) = 231361$ ، $h(482) = 232324$ ، $h(483) = 233289$ ، $h(484) = 234256$ ، $h(485) = 235225$ ، $h(486) = 236196$ ، $h(487) = 237169$ ، $h(488) = 238144$ ، $h(489) = 239121$ ، $h(490) = 240100$ ، $h(491) = 241081$ ، $h(492) = 242064$ ، $h(493) = 243049$ ، $h(494) = 244036$ ، $h(495) = 245025$ ، $h(496) = 246016$ ، $h(497) = 247009$ ، $h(498) = 248004$ ، $h(499) = 249001$ ، $h(500) = 250000$ ، $h(501) = 251001$ ، $h(502) = 252004$ ، $h(503) = 253009$ ، $h(504) = 254016$ ، $h(505) = 255025$ ، $h(506) = 256036$ ، $h(507) = 257049$ ، $h(508) = 258064$ ، $h(509) = 259081$ ، $h(510) = 260100$ ، $h(511) = 261121$ ، $h(512) = 262144$ ، $h(513) = 263169$ ، $h(514) = 264196$ ، $h(515) = 265225$ ، $h(516) = 266256$ ، $h(517) = 267289$ ، $h(518) = 268324$ ، $h(519) = 269361$ ، $h(520) = 270400$ ، $h(521) = 271441$ ، $h(522) = 272484$ ، $h(523) = 273529$ ، $h(524) = 274576$ ، $h(525) = 275625$ ، $h(526) = 276676$ ، $h(527) = 277729$ ، $h(528) = 278784$ ، $h(529) = 279841$ ، $h(530) = 280900$ ، $h(531) = 281961$ ، $h(532) = 283024$ ، $h(533) = 284089$ ، $h(534) = 285156$ ، $h(535) = 286225$ ، $h(536) = 287296$ ، $h(537) = 288369$ ، $h(538) = 289444$ ، $h(539) = 290521$ ، $h(540) = 291600$ ، $h(541) = 292681$ ، $h(542) = 293764$ ، $h(543) = 294849$ ، $h(544) = 295936$ ، $h(545) = 297025$ ، $h(546) = 298116$ ، $h(547) = 299209$ ، $h(548) = 300304$ ، $h(549) = 301401$ ، $h(550) = 302500$ ، $h(551) = 303601$ ، $h(552) = 304704$ ، $h(553) = 305809$ ، $h(554) = 306916$ ، $h(555) = 308025$ ، $h(556) = 309136$ ، $h(557) = 310249$ ، $h(558) = 311364$ ، $h(559) = 312481$ ، $h(560) = 313600$ ، $h(561) = 314721$ ، $h(562) = 315844$ ، $h(563) = 316969$ ، $h(564) = 318096$ ، $h(565) = 319225$ ، $h(566) = 320356$ ، $h(567) = 321489$ ، $h(568) = 322624$ ، $h(569) = 323761$ ، $h(570) = 324900$ ، $h(571) = 326041$ ، $h(572) = 327184$ ، $h(573) = 328329$ ، $h(574) = 329476$ ، $h(575) = 330625$ ، $h(576) = 331776$ ، $h(577) = 332929$ ، $h(578) = 334084$ ، $h(579) = 335241$ ، $h(580) = 336400$ ، $h(581) = 337561$ ، $h(582) = 338724$ ، $h(583) = 339889$ ، $h(584) = 341056$ ، $h(585) = 342225$ ، $h(586) = 343396$ ، $h(587) = 344569$ ، $h(588) = 345744$ ، $h(589) = 346921$ ، $h(590) = 348100$ ، $h(591) = 349281$ ، $h(592) = 350464$ ، $h(593) = 351649$ ، $h(594) = 352836$ ، $h(595) = 354025$ ، $h(596) = 355216$ ، $h(597) = 356409$ ، $h(598) = 357604$ ، $h(599) = 358801$ ، $h(600) = 360000$ ، $h(6$

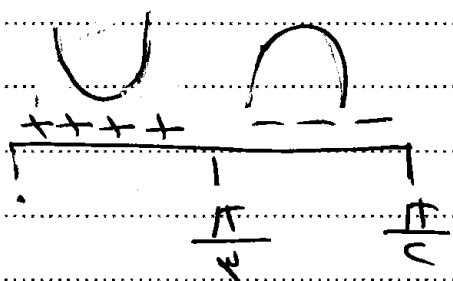
السؤال الثاني

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \cos x = 0$$

$$\begin{aligned} & \sin x + x \cos x - \cos x = 0 \\ & \sin x + (x-1) \cos x = 0 \\ & \sin x + \cos x + (x-2) \cos x = 0 \\ & \sin x + \cos x = 0 \\ & \sin x = -\cos x \\ & \tan x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x = -\cos x & \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4} \\ \cos x = -\sin x & \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x = \cos x & \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4} \\ \cos x = \sin x & \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$



مفرد لليسار $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

مفرد لليسار $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

عند $x = \frac{\pi}{3}$ نقطة انعطاف

وهي $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

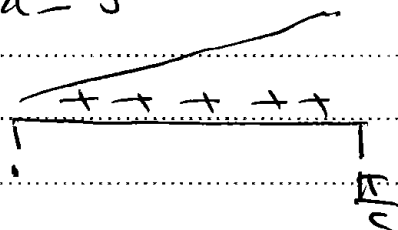
$$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \cos x = 0$$

$$\begin{aligned} & \sin x + x \cos x - \cos x = 0 \\ & \sin x + \cos x + (x-2) \cos x = 0 \\ & \sin x + \cos x = 0 \\ & \sin x = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x = -\cos x & \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4} \\ \cos x = -\sin x & \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x = \cos x & \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4} \\ \cos x = \sin x & \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$



نقطة $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \cos x$$

$$\begin{aligned} \sin x = \cos x & \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4} \\ \cos x = \sin x & \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

النقطة الحرجة $\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \}$

$$9 + (v)^3 - (v)^2 = (v)^3$$

$$9 + 1 - 8v = 0$$

$$9 + (3-v)^3 - (3-v)^2 = (3-v)^3$$

$$9 + 27 - 27v + 9v^2 - 9 + 6v - 3 = (3-v)^3$$

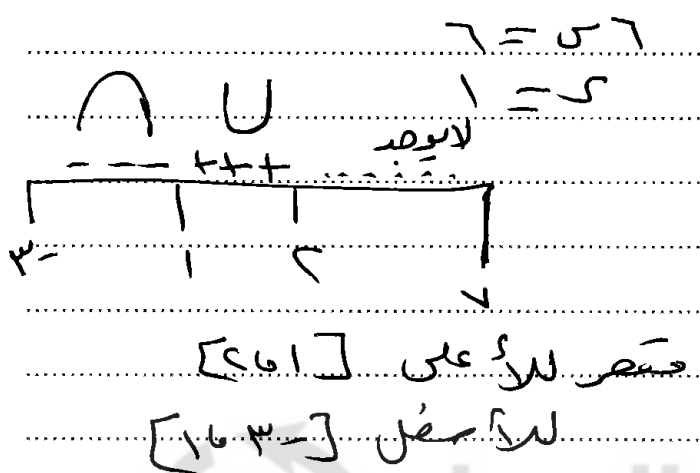
$$27 - 21v + 9v^2 = (3-v)^3$$

وهي صفرية مطلقه

$$c = 3$$

$$c > 3$$

$$c < 3$$



محصر للأعلى على [1, 2]
للأسفل [2, 3]

السؤال الثاني
مربع

$$c = 3$$

$$c > 3$$

$$c < 3$$

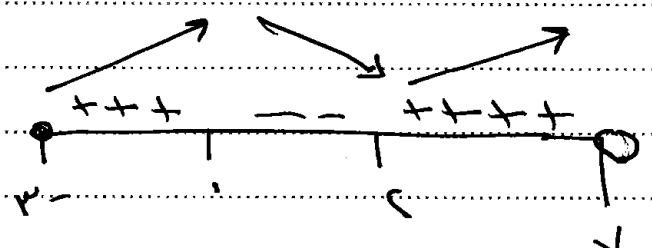
عند $c = 3$ غير متصل
عند $c < 3$ غير موجود

$$c = 3$$

$$c > 3$$

$$c < 3$$

التقط الجواب هي
{ 3, 6, 6 }



مترابيد [0, 3], [3, 6], [6, 6]
مناقص (2, 6)

عند $c = 3$ صفرية عليها
عند $c < 3$ صفرية عليها

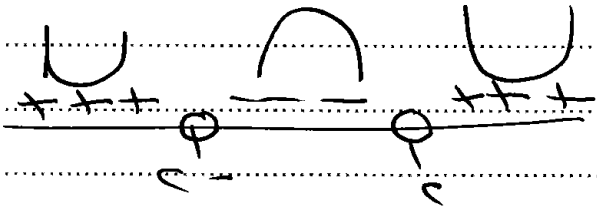
$$= (s - e)(e - s + 1 + \sqrt{c - s})$$

$$= (s - e)(e - s + 1 + \sqrt{c - s})$$

لا تكمل

$$s - e = e - s$$

$$c \pm = s$$



مقصود الأعلى

$$(s - e) \cup (e - \infty)$$

$$[c - \infty)$$

لا يوجد نقطة الغطاء

$$(3) \text{ و } (s) = \frac{1}{e - s} \quad c \pm = s$$

$$\frac{c - s}{(e - s)^2} = (s)$$

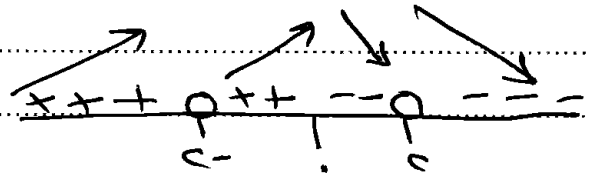
الربط = $\leftarrow c - s =$

$\leftarrow s =$

$$s - e = e - s \leftarrow c \pm = s$$

المجال

عند $s =$ نقطة حرم

$$(0 - \frac{1}{e})$$


مناقض $[c, e)$ و (e, ∞)

متزايد $(-\infty, c)$ و $(c - \infty)$

عند $s =$ نقطة غطاء محلي

$$(0 - \frac{1}{e})$$

$$\frac{(s) \cdot (s - e) - c \cdot (e - s)}{(e - s)^2} =$$

الربط =

$$= (e - s)^2 + (e - s)c -$$

$$= (e - s)(e - s + (e - s)c -)$$

④

و(س) = 9 - 2س

$$\frac{9-2س}{س} = \frac{9-2س}{س}$$

و(س) = 9 - 2س

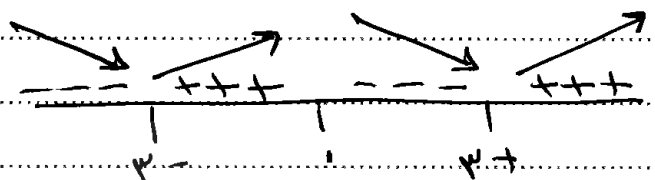
3 ≥ 5 > 2- 9-2س

و(س) = 9 - 2س

3 ≥ 5 > 2- 9-2س

س = 5 . نقطة حرج

النقطة الحرجة { 2, 3, 5, 9 }



عند س = 3 = 9 - 2(3) = 3
 عند س = 5 = 9 - 2(5) = -1

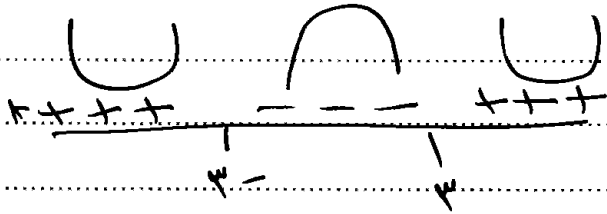
عند س = 9 = 9 - 2(9) = -9

مترابطة: [2, 3] ∪ [5, 9]
 متناقضة: (-∞, 3) ∪ (5, 9)

و(س)

3 ≥ 5 > 2- 9-2س

عزموهده 3-5-2 = 3



مترابطة: (-∞, 3) ∪ [5, 9]

[3, 5]

متناقضة: [3, 5]

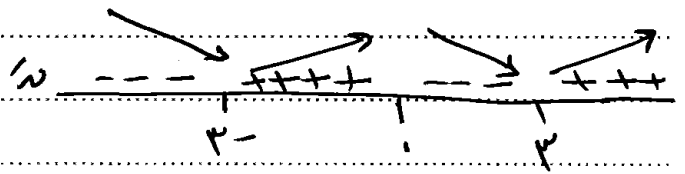
نقطة الخطاف

(3, 3) ← (3, 5)

(3, 3) ← (3, 5)

السؤال الثالث

اكمل

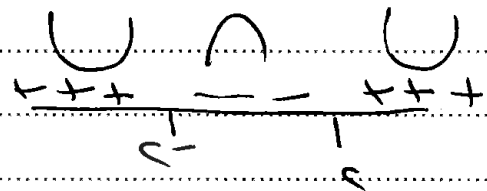


(١) لنقطه الحرجه عند $s = \{3, 0, 6\}$

(٢) فتراته $[-0, 3]$ و $[3, 6]$ متناقصه $[3, 6]$ و $[6, 0]$

(٣) عند $s = 3$ فيه صفري محليه
 $s = 3$ فيه صفري حقيقي
 عند $s = 0$ فيه صفري محليه

(٤) $s = 0$ فتراته \leftarrow و $s = 3$
 $s = 6$ متناقصه \leftarrow و $s = 0$



مقرراته $(-6, 0]$ و $[-5, 6]$ و $[-5, 5]$

نقطه اختلاف

$(-5, 6)$

$(-5, 6)$

(١)

وهو $s = 3$ حاسه حاسه - حاسه $s = 0$

$s = 3$ حاسه حاسه - حاسه $s = 0$

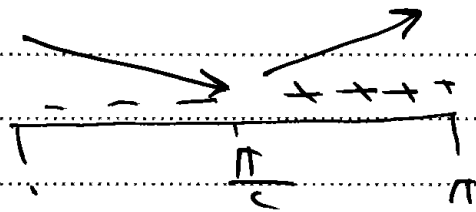
$s = 3$ حاسه $(-5, 6)$

حاسه $s = 3$ حاسه $s = 0$ $(-5, 6)$

حاسه $s = 3$ حاسه $s = 0$ $(-5, 6)$

اكتب حاسب حاسه حاسه

$(-5, 6)$ الاول والثاني



متناقصه $[-5, 6]$

فتراته $[-5, 6]$

عند $s = 0$ فيه صفري حقيقي

$s = 0$

$s = 0$

عند $s = 0$ فيه صفري حقيقي

$s = 0$

ALWESAM

السؤال الرابع

(P)

١) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٢) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٣) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٤) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٥) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٦) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٧) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

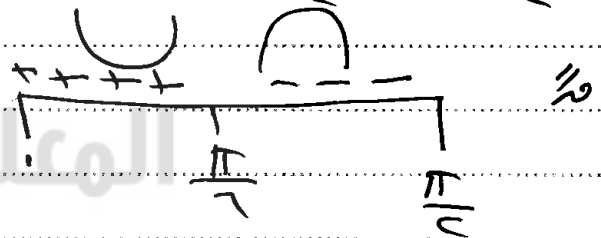
٨) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٩) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

[10.1]

١٠) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

١١) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$



١) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٢) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٣) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٤) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٥) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٦) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٧) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

٨) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

٩) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

(ج)

نقطة ان

$\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

$\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

١٠) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

$\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

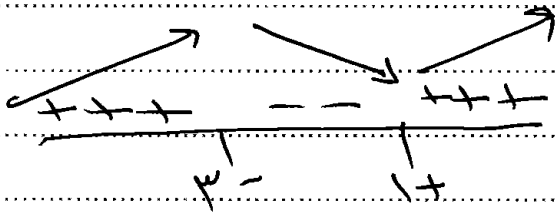
١١) $\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$

١٢) $\sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(s) \times 0$

الكتف

الجواب

$\cos(s) = \cos(s) \times 1 + \sin(s) \times 0$



عند $s = 3^-$ من جهة عملي عليه
عند $s = 1^+$ من جهة عملي عليه

(U)

$$s^3 + (s^2 - 3s) = (s^2 - 3s) + s^3$$

$$s^3 + (s^2 - 3s) = (s^2 - 3s) + s^3$$

$$s^3 + (s^2 - 3s) = (s^2 - 3s) + s^3$$

$$(s^2 - 3s) + s^3 < (s^2 - 3s) + s^3$$

$$(s^2 - 3s) + s^3 < (s^2 - 3s) + s^3$$

السؤال الخامس

(P) $s^3 + \sqrt{s} + s^2 + 3s = (s^2 - 3s) + s^3$
 $s^3 + \sqrt{s} + s^2 + 3s = (s^2 - 3s) + s^3$

$$s^3 + \sqrt{s} + s^2 + 3s = (s^2 - 3s) + s^3$$

المقارنة

$$1 = P$$

$$7 = P + U$$

$$3 = U$$

$$7 = 2 + U$$

$$3 = U + D$$

$$2 = 7 + D$$

$$9 = 2 \leftarrow$$

$$2 = 5 + D$$

$$11 = 5 \Leftarrow \quad 2 = 5 + 9 -$$

$$s^3 + \sqrt{s} + s^2 + 3s = (s^2 - 3s) + s^3$$

$$11 + \sqrt{9} + s^3 + \sqrt{s} = (s^2 - 3s) + s^3$$

$$= 9 - \sqrt{s} + s^3 = (s^2 - 3s) + s^3$$

$$= (3 - \sqrt{s} + s) s^3$$

$$= (1 - s) (3 + s)$$

$$1 = s \quad 3 = s$$

السؤال الخامس

٥

مجاله $\frac{+++}{-}$ $[-\infty, 6)$

عند $x = 6$ $\frac{1}{\sqrt{6-x}}$

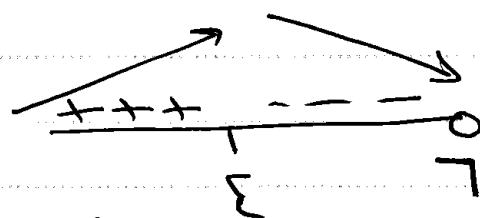
$= 1 \times \sqrt{6-x} +$

$= \frac{(6-x) \times (-1)}{\sqrt{6-x}}$

$= -\sqrt{6-x}$

$= -\sqrt{6-6}$

$= -\sqrt{0} = 0$



مناقض $[6, \infty)$ مجاله

متزايد $(-\infty, 6)$



الدرس السادس

تطبيقات القيم القصوى

مقدمة

خطوات حل المسألة

① تحديد عبارة أكبر فاعليها أو اصغر فاعليها على ما إذا تكوّن فتكون هي العلاقة المطلوبة

② تحديد الثوابت والمتغيرات بمرور والربط بينهما بالعلاقة المطلوبة

③ جعل العلاقة بتغير واحد من خلال علاقة هابنيه (مساعدة)

④ الرسم لتوضيحي إذا لزم الأمر

⑤ إيجاد المشتقة الأولى والثانية باليد وإيجاد الصفر للمشتقة

⑥ اختيار هذه الاضمار من حيث أنها عظمى أو صغرى حسب اختيار المشتقة الأولى

كلية أكبر فاعليها ← قيمه عظمى
كلية اصغر فاعليها ← قيمه صغرى

مثال ①

عدوان صوجبان مجموعهما ٩٠ أو ٩٠
الهددين إذا كان حاصل ضربهما
في مربع الآخر أكبر فاعليها

الحل

نقرنها ان احد الهددين = س
فيكون العدد ص = ٩٠ - س

$$س + ٩٠ - س = ٩٠ \leftarrow ص = ٩٠ - س$$

$$ع = س \times ٩٠ - س^٢ = ٩٠س - س^٢$$

$$ع' = ٩٠ - ٢س = ٠ \rightarrow ٩٠ = ٢س \rightarrow س = ٤٥$$

$$س = ٤٥ \rightarrow ص = ٩٠ - ٤٥ = ٤٥$$

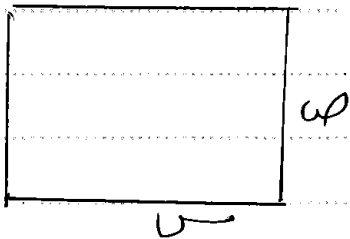
العدد الأول = ٤٥

العدد الثاني = ٤٥

٦٠ أكبر فاعليها
٣ = ٦٠ - ٩٠

سؤال ٣

يريد رجل اقامة سياج حول منطقة مستطيلة الشكل من حديقة فاذا كان عرضه ٨٠ م من الاسلاك فما الحداد الأكبر مستطيل من حيث المساحة عليه اتمامه بهذا السياج

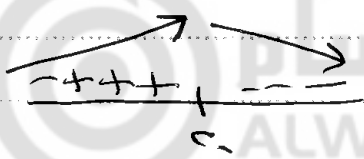


كأثر حافة علته هي العلاقة المطلوبة
المساحة = الطول \times العرض
 $٨٠ \times س = م$

المحيط = $٨٠ + س + ٨٠ + س = ١٦٠ + ٢س$

$١٦٠ + ٢س = ٢٠٠$
 $٢س = ٢٠٠ - ١٦٠$
 $س = ٢٠$

الم = $٨٠ \times ٢٠ = ١٦٠٠$
س = ٢٠



س = ٢٠

س = ٢٠ - ٤٠ = ٢٠

سؤال ٥

اوجد عددين حقيقيين مجموعهما ٤ حيث يكون مجموع مربعيهما اقل ما يمكن

الحل

نفرض احد العددين = س
والعدد الاخر = ٤ - س

$س + (٤ - س) = ٤$
المعادة

$س + (٤ - س) = ٤$

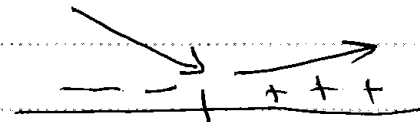
$س + ٤ - س = ٤$

$٢س + (٤ - س) = ٤$

$٢س + ٤ - س = ٤$

$س = ٤ - ٤$

س = ٠



اقل ما عليه

العدد الثاني = $٤ - س = ٤ - ٠ = ٤$

مسألة ٤

اثبت انه أكبر مساحة للمسطح الذي محيطه ل تحدث عندما يكون مربعاً

الحل

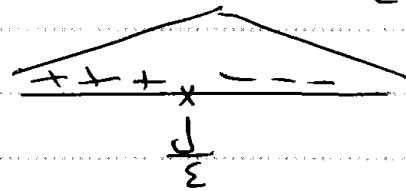
الطول = س ، العرض = هـ

$3 = س + هـ$ العلاقة الرئيسية

$ل = س + هـ = س + (3 - س) = 3 - س$

ن $3 = س (3 - س) = 3س - س^2$

$س^2 - 3س + 3 = 0$
 $س = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$



$ص = \frac{ل}{2} = \frac{3 - س}{2}$

$\frac{ل}{2} =$

$\frac{ل}{2} = هـ = س$

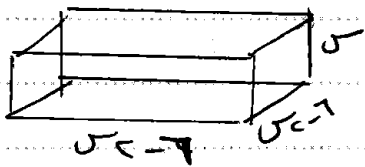
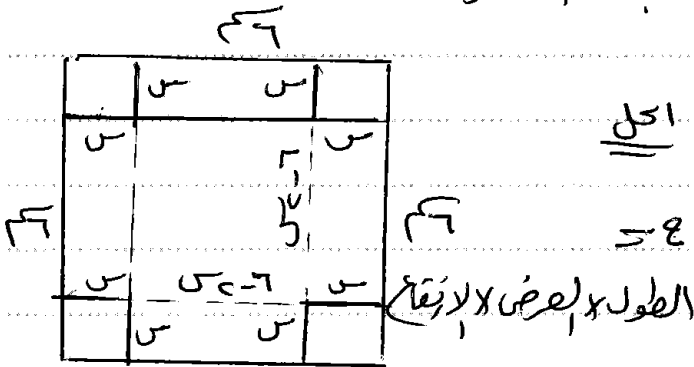
ن مربع

مسألة ٥

يراد صنع صندوق مفتوح من الاعلى من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ٦م وذلك بقطع ٤ مربعات متساوية من اطرافها الاربعة ثم طي الاجزاء البارزة لأعلى أو بعد تمكيد حجم عليه تكونه بهذه الطريقة

الحل

$٤ =$



$2 = (6-x)(6-x) \times x$

$2 = (6-x)(6-x) \times x$

$2 = 36 - 12x + x^2 \times x$

$2 = 36 - 12x + x^3$

$3 = x^3 - 12x + 34$

$3 = (x-1)(x-3)$

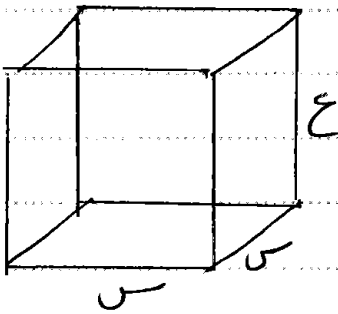
$3 = 3 - 4x + 3x - x^2 = 3 - x - x^2$

$3 = 3 - x - x^2$

$3 = 3 - x - x^2$

مثال ١٤

صفيحة معدنية صاعته ١٢٠٠ سم^٢
 نريد صنع صندوق منها فائدته
 مربعة الشكل ومساحة من أعلى
 اوحد أكبر حجم ممكن تكونه



اكل

$$ع \times س^٢ = ١٢٠٠$$

المساحة = ١٢٠٠ = مساحة القاعدة +
 مساحة الجوانب

$$١٢٠٠ = س^٢ + ٤سع$$

$$١٢٠٠ - س^٢ = ٤سع$$

$$ع = \frac{١٢٠٠ - س^٢}{٤س}$$

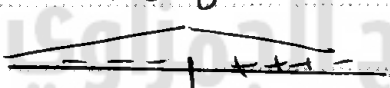
$$ع = \left(\frac{١٢٠٠}{٤س} - \frac{س}{٤} \right)$$

$$= \frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{٤}$$

$$ع = \frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{٤} = ٣٠٠ - \frac{س^٢}{٤}$$

$$ع = ٣٠٠ - \frac{س^٢}{٤} = ٣٠٠ - \frac{٣٠٠ \times ٤}{٤} = ٣٠٠ - ٣٠٠ = ٠$$

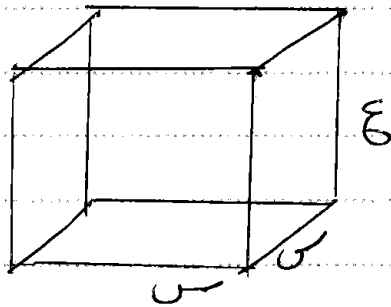
$$٠ = س$$



$$ع = \frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{٤} = ٣٠٠ - \frac{س^٢}{٤}$$

مثال ١٥

نريد صنع صندوق بلاغطاء فائدته
 مربعة الشكل ومساحة ٣٢ سم^٢ اوحد
 ابعاد الصندوق لتكون كمية المادة
 المتخذة لصنعة أقل ما يمكن



اكل

كمية مادة الاضلاع =

مادة القاعدة + مادة الجوانب

$$ل = س^٢ + ٤سع$$

$$لكن ع = ٣٢ = س \times س \times ع$$

$$ع = \frac{٣٢}{س} \leftarrow ع = ٣٢ = س^٢ \times ع$$

$$ل = س^٢ + ٤س \times \frac{٣٢}{س}$$

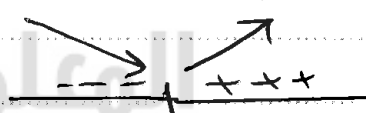
$$= \frac{١٢٨}{س} + س$$

$$ل = \frac{١٢٨}{س} + س = \frac{١٢٨}{س} - س$$

$$٦٤ = س^٢ = ١٢٨ - س^٢$$

$$س = ٤$$

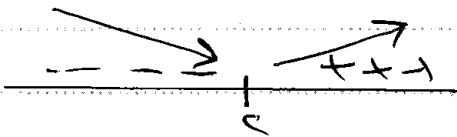
العرض = ٤



$$الارتفاع = ع = \frac{٣٢}{٤} = ٨$$

$$\begin{aligned}
 &= (c - \sqrt{c}) + (4 - c) \sqrt{c} \\
 &= 16 - 2\sqrt{c} + \sqrt{c} - c \\
 &= 16 - \sqrt{c} - c \\
 & \text{مربعاً كاملاً} \quad 16 = \sqrt{c} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 64 = (8 + \sqrt{c})^2 \\
 8 = \sqrt{c} \quad \leftarrow c = 64
 \end{aligned}$$



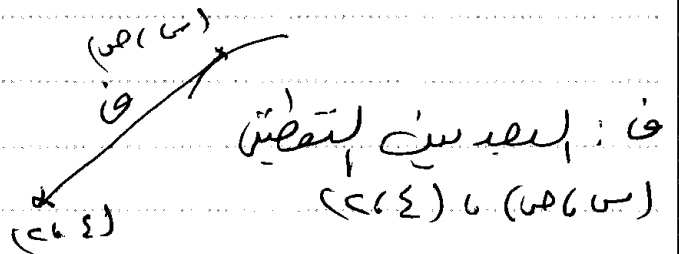
عند $c = 64$ تكون أقرب ما يمكن
 $4 = \sqrt{c} = \sqrt{16} = 4$
 النقطة هي $(4, 16)$

سؤال ٨

جد النقطة على منحنى $y = \sqrt{x}$ التي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(4, 4)$ ؟

الحل

نفرض ان النقطة هي (s, \sqrt{s})



$$f = \sqrt{(s-4)^2 + (s-\sqrt{s})^2}$$

$$f' = \sqrt{(s-4) + (4-s)} = 0$$

لكي $s = 4$ واحدة

$$f = \sqrt{(4-4)^2 + (4-\sqrt{4})^2} = 2$$

$$f'' = \frac{1}{2\sqrt{s}} > 0 \quad \text{لأن } (4-\sqrt{4})^2 + (4-4)^2 < (c-\sqrt{c})^2 + (c-4)^2$$

$$f = \sqrt{(c-\sqrt{c})^2 + (c-4)^2}$$

السطح = صفر

$$= \frac{(c-\sqrt{c})}{\sqrt{c}} + (c-4)$$

ونفرض لمعادلة في \sqrt{c}

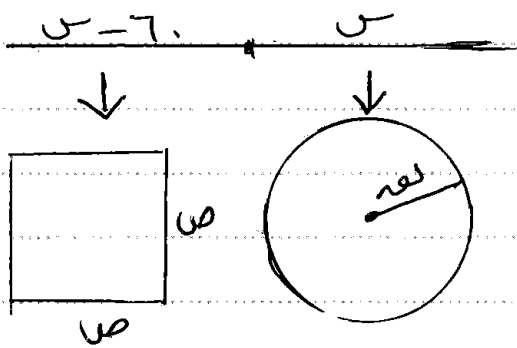
سؤال 10

سلك طوله 6م نريد قطعه إلى جزئين تكون احدهما مربع وبقية الآخر دائرة فإين يقطع السلك بحيث يكون مجموع مساحته أقل فأعليه

أكثر فأعليه

أكل

10



مساحة الدائرة = πx^2
 محيط الدائرة = $2\pi x$

لأن $\frac{6-x}{2} = x$

مساحة المربع = x^2

$\frac{6-x}{2} = x$

مساحة المربع = x^2

محيط المربع = $4x$

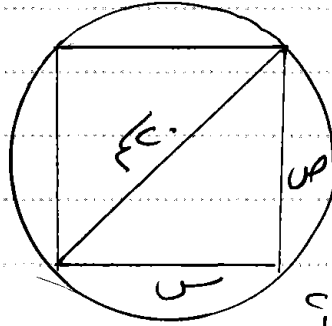
$\frac{6-x}{2} = x$

مساحة المربع = x^2

لأن $\frac{6-x}{2} = x$

سؤال 9

أوجد مساحة أكبر مثل على ركبة داخل دائرة نصف قطرها 1م



أكل

$xy = 1$

لكن $s^2 = x^2 + y^2 = 2$

$x - y = s$

$x - \frac{1}{x} = s$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

$x^2 - 1 = sx$

مساحة السطح = الطول \times العرض

$$4 = 2 \times 5 \times 4$$

$$\text{لكي } 4 = 5 \times 10 = 50$$

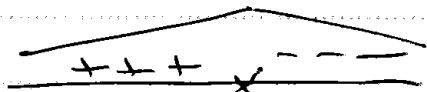
$$4 = 5 \times (10 - 5)$$

$$4 = 5 \times 5 - 5 \times 5$$

$$4 = 25 - 25 = 0$$

$$4 = (5 - 5) \times 5$$

$$4 = 0 \times 5$$



العرض

$$4 = 5 - 10 = -5$$

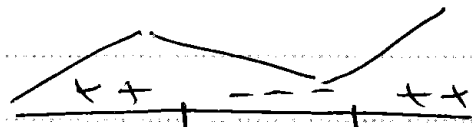
$$30 = 10 \times 5 + 5 = 55$$

$$4 = \frac{5 \times 5 - 5 \times 10}{(5 - 5)}$$

$$\text{مساحة} = \frac{5 \times 5 - 5 \times 10}{(5 - 5)}$$

$$4 = 5 \times 5 - 5 \times 10$$

$$4 = 5 \times (5 - 10) = 5 \times (-5) = -25$$



مساحة العرض

$$4 = \frac{5 \times 5}{5 - 5} = 5 \times 5 = 25$$

$$4 = 25 \times 5 \times \frac{1}{5} = 25$$

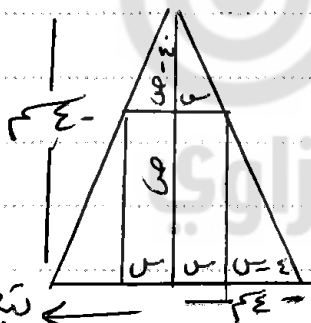
سؤال ١٣

صنعت ارتفاعاً، حجم وقاعدته
 ٨ سم، نريد قطع سطح منه حيث
 يقع رأسان منه على قاعدة مثلث
 ورأسان الآخران على ساقتي مثلث
 أوحد أكد سطح منه حيث يساه

الحل

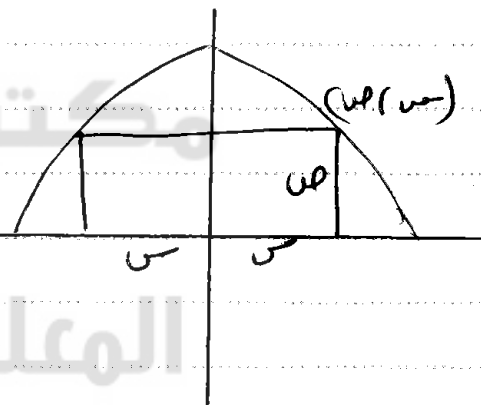
$$\text{مساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$= 5 \times 5 = 25$$



سؤال ١٤

أوجد مساحة أكد سطح عليه ركة
 موهة نحو السيات حيث يقع اهد
 بعديه منطبقاً على نحو السيات
 ورأساه الآخران على سطحين
 $4 = 5 - 10 = -5$



$$3 = s \times l$$

$$100 = s + l$$

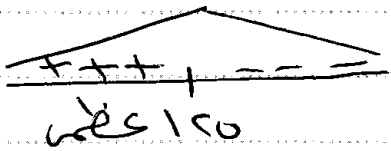
$$100 - s = l$$

$$3 = s(100 - s)$$

$$3 = 100s - s^2$$

$$s^2 - 100s + 3 = 0$$

$$s = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \times 3}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 12}}{2}$$



$$100 - 100 = 100 \times c - 100 = s$$

$$100 =$$

$$31001 = 100 \times 100 = m$$

$$\frac{E_0}{E} = \frac{l - E_0}{s}$$

$$1 = \frac{l - E_0}{s}$$

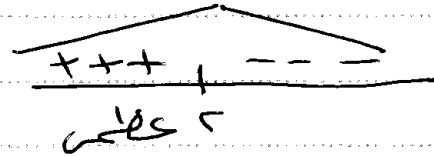
$$E_0 - l = -E_0 + s$$

$$2E_0 = s - l$$

$$2E_0 = s - (100 - s)$$

$$2E_0 = 2s - 100$$

$$E_0 = s - 50$$

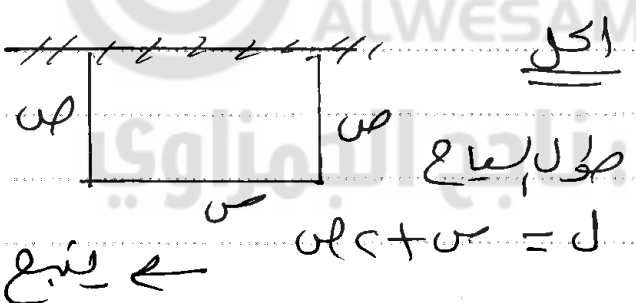


$$c = c \times 100 - E_0 = s$$

$$31001 = c \times c \times c = m$$

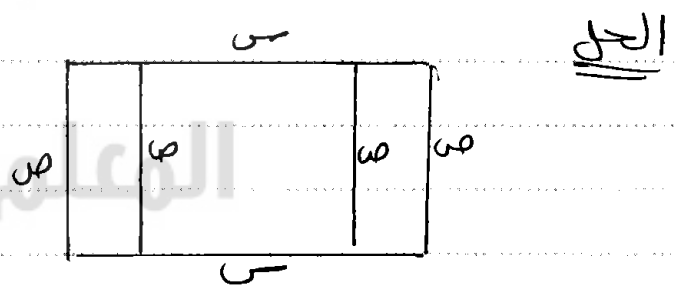
مسألة ١٥

يريد رجل إقامة سياج حول قطعة
 مستطيلة الشكل تقع على ضفتي نهر
 وتقيم فإذا لم يسج طرف
 النهر أو هو الحد القاطع ليكون
 طول السياج أقل فاعلم عمّا يان
 مساحة القطعة ٨٠٠ م^٢



مسألة ١٤

لدى رجل حقل مستطيل يريد سياجه
 ثم قسمته الى ثلاثة اقسام
 يساويين بوزان احد اضلاعة
 فإذا كان عرضه ١٠٠ متر من السياج
 أو هو أكبر فاحص عليه سياجها



$$2 = 2c + 2s$$

$$c + s = 1$$

نفس محيط المثلثين (1) + محيط المثلث (2) =

$$7 = 2c + 2s$$

$$1 = c + s$$

$$c = (1 - s)$$

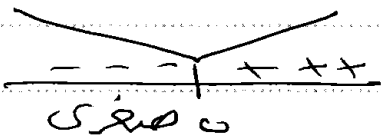
$$3 = c + s$$

$$4 = 2c + 2s$$

$$4 - 2 = 2c - 2s$$

$$2 = 2c - 2s$$

$$1 = c - s$$



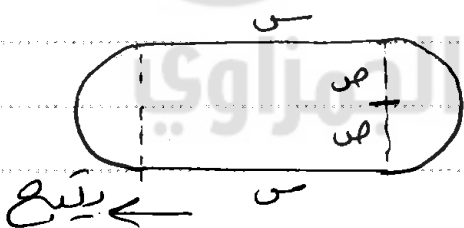
$$5 = 1 - 0$$

$$3 = c + s$$

مسألة (١٧)

ملعب على شكل دائرة نصفه دائرة فاذا كان محيط الملعب ٤٠ م اوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن

الحل



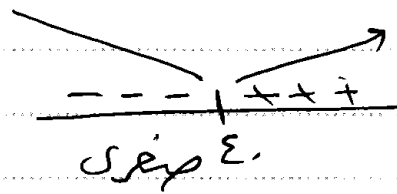
$$s = 100 - c$$

$$L = \frac{170}{s} + s = \frac{170}{100-c} + s$$

$$L' = \frac{170}{s^2} - 1 = 0$$

$$1 = \frac{170}{s^2} \Rightarrow s = \sqrt{170}$$

$$c = 100 - \sqrt{170}$$

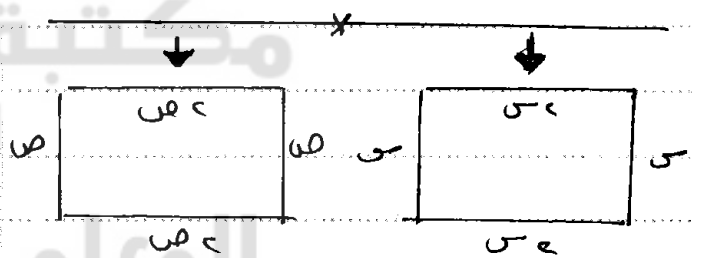


$$c = \frac{170}{s} = 100$$

مسألة (١٦)

لك طول ٦٠ م وقطع إلى جزئين متكون من كل جزء مثلث طول ضلعي عرض أضلاع متساوية ممكنه له محيطين

الحل



سؤال ١٨

المساحة (م) = مساحة المثلث + مساحة الدائرة

$$m = \frac{1}{2} \times s \times h + \pi r^2$$

$$m = \frac{1}{2} \times s \times h + \pi r^2$$

$$2m = s \times h + 2\pi r^2$$

$$2m = s \times h + 2\pi r^2$$

$$2m - 2\pi r^2 = s \times h$$

$$s = \frac{2m - 2\pi r^2}{h}$$

$$m = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2m - 2\pi r^2}{h} \right) \times h + \pi r^2$$

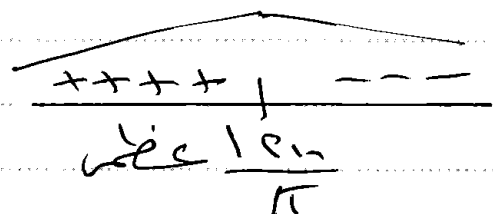
$$m = \frac{1}{2} (2m - 2\pi r^2) + \pi r^2$$

$$m = m - \pi r^2 + \pi r^2$$

$$m = m$$

$$\frac{2m}{\pi r^2} = \frac{2m - 2\pi r^2}{\pi r^2} + 2$$

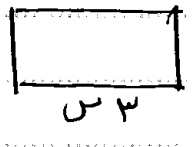
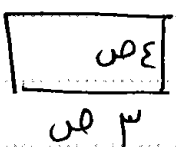
$$\frac{2m}{\pi r^2} = 2$$



$$m = \frac{1}{2} \times \pi r^2 \times h$$

مجموع محيطي وتطيلين ٩٩ م
والنسبة بين لحيي تطيل
الأول هي ٢ : ١ و النسبة بين
لحيي تطيل الثاني ٣ : ٤
او هو بصغر مية مجموع حاهي
الم تطيلين

الحل



$$m = \frac{1}{2} \times s \times h + \pi r^2$$

$$99 = \frac{1}{2} \times s \times h + \pi r^2$$

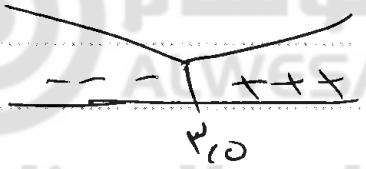
$$99 = \frac{1}{2} \times s \times h + \pi r^2$$

$$s \times h = 198 - 2\pi r^2$$

$$m = \frac{1}{2} \times \left(\frac{198 - 2\pi r^2}{h} \right) \times h + \pi r^2$$

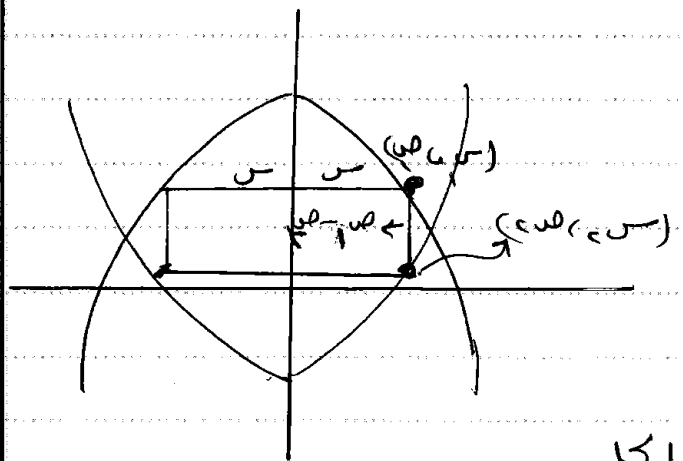
$$m = \frac{1}{2} (198 - 2\pi r^2) + \pi r^2$$

$$0 = 0$$



مثال (19)

أوجد مساحة الدرفيل عين
 ركة حيث تقع رؤوسه
 على المنحنيين (s) و (c) ويكون اضلاعه
 موازية للحاور



الحل

$$\begin{aligned} & \text{هـ} = \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} \\ & \text{هـ} = \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} \\ & \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} \\ & \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} \\ & \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} \\ & \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} = \text{ص} \end{aligned}$$

$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

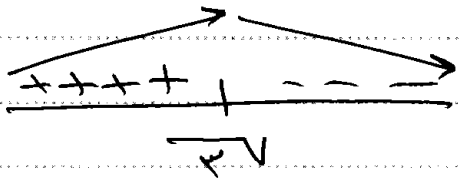
$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

$$4 = (ص - ص) \text{ص}$$

$$\sqrt{v} = s$$



$$v = (sv) - 1 = 10$$

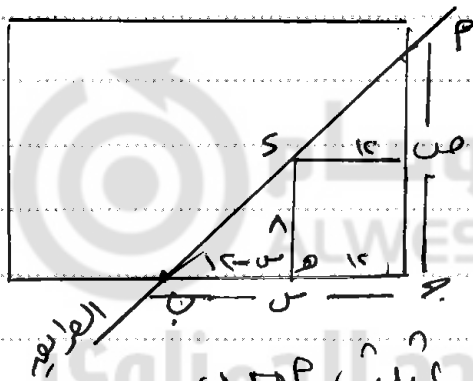
$$5 = 8 - (sv) = 8 - 10 = -2$$

$$3\sqrt{c} = (0 - v) \times \sqrt{v} \times c = 4$$

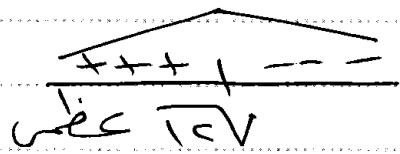
مثال (20)

أرض مستطيلة الشكل يوجد فيها
 شجرة بالقرب من إحدى زواياها
 إذا كانت الشجرة تبعد عن الكافيتين
 اللتين كدوان الزاوية 14م، 8م
 وادونا ان نحل طرفياً مستقيماً
 يقطع جزئ من الارض ويمر بجانب
 الشجرة فما هي مساحة ارض
 مثلث من الارض عليه اقتطاعة

الحل



مساحة مثلث PBC = $\frac{1}{2} \times 14 \times 8 = 56$



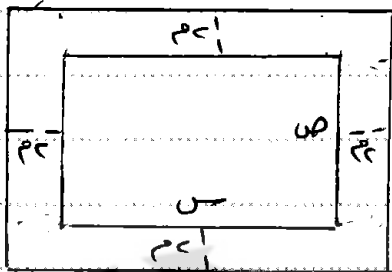
$$L = \frac{1}{2} (E - 36) = \frac{1}{2} (10 - 36)$$

$$E =$$

$$157 = \frac{1}{2} \times E \times 10 = 5E$$

سؤال ٥٣

براد انشاء حديقة مستطيلة الشكل
صاحبها ٩٠ م^٢ واحاطتها من جميع
الجوانب بطريقه خارجي منتظم عرضه
٢ م ، اوجد ابعاد الحديقة التي تجعل
الاحاطه اقلية للحديقة والاطرفه
اقل ما يمكن .



مساحة الحديقة = م^٢

$$(x+2)(y+2) = 90$$

$$xy + 2x + 2y + 4 = 90$$

$$xy + 2x + 2y = 86$$

$$xy + 2x + 2y + 1 = 87$$

$$(x+1)(y+1) = 87$$

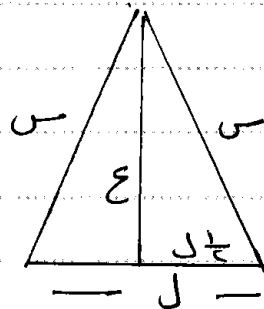
$$87 = 3 \times 29$$

سبح

سؤال ٥٢

مثلث متساوي الاضلاع محيطه
١٢ م اوجد اكبر مساحه ممكنه له

الحل



$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times l \times h$$

$$12 = s + s + s \Rightarrow s = 4$$

$$s = 4 \Rightarrow l = 4 - 2 = 2$$

نستخدم نظرية فيثاغورس

$$s^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow 4^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$

$$\frac{2}{2} + 2\sqrt{15} - 36 = \frac{2}{2} + h^2$$

$$2\sqrt{15} - 36 = h^2$$

$$L = \frac{1}{2} (E - 36)$$

$$3 = \frac{1}{2} \times (E - 36) \times \frac{1}{2}$$

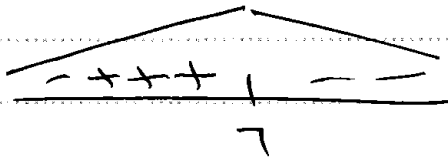
$$\frac{1}{12} (E - 36) =$$

$$3 = \frac{1}{12} (E - 36) \Rightarrow E - 36 = 36$$

$$E = 72 \Rightarrow s = 24$$

$$E = 24$$

$$\begin{aligned}
 m &= s \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\
 8 &= s - \frac{s}{4} \\
 1 &= \frac{3s}{4} \\
 4 &= 3s \\
 s &= \frac{4}{3} \\
 m &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1
 \end{aligned}$$

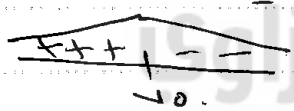


$$\begin{aligned}
 s &= 7 \times \frac{4}{3} - 1 = 8 \\
 m &= 7 \times 1 = 7
 \end{aligned}$$

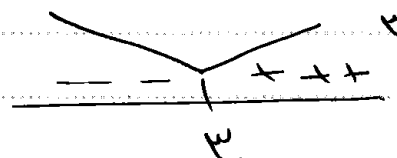
مثال ٢٤

قطعة أرض وشطبة الشكل تريد ان تبنيها فاذا كانت تكلفه المتر الواحد من جانبيه متوازيين هي 3 دنانير ومن الجانبيين الاخرين ديارين فاولد صاحة الة قطعة شطبة على تبنيها يبلغ 6 دنانير

$$\begin{aligned}
 3x + 3y &= 6 \\
 x + y &= 2 \quad \leftarrow \\
 2x &= 4 \\
 x &= 2 \\
 2 + y &= 2 \\
 y &= 0
 \end{aligned}$$



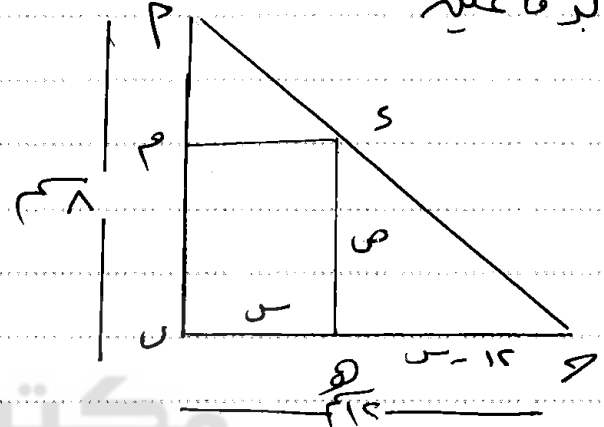
$$\begin{aligned}
 \frac{2700}{s} = 4 &\leftarrow \frac{2700}{s} - 4 = 1 \\
 4s &= 2700 - 4s \\
 8s &= 2700 \\
 s &= \frac{2700}{8} = 337.5 \\
 m &= \frac{2700}{337.5} = 8
 \end{aligned}$$



$$s = \frac{900}{2} = 450$$

مثال ٢٤

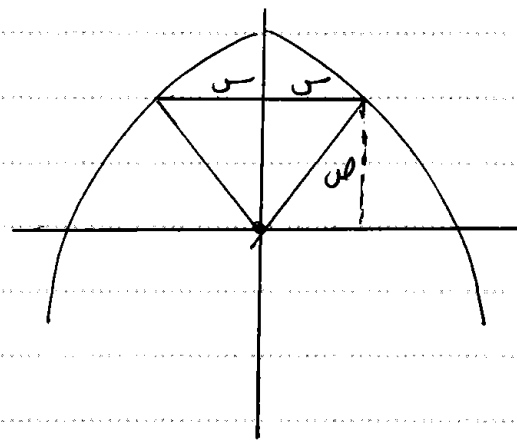
UP مثلث قائم الزاوية في ب حيث UP = 8م ، PB = 6م ، اخذت النقطة د على اوتر AB ، وانزل منها العمودان DE ، DM على الضلعين AB ، AP على الترتيب اوجد طولي هذين العمودين اللذين يجملان صاحة شطبة ده م مكر فاعلم



$$\begin{aligned}
 \frac{6}{12} &= \frac{1}{12} \\
 6 \times 12 &= 12 \\
 72 &= 12 \\
 6 &= 12 \\
 6 &= 12
 \end{aligned}$$

سؤال (٥٦)

صُلِّحْ مَنَاقِبِ السَّاقِينِ مَرُومًا فَوْقَهُ
مُحَوَّرِ السَّيَاتِ حَيْثُ يَفْعُ رَأْسَهُ
الْمَحْضُورِ بَيْنَ إِضْطِغَاتِهِ بِمَنَاقِبِهِ
حَيْثُ نَقْطَةُ الْإِصْبَعِ وَالرَّأْسَانِ
الْآخِرَانِ عَلَى مَخْتَلِفِ الْإِقْتِرَانِ
 $ص = ص - ص - ص = ص$ هُوَ الْإِدْعَاءُ
لِحَذَا مَطْلَعَهُ



اكمل

$$\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = ٢$$

$$\frac{1}{2} \times ص \times ص = ص$$

نكتبه $ص = ص - ص = ص$

$$٢ = ص \times (ص - ص)$$

$$٢ = ص \times ص - ص^٢$$

$$٢ = ص^٢ - ص^٢ = ص^٢ - ص^٢$$

$$٢ = ص^٢ - ص^٢ = ص^٢ - ص^٢$$

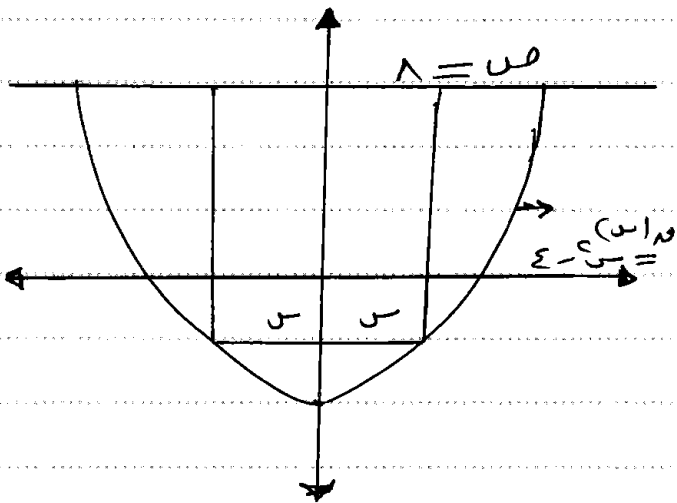


$$١٨ = ٩ - ص = ص$$

$$٥٤ = ١٨ \times ٣ = ٣$$

سؤال (٥٧)

عَنِ الْكُلِّ الْمَجَاوِرِ أَوْ هِيَ الْإِدْعَاءُ
مَكْنَهُ لَمْ تَطَّلِ



اكمل

$$٣ = ص \times (الارتفاع)$$

$$= ص \times (ص - ص)$$

$$= ص \times (ص - ص)$$

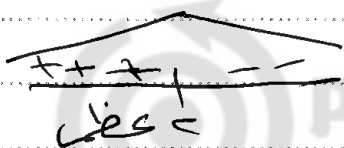
$$= ص \times (ص - ص)$$

$$= ص \times (ص - ص)$$

$$= ص \times (ص - ص)$$

$$= ص \times (ص - ص)$$

$$= ص \times (ص - ص)$$

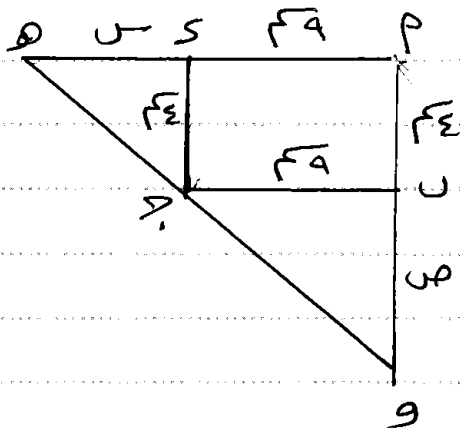


$$٣ = ص \times (ص - ص)$$

$$٣ = ص \times (ص - ص)$$

مسألة ٢٨

UP و P متصل فيه $UP = ٤$
 $UP = ٥$ ، $UP = ٩$ ، $UP = ٥$ ، $UP = ٥$
 بالنقطة ج ويصنع اعداد P و
 في هو و اعداد P و في و ج
 اصغر مساحة ملته للمثلث P هو



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة \times الارتفاع

$$P = \frac{1}{2} (4+5) \times (5+9)$$

من تساوية المثلث و $UP = ٥$ ، $UP = ٥$ ، $UP = ٥$

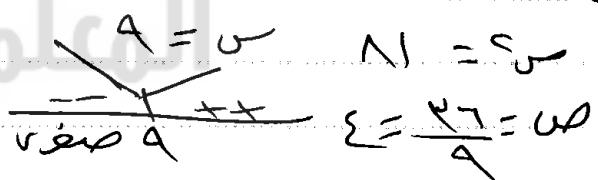
$$\frac{36}{5} = ٥ \leftarrow \frac{٥}{9} = \frac{٤}{5} \leftarrow$$

$$\left(٤ + \frac{36}{5} \right) (5+9) \frac{1}{2} = P \leftarrow$$

$$= \frac{1}{2} (36 + 5 \times 2 + \frac{3 \times 36}{5} + 36)$$

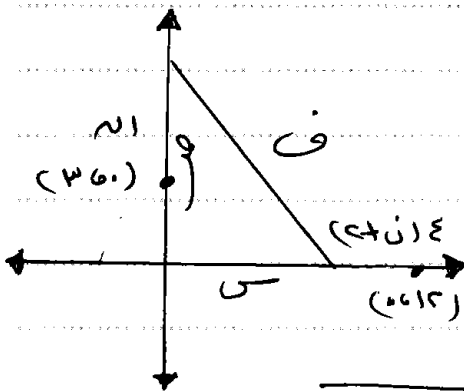
$$= \frac{1}{2} (٤ + \frac{3 \times 36}{5})$$

$$\frac{3 \times 36}{5} = ٤ \times ٥ \leftarrow ٤ = \frac{3 \times 36}{5}$$



مسألة ٢٩

بدأت النقطة P الحركة من النقطة
 (١٠٤) على محور السينات باتجاه
 نقطة الاصل بسرعة ٤ كم/ث
 وبعد ثابته بدأت النقطة ب
 الحركة من النقطة (٣٥٠) على
 محور الصادات وتبعدة عن نقطة
 الاصل بسرعة ٣ كم/ث ، متى
 تكون المسافة بين النقطتين اقل
 واعكبه



$$P = \sqrt{٥٤ + ٣٥٠}$$

$$٤٤ - ٤ = (٤ + ٣٥٠) - ١٢ = ٣٤٦$$

$$٣٤٦ = ٣٤٦ + ٣ = ٣٤٩$$

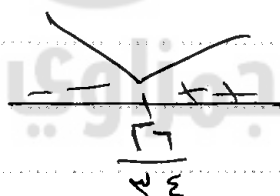
$$P = \sqrt{٣٤٩ + (٣٤٦ - ٤)}$$

$$= \sqrt{٣٤٩ + ٣٤٢}$$

$$= \sqrt{٣٤٩ + ٣٤٢}$$

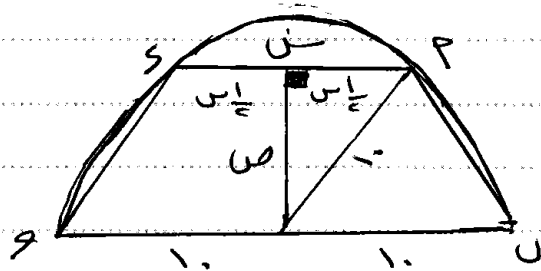
$$= (٣٤٩ + ٣٤٢) = ٣٤٦$$

$$٣٤٦ = \frac{٣٤٦}{٣٤٦}$$



مسألة ٣٥

دائرة نصف قطرها ٦ م وادبع صافه
أكد سته محرف مرسوم داخلها بحيث
يقع الرأسان ٥ و ٦ على ضلعي قطر
من الدائره والرأسان ٣ و ٤ على محيط
الدائره



اكمل

$$٣ = \frac{1}{2} (س + ١٠) \times ص$$

$$= (١٠ + \frac{س}{2}) \times ص$$

لكنه $ص = ١٠ - \frac{س}{2}$ (كملت قائم الزاوية)

$$ص = \sqrt{١٠ - \frac{س}{2}}$$

$$٣ = (١٠ + \frac{س}{2}) \times \sqrt{١٠ - \frac{س}{2}}$$

$$٣ = \frac{1}{2} \times \frac{١٠ - \frac{س}{2}}{\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}}} + \frac{١٠ + \frac{س}{2}}{\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{١٠ - \frac{س}{2}} = \frac{١٠ + \frac{س}{2}}{\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}}}$$

$$\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}} = ٢(١٠ + \frac{س}{2})$$

$$\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}} = ٢٠ + س$$

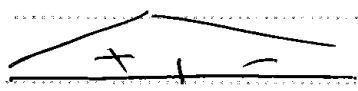
$$\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}} = ٢٠ + س$$

$$\sqrt{١٠ - \frac{س}{2}} = ٢٠ + س$$

$$= ٢٠ - ١٠ + س$$

$$٠ = (س + ١٠) (٢٠ + س)$$

$$س = -١٠ \text{ م } \text{ و } -٢٠$$



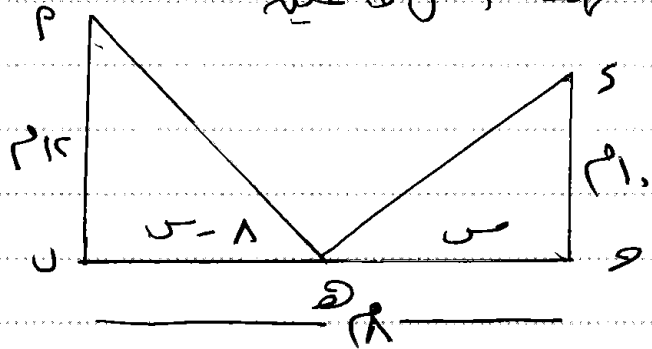
$$ص = \sqrt{١٠ - \frac{س}{2}} = \sqrt{١٠ - \frac{-١٠}{2}} = \sqrt{١٥}$$

$$٣ = \frac{1}{2} (٢٠ + ١٠) \times \sqrt{١٥}$$

$$= \sqrt{١٥} \times ١٥$$

مسألة ٣٣

مخودان كسر باثنيان الطوالهما ١٤ م
على ارض شارع وتقيم
والبعد بينهما ٨ م ، حد نقطه
بينهما على ارض الشارع بحيث
مكون مجموع مربعي عملي العمودين
عنها اقل ما يمكنه



اكمل

نقصد $٣ =$ مجموع مربعي عملي العمودين
عنه النقطة هـ

صب فثنا عمودين

$$١١ + س = ٢٠$$

$$١٤ + (١١ - س) = ٢٠$$

سبع ←

$$2x + 3y = 1$$

$$4x + 8y = 36$$

$$\frac{36 - 36}{9} = y \leftarrow$$

$$2x + 3 \left(\frac{36 - 4x}{9} \right) = 1$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

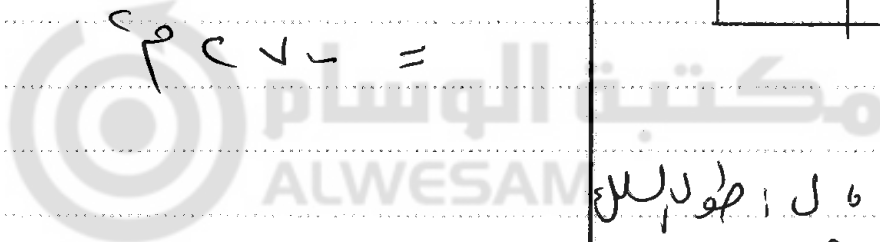
$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$

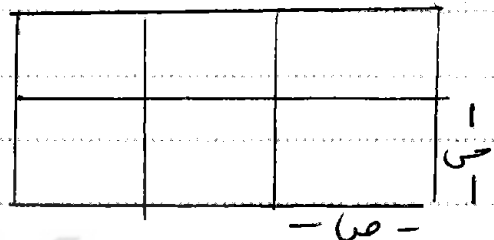
$$\frac{2}{3} (36 - 4x) = 1 - 2x$$



$$\begin{aligned} & \leftarrow \\ & (P) + (R) = 3 \\ & 144 + (S-1) + 11 + S = \\ & 144 + S + S - 1 + 11 + S = \\ & 310 + 3S = 3 \\ & 3S = 3 - 310 = -307 \\ & S = -102.33 \end{aligned}$$

سؤال (٣٤)

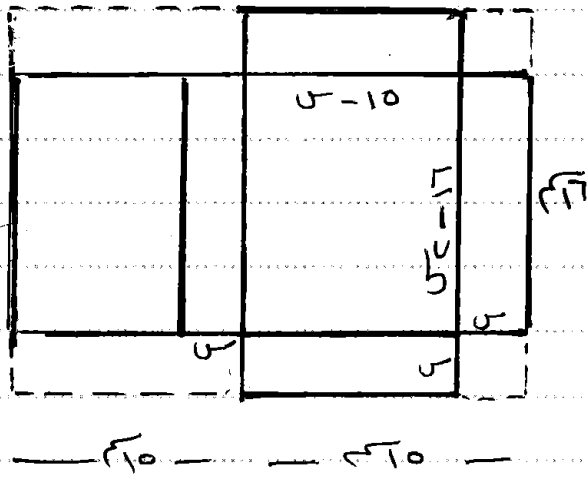
صاحبة مزرعة اغنام لديها ٣٦٠ م^٢ من ارضها اشترت ٦ م^٢ مزارع وتبعتها ارضها وصاروا به ارضها كما هي ارضها بعد اشترت ارضها ٦ م^٢ مزارع عليها



الارض
م^٢ مساحة ارضها وال طول الارض
م = الطول x العرض
٣ = ٣ x ١

مسألة ٣٦

اعتمد على الشكل لإيجاد حجم البركة صندوق عكس.



الحل

ع: حجم الصندوق

طول الصندوق = $20 - 16 = 4$

عرض الصندوق = $10 - 5 = 5$

ارتفاع الصندوق = 5

$4 \times (10 - 5) \times (20 - 16) = 80$

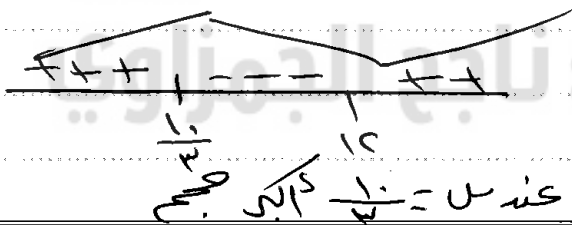
$80 = 4 \times 5 \times 4$

$80 = 20 \times 4 \times 5$

$80 = 20 \times 4 \times 5$

$80 = 20 \times 4 \times 5$

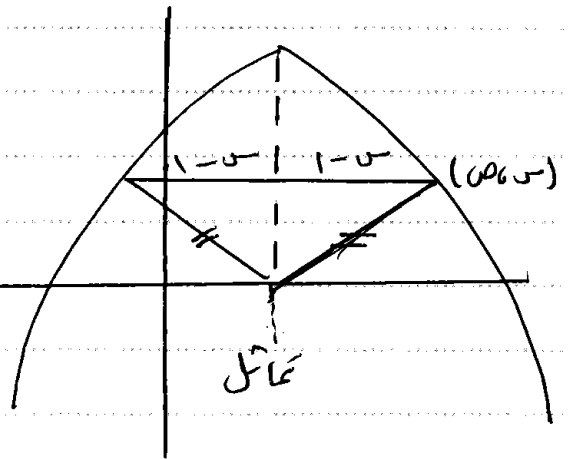
$80 = 20 \times 4 \times 5$



عند $s = \frac{10}{4} = 2.5$

مسألة ٣٥

مثلث متساوي الساقين رأسه عند النقطة (١٠، ١) والرأسان الآخران على محور $x = 5$ و $x = 11$ فوجد محور السينات حيث أن القاعدة توازي محور السينات أو وجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث.



مساحة مثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

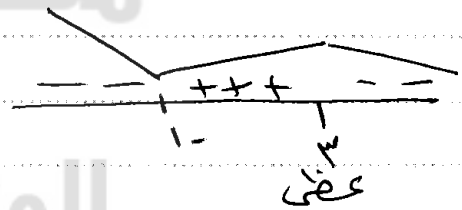
$\frac{1}{2} \times (11 - 5) \times 1 = 3$

$3 = \frac{1}{2} \times (11 - 5) \times 1$

$6 = 11 - 5$

$6 = 11 - 5$

$6 = 11 - 5$



عند $s = 3$ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل

$$8 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

لكن $3 = 5^1 = 5 + 5 + 5 = 15 = 5 \times 3 = 5 \times 3 = 15$

$$\frac{5^3 - 15}{2} = \frac{125 - 15}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

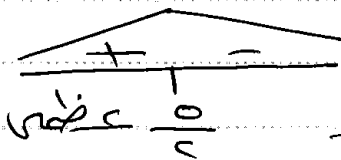
$$8 = \frac{1}{2} (5^3 - 15) = \frac{1}{2} (125 - 15) = \frac{1}{2} (110) = 55$$

$$= \frac{1}{2} (5^3 - 15) = \frac{1}{2} (125 - 15) = \frac{1}{2} (110) = 55$$

$$= \frac{1}{2} (5^3 - 15) = \frac{1}{2} (125 - 15) = \frac{1}{2} (110) = 55$$

$$3 = 5^1 = 5$$

$$65 = (5^3 - 5) = 125 - 5 = 120$$



$$\frac{5 \times 5 - 10}{2} = \frac{25 - 10}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

$$\frac{15}{2} = 7.5$$

$$4 = \frac{13 \times 6 - 6}{0} = \frac{78 - 6}{0} = \frac{72}{0}$$

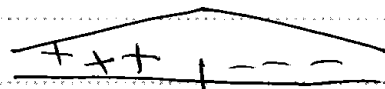
$$3 = \frac{13 \times 4 - 6}{0} = \frac{52 - 6}{0} = \frac{46}{0}$$

$$= \frac{1}{0} (13 \times 6 - 6) = \frac{72}{0}$$

$$4 = \frac{1}{0} (13 \times 4 - 6) = \frac{46}{0}$$

$$= 13 \times 4 - 6 = 52 - 6 = 46$$

$$\frac{46}{0} = 13 \leftarrow$$



$$\frac{1}{2} (1 + 13) \times 4 = 28$$

$$3 = \frac{1}{0} (13 \times 4 - 6) = \frac{46}{0}$$

مسألة ٢٩

صندوق خشبي على شكل مستطوي

- باع كاشم كادته مربعة لكل

يراد تقوية ارتفاع أو جبهة الستة

وذلك بتثبيت شريط على طول أعرافه

فإذا كان الطول الكلي للشريط المستخدم

3 قداً

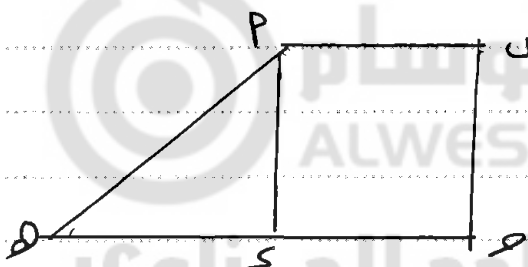
مسألة ٤٠

إذا شئنا أن نصل طولنا كما

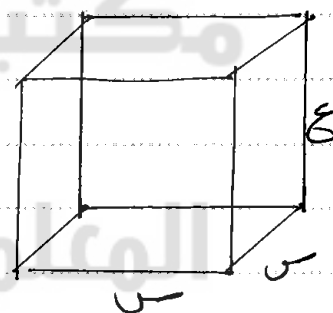
عني أن نصل الجوارح حيث أن $u = 20 = 2 \times 10$

$v = 20 = 5 \times 4$ ، $w = 20 = 4 \times 5$

أوجه أكبر مساحة ممكنة لكل u, v, w

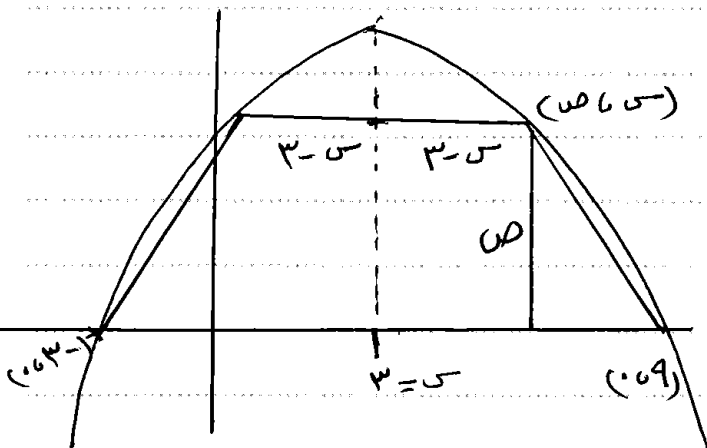


← يتبع الحل



سؤال (٤١)

أحمد أكبر حافة ممكنة لسبب المنحرف
المرسوم فوقه محور السينات واهدي
مادتيه هي محور السينات ورأساه
الآخران على منحني $= 5x^2 + 6x + 7$



يقطع المنحني محور السينات عند ما

$$= 5x^2 + 6x + 7 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } x = 9$$

$$= (5 + 9) (9 - 1) = 56$$

طول بقايدة السفلى $9 - 3 = 6$

$$= \frac{1}{2} (6 + 12) \times 5 = 45$$

$$= \frac{1}{2} (6 + 12) \times 5 = 45$$

$$= \frac{1}{2} (6 + 12) \times 5 = 45$$

$$= (5 + 9) \times (9 - 1) = 56$$

$$= \frac{1}{2} (6 + 12) \times 5 + (9 - 6) \times 5 = 45 + 15 = 60$$

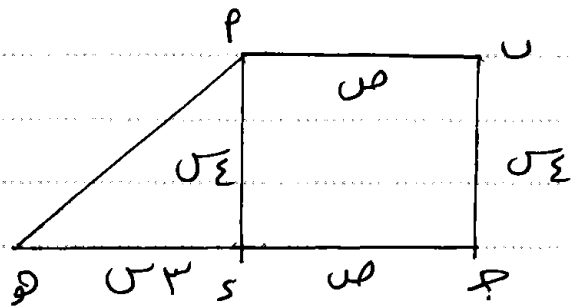
$$= 60 - 15 = 45$$

$$= 45 + 15 + 15 = 75$$

$$= 75 - 15 = 60$$

$$= 60 - 15 = 45$$

الحل



صاحة الكل $UP = 56$

$$= \text{صاحة } UP + \text{صاحة } SP = 56$$

$$= 5 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 30 + 9 = 39$$

$$= 39 + 17 = 56$$

لأيجاد P

$$(9 - 1) = (9 - 1) + (9 - 1) = 18$$

$$= 18$$

$$= 18 + 18 = 36$$

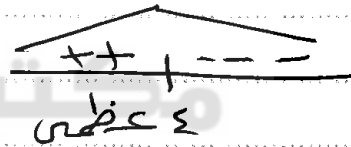
$$= 36 + 18 = 54$$

$$= 54 - 18 = 36$$

$$= 36 - 18 = 18$$

$$= 18 - 18 = 0$$

$$= 0$$



$$= 18 = 5 \times 6 - 36 = 30 - 36 = -6$$

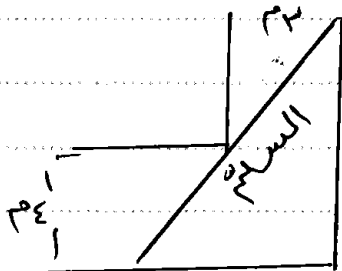
$$= 18 + 18 = 36$$

$$= 36 + 18 = 54$$

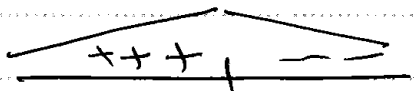
$$= 54 - 18 = 36$$

مثال (٤٤)

الشكل الجانبي ميل عمران معادن
او بعد طول اهلول يلمم عيكن ان
ير عوراً باكافه



$$\begin{aligned}
 3 + 3 &= 3 + 3 \\
 3 + 3 &= 3 + 3 \\
 3 + 3 &= 3 + 3
 \end{aligned}$$

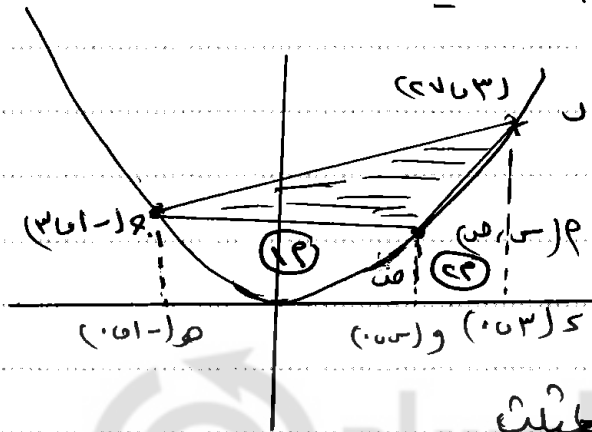


عند س = ٤٨ $\sqrt{3}$ = ٤٨ $\sqrt{3}$

$$L = \left(\frac{3}{48\sqrt{3}} + 1 \right) \sqrt{(16 + 9)}$$

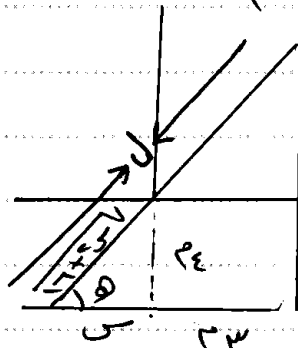
مثال (٤٣)

اذا كانت u (٣٧٦٣) و v (٣٦١) نقطة
نقطتان على محن $u = 3 + 3$ ، لنقطه
 P (٣، ٥) نقطة على محن $u = 3 + 3$ بينهما
او بعد الاصلاتي يسين للنقطه P
حيث تكون صافه المثلث uP و
اكر ما عكبه .



المثلث
= صافه شبه المثلث u و v
- [صافه شبه المثلث u و v +
صافه شبه المثلث u و v]
← تببع الكل

الكل : L : طول السلم



$$\begin{aligned}
 \frac{3}{L} &= \frac{3}{\sqrt{16+9}} \\
 \frac{3}{L} &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{L} &= \frac{3+3}{L} \\
 \frac{3}{\sqrt{16+9}} &= \frac{6}{L} \\
 L &= \frac{6 \sqrt{16+9}}{3} = 2 \sqrt{25} = 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{L} &= \frac{3}{\sqrt{16+9}} \\
 \frac{3}{L} &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

الكل

مسافة لكل = مسافة ليست \sup +
مسافة ليست \inf

$$4 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

قانون فيثاغورس

$$1^2 + 1^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{2} = 1.414$$

$$c = \sqrt{2} = 1.414$$

$$c = \sqrt{2} = 1.414$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

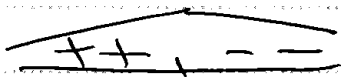
في \sup

$$4 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

$$4 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

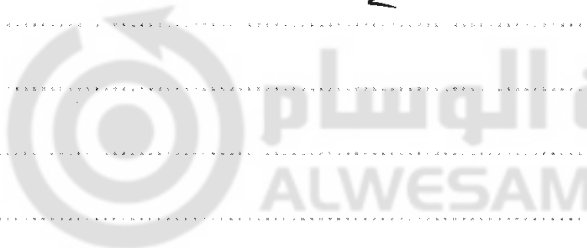
$$4 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

$$4 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 + \frac{1}{2}$$



$$1.414 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$\frac{1.414}{2} = 0.707$$



الاستاذ ناجح الجمزاوي

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

كل $\sup = \inf$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

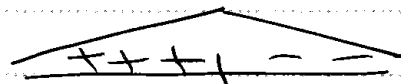
$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$4 = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

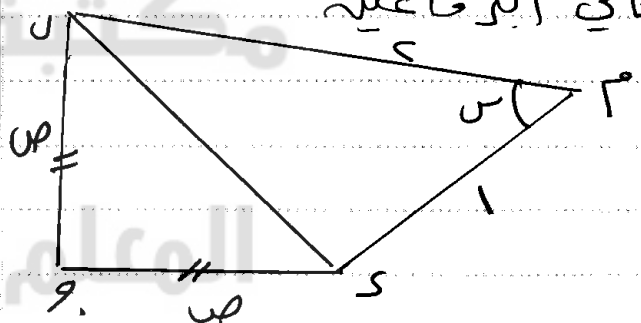


عند $\sup = 1$

سؤال (٤٤)

مسافة من التي تجعل مسافة لكل

التالي أكبر ما يمكن



لكه $\frac{l}{s} = \frac{1}{c} = 3$ ها $\frac{l}{s} = 3$
 $\leftarrow l = \frac{1}{3} s$

صبا $3 = \frac{2l}{c} = \frac{2s}{3c} \leftarrow c = \frac{2s}{3}$

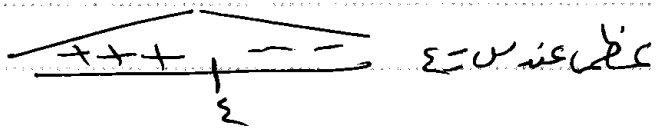
$\leftarrow m = (12 + s + \frac{1}{3}s) \times \frac{2s}{3}$

$\frac{2s}{3} (12 + \frac{4}{3}s) = m$

$\frac{2s}{3} (12 + \frac{4}{3}s) = m$

$m = \frac{2s}{3} (12 + \frac{4}{3}s)$

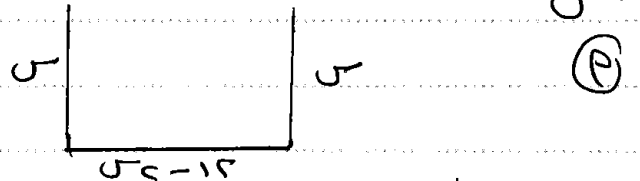
$12 - 12 = 0 = 4s - 3 = s = 3$



سؤال (٤٥)

لوحية مستطيلة عرضها ١٢ م تثبت
 عن الجانبين جدارين لتصبح قناة ماء
 اوجد طول الجدار - متى تكون سرعة
 القضاة اكبر فاعلمه عن الكالس
 (١) اذا كان الجدار عمودي على لقناة
 (٢) اذا كان الجدار على زاوية ٦٠ على
 الافقي

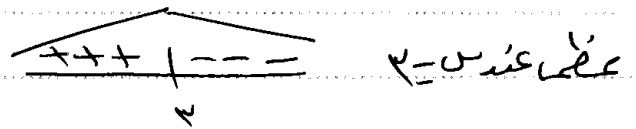
الحل



صاحة لقطع = $3 = (12 - s) \times s$

$12 - s = 3$

$12 - 12 = 0 = s - 3 = s = 3$

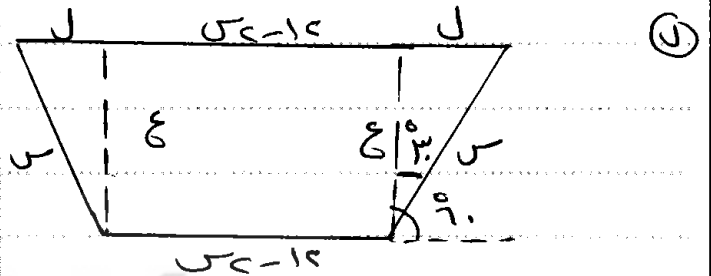


سؤال (٤٦)

١٢ صقلت قائم الزاوية في ن
 $5P = 20 = P \neq 3 = P$ رسم داخله
 صطلح اهد اضلاعه على P
 والرأسان الآخران على اضلعين
 P و N و N اوجد اكبر صاحة
 ممكنه للـ صطلح

الحل

\leftarrow يتبع



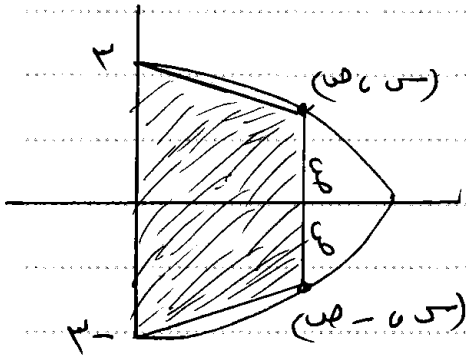
$m = \frac{1}{2} (l + 12 + s + 12 + s - 12) \times 2$

$\frac{1}{2} (l + 12 + s + 12 + s - 12) \times 2 = m$

$\frac{1}{2} (l + 12 + s + 12 + s - 12) \times 2 = m$

سؤال (٤)

صعداً على الشكل الجانبي أوجد
الكر مسافة يمكنه ليده بحرف
صيت $s = 9 - s^2$



الحل

$s^2 = 9 - s$

القاعدة السفلى = $s + s$
القاعدة العليا = s

$\frac{1}{2} (s + 9) (s + s) = s \times (7 + s)$

$1 \times (9 - s) + (s - 7) (s + s) = 0$

$9 - s + s^2 - 7s - s^2 = 0$

$9 - 8s = 0$

$8s = 9$

$s = \frac{9}{8}$

$s = 1$



عظمى عند $s = 1$

$s = 1 \times 8 = (9 - 1) (1 + 1) = 8$

الحل

المساحة = $s \times s$

المساحة = $\frac{1}{2} (s + 9) s$

$s^2 = \frac{1}{2} (s + 9) s$

$2s^2 = s^2 + 9s$

$s^2 = 9s$

لكن $s + s + s = 10$

$s + s + s = 10$

$3s = 10$

$s = \frac{10}{3}$

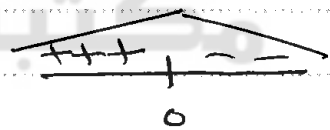
$s = \frac{10}{3}$

$s = \frac{10}{3}$

$s = \frac{10}{3}$

$s = \frac{10}{3}$

$s = 0$



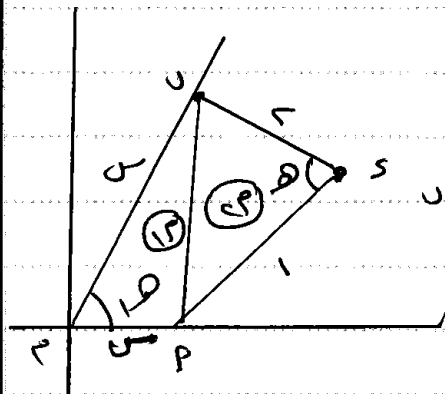
عظمى عند $s = 0$

$s = \frac{10}{3}$

$s = \frac{10}{3}$

مثال (٤٨)

بدأت النقطتان P و Q تتحركان من نقطة الأصل M بحيث تحركت P على محور السينات بلوحب بينما تحركت Q على المستقيم $OM = 3\sqrt{2}$ من في اربع الأول وكان بعد كل منهما عن نقطة الأصل مساوي دائرياً وكانت النقطة D تتحرك في اربع الأول حيث يبقى ليهما M يساوي AM وعند N يساوي AM فامس من الزاوية P و Q التي تحصل مسافة لكل الرباعي $MADN$ ادون أكبر ماعليه .



الكل

مسافة لكل $MADN = (13) + (23) =$

$3\sqrt{2} = 6$
 $1 = 7$

$\frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 21$
 $\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 7 = 21$

$21 = 6 \times 7 \times \frac{1}{2} = 21$

لكن $(MP) = 1 + 9 - 9 \times 1 \times 1 = 1$
 $1 + 9 - 9 = 1$

وايضاً

$(MP) = 1 + 9 - 9 \times 1 \times 1 = 1$

$1 + 9 - 9 = 1$

$1 + 9 - 9 = 1$

$1 + 9 = 10$

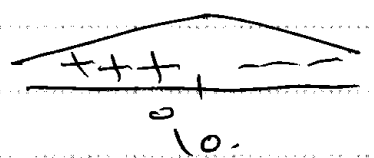
$10 = 1 + 9$

$10 = 1 + 9$

$10 = 1 + 9$

$10 = 1 + 9$

$1 = 1$
 $1 = 1$
 $10 = 10$



$10 = 10$



ل ← $\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ من تكبيرها على المحيط

$$9 = 4r + 5r + 5 \times \frac{5}{2} \times r$$

$$9 = 4r + 5r + \frac{25}{2}r$$

$$4r + 5r + \frac{25}{2}r = 9$$

$$\frac{1}{2}(5r + 4r - 9) = 0$$

$$L = 5r + \frac{1}{2}(5r + 4r - 9) \times 5r = 5r + \frac{1}{2}(5r + 4r - 9) \times 5r$$

$$L = 5r + \frac{1}{2}(5r + 4r - 9) \times 5r$$

$$L = 5r + \frac{1}{2}(5r + 4r - 9) \times 5r$$

$$= 5r + \frac{1}{2}(5r + 4r - 9) \times 5r$$

$$\frac{7}{0} = \frac{1}{10} = 5 \leftarrow$$



تكبير كية عند 5 = $\frac{7}{0}$

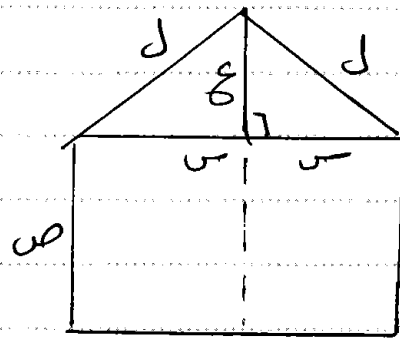
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} - 4$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} - 4$$

$$\frac{9}{0} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{9}{1} = \frac{9}{1} = 9$$

مثال (٤٩)

نأخذ على شكل منطوق بطلوه مثلث متساوي الساقين ارتفاعه $\frac{3}{2}$ طول قاعدته ، اذا كان محيطه 9 افسار احسب الجادها حيث تسمح باذوال أكبر كية من لعود .



الكل

$$5 \times \frac{3}{2} = 5r \times \frac{3}{2} = 8$$

تفرض ان مضاعف نفاذية لعود P كية لعود = لعود مضاعف نفاذية مضاعف نفاذية = $P \times \frac{3}{2} + 4r \times P =$ المثلث

$$5r \times \frac{3}{2} + 4r \times P =$$

$$5r \times \frac{3}{2} + 4r \times P =$$

$$5r \times \frac{3}{2} + 4r \times P = 9$$

$$5r \times \frac{3}{2} + 4r \times P = 9$$

تكبير محيطه لعود = 9

$$9 = 4r + 5r + L$$

مثلث قائم الزاوية

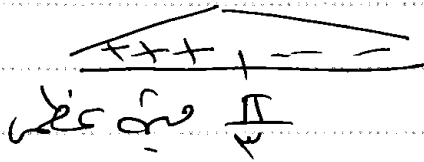
$$L = \sqrt{5^2 + 3^2} = 8$$

$$\frac{5r \times 3}{17} = \sqrt{5^2 + 3^2} =$$

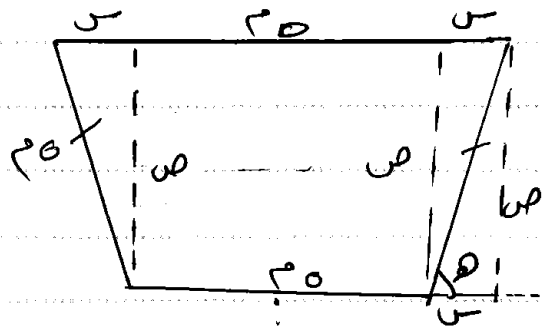
$$- \text{صياحه} = \text{صياحه} \text{ هو}$$

$$\text{صياحه} (\pi - \theta) = \text{صياحه}$$

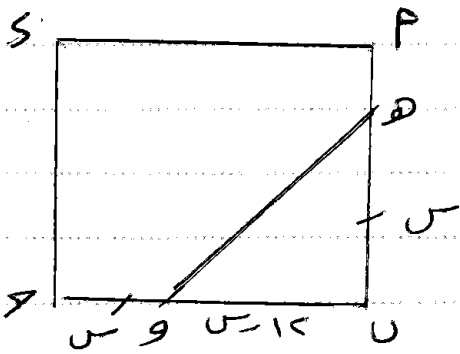
$$\leftarrow \pi - \theta = \theta \leftarrow \text{هو} = \frac{\pi}{3}$$



سؤال (٥٠)
 سد مياه مقطعة العرضي على شكل شبه منحرف طول قاعدته السفلى ٥ م وطول كل من الجانبين المتائلين ٥ م انظر الشكل و حدد زاوية ميله لاضلعين الجانبين بحيث تكون مساحة شبه المنحرف (المقطع العرضي) أكبر فاعلن



سؤال (٥١)
 P و S مربع طول ضلعه ١٢ م افدت النقطتان ه و و على SP و ع على PS بحيث كانت ه و = ٦ و اوجد طول كل من ه ن و و بحيث تكون مساحة المنطقة P و ه اصغر فاعلن



$$3 = \frac{1}{2} (\text{مجموع إفتاديه}) \times \text{ارتفاع}$$

$$3 = \frac{1}{2} (5 + 5 + 5) \times \text{ه ن}$$

$$3 = \frac{1}{2} (15) \times \text{ه ن}$$

$$6 = 15 \times \text{ه ن}$$

لكن

$$\frac{5}{5} = \text{صياحه} \text{ و } \frac{5}{5} = \text{حاله}$$

$$\leftarrow \text{صياحه} = 5 \text{ و } \text{حاله} = 5$$

اكمل

لتكون مساحة الشكل P و ه و اصغر فاعلن بحيث ان تكون مساحة المثلث P و و أكبر فاعلن

$$3 = \frac{1}{2} (12 - 6) \times \text{س}$$

$$6 = 3 \times \text{س} \rightarrow \text{س} = 2$$

← يسو كل

$$3 = \frac{1}{2} (5 + 5) \times \text{حاله}$$

$$6 = 5 \times \text{حاله}$$

$$1.2 = \text{حاله}$$

$$3 = \frac{1}{2} (5 + 5) \times \text{صياحه}$$

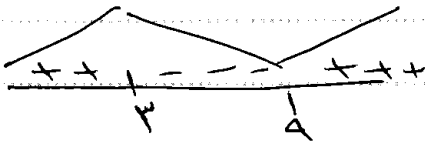
$$6 = 5 \times \text{صياحه}$$

$$1.2 = \text{صياحه}$$

٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

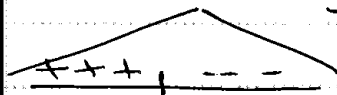
$$\begin{aligned} &= (2x + 8)(x - 4) \\ &= (x - 4)(x - 9) \\ &204 = x \end{aligned}$$



عند $x = 3$

$$m = 6 - \frac{5}{x}$$

$$m' = 5 - 6 = -1$$



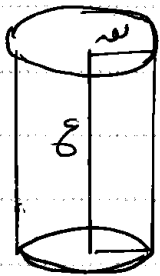
$$6 = 5$$

أكد ماعليه عند $x = 6$

مثال (٥٥)

مثال (٥٣)

ياد عمل وعاء اسطوانية الشكل
سعة ٤ م^٣ وضئوع من أعلى
به الجاد اوعاء لتكون سعة
المعدن يتعمل أقل ماعليه.



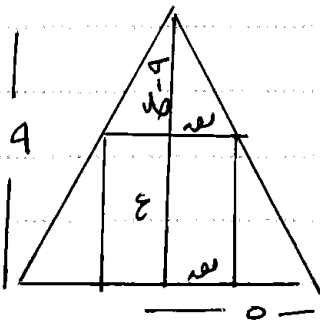
الكل
سعة معدن
= سعة ارباب +
سعة ابقاه

$$\begin{aligned} 3 &= \pi r^2 x + \pi r^2 (8-x) \\ 3 &= \pi r^2 (8-x) \\ \frac{3}{\pi} &= 8-x \\ x &= 8 - \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= \pi r^2 (8-x) \\ \frac{3}{\pi} &= 8-x \\ x &= 8 - \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = 1 \end{aligned}$$

به ارتفاع الاسطوانة ذات الك
حجم والتي عليه وضئها داخل مخروط
نصف قطره ٥ م وارتفاعه ٤ م



الكل
حجم الاسطوانة
= $\pi r^2 x$

$$4 = (8-x) \Rightarrow \frac{4}{0} = \frac{8-x}{r}$$

$$\leftarrow \frac{4}{8-x} = r$$

$$x \times \left(\frac{4}{8-x} \right)^2 \pi = 2$$

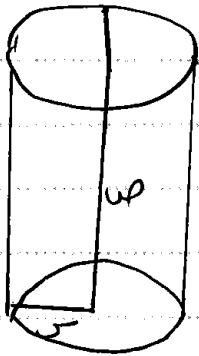
$$\frac{16x}{(8-x)^2} \pi = 2$$

$$\frac{16x}{(8-x)^2} \pi = 2$$

$$= 8x^3 + 8x^2 - 11$$

سؤال ٥٥

فتصل محيطه بـ ٣٦ واره طول
 احد اضلاعه فكون اطوانه
 اوج اكد حجم تحلل للأطوانه



اكل
 $2\pi r = 36$
 $\pi r^2 h = 36$

كده

$36 = 2\pi r + \pi r^2$

$36 = 2\pi r + \pi r^2$

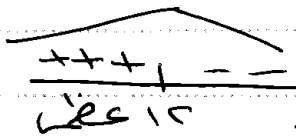
$36 = 2\pi r + \pi r^2$

$36 = 2\pi r + \pi r^2$

$36 = 2\pi r + \pi r^2$

$36 = 2\pi r + \pi r^2$

$36 = 2\pi r + \pi r^2$

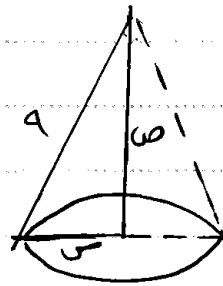


$18 = 12 + 12$
 $7 = 12 - 12$

$36 = 12 \times 12 \times \pi$

سؤال ٥٤

صنعت قائم الزاوية طول واره ثابت
 وياوي ٩ سم وطول ضلعي القاعه
 ٥ سم فاذا داره اكدت طول احد
 ضلعي القاعه فكون محزوط اوج
 اكد حجم محله للمحزوط



اكل
 $\frac{1}{3} \pi r^2 h = 9$

$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 9$

كده

$3 = r^2 + h^2$

$3 = r^2 + h^2$

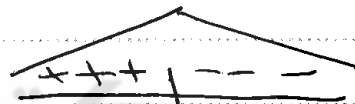
$3 = r^2 + h^2$

$3 = r^2 + h^2$

$3 = r^2 + h^2$

$3 = r^2 + h^2$

$3 = r^2 + h^2$

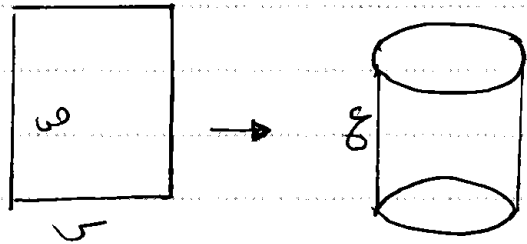


$18 = 12 + 12$
 $7 = 12 - 12$

$36 = 12 \times 12 \times \pi$

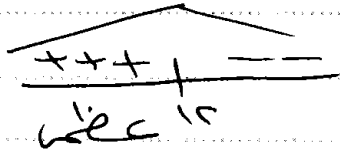
مثال (٥٦)

وتصل عريضة ٦ م ثم تُبنى ليكون
الطوانة أو به أكبر حجم ممكن
للطوانة



$$س = (س - ١٢) س$$

$$١٢٠ = س$$

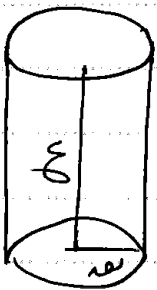


$$س = ١٢ = ١٨ - ٦ = ٦$$

$$\frac{٢١٦}{\pi} = ٦ \times ١٢ \times ١٢ \times \frac{١}{\pi \times ٤} = ٢$$

مثال (٥٧)

وعاد الطواني زجاجي ذو غطاء
معدني ، اذا كانت كلفه وحدة واحدة
من معدن ثلاثة امثال كلفه الزجاج
فأثبت ان لنسبة بين لحي اوعاد
(لفة ، ع) اقل كلفه واذي
ليوجب حجماً ثابتاً هي ١ : ٤



اكل
نرضن كلفة وحدة الزجاج = P
فكون كلفه وحدة معدن = P٣

$$٣ = \pi ر^2 ع + \pi ر ع$$

المكاليف

$$\pi ر^2 ع + \pi ر ع + \pi ر^2 ع + \pi ر ع = ٣$$

المنحني الزجاج المنحني

$$\frac{٤}{\pi ر^2 ع} = ٤ = \pi ر^2 ع + \pi ر ع$$

ح ثابت

← تتبع

اكل

$$\pi ر^2 ع = ٤$$

$$ر = \frac{٤}{\pi ع}$$

$$\text{محيط اغطاء} = \pi ر = ٤ = س$$

$$\frac{س}{\pi ر} = ر$$

$$٤ \times \left(\frac{س}{\pi ر}\right) \times \pi = ٢$$

$$٤ \times س \times \frac{١}{\pi ر} = ٤ \times \frac{س}{\pi ر} = ٢$$

$$٢٦ = س + س + س + س$$

$$س + س = ١٨ = س$$

$$\frac{١}{\pi ر^2} = ٢ \leftarrow (س = ١٨) س$$

$$\frac{١}{\pi ر^2} = (س = ١٨) س$$

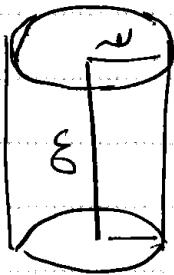
$$= (س^٣ - س^٣) \frac{١}{\pi ر^2} = ٢$$

$$\leftarrow س^٣ - س^٣ = ٢$$

سؤال ٥٨

يراد صنع وعاء اسطواناني الشكل
كأدته دائرية وقصوع من الأعلى
لتكون سعته ٥٤π سم^٣ فإذا كانت
تكاليف صنع سم^٢ من الجوانب كمرتين
ومن لقادة ϵ قروش فما أبعاد
هذا الوعاء ، لتكون أقل سعته
أقل ما يمكن .

الحل



حاجه وجهه لوعاء اسطواناني = م
ك = سعته $\pi r^2 h + \pi r^2$ وعليه تكون

تكاليف صناعته

$$\bar{N} = \pi r^2 h + \epsilon \pi r^2$$

$$\text{لكه } \pi r^2 h = ٥٤$$

$$\frac{٥٤}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = h$$

$$\bar{N} = \pi r^2 h + \frac{٥٤}{\pi r^2} \times \pi r^2 = \pi r^2 h + \frac{٥٤}{\pi r^2}$$

$$\bar{N} = \pi r^2 h + \frac{٥٤}{\pi r^2}$$

$$\bar{N}' = \pi r^2 h + \frac{٥٤}{\pi r^2}$$

← يسع

$$\bar{N} = \pi r^2 h + \frac{\epsilon}{\pi r^2} \times \pi r^2 = \pi r^2 h + \epsilon$$

$$\bar{N} = \pi r^2 h + \frac{\epsilon}{\pi r^2}$$

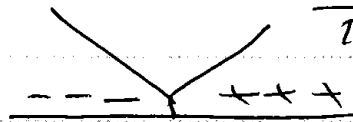
$$\bar{N}' = \pi r^2 h + \frac{\epsilon}{\pi r^2}$$

$$\frac{\epsilon}{\pi r^2} = \pi r^2 h \leftarrow$$

$$\epsilon = \pi r^2 h$$

$$\frac{\epsilon}{\pi r^2} = \frac{\epsilon}{\pi r^2} = \pi r^2 h$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi r^2}} = \pi r^2 h$$



$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi r^2}}$$

$$\frac{\epsilon}{\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi r^2}}\right)^2} = \epsilon$$

$$\frac{\epsilon}{\frac{\epsilon}{\pi r^2}} = \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi r^2}}\right)^2 \times \left(\frac{\epsilon}{\pi r^2}\right)$$

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$$

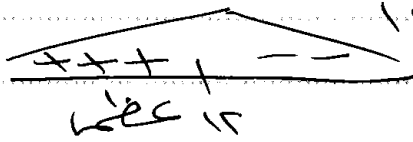
$$\left(\frac{1}{3} \pi (18^2 - 6^2) \right) \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\left(\frac{1}{3} \pi (36 - 36) \right) \frac{\pi}{3} = 2$$

$$= 36 - 36$$

$$= (6 - 18) \pi$$

$$18 = 6$$

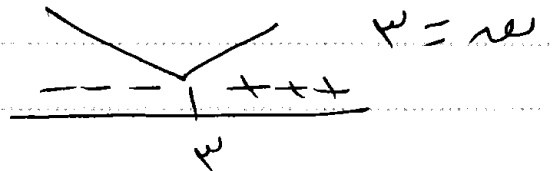


$$\sqrt{18^2 - 12^2} = 6$$

$$\pi r^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{R^2}{4}$$

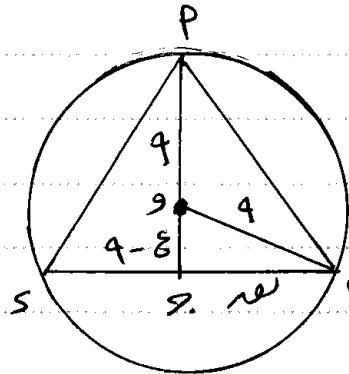
$$r = \frac{R}{2} = \frac{6}{2} = 3$$



$$r = \frac{6}{2} = 3$$

مسألة ٥٩

أوجد نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم حجمه أكبر مما عليه مخروط داخل كرة نصف قطرها ٩ سم



الكل

ارتفاع

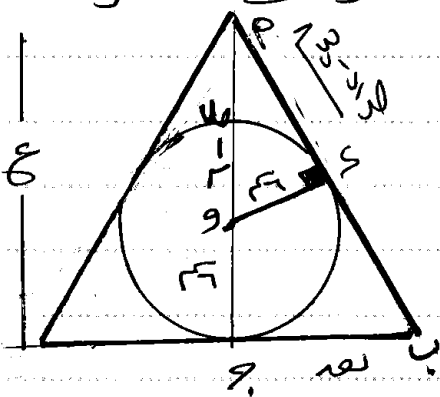
المخروط

نصف قطر

قاعدته

مسألة ٦٠

ما اصغر حجم مخروط دائري قائم رسم بداخله كرة نصف قطرها ٩ سم



الكل

حسب نظرية فيثاغورس في $\triangle P$ و

$$r^2 + (h-9)^2 = 9^2$$

$$r^2 + h^2 - 18h + 81 = 81$$

$$r^2 + h^2 - 18h = 0$$

$$\sqrt{18h - h^2} = r$$

لتبع كل

حجم المخروط $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

حسب فيثاغورس على $\triangle P$ و

$$r^2 + (h-9)^2 = 9^2$$

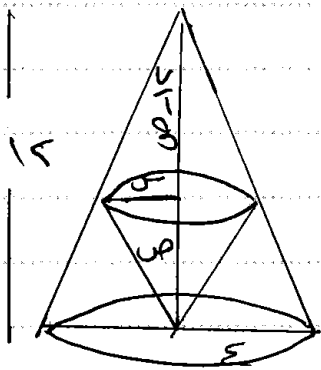
$$r^2 + h^2 - 18h + 81 = 81$$

$$r^2 + h^2 - 18h = 0$$

$$\frac{1}{3} \pi (18h - h^2) \frac{\pi}{3} = 2$$

مسألة (٦١)

جد حجم الكبد مخروط دائري قائم عليه
 رصته داخل مخروط دائري قائم
 نصف قطرها ٤ م وارتفاعه ١٢ م
 بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على
 مركز قاعدة المخروط الخارجي.



اكمل

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi (4)^2 (12)$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi \rightarrow \frac{r^2 h}{3} = 100 \rightarrow r^2 h = 300$$

$$\frac{r^2}{(12-h)^2} = \frac{4^2}{12^2} \rightarrow \frac{r^2}{(12-h)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{r}{12-h} = \frac{1}{3} \rightarrow r = \frac{12-h}{3}$$

$$\frac{1}{3} (12-h)^2 \cdot h = 300$$

$$(12-h)^2 \cdot h = 900$$

$$(144 - 24h + h^2) \cdot h = 900$$

$$144h - 24h^2 + h^3 = 900$$

$$h^3 - 24h^2 + 144h - 900 = 0$$

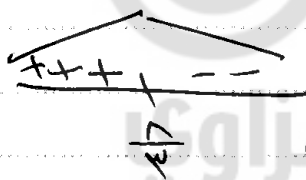
$$h^2(h - 24) + 144h - 900 = 0$$

$$h^2(h - 24) + 144(h - 7.5) = 0$$

$$h^2(h - 24) + 144h - 1080 = 0$$

$$h^2(h - 24) + 144(h - 7.5) = 0$$

$$h^2(h - 24) + 144h - 1080 = 0$$



$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (4)^2 (12)$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

وعند كتابه لثبات

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi (4)^2 (12)$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

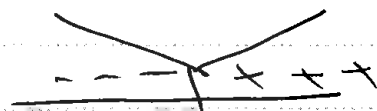
$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$



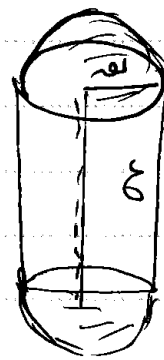
صفر صفر

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h = 200 \pi$$

مسألة ٦٤

نريد صنع كبسولة على شكل اسطوانة
 تنتهي بنصفي كرة حجمها $\frac{4}{3}\pi$ سم³
 فاذا كانت تكلفه وحدة معدن في
 الكرة تقادله مرة ونصف تكلفه معدن
 من الاسطوانة، اوجد نصف قطر الكرة
 لتكون التكاليف اقل ما يمكن.

ا الحل



التكاليف =
 تكاليف الكرة + تكاليف
 الاسطوانة

$$N = \pi r^2 \times \frac{4}{3} + \pi r^2 \times \frac{3}{2} + \pi r^2 \times \frac{3}{2} =$$

$$ع = \text{حجم الكرة} + \text{حجم الاسطوانة}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \times \frac{3}{2} = \pi \times \frac{3}{2}$$

$$\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi r^2 \times \frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} - \frac{\pi r^2 \times \frac{3}{2}}{\pi r^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3}r - \frac{3}{2} =$$

$$N = \left(\frac{4}{3}r - \frac{3}{2}\right) \pi r^2 + \pi r^2 \times \frac{3}{2} \leftarrow$$

$$= \frac{\pi r^2 \times \frac{3}{2}}{3} - \frac{\pi r^2 \times \frac{3}{2}}{2} + \pi r^2 =$$

$$N' = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2}{2} - \pi r =$$

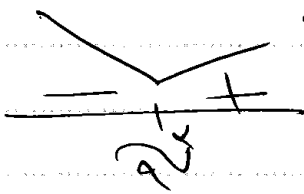
$$\frac{\pi r^2}{3} = \pi r^2 - \pi r$$

$$\frac{\pi r^2}{3} = \pi r \leftarrow$$

$$\pi r^2 = 3\pi r$$

$$r = \frac{\pi r^2}{3\pi r} = \frac{3}{3} = 1$$

$$r = 1$$



صغرى عند ما

$$r = 1$$

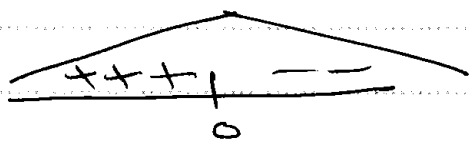


ناجح الجمزاوي

$$z = \frac{\pi c}{\sqrt{c}} = (580 - 400)$$

$$z = 580 - 400$$

$$0 = \frac{c}{\pi} = 5 \leftarrow 400 = 580$$

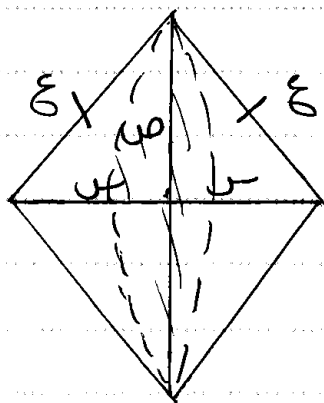


$$0 = 580 - 400$$

$$\pi \frac{c}{\sqrt{c}} = z$$

مسألة (٦٣)

إذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه 200cm دورة كاملة حول قاعدتها فما أكبر حجم عملة للجهة الناتج عن الدوران



الحل

$$z = c \times \text{حجم المخروط الواحد}$$

$$= c \times \frac{\pi}{3} \times s \times c$$

$$200 = c + s + c = \text{المحيط}$$

$$200 = c + s + c \leftarrow c = 200 - 2c$$

دعنا نضاهي

$$c^2 + s^2 = c^2$$

$$c^2 + s^2 = (200 - 2c)^2$$

$$c^2 + s^2 = (200 - 2c)^2$$

$$c^2 + s^2 + 4c^2 - 800c + 40000 =$$

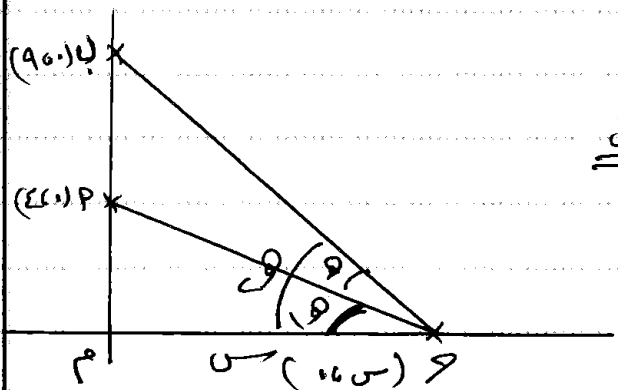
$$= 4c^2 - 800c + 40000$$

$$z = \frac{\pi}{3} \times c \times (200 - 2c)$$

$$= \frac{\pi}{3} \times c \times (200 - 2c)$$

سؤال ٦٤

$P(400)$ و $S(960)$ نقطتان
 ثابتتان على محور السينات = محور
 الإحداثي البيني للنقطة المتحركة
 P الذي يجعل قياس الزاوية P بين
 P و M كما عليه



اكمل

نفرض ان

$$\begin{aligned}
 P > M &= h \\
 P > S &= h \\
 S > M &= c
 \end{aligned}$$

$$h = h - c$$

$$h = (h - c) \cdot \tan(\alpha)$$

$$h = \frac{h - c}{\tan(\alpha)}$$

$$1 + \frac{h - c}{h} \cdot \tan(\alpha)$$

$$\frac{h}{5} = \frac{h - c}{4} \cdot \tan(\alpha)$$

$$h = \frac{4}{5} \cdot \frac{h - c}{\tan(\alpha)}$$

$$1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{h - c}{h} \cdot \tan(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{h - c}{h} \cdot \tan(\alpha) &= \frac{5}{5} \\
 \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{h - c}{h} \cdot \tan(\alpha) &= \frac{5}{5} \\
 \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{h - c}{h} \cdot \tan(\alpha) &= \frac{5}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{طاه} &= s \\
 s &= 36 + s
 \end{aligned}$$

$$\frac{c \times s - s \times (36 + s)}{(36 + s)^2}$$

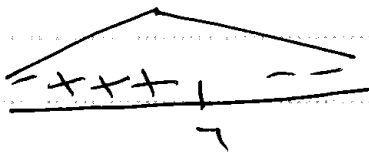
$$\frac{5s - 180 + s^2}{(36 + s)^2} = h$$

$$5s - 180 + s^2 = h$$

$$5s - 180 = h$$

$$36 = s \leftarrow 180 = 5s$$

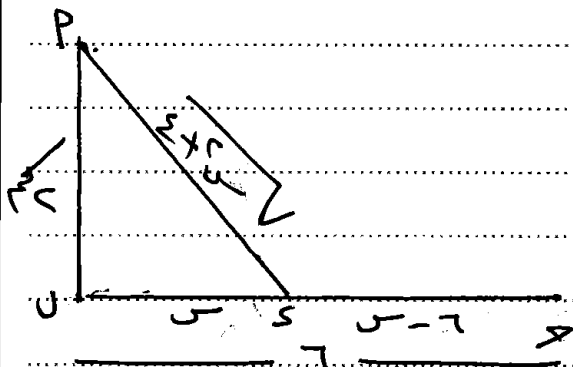
$$7 + = s$$



عند $s = 7$ يكون قياس الزاوية P أكبر مما عليه



تدريب (٦) ص ١٢٤



$$N = \sqrt{4 + 5\sqrt{3}} \times 4 + 5\sqrt{3} \times (س - 6) + 0$$

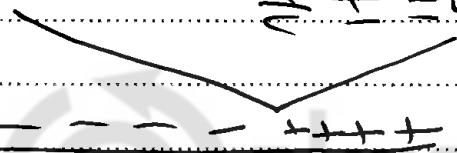
$$N = \frac{4 \times 5\sqrt{3} + 0}{4 + 5\sqrt{3}}$$

$$N = \frac{20\sqrt{3}}{4 + 5\sqrt{3}}$$

$$N = \frac{20\sqrt{3} \times (4 - 5\sqrt{3})}{(4 + 5\sqrt{3})(4 - 5\sqrt{3})}$$

$$N = \frac{80\sqrt{3} - 300}{16 - 75} = \frac{80\sqrt{3} - 300}{-59}$$

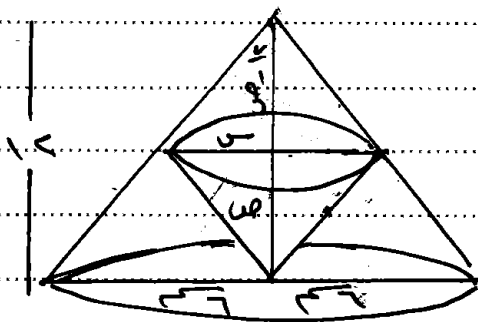
$$\frac{16}{16} = \frac{36}{16} \Rightarrow \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$



أول ثلاثة من
لا يوجد أكبر ثلاثة

تدريب (٥) ص ١٠٤

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم عليه وضعه
داخلة مخروط دائري قائم طول نصف
قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٢ سم
حيث يقع رأس المخروط الداخلي
على مركز قاعدة المخروط الخارجي



الكل

$$2 = \frac{\pi \times 3^2}{3} \text{ من داخل}$$

من الخارج

$$\frac{7}{12} = \frac{\pi}{12 - 3} \Rightarrow 7 = \frac{\pi}{3} (12 - 3)$$

$$7 = \frac{\pi}{3} (9) \Rightarrow 7 = 3\pi$$

$$2 = \frac{\pi \times 3^2}{3} (12 - 3)$$

$$2 = \frac{\pi \times 9}{3} (9) = 3\pi \times 9 = 27\pi$$

$$2 = \frac{\pi \times 9}{3} (9) = 27\pi$$

$$2 = 9\pi - 5\pi = 4\pi$$

$$2 = 4\pi (3 - 4) = -4\pi$$

$$2 = 3 - 4 = -1$$



$$2 = \frac{\pi}{3} (3) (4 - 3) = \pi$$

تمارين ومسائل

ص ١٣

٥ دعاء الطواني لكل فتوح
من الاعلى عجمه ...
أقل حاصه فكتنه من اصبغ
لتصنيفه

الحل

$$ع \text{ لا يطوانه} = \pi \text{ نفاع}$$

$$\pi \dots = \pi \text{ نفاع}$$

$$\frac{1 \dots}{\text{نفاع}} = ع \leftarrow$$

٢ = محيط بقاعده \times الارتفاع + حاصه القاعده

$$\pi \text{ نفاع} + \pi \text{ نفاع} = ٢$$

$$\pi \text{ نفاع} + \frac{1 \dots \times \pi \text{ نفاع}}{\text{نفاع}} =$$

$$\pi \text{ نفاع} + \frac{\pi \dots}{\text{نفاع}} =$$

$$\pi \text{ نفاع} + \frac{\pi \dots}{\text{نفاع}} = ١ م$$

$$\frac{\pi \dots}{\text{نفاع}} = ٣ \text{ نفاع} \leftarrow \frac{\pi \dots}{\text{نفاع}} = ١ م$$

$$\frac{1 \dots}{\text{نفاع}} = ١ م$$

$$\frac{1 \dots}{\text{نفاع}} = ١ م$$

$$\frac{1 \dots}{\text{نفاع}} = ١ م$$

١ جد العدد الذي ينقي للفترة
[$\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$] الذي يحل نافع
العدد ومقلوبه ابرفاعليه

الحل

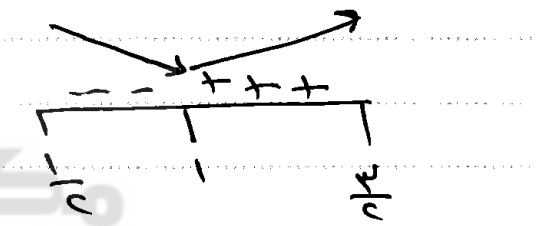
العدد : س مقلوب $\frac{1}{س}$

$$س = \frac{1}{س} + ٣$$

$$س^2 = 1 + ٣س$$

$$س^2 - ٣س - 1 = 0$$

$$س = 1 + ٣ \leftarrow$$

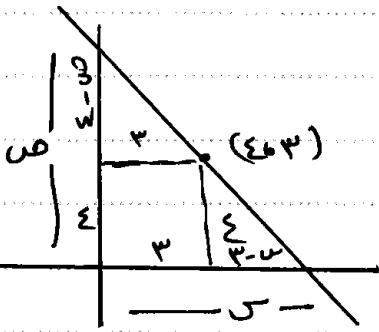


$$٣ \left(\frac{1}{2} \right) = ١ + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$٣ \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = ٣$$

عند س = $\frac{1}{٣}$ ابرفاعليه

٤) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤, ٣) ووضعه مع محور السينات والوجهين فلتنا ما حده أقل ما يمكن



$$ص = ٣ - \frac{٣}{٤} س$$

من التناظرية

$$\frac{٤}{٣-ص} = \frac{ص}{س}$$

$$ص = \frac{٤ س}{٣-ص}$$

بتعويضه في م

$$\frac{٤ س}{٣-ص} = \frac{٤ س}{٣-ص} \times س = ٣$$

$$\frac{٤ س^٢}{٣-ص} = ٣$$

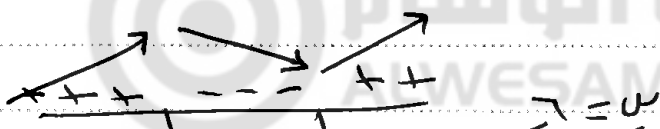
$$٤ س^٢ = ٣(٣-ص)$$

$$٤ س^٢ = ٩ - ٣ص$$

$$٤ س^٢ - ٣ص = ٩$$

$$٤ س^٢ - ٣ص = ٩$$

$$٤ س^٢ - ٣ص = ٩ \Rightarrow ٤ س^٢ = ٩ + ٣ص$$

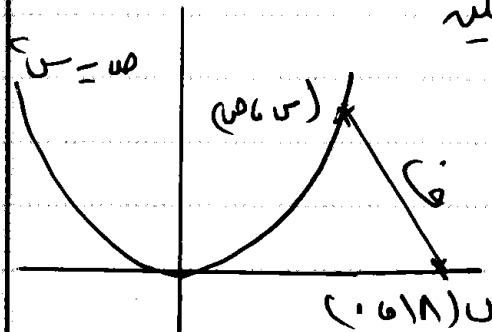


$$٨ = \frac{٤}{٣} = \frac{٦ \times ٤}{٣} = ٨$$

من التناظرية

$$\frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

٣) جد احداثي النقطة P (س, ص) الواقعة على منحني العلاقة ص = س^٢ التي تبعد ما عن النقطة U (١٨, ٠) أقل ما يمكن



الحل

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

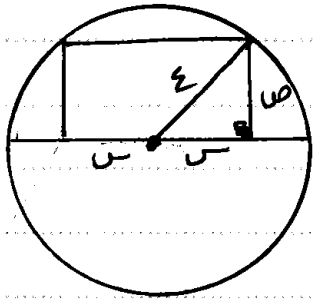
$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

$$ف = ص + (١٨-ص) = ص + ١٨ - ص = ١٨$$

١) جد أكبر مساحة ممكنة لمثلث
 يمكنه رسمه داخل دائرة نصف
 قطرها ٤ سم بحيث تنطبق قاعدته
 على قطر الدائرة و رأسه الآخران
 على الدائرة

الحل



مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times x = 4x$$

في المثلث

$$4^2 = x^2 + 4^2$$

$$16 = x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4^2 = x^2 + (4-x)^2$$

$$16 = x^2 + 16 - 8x + x^2 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 8x$$

نقسم مقام

$$0 = \frac{x(2x - 8)}{1} = x(2x - 8)$$

$$0 = x(2x - 8) \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 4$$

$$16 = x^2 + (4-x)^2 \Rightarrow 16 = x^2 + 16 - 8x + x^2$$

$$0 = 2x^2 - 8x \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 4$$

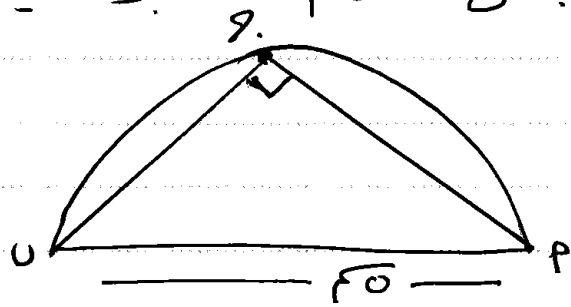


+

$$A = 4x = 4 \times 4 = 16$$

$$16 = 8 \times 4 =$$

٢) مثل المثلث نصف دائرة طول قطرها
 ١٠ (٣٥) ، يد أن النقطة ج حركة
 على الدائرة من النقطة ن باتجاه
 عقارب الساعة لرسم مع القطر
 مثلثاً محدباً من الزاوية P و
 التي تحصل مساهة ثلث الأضلاع



الحل

$$A = \frac{1}{2} \times NP \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 10 \times h = 5h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{10 \sin \theta}{2} = 25 \sin \theta$$

$$5h = 25 \sin \theta \Rightarrow h = 5 \sin \theta$$

$$A = 25 \sin \theta$$

$$A = 25 \sin \theta$$

$$A = 25 \sin \theta$$

$$A = 25 \sin \theta$$

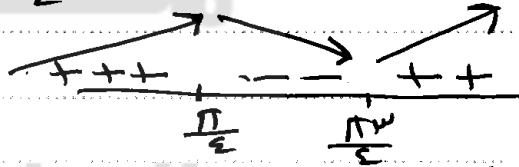
$$A = 25 \sin \theta$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$

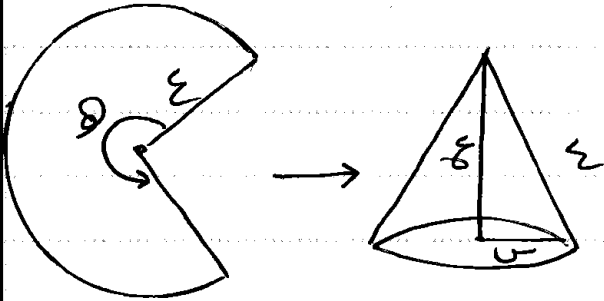


الزاوية عند س = $\frac{\pi}{2}$

⑤

قطاع دائري قياس زاويته المركزيه ه بالتقدير الدائري ، وطول نصف قطر دائرته ٤ ومديات ه تحول إلى مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر ماعدته نوعه ، وارتفاعه ٤ ه ما هو قيمته ه التي تحصل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن .

الحل



عندما يتحول القطاع الدائري إلى مخروط فان لونه في القطاع يصبح وتر في المخروط (الراسم) وطول القوس يصبح محيط القاعدة

$$2 = \frac{\pi}{4} r \theta$$

و حسب فيثاغورس فان

$$r^2 + 4^2 = 4^2$$

$$r = 16 - \theta$$

$$\left(\frac{\pi}{4} (16 - \theta) \right) \frac{\pi}{4} = 2$$

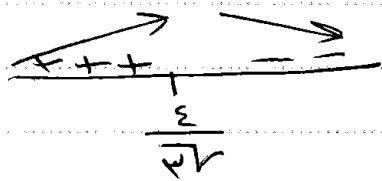
$$\frac{\pi}{4} (16 - \theta) = \frac{8}{\pi}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} (16 - \frac{8}{\pi}) = \frac{\pi}{4} (16 - 2) = \frac{\pi}{4} \cdot 14 = \frac{7\pi}{2}$$

$$16 - \theta = 16 - \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{16}{4} = 4 \leftarrow \theta = \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = 4$$



عندما $\theta = \frac{7\pi}{2}$ يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن

لكن طول القوس = محيط قاعدة المخروط
 $4\theta = 2\pi r$

$$\frac{4\theta}{2} = \frac{2\pi r}{2} = r$$

$$r + \theta = 16$$

$$r + \left(\frac{4}{r}\right) = 16$$

$$\leftarrow r = 16 - \frac{4}{r} \Rightarrow \frac{r^2 - 4}{r} = 16$$

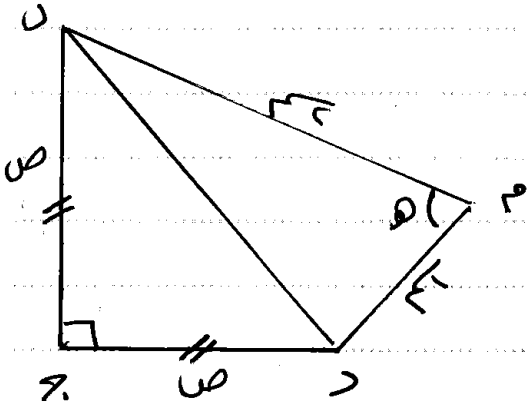
$$r^2 - 4 = 16r \Rightarrow r^2 - 16r - 4 = 0$$

بتعويضنا في ه

$$\frac{r^2 - 4}{r} \times \pi = 2$$

$$r = \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - 4}$$

④ ص ١٤٤



وعمدً الشكل المجاور الذي يمثل
الشكل الرباعي م ن ج د، الذي فيه
الضلع م ن وطوله ٤م وفيه م د
ثابت طوله ١٠م، إلا ان وضعه
متحول عكسه ان يدور في مستوى
حول النقطة م، أما الزاوية د ج ن
فهي قائمة، والضلعان ج د، ج ن
متطابقان دوماً، بعد قياس الزاوية
(هـ) التي تجعل مساحة الشكل الرباعي
عندها أكبر ما يمكن.

الحل

تقرباً ان $ص = ٥ = ٥$

م: مساحة الشكل الرباعي

$$= \text{مساحة } \triangle م ن د + \text{مساحة } \triangle م ن ج$$

$$= \frac{1}{2} \times ٥ \times ٤ + \frac{1}{2} \times ٥ \times ١٠$$

$$= ١٢.٥ + ٢٥ = ٣٧.٥$$

نطبقه فيثاغورس على $\triangle م ن د$

$$(٥) = ٤^2 + ص^2 = ٢٥ + ص^2$$

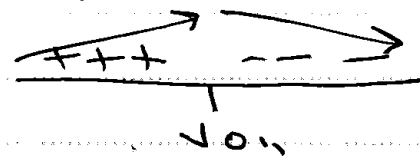
← تابع

⑧ ص ١١٣

وصنع للأجهزة الكهربائيّة فيتحس
جهازاً سنوياً يسبق كل جهاز بسعر
(٢٠٠ - ١٠٠) ديناراً، فإذا
كانت تكلفة إنتاج هذه الأجهزة
(٢٠٠ + ٥٠) ديناراً، فكل جهازاً
فيتحس المصنع لتحقيقه أكبر ربح
على سنوياً

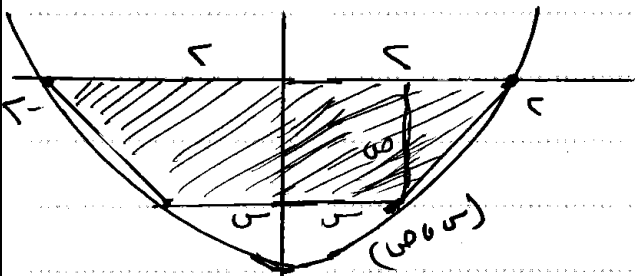
الحل

س = عدد الاجهزه
الربح = الايراد - التكلفة
ر(س) = س(٢٠٠ - ١٠٠) -
(٢٠٠ + ٥٠)س
ر(س) = ١٠٠س - ١٠٠س - ٢٠٠ - ٥٠س
= ١٥٠س - ١٠٠س - ٢٠٠ - ٥٠س
ر(س) = ١٥٠س - ١٠٠س - ٢٠٠ - ٥٠س
= ٥٠س - ٢٠٠ = ٥٠(س - ٤)



تابع احل

١٠) $\frac{1}{2} \times 4 = 2$
 جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف
 عليه رسمه تحت محور السينات بحيث
 تكون احدى قاعدتيه على محور السينات
 ورأسه الاخران على منحنى الدائرة
 (مساحة) = $s - e = 2$ انظر الشكل



$s - e = 2$
 $s = 2 + e$ ← نقطة تقاطع منحنى مع السينات
 مساحة شبه المنحرف
 $\frac{1}{2} \times (\text{مجموع القاعدتين}) \times \text{الارتفاع} =$
 $\frac{1}{2} \times (s + e) \times e =$
 لكنه $s = 2 + e$ الآن الارتفاع موجب
 لذلك تكون $s = 2 + e$

$$\frac{1}{2} \times (2 + e + e) \times e = 4$$

$$\frac{1}{2} \times (2 + 2e) \times e = 4$$

$$e + e^2 = 4$$

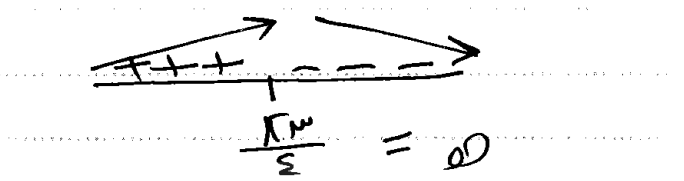
$$e^2 + e - 4 = 0$$

$$e = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

عند $e = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$
 عند $e = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$
 م $(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2})$

← $u = \sqrt{v}$ من
 ونظيره كما نون صيب القام على
 $\Delta u = 0$
 $(v) = e^2 + 2e - 4 = 0$ حياها
 $e = 0$ حياها
 $\frac{e - 0}{2} = 0$ عوضا
 في م

$\frac{1}{2} \times (0 + 0) + 0 = 0$
 $\frac{1}{2} \times (0 + 0) + 0 = 0$
 $\frac{1}{2} \times (0 + 0) + 0 = 0$
 ← حياها + حياها =
 حياها = حياها ← حياها = 1
 ← $\frac{\pi \times 3}{2} = 0$



$\frac{1}{2} \times (0 + 0) + (\frac{\pi \times 3}{2} \times 0 - 0) = 0$
 $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 4 - 0) =$
 $\frac{1}{2} \times (\frac{4}{2} + 0) =$

السؤال الثالث من ٢١٥

إذا كان $u = \sqrt[3]{x-2}$ من $x=7$ إلى $x=8$
 من u عند $x=7$ ما يأتي
 (أ) قيم u من الحرجة
 (ب) قترات u التي أكبر من u
 (ج) القيم القصوى

الحل
 (أ) $u = \sqrt[3]{x-2}$ من $x=7$ إلى $x=8$

من u عند $x=7$ ما يأتي

$$\frac{1}{3} = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow (x-2)^3 = \frac{1}{27}$$

$$x-2 = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

المقام = $\sqrt[3]{x-2} = \frac{1}{3}$

من u عند $x=7$ ما يأتي

$$u = \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}-2} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$



قيم u من الحرجة $u = \sqrt[3]{x-2}$ من $x=7$ إلى $x=8$
 عند $x=7$ قيمة u هي $u = \sqrt[3]{7-2} = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

السؤال الرابع

عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

الحل

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

من u عند $x=7$ ما يأتي $u = \sqrt[3]{5}$

السؤال السادس

وزارة (٢٠١٥ ص ١٥٦)

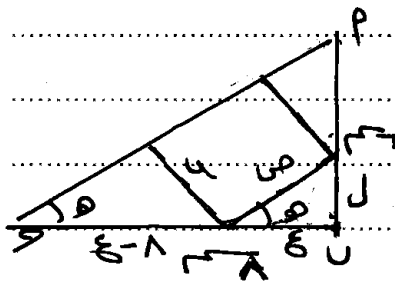
محلل ص ١٧٧ (٢٠١٧) ليدويه

السؤال السابع

١٢ م مثلث قائم الزاوية في ١١ م

١٢ م = ١٢ م = ١٢ م = ١٢ م

مسطح يقع رأسه من رؤوسه على
وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل
منهما على ضلعي القاعدة، جد ابعاد المستطيل
التي تحصل مساحته أكبر ما يمكن



$m = s \times x$

كذلك $\frac{L}{8} = \frac{x}{12}$

$\frac{L}{8-x} = \frac{x}{12}$

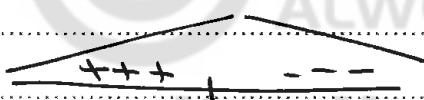
$s \times x = L(8-x)$

ومن اثناءه $\frac{L}{8} = \frac{x}{12} \Rightarrow L = \frac{2}{3}(8-x)$

$m = \frac{2}{3}(8-x) \times x = \frac{2}{3}(8x - x^2)$

$m = \frac{2}{3}(8x - x^2)$

$8x - x^2 = 0$



$L = \frac{2}{3} \times \frac{8-x}{2} = \frac{8-x}{3}$

$m = \frac{1}{2} \times (8-x) \times \frac{8-x}{3} = \frac{(8-x)^2}{6}$

السؤال الثامن

مثلث الشكل متخفف بالمتجه الأوي
بأكثر الحدود (١٥) جد:

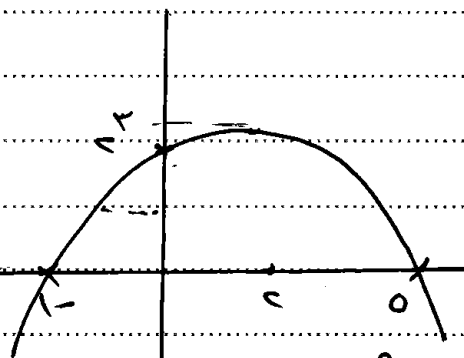
(٢) النقطه الحرجه

(٣) قتراته الزاوية والتفاضل

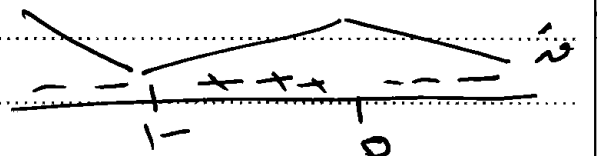
(٤) قيمته التي عندها قيمه أقصى محليه

(٥) قتراته المتغير

(٦) نقطه الانعطاف



النقطه الحرجه [٥٠٦١]



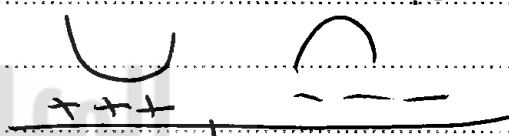
قترانه [٥٠٦١]

متساوية (١٥٠٠) ، (١٥٠٠)

عند $s = 1$ قيمه صغرى محليه

$s = 0$ قيمه عظمى محليه

فتره من المماسات الحاده موجب
المنفرجه سالبه



مقداره على (١٥٠٠) لا يصل الى ١٥٠٠

عند $s = 0$ نقطه انعطاف

السؤال لهذا

١) تتحرك نقطة ما على سطح مستقيم
حيث ان مسافتها الى الأضلاع التي
تقطعها في زمن قدره (ن) ثانياً
هي فان (ن) = ٦ ن - ٢ ن + ١٣
او بعد مسافة عند ما يصلح لبناء مربعاً

اقل

$$8(ن) = ١٢ ن - ٢ ن^٣$$

$$١٢ ن - ٢ ن^٣ = ٨$$

$$٦ ن - ن^٣ = ٤$$

$$٢٩ = ١٣ + ٨ - ٤٧٦ = ٢٩$$

الاجواب (ب)

٢) معدل تغير حجم كره بالنسبة الى
محول نصف قطرها عندما يكون محول
نصف قطرها ٣

اقل

$$2 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

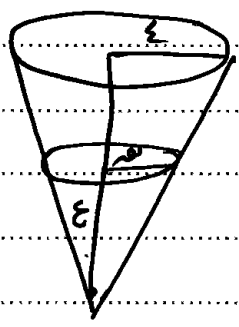
$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 2$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 2$$

$$\pi r^3 = \frac{3}{2}$$

الاجواب (د)

٣) دعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه
الى ارضه ارتفاعه ١٦ م، ومحول نصف
قطر قاعدته ٤ م، صب الماء معدل
فا ولد معدل تغير ارتفاع الماء فيه
في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء ٨ م



$$\pi r^2 = \frac{25}{25}$$

$$\frac{r^2}{25} = \frac{25}{25}$$

$$r = 5$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

من اقل

$$\frac{r}{5} = \frac{h}{16}$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{5}\right)^2 h$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{3} \times \frac{r^2}{25} \times h$$

$$\frac{2}{\pi} \times 75 = r^2 h$$

$$\frac{2}{\pi} \times 75 = r^2 h$$

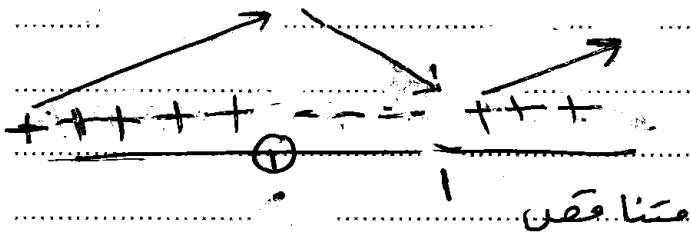
$$\frac{1}{\pi} = \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{25}$$

الاجواب (پ)

$$\frac{c}{s} - \frac{c+t}{s} =$$

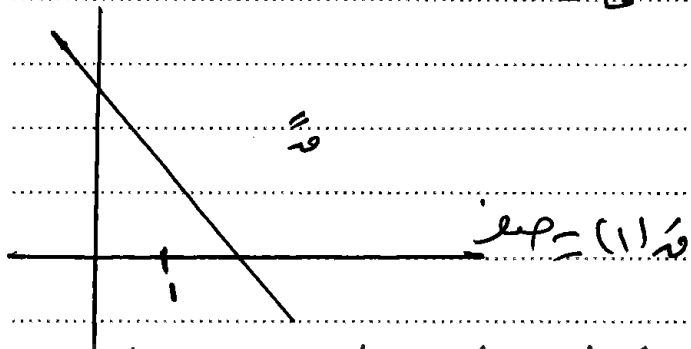
$$= \frac{c - (c+t)}{s} =$$

$c = \sqrt{c+t}$ $c = s$ $t = 1$
 $s = 1$ $s = 1$ $s = 1$



متناقص (١٥٠) اجواب (د)

٧) الشكل على صحتي هـ (س) اذا كان للأقتران هـ نقطة حرجية عند (١، ١) فان هـ (١) هي صفة



هـ (١) < صفة صفة صفة
 هـ (١) صفة صفة صفة
 الجواب (د)

٤) اذا كان هـ (س) = ١٢ + ٣(٥-٤) س
 فان صميم م التي تجعل صحتي للأقتران مقصراً للافضل

هـ (س) = ١٢ + ٣(٥-٤) س
 هـ (س) = ١٢ + ٣(٥-٤) س

$c - 2 > 0 \Rightarrow c > 2$
 اجواب (ب)

٥) اذا كان لصحتي الأقتران هـ (س) = ٣ حاء س نقطة الخطاف عند س = $\frac{\pi}{2}$ فان صلي المماس عند هـ

صلي المماس = هـ (س)
 = $\frac{\pi}{2}$
 هـ (س) = $\frac{\pi}{2}$
 =

اجواب (پ)

٦) هـ (س) = $\frac{1 + \sqrt{c} - s}{s}$

فان صحتي هـ متناقص ي لثمة

اكل هـ (س) = ١ - $\frac{1}{s} + \frac{1}{s}$
 هـ (س) = $\frac{1}{s} - \frac{1}{s}$

$$2 = (16 - s)(s - 3) \times s$$

$$2 = (16s - 48 - s^2 + 3s) \times s$$

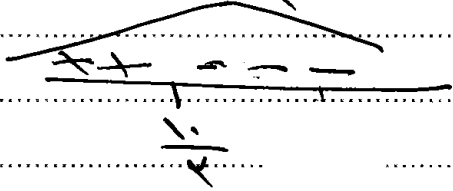
$$2 = 16s^2 - 48s - s^3 + 3s^2$$

$$2 = 19s^2 - 48s - s^3$$

$$s^3 - 19s^2 + 48s - 2 = 0$$

$$(s - 1)(s - 10)(s - 19) = 0$$

$$s = 1 \text{ or } s = 10 \text{ or } s = 19$$



$s = \frac{1}{2}$ الجواب (٥)

٨) (٥) = $\sqrt{16 - s}$ $s = 3$ $[16 - 9] = 7$
 فان احد ابعدي النقطة المحرمه هي

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

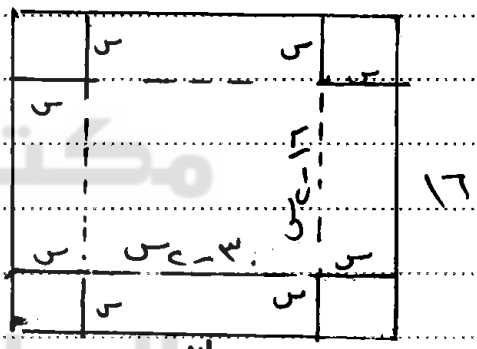
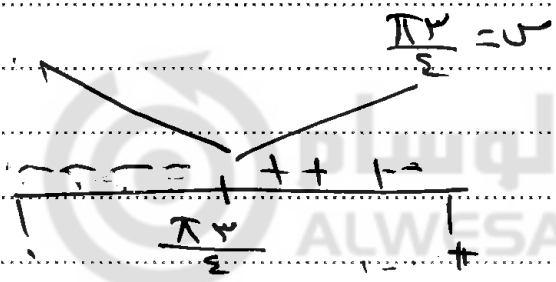
المقام = $s = 3$ \Rightarrow اعمال
 (٥) = النقطة المحرمه

الجواب (ج)

٩) يراد عمل عليه فتوصه من

الاعلى من قطعة كرتون مستطيلة
 الشكل ابعادها ١٦سم ، ٣سم وذلك
 بقص مربعات متساوية من زواياها
 الاربعة طول كل منها (س) وحدة
 ثم طي الجوانب للأعلى فاصبحت
 س اتي تحصل حجم الطبقه التي فاعليه

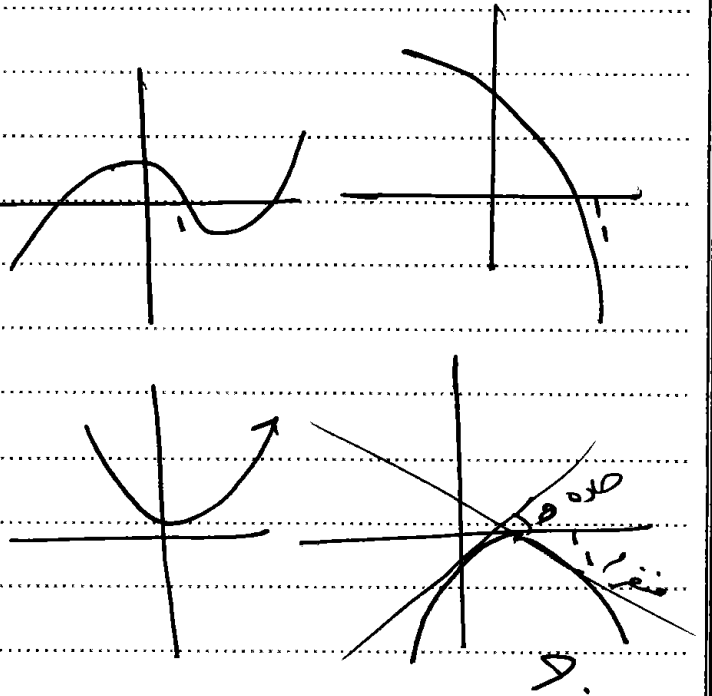
١) (٥) = $s = 3$ \Rightarrow $16 - s = 13$
 فان $[16 - 9] = 7$ فان $s = 3$
 التي يكون عندها $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$
 الكلي
 (٥) = $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$
 $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$



(٥) = $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$
 فان $[16 - 9] = 7$ فان $s = 3$
 التي يكون عندها $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$
 الكلي
 (٥) = $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$
 $s = 3$ \Rightarrow $16 - 3 = 13$

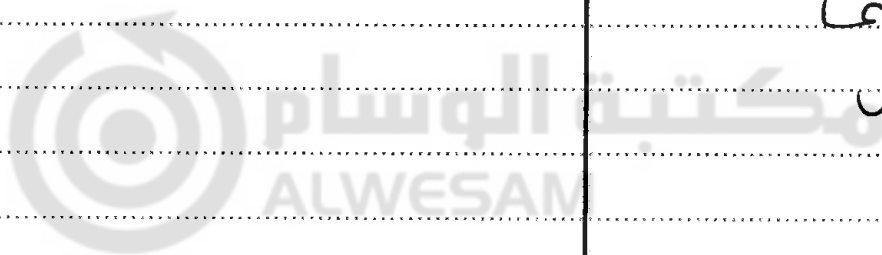
(١١)

أي منحنيات في الشكل عيّن رسم
الأقتران f الذي عيّن في (١٠) \leftarrow
في (١١) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.



في (١٠) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
المنحنى هو صواب (المنحنى هو صواب).
في (١١) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
رسم زاوية منفرجه

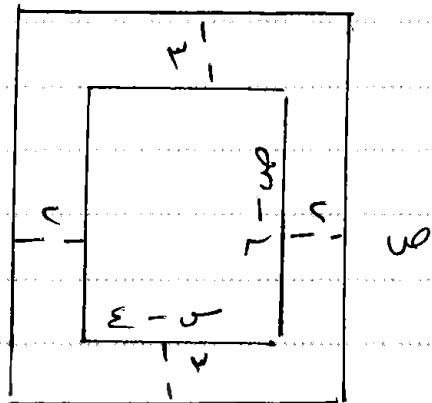
في (١١) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
مقرر للافضل
(١١)



أُسْئَلَةُ الوِزَارَةِ

① وزارة (٢٠٠٨) شَوِيح

يراد طباعة اعلان على ورقة مستطيلة الشكل بحيث يكون عرضها كل من الارتفاعين في رأس الورقة واسفلها (٣) سم وفي كل من الجانبين (٤) سم ، اذا كانت مساحة المنطقة لطبوعة ساوي (١٥٠) سم^٢ ، فجد البعد الورقة التي صاحتها اصغر ما عليه ، وعكليه استعمالها للطباعة .



نفرض البعد الورقة هي $س$ ، $ص$ ،
البعد الورقة لطبوعة هي
 $٤ - س$ ، $٦ - ص$

$$٣ = ٥ \times ٥$$

مساحة المنطقة لطبوعة = ٣

$$١٥٠ = (٤ - س) (٦ - ص) = ١٣$$

$$\leftarrow \frac{١٥٠}{٤ - س} = ٦ - ص$$

$$٦ + \frac{١٥٠}{٤ - س} = ص$$

$$٣ = ٥ \times (٦ + \frac{١٥٠}{٤ - س})$$

$$= ٦ + \frac{٥ \times ١٥٠}{٤ - س}$$

$$٣ = ٦ + \frac{٥ \times ١٥٠ - ١٥٠(٤ - س)}{(٤ - س)^٢}$$

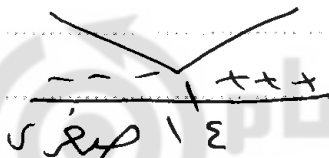
$$= \frac{٧ - ١٥٠ + ١٥٠س - ٦٠٠ + ٦٠٠س}{(٤ - س)^٢}$$

$$= \frac{٧ - ٦٠٠ + ١٢٠٠س - ٦٠٠}{(٤ - س)^٢}$$

$$\frac{٦٠٠}{(٤ - س)^٢} = ٦ \leftarrow ٦ = \frac{٦٠٠}{(٤ - س)^٢}$$

$$١٠ = (٤ - س)^٢$$

$$٤ - س = \pm ١٠ \Rightarrow ٥ = ٤ - س$$

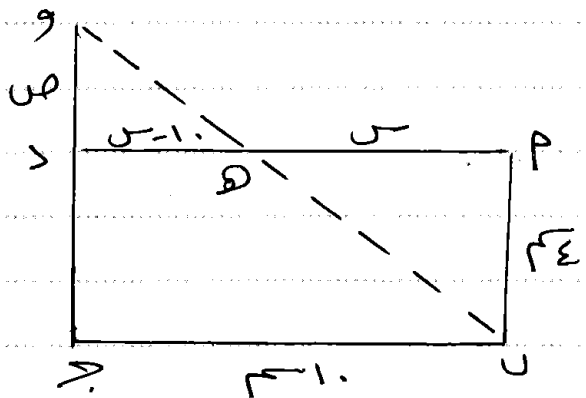


$$٦ + \frac{١٥٠}{٤ - ١٤} = ٦ + \frac{١٥٠}{٤ - ٥} = ص$$

$$١ = ١$$

③ وزارة (٢٠١٨) صفيحة

UP عدد متصل فيه $UP = \epsilon$
 $U = \epsilon$ ، قد اضع ϵ على
 استقامته اى (و) ثم وصل
 U و قطع اضع P في h ،
 فاذا كان $P = h$ ، $S = \epsilon$ ، $D = \epsilon$
 نجد تحتى S ، ه اللتين يتلان
 مجموع صافى التلئين دهو
 P هون اصغرا عليه



نغرض ان $\epsilon =$ مجموع صافى التلئين دهو P هون
 صافه دهو $= \frac{1}{0.7} (S-1) \times \epsilon$
 صافه P هون $= \frac{1}{2} \times S \times \epsilon = \frac{1}{2} S \epsilon$
 $\epsilon = \frac{1}{2} (S-1) \times \epsilon + \frac{1}{2} S \epsilon$
 التلئان دهو P هون فتاها ن
 $\frac{\epsilon}{S} = \frac{\epsilon}{1}$

$S \epsilon = \frac{1}{2} (S-1) \epsilon$
 $\frac{1}{S} \epsilon = \frac{1}{2} (S-1) \epsilon$



$\epsilon + \frac{1}{0.7} (S-1) \times \frac{1}{2} \epsilon = \frac{1}{2} S \epsilon$

$\epsilon + \frac{1}{2} (S-1) \epsilon = \frac{1}{2} S \epsilon$

$\epsilon + \frac{1}{2} (S-1) \epsilon - \frac{1}{2} S \epsilon = \frac{1}{2} S \epsilon - \frac{1}{2} S \epsilon$

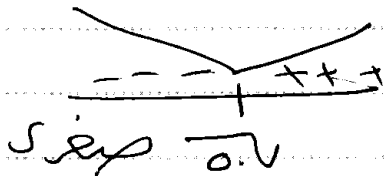
$\epsilon + \frac{1}{2} (S-1) \epsilon - \frac{1}{2} S \epsilon = 0$

$\epsilon + \frac{1}{2} (S-1) \epsilon - \frac{1}{2} S \epsilon = 0$

$\epsilon = \frac{1}{2} S \epsilon - \frac{1}{2} (S-1) \epsilon$

$\frac{1}{2} \epsilon = \frac{1}{2} S \epsilon - \frac{1}{4} (S-1) \epsilon$

$\frac{1}{2} \epsilon = \frac{1}{4} (S-1) \epsilon$



$\frac{1}{2} \epsilon = \frac{1}{4} (S-1) \epsilon$

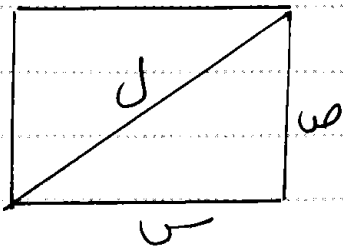
$\frac{1}{2} \epsilon = \frac{1}{4} (S-1) \epsilon$



المعلم: ناجح الجمزاوي

٤) وزارة (٢٠٠٩) صيفية

فتصل مسامته ١٦ سم،
بعدية عند ما يكون طول قطره
اصغر فاعليه .



اكل

$$ل = ص + س = ١٦$$

$$س + ص = ١٦ \rightarrow ص = ١٦ - س$$

$$ص = \frac{٢٥٦}{س} \text{ نحو مبراهين ل}$$

$$ل = س + \frac{٢٥٦}{س}$$

$$ل \times س = س^2 + ٢٥٦$$

$$\frac{٥١٢}{س} = س^2 + ٢٥٦ \rightarrow س^2 - \frac{٥١٢}{س} = ٢٥٦$$

$$\frac{٥١٢}{س} - ٢٥٦ = س^2 - ٢٥٦ = س$$

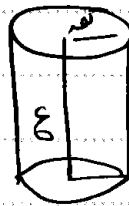
$$س = س$$



$$ص = \frac{١٦}{س} = \frac{١٦}{٥} = ٣.٢$$

٣) وزارة (٢٠٠٩) شتوية

الطوانة دائرية قاعدة مجموع محيط
قاعدتها وارتفاعها يساوي ٦٦ سم
احسب ارتفاع الطوانة الذي
يجعل حجمها أكبر فاعليه .



اكل

$$ع = \pi ر^2$$

$$٦٦ = ع + \pi ر$$

$$ع = ٦٦ - \pi ر$$

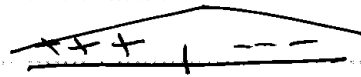
$$ع = \pi ر^2 = ٦٦ - \pi ر$$

$$\pi ر^2 - \pi ر = ٦٦$$

$$١٣٢ = \pi ر^2 - \pi ر$$

$$= \pi ر (ر - ١)$$

$$ر = \frac{١٣٢}{\pi}$$



$$\frac{١٣٢}{\pi}$$

$$ع = \frac{١٣٢}{\pi}$$

$$ع = \frac{١٣٢ \times \pi - ٦٦}{\pi}$$

⑤ وزارة (٢٠١٠) شوية

إذا كان الإنتاج اليومي لصنع هردي
 من طناً من نوع هردي جيد، س
 طناً من نوع هردي الأقل جودة
 فإذا كانت $ص = ع - ٥٥$ $س = ١٠$
 وكان سعر طن من هردي الجيد
 لياوي مثلي سعر طن من هردي
 الأقل جودة، فجد القيمة التي
 ينتجها مصنع يوفياً من كل نوع متى
 محققه أكبر إيراد.

الحل

نظر من سعر طن هردي الأقل جودة = ل
 ← سعر طن هردي الجيد = س ل
 إيراد مصنع = عدد سلع $ص \times$ سعر $ص$
 + عدد سلع $س \times$ سعر $س$

$$ص \times ل + س \times س =$$

$$ص ل + س س = (١٠) س$$

$$لكن $ص = ع - ٥٥$ $س = ١٠$$$

$$(١٠) س = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$ل (ع - ٥٥) + (١٠) س =$$

$$س - ١٠$$

$$ل (ع - ٥٥) + (١٠) س =$$

$$س - ١٠$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

مع ل

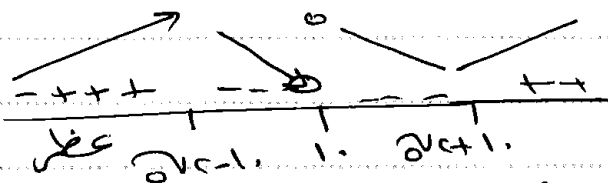
$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

تتم القانون العام

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$

$$د(س) = ل (ع - ٥٥) + (١٠) س$$



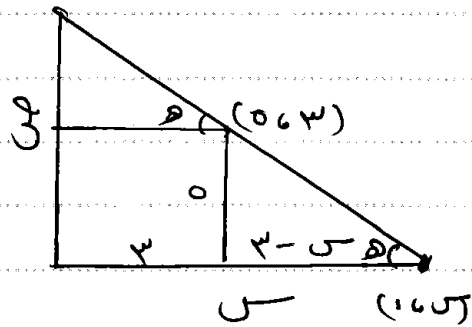
أكبر إيراد عند $س = ١٠$ $ع = ٥٦$

$$ص = \frac{٥٦ \times ٥٥ - ٤٠}{١٠} = \frac{٣٠٣٠ - ٤٠}{١٠} = \frac{٣٠٩٠}{١٠} = ٣٠٩$$

$$ص = ٣٠٩$$

٦) وزارة (٢٠١٠) صفيّة

جد مساحة مستقيم الذي يمر بالنقطة
(٣, ٥) ويقطع من اربع الأول في
المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته
أقل فأعليه



$$\text{مساحة مثلث} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5$$

$$\text{خط } h = \text{أوتار } h$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3-h}$$

$$\leftarrow 5 = \frac{5}{3-h}$$

$$\frac{5}{3-h} = \left(\frac{5}{3-h}\right) \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\frac{5 \times 5 - 5 \times (3-h)}{2(3-h)} = 6$$

$$5 \times 5 - 5 \times (3-h) = 12(3-h)$$

$$25 - 15 + 5h = 36 - 12h$$

$$10 + 5h = 36 - 12h$$

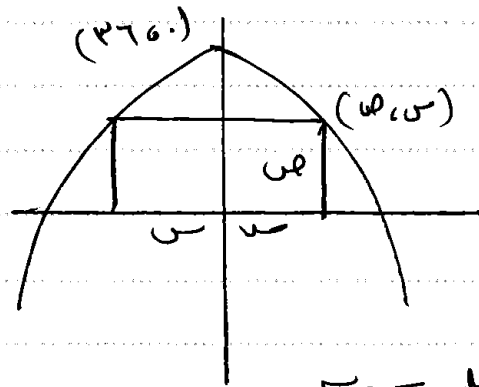
$$\frac{10}{17} = \frac{36-5h}{17} = \frac{36-5 \times \frac{10}{17}}{17}$$

$$5 - \frac{50}{17} = \frac{36-50}{17} = \frac{-14}{17}$$

$$5 + \frac{50}{17} = 5$$

٥) وزارة (٢٠١١) شتوية

جد لبيدي أكد مستطيل من صحن المساحة عليه راحة قوفه محور السنيات حيث تكون احدى قاعدتيه اعلى محاور السنيات وراساه الاخران على منحني د(س) = ٣٦ - س^٢



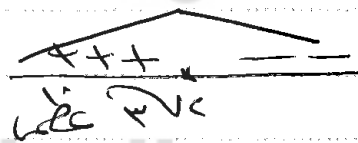
طول المستطيل = س
عرض المستطيل = س
٢ × س × س = ٤

٣٦ - س^٢ = س
٣ = س(٣٦ - س)
٣ = ٣٦س - س^٢
١ = ١٢ - ٤س

١٢ - ٤س = ١
٤س = ١١
س = ١١/٤

س = ١١ ± √١٢١ = ١١ ± ١١

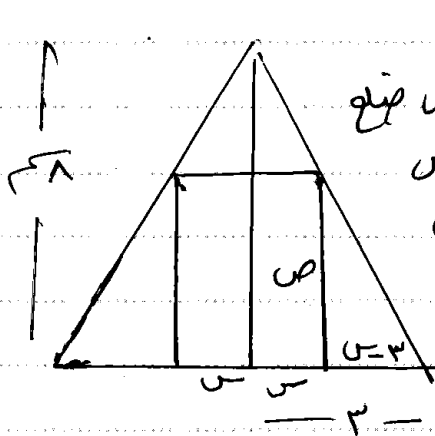
اكثر الياين سهل



س = ١٢ - ٣٦ = ٤

٨) وزارة (٢٠١١) صيفية

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦سم، وارتفاعه ٤سم، جاد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث وتقع كل من الرأسين الاخرين على ساق المثلث جد لبيدي المستطيل لتكون مساحته اكبر فاعلمه



اكل
نفرض ان طول ضلع المستطيل = س
عرضه = س

٣ × س = ٤
٣ = ٤ / س
س = ٤ / ٣

٣ × س = ٤

س = ٤ / ٣

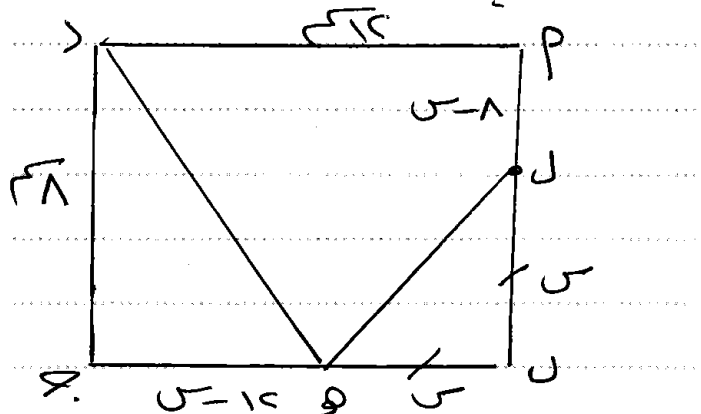
س = ٤ / ٣



البيدي الاخر
س = ٤ / ٣
س = ٤ / ٣

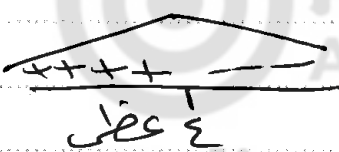
⑩ وزارة (٢٠١٢) صيفية

في الشكل المجاور UP حد وتظل
فيه $UP = ٨$ م ، $PU = ١٢$ م
عُيِّنَت النقطتان L ، H على الضلعين
 UP ، UP على الترتيب بحيث كان
 $UL = ٨$ م ، $UH = ١٢$ م طول UL الذي
يجعل مساحة الشكل الرباعي $PLHD$
أكبر فأعكبه



مساحة الشكل $PLHD$
= مساحة UPH - (مساحة ΔULH)
+ (مساحة ΔPHD)

$$\begin{aligned} & (٨ \times (١٢ - ٨) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times ٨ \times ٨) - \frac{1}{2} \times ٨ \times (١٢ - ٨) \\ & = (٨ \times ٢ + ٣٢) - ١٦ \\ & = ٤٠ - ١٦ = ٢٤ \end{aligned}$$

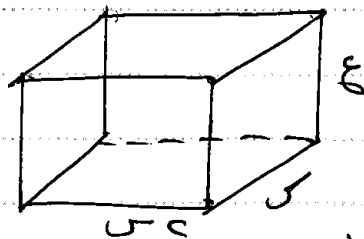


$٨ = ٨$ م
 $٢٤ =$
تكون مساحة الشكل أكبر فأعكبه

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

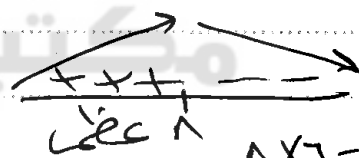
صندوق على شكل متوازي وتظل
قاعدته على شكل وتظل طول
ضلعي عرضيه ، اذا كان مجموع ارتفاع
الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٢٤
فجد البعد الذي يجعل حجمه أكبر
فأعكبه

تفرض ان عرض الصندوق = $س$
ارتفاعه = $ع$ طول = $٢٤ - س$



$$\begin{aligned} & ع = الطول \times العرض \times الارتفاع \\ & = (٢٤ - س) \times س \times ع \\ & لكن الارتفاع + محيط القاعدة = ٢٤ \\ & $ع = ٢٤ - س$ \\ & $ع = ٢٤ - س$ ← \end{aligned}$$

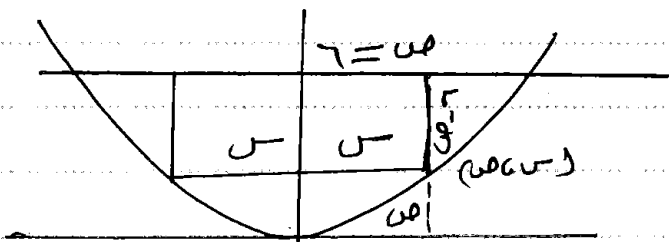
$$\begin{aligned} & ع = (٢٤ - س) \times س \times (٢٤ - س) \\ & = ٣٦٨٨ - ٣٦٨س + ٣س^٣ \\ & ٣٦٨٨ - ٣٦٨س + ٣س^٣ = ٠ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & ارتفاعه = $٢٤ - ١٦ = ٨$ \\ & $٢٤ =$ \\ & طول = ١٦ عرض = ٨ \end{aligned}$$

١٠ وزارة (٢٠١٣) شتوية

هد أكبر فتصل في لكل
النكبي الذي يقع أساس
من رؤوسه على منحني إهلاقه
ع = ه = س و يقع أساس
أخران على استقيم ه = ٦

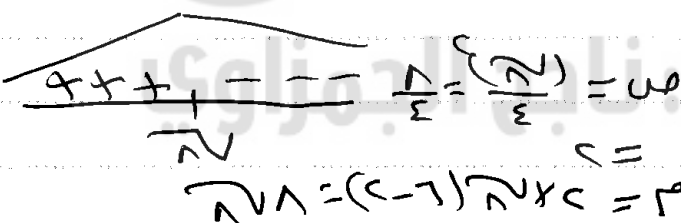


مساحة فتيل = $s \times (h - 6)$
لكل ع = ه = س $\rightarrow \frac{c}{4} = h$

$3 = s \times (h - 6)$

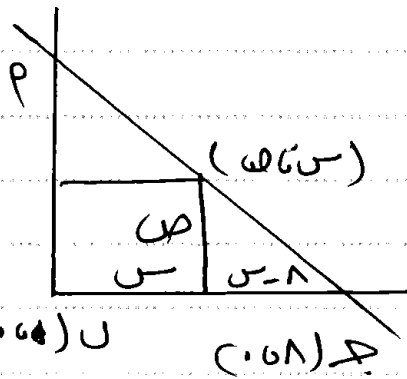
$\frac{c}{4} - 15 =$

$3 = \frac{c}{4} - 15$
 $18 = \frac{c}{4}$
 $72 = c$



١١ وزارة (٢٠١٣) صيفية

اعقد على شكل المجاور الذي يمثل
المثلث UP القائم الزاوية في
U، مد مساحة أكبر فتيل
عليه مساحة داخل المثلث.



نفرض ان نقطة (س، ه)

طول فتيل = س
عرض فتيل = ه

$s \times h = 3$

من تشابه المثلثان

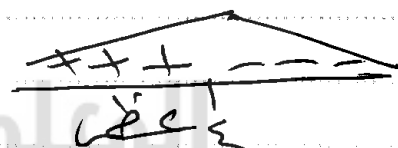
$\frac{h}{s-a} = \frac{s}{a} \rightarrow \frac{h}{a} = \frac{s}{a} \times (s-a)$

$h = \frac{3}{s} \times (s-a)$

$3 = \frac{3}{s} \times (s-a) \times s$

$1 = (s-a)$

$1 = s - a \rightarrow a = s - 1$



$3 = \frac{h}{2} \times (c-1)$

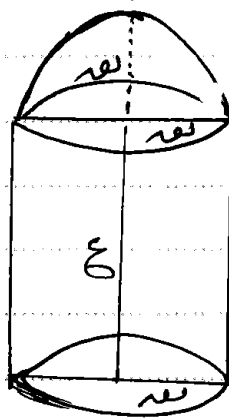
$6 = (c-1) \times h$

$12 = 6 \times 2 = 6$

١٣) وزارة (٢٠١٤) متوية

حافضة للماء الساهي تكون من
 مزأين الجزء الأول وعاد اسطواني
 الشكل نصف قطر قاعدته (هـ)
 وارتفاعه (ع) والجزء الثاني غطاء
 على شكل نصف كره نصف قطرها
 يساوي نصف قطر الاسطوانة
 كما في الشكل ، اذا كان حجم الحافضة
 $\pi \times 7^2 \times 2$ دسم^٣ حدد كلاً من نصف القطر
 والارتفاع اللذان يحصلان بالامة
 الكلية لسطح الحافضة اقل ما يمكن

اكل



$$\pi \times 7^2 \times 2 = 2$$

$$\pi \times 7^2 \times 2 = \pi \times 7^2 \times 2$$

$$+ \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 7^3$$

$$\left(\frac{4}{3} \times 7^3 - 7^2 \times 2 \right) = 2 \times \pi \times 7^2$$

$$\frac{4}{3} \times 7^3 - 7^2 \times 2 = 2 \times \pi \times 7^2$$

المساحة = مساحة لقاعدته + مساحة
 الجانبيات + مساحة سطح نصف
 الكرة

$$3 = \pi \times 7^2 \times 2 + \pi \times 7^2 + \frac{1}{2} \times \pi \times 7^2$$

$$3 = \pi \times 7^2 \times \left(2 + 1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$3 = \pi \times 7^2 \times \frac{5}{2}$$

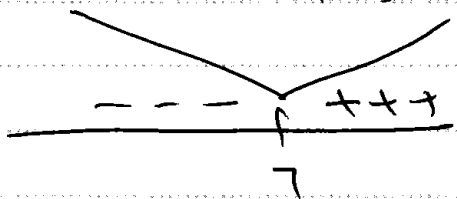
$$3 = \frac{\pi \times 7^2 \times 5}{2}$$

بالضرب في ٢

$$6 = \pi \times 7^2 \times 5$$

$$6 = \frac{5 \times \pi \times 7^2}{2}$$

$$7 = 7$$



صغرى عند هـ = 7

$$7 \times \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \times 7^3 = 2$$

$$7 = 2 - 1 = 1$$



١٥) وزارة (٢٠١٥) شكويه

المواناة دائرية قاعدة فعلقه نصف قطر قاعدتها (نصف) م وارتفاعها (ع) وعجزها (١٠٤) م نصف قطر قاعدة المواناة وارتفاعها اللذان يجعلان مساحة سطحها اكليه اقل فاعلميه

الحل

المساحة م = ٣ الجانبيات + م لقاعدتيه
 $3 = \pi r + \pi r^2$

$2 = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$\frac{0.4}{r} = 2$

$3 = \pi r + \frac{0.4}{r} \times \pi r^2$

$\pi r + \frac{\pi \cdot 1.6}{r} = 3$

$\pi r + \frac{\pi \cdot 1.6}{r} = 3$

$\frac{\pi \cdot 1.6}{r} = 3 - \pi r \Rightarrow r = \frac{\pi \cdot 1.6}{3 - \pi r}$

$\frac{1.6}{r} = \frac{3 - \pi r}{\pi} \Rightarrow r = \frac{1.6 \cdot \pi}{3 - \pi r}$

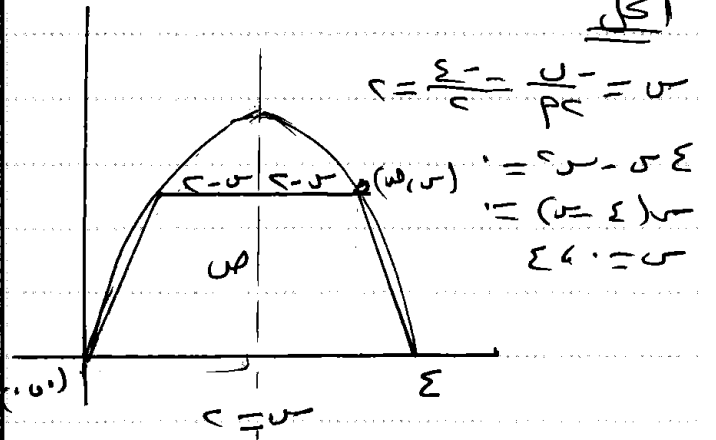


$h = \frac{0.4}{r} = \frac{0.4}{\frac{1.6 \cdot \pi}{3 - \pi r}} = \frac{0.4(3 - \pi r)}{1.6 \cdot \pi}$

١٤) وزارة (٢٠١٤) صفيه

جد البعاد شبه الخرف اذني عليه راحة في اربع الاول حيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات ورأسان اخران على محض الأفقيان في (٥) = ٤ = ٥ = ٥ لتكون صاحته اكبر فاعلميه

الحل



$5 = \frac{y}{x} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 1$

$5 = \frac{y}{x} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 1$

$5 = \frac{1}{2} \times (8 + (8 - 5) \times 2) \times h$

$5 = (8 - 5) \times (4 + 8 - 5) =$

$(3) \times (5) =$

$15 - 5 = 10$

$10 = 5 \times h \Rightarrow h = 2$

$h = 2$

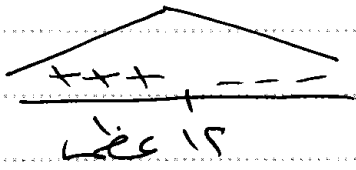


القاعدة العليا = $(8 - 5) \times 2 = 6$

$5 = \frac{1}{2} \times (8 + 6) \times 2$

القاعدة السفلى = ٤

الارتفاع = $2 = \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$

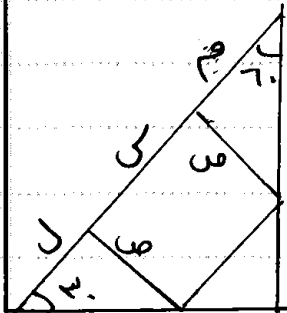


$$ص = \frac{\sqrt{3}}{2} (14 - 10) = \sqrt{3}$$

$$م = 12 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

١٦) زيارة (٢٠١٥) صيف

بعد ساعة أكل وتبديل عليه راحة
وأخذت فطنت قائم الزاوية طول وركه
٤ سم وقصبا من احدى زواياه ٣٠°
حيث تقع احدى قاعدتي المبتطل على
الوتر ورأسه الاخران على ضلعي
القاعدة.



اكل

$$\frac{ص}{ل} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{3}$$

$$\leftarrow ل = 3\sqrt{3} = 5$$

$$\text{فا. } 6 = \sqrt{3} = \frac{ص}{م} \leftarrow م = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$$

$$ل + م + 3 = 14$$

$$\sqrt{3} \times 14 = 3\sqrt{3} + 5 + 3 + 6 = 14$$

$$3\sqrt{3} \times 14 = 3\sqrt{3} + 5 + 3 + 6$$

$$42\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 14 - 9 = 3\sqrt{3} + 5$$

$$= 3\sqrt{3} + 5$$

$$ص = \frac{\sqrt{3}}{2} (14 - 5) = 3\sqrt{3}$$

$$م = 5 \times 3 = 15 = \frac{\sqrt{3}}{2} (14 - 5) = 3\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (14 - 5) = 3\sqrt{3}$$

$$م = 15 = \frac{\sqrt{3}}{2} (14 - 5) = 3\sqrt{3}$$

$$14 - 5 = 9 \leftarrow 5 = 3$$



المعلم: ناجح الجمزاوي

نقدم لك بحبيبتنا

$$\frac{7}{1} = \frac{8}{8-1}$$

$$7 = (8-1) \cdot 8$$

$$7 = 8 \cdot 7 - 8 \cdot 8 \rightarrow 7 = 56 - 64$$

$$7 = 56 - 64 \rightarrow 7 = 8 \cdot \frac{7}{8}$$

$$8 = \frac{7}{8} (8-7)$$

$$8 = \frac{7}{8} \cdot 8 - 1 = 8$$

نعوض $8 = \frac{1}{2} \cdot 8$

$$8 = \frac{8-1}{2} \cdot 8$$

في الجيب

$$2 = 8 \left(\frac{8-1}{2} \right)$$

$$2 = 8 \cdot \frac{8-1}{2}$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

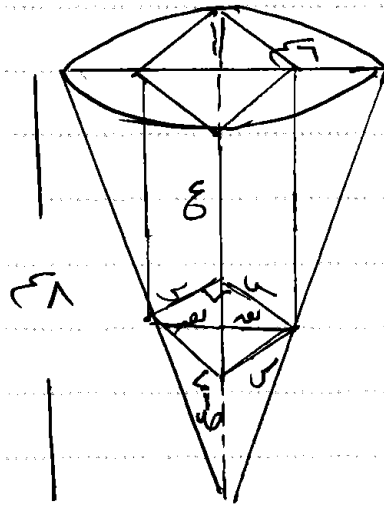
$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

$$2 = 8 \cdot \frac{7}{2} - 4 = 28 - 4 = 24$$

١٧) وزارة (٢٠١٦) متوية

جد حجم كوكب موشور (متور) رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل كليه وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (٦) وارتفاعه (٨) كم.



اكل

نقرب طول قاعده لوشور = s
ارتفاعه = h

حجم لوشور = مساحة لقاعده \times ارتفاع

$$2 = 8 \times s$$

نقرب طول المقطع عميقا قاعده = s
حجم قبة لوشور

$$2 = s + s = 2s$$

$$2 = s + s = 2s$$

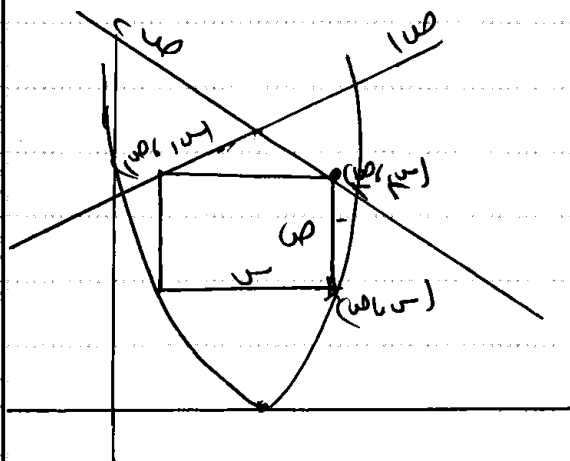
$$2 = s + s = 2s \rightarrow s = \frac{2}{2} = 1$$

١٨) وزارة صيفية (٢٠١٦)

يقع رأسان من رؤوس الخيط
المطل في الشكل الآتي على
مخني الأقران (س) = ص - ٥ + ٥ + ٩
ورأسه الآخران على الخطين

١٥ = س + ٥ ٥ = ص - ٨

مد يدني الخيط اللذين يجعلان
ساحة أكبر ما يمكن



٣ = س × س

الطول = س - ٥

١٥ = س + ٥ ١٥ - ٨ = س

س = ٧

الطول = ٧ - ٥ = ٢

س = ٧ - ٥ = ٢

س = ٧ - ٥ = ٢

س = ٧ - ٥ = ٢

س = ٧ - ٥ = ٢

٣ = س + س
= (٥ - س) (٥ - س)

= ٥ - ٥س + س - ٥س + س

= ٥ - ١٠س + ٢س

= ٥ - ١٠س + ٢س

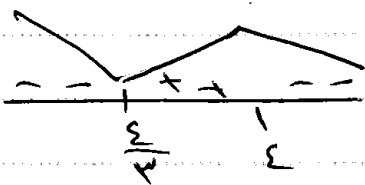
١ = ٥ - ١٠س + ٢س

÷ (٢)

١ = ١٦ + ٢س - ٥س

= (٤ - س) (٤ - س)

٤ = س ٤ = س



على عند س = ٤

س = طول = ٤ - ٤ × س = ٦ - ٤س

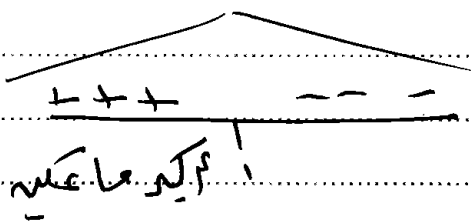
س = ٦ - ٤س

٥ = ٤ - ٤س + ١

العرف = ٤ - ٤س + ١

٣ =

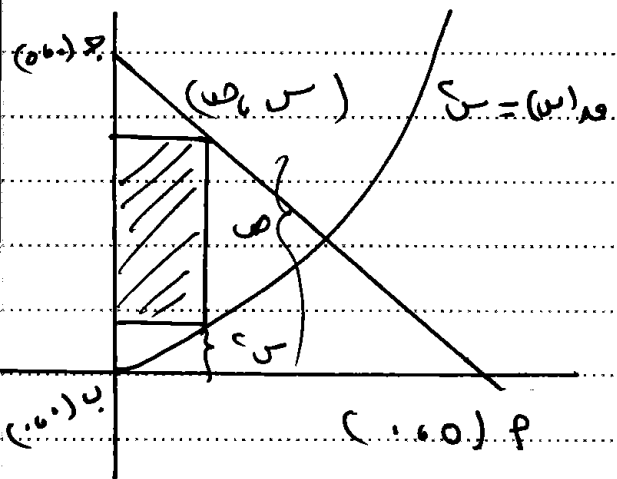
$$\begin{aligned}
 0 &= 3s^2 - 5 + 5c - 3 \\
 &= 3s^2 + 5c - 8 \\
 &= (3s + 5)(s - 1) \\
 1 &= s \times \frac{5}{3} = s
 \end{aligned}$$



$$3 = 1 - 5 + 1 - 3$$

وزارة (0.17) شوية

P من مثل قائم الزاوية احداثيات
 رؤوسه (0,0) و (1,0) و (0,1)
 و (0,0) رسم داخله متطوع
 ينطبق رأسان من رؤوسه على
 الضلع ب و واحد رأسيه الأخرين
 على الضلع P والرأس الآخر على
 منحني الاقتران فداس = س
 كما في الشكل الاتي، تجد مكرر
 مساحة مكنه للـ طول الظل



جد معادلة التقيم P

$$ص = \frac{1-0}{0-1} = (0-s)$$

$$ص = 1 - (0-s) = 0 + s$$

$$م = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$= (ص - 0) \times (0 - ص)$$

$$= (0 - ص + 0 - ص)$$

$$= 0 - ص + 0 - ص = -2ص$$

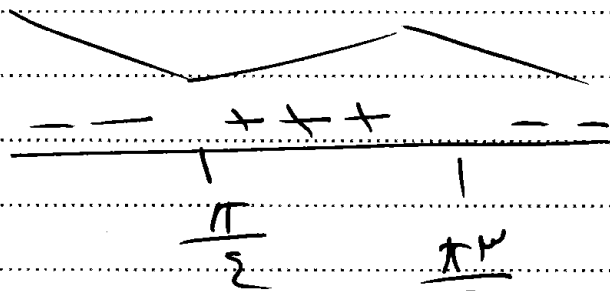
$$c \text{ مساحةها} = c \times h$$

$$= \pi \times 16 - c \times h$$

$$c' = 0 \Rightarrow c = 3 \text{ م} \Rightarrow \text{مساحةها} = 48$$

$$c = 0 \Rightarrow \pi = 0 \quad \text{أو} \quad c = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{c} = 0$$

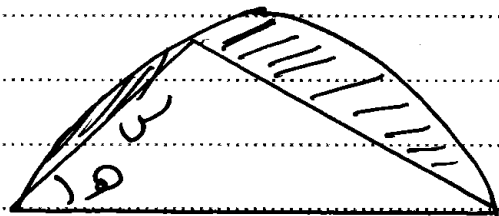
$$\frac{\pi}{2} = 0 \quad \frac{\pi}{2} = 0$$



$$\text{عند } \frac{\pi}{2} = 0 \text{ المساحة} = 48$$

فكرة (١٧) مساحت

رسم المثلث OP داخل نصف دائرة قطرها (R) بحيث يقع الرأسان D و E على ضائتي القطر، والرأس الآخر (M) يمر M على منحنى نصف الدائرة كما في الشكل المجاور، فجد ضامن الزاوية (θ) التي تجعل مساحة المنطقة المظلمة اصغر ما يمكن.



θ

مساحة المنطقة المظلمة

$$= \text{مساحة } \frac{1}{2} \text{ الدائرة} - \text{مساحة مثلث}$$

$$= \frac{1}{2} \times \pi \times R^2 - \frac{1}{2} \times R \times R \times \sin \theta$$

$$= \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$$

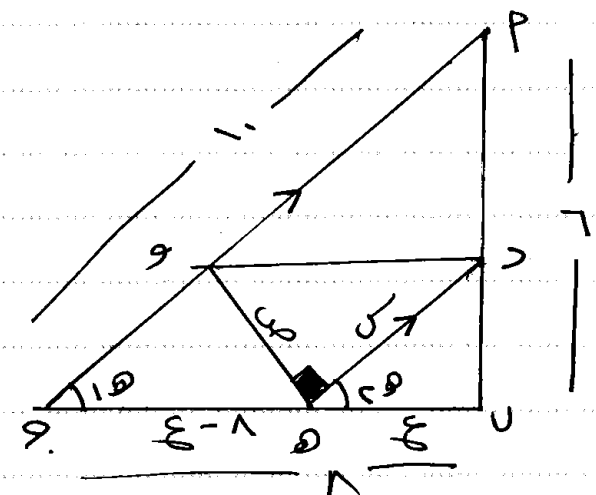
لكن $\text{مساحةها} = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$

$$\leftarrow \sin \theta = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{مساحةها} = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$$

وزارة (٢٠١٨) ثانوية جديد

عمل الشكل المجاور المثلث UP و U قائم الزاوية في B فيه $UP = ٣٦$ و $U = ٦٤$ ، وبداخله مثلث $دو$ قائم الزاوية في $هـ$ وتقع رؤوسه على اضلاع المثلث UP و U عمّا يان $دو \parallel UP$ ، جد أكبر حاصه قلمه للمثلث $دو$



$$\begin{aligned} \overset{c}{(UP)} + \overset{c}{(U)} &= \overset{c}{(P)} \\ 36 + 64 &= 100 \\ 100 &= 2P \\ 50 &= P \end{aligned}$$

$$\frac{ص}{٣٦-٦٤} = \frac{٧}{١٠} = ١٥$$

$$\boxed{(٣٦-٦٤) \frac{٧}{١٠} = ص} \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \text{حباها} &= \text{حباها} \\ \frac{ع}{٥} &= \frac{٤٨}{٥} \leftarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{ع \frac{٥}{٤} = ٥} \leftarrow ع = \frac{ع}{٥} \times ٥ \leftarrow$$

$$٣ \text{ مثلث} = \frac{١}{٤} \times ٥ \times ٥$$

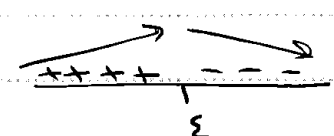
$$(٤-١) \frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{١}{٤} =$$

$$(٤-١) \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤} =$$

$$(٤-١) \frac{٣}{٤} =$$

$$= (٤-١) \frac{٣}{٤} = ٣$$

$$٤ = ع \leftarrow = ٤-١$$

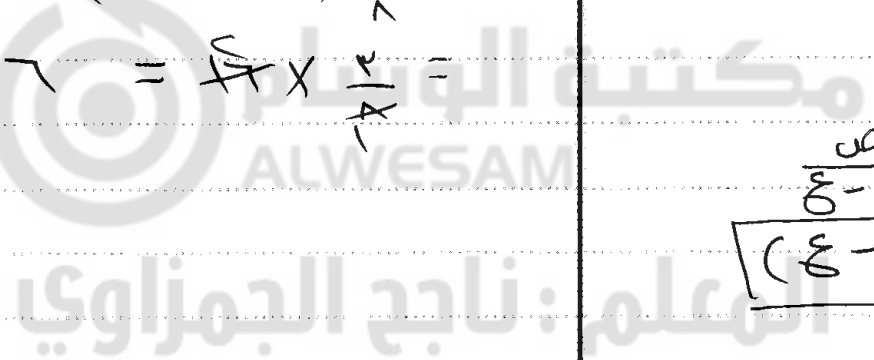


عند $ع = ٤$ البرهان

$$(٤-١) \frac{٣}{٤} = ٣$$

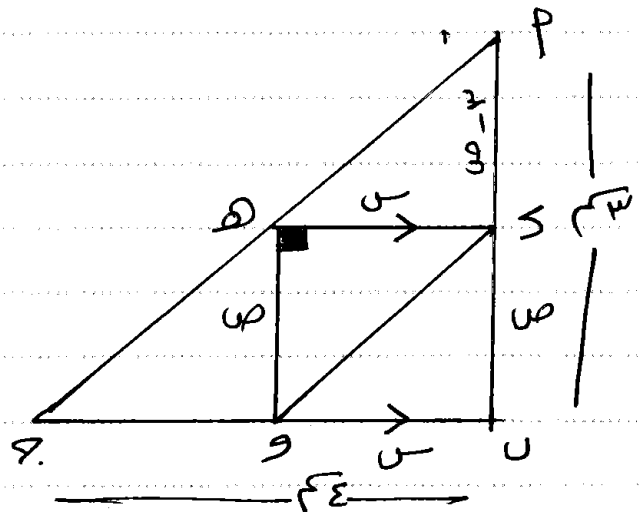
$$(١٦-٣٢) \frac{٣}{٤} =$$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} =$$



وزارة (٢٠١٨) شتوية قديم

على الشكل المجاور المثلث OP قائم الزاوية في N ، حيث $OP = 3$ و $ON = 4$ ، وبأخذ المثلث POH وهو قائم الزاوية في H وتقع رؤوسه على اضلاع المثلث OPN ، عتاً بان $OH \parallel PN$ ، حدد البرهان ممكنة للمثلث POH



نظراً ان $ON = 4$ ، $OH = 3$ ، $PN = 5$

3 لمثلث $POH = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$

المثلثان OPN و POH هما متشابهان

$$\frac{3}{4} = \frac{ON}{PN} = \frac{4}{5}$$

$$3 \times 5 = 4 \times 4$$

$$15 = 16$$

$$15 - 16 = 1$$

$$3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

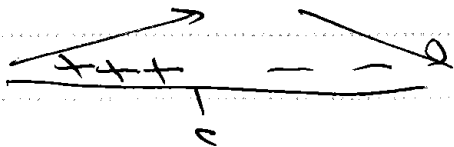
$$3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$3 \times 4 - 6 = 6$$

$$12 - 6 = 6$$

$$6 = 6$$

$$6 = 6$$



مساحة مثلث POH هو البرهان
عندما $ON = 4$

$$3 \times 4 - 6 = 6$$

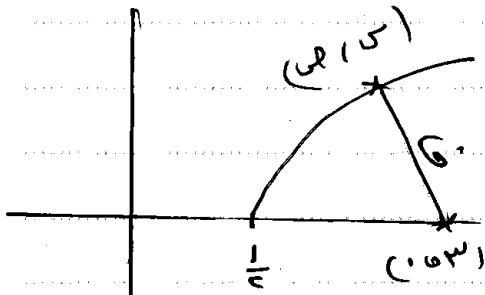
$$12 - 6 = 6$$

$$6 = 6$$

$$6 = 6$$

وزارة (٢٠١٨) صيف

٥) طريق منحي يمثل في المستوى إحداثي
بالأقران $(s, a) = \sqrt{1-s}$
والنقطة $(٠,٣)$ تمثل موقع صنف
جد إحداثي النقطة $P(s, a)$
الواقعة على الطريق التي عليه إنه
يبني فيها صيدليه وتكون أقرب
ما يمكن إلى المصنف



$$f = \sqrt{1-s} + \sqrt{(3-s)^2 + a^2}$$

$$f = \sqrt{1-s} + \sqrt{(3-s)^2 + a^2}$$

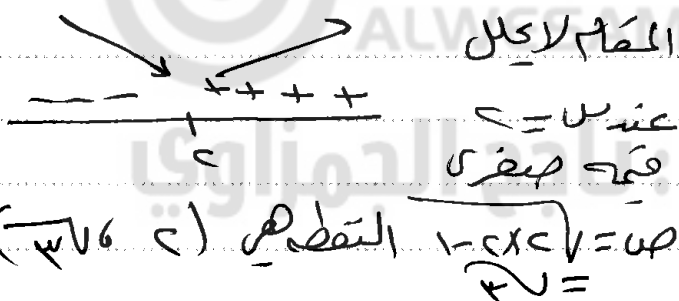
$$f = \sqrt{1-s} + \sqrt{9-6s+s^2+a^2}$$

$$f = \sqrt{1-s} + \sqrt{9-6s+s^2+a^2}$$

$$f' = -\frac{1}{2\sqrt{1-s}} + \frac{2s-6}{2\sqrt{9-6s+s^2+a^2}}$$

$$f' = -\frac{1}{2\sqrt{1-s}} + \frac{s-3}{\sqrt{9-6s+s^2+a^2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1-s}} = \frac{s-3}{\sqrt{9-6s+s^2+a^2}}$$



١) صندوق حجمه محض بالأقران
 $g = s^3 - 6s^2 + 10s - 1$
س تمثل ارتفاع الصندوق فإن
قيمة س التي تحصل حجم الصندوق
أكبر ما عليه تساوي

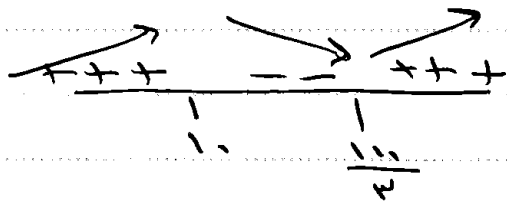
$$g = s^3 - 6s^2 + 10s - 1$$

الحل

$$g' = 3s^2 - 12s + 10 = 0$$

$$g' = 3s^2 - 12s + 10 = 0$$

$$s = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 120}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{6}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

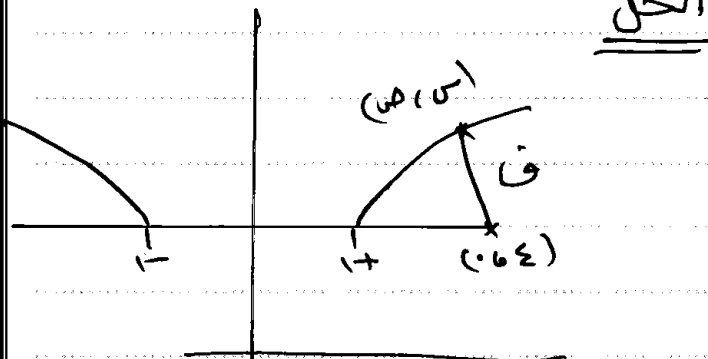


$$s = 2 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

وزارة (٢٠١٨) صيفيه

٥) طريق منحنى عميل في مستوى الإحداثي
 بالأقطار (داس) = $\sqrt{1-s^2}$
 والنقطة (٠.٦٤) عميل فوق صنف
 جد امدائي التقفه م (س) صا لواقفه
 على الطريقة التي يمكنه ان يبني فيها
 صيدليه فتكون اقرب ما عليه الى
 الصنف

الحل



$$f = \sqrt{1-s^2} + s$$

$$f' = \frac{-2s}{\sqrt{1-s^2}} + 1 = 0$$

$$\sqrt{1-s^2} = 2s$$

$$1-s^2 = 4s^2$$

$$1 = 5s^2 \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447$$

الخط = صفر $\Rightarrow 8 - 5s = 0 \Rightarrow s = \frac{8}{5}$
 المقام لا يحل

عند $s = \frac{1}{\sqrt{5}}$ فيه صفر

$$f = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

١) اذا كانت طاه = $s + 10$
 هي اطلاقه التي تربط الزاويه هم
 والضلع س في مثلث ما فان البر
 صيا س يمكنه للزاويه ه عند ما تكون
 س تاوي

٢) $10 \sqrt{1-s^2} = s + 10$

الحل

$$\sqrt{1-s^2} = \frac{s+10}{10}$$

$$1-s^2 = \frac{(s+10)^2}{100}$$

$$100 - 100s^2 = s^2 + 20s + 100$$

$$-101s^2 - 20s = 0$$

$$s(-101s - 20) = 0$$

$$s = 0 \text{ or } s = -\frac{20}{101}$$

الخط =
 $10s + 10 = 10s + 10$
 $10 = 10$
 المقام لا يحل

تمت بحمد الله

امنياتى بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي



٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

ALWESAM

المعلم : ناجح الجمزاوي