الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

التزايد والتناقص والقيم القصوى

لإيجاد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة و القيم القصوى للاقتران يجب اتباع ما يلي

١. نجد المشتقة الاولى ق/(س)
٢. نجد اصفار المشتقة الاولى حيث ق/(س) = ٠
٣- نحدد إشارة ق/(س) ، موجبة متزايد . سالبة متناقص . صفر ثابت .

• إيجاد القيم القصوى . العظمى والصغرى
- القيمة العظمى هي القيمة التي يتحول فيها الاقتران من التزايد الى التناقص .
- القيمة الصغرى هي التي يتحول فيها الاقتران من التناقص الى التزايد .

جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم العظمى والصغرى لكل من الاقترانات التالية

[1] ق(س) = $س^2$ - ٤س

الحل: ق/(س) = ٢س - ٤ = ٠ ⟸ ٢س = ٤ ⟸ س = ٢

ق(س) متناقص (-∞ ، ٢]
ق(س) متزايد [٢ ، ∞)
قيم س الحرجة {٢}
قيمة صغرى عند س = ٢ مقدارها ق(٢) = -٤

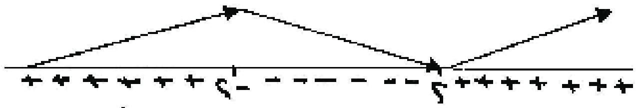
[2] ق(س) = ٤ - $س^2$

الحل: ق/(س) = -٢س = ٠ ⟸ س = ٠

ق(س) متناقص [٠ ، ∞) | قيم س الحرجة {٠}
ق(س) متزايد (-∞ ، ٠]
عظمى عند س = ٠ ، قيمتها ق(٠) = ٤

[3] ق(س) = $س^3$ - ١٢س + ١

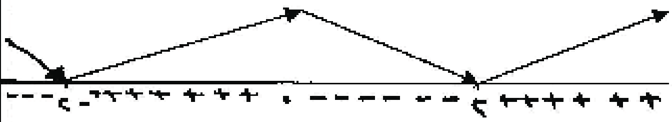
الحل: ق/(س) = ٣$س^2$ - ١٢ = ٠
٣$س^2$ = ١٢
$س^2$ = ٤
س = ±٢



ق متزايد (-∞ ، -٢] ، [٢ ، ∞) / متناقص [-٢ ، ٢]
قيم س الحرجة {-٢ ، ٢}
قيمة عظمى عند س = -٢ وقيمتها ق(-٢) = ١٧
قيمة صغرى عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = -١٥

[4] ق(س) = $\frac{١}{٤}$$س^4$ - ٢$س^2$ + ٢

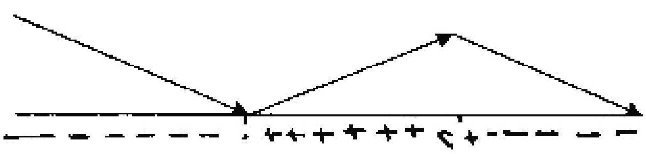
الحل: ق/(س) = $س^3$ - ٤س = ٠
س($س^2$ - ٤) = ٠
س = ٠ ، س = +٢ ، س = -٢



ق متزايد [-٢ ، ٠] ، [٢ ، ∞)
ق متناقص (-∞ ، -٢] ، [٠ ، ٢]
قيم س الحرجة {-٢ ، ٠ ، ٢}
قيمة عظمى عند س = ٠ ، مقدارها ق(٠) = ٢
قيمة صغرى عند س = -٢ ومقدارها ق(-٢) = -٢
" " س = ٢ ومقدارها ق(٢) = -٢

[5] ق(س) = ٣$س^2$ - $س^3$ + ١

الحل: ق/(س) = ٦س - ٣$س^2$ = ٠
٣س(٢ - س) = ٠
س = ٠ ، س = ٢



ق متناقص في (-∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)
ق متزايد في [٠ ، ٢] ، قيم س الحرجة {٠ ، ٢}
صغرى عند س = ٠ وقيمتها ق(٠) = ١
عظمى عند س = ٢ وقيمتها ق(٢) = ٥

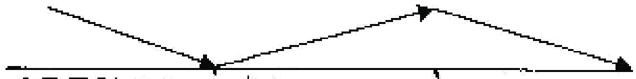
$\boxed{6}$ ق(س) = −س^3 − ٣س^2 + ٩س − ١

ق$'$(س) = − ٣س^2 − ٦س + ٩ = ٠ ÷ −٣

س^2 + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

س = −٣ ، س = ١



− − − − − − − −٣ + + + + + + + ١ − − − − − − −

متناقص في (−∞ ، −٣] ، [١ ، ∞)

متزايد في [−٣ ، ١]

قيم س الحرجة {١ ، −٣}

صغرى عند س = −٣ ومقدارها ق(−٣) = −٢٨

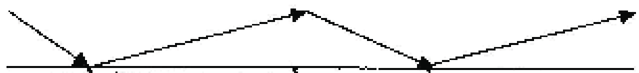
عظمى عند س = ١ ومقدارها ق(١) = ٤

$\boxed{7}$ ق(س) = س^5 − $\frac{5}{3}$ س^3

الحل: ق$'$(س) = ٥س^4 − ٥س^2 = ٠

٥س^2(س^2 − ١) = ٠

س = ٠ ، س = +١ ، −١



− − − −١ + + + + + + + ٠ − − − − − ١ + + + + + + +

متزايد [−١ ، ٠] ، [١ ، ∞)

متناقص (−∞ ، −١] ، [٠ ، ١]

قيم س الحرجة {−١ ، ٠ ، ١}

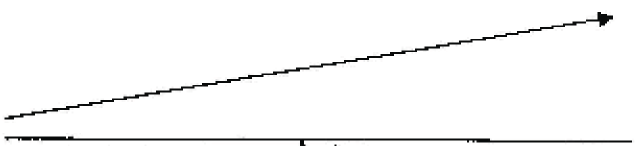
صغرى عند س = −١ ، ومقدارها ق(−١) = $\frac{2}{3}$

" " س = ١ ، ومقدارها ق(١) = $-\frac{2}{3}$

عظمى عند س = ٠ وقيمتها ق(٠) = ٠

$\boxed{8}$ ق(س) = س^3 + ١

الحل: ق$'$(س) = ٣س^2 = ٠ ⟸ س = ٠



+ + + + + + + + + ٠ + + + + + + + + + + +

ق متزايد على ح ، قيم س الحرجة {٠}

لا يوجد قيم قصوى

$\boxed{9}$ ق(س) = ٢س^3 − ٣س^2 − ١٢س + ٢

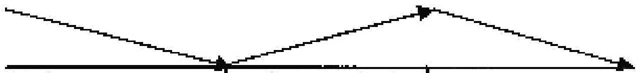
$\boxed{10}$ ق(س) = س^2(٣ − س)

الحل: ∴ ق(س) = ٣س^2 − س^3

ق$'$(س) = ٦س − ٣س^2 = ٠

٣س(٢ − س) = ٠

س = ٠ ، س = ٢



− − − − − − − − ٠ + + + + + + + ٢ − − − − − −

ق متناقص في (−∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

ق متزايد في [٠ ، ٢]

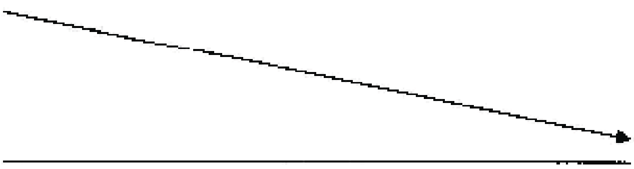
قيم س الحرجة {٠ ، ٢}.

قيمة صغرى عند س = ٠ ومقدارها ق(٠) = ٠

قيمة عظمى عند س = ٢ ومقدارها ق(٢) = ٤

$\boxed{11}$ ق(س) = ١ − ٢س

الحل: ق$'$(س) = −٢ ≠ ٠



− − − − − − − − − − − − −

ق(س) متناقص على ح

لا يوجد قيم قصوى

$\boxed{12}$ ق(س) = (٢س − ٤)^5

تمارين عامة على التزايد والتناقص

[1] بين أن الاقتران ق(س) = س^3 + س متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية .

[2] ق(س) = أ س^2 - ٢ س ، يوجد قيمة حرجة عند س = ٢ جد قيمة الثابت أ .

[3] إذا كان ق(س) = س^3 + أ س^2 قيمة عظمى عند س = -١ جد قيمة الثابت أ .

[4] إذا كان الاقتران ق(س) = س^3 - ٣ س + ١ فأوجد القيم الصغرى والعظمى للاقتران ق .

[5] جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^3 - ٤٨ س + ٥

[6] إذا كان الاقتران ق(س) = ٢ س^3 - ٢٤ س + ٢ جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

[7] اذا كانت ق$'$(س) = س^2 + س جد

[أ] فترات التزايد والتناقص

[ب] قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة عظمى أو صغرى

[8] ق(س) = ٦ - ٣ س جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى .

[9] ق(س) = $\frac{1}{3}$ س^3 - ٢ س^2 جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى .

[10] اذا كان ق(س) = أ س^3 - ٩ س^2 حيث أ عدد ثابت وكان لهذا الاقتران نقطة حرجة عند س = ٢ فما قيمة أ .

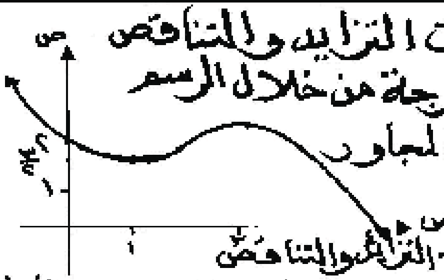
[11] اذا كان للاقتران ق(س) = س^3 - ب س + ٦ قيمة قصوى محلية عند س = -٢ فما قيمة ب

[12] ق(س) = س^3 - ١٢ س - ٥

[13] إذا كان ق(س) = أ س^3 + ب س^2 نقطة حرجة عند (١ ، ٢) جد قيمة أ ، ب

إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة من خلال الرسم

[1] في الشكل المجاور منحنى ق(س)



أوجد ما يلي ١- التزايد والتناقص

٢- القيم العظمى والصغرى والنقاط الحرجة

الحل: ق متناقص (-∞، ١] ، [٢، ∞)

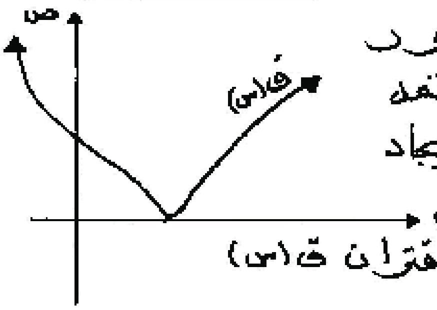
ق متزايد [١، ٢]

قيم س الحرجة {١، ٢}

قيمة صغرى عند س = ١ ومقدارها ق(١) = ...

قيمة عظمى عند س = ٢ ومقدارها ق(٢) = ٢

[2] الشكل المجاور يمثل ق(س) اعتمد على الشكل في إيجاد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)



الحل:

ق متناقص (-∞، ٢]

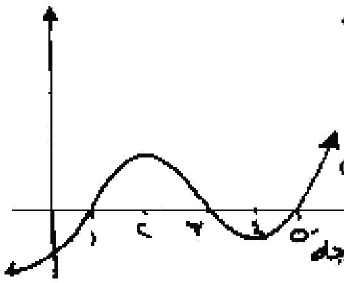
ق متزايد [٢، ∞)

في حالة أن يكون الرسم لمنحنى ق'(س) نعتمد ما يلي.

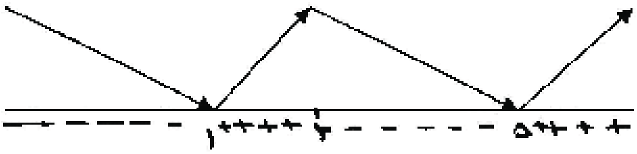
١- إذا كانت قاعدة الاقتران تحت محور السينات فإن الإشارة تكون سالب.

٢- إذا كانت قاعدة الاقتران فوق محور السينات فإن الإشارة تكون موجب.

[3] الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) اعتمد الشكل في إيجاد فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى والنقاط الحرجة



الحل:



ق متزايد [١، ٣] ، [٥، ∞)

ق متناقص (-∞، ١] ، [٣، ٥]

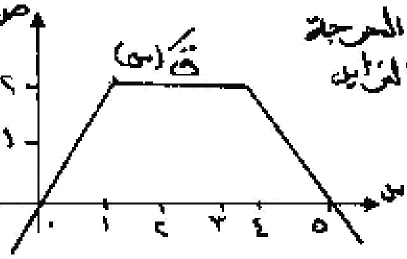
قيم س الحرجة {١، ٣، ٥}

قيمة صغرى عند س = ١ (قيمتها ق(١))

قيمة صغرى عند س = ٥ قيمتها ق(٥)

قيمة عظمى عند س = ٣ قيمتها ق(٣)

[4] يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى ق'(س) ق'(٣) = ق'(٥) = ٢، ق'(١) = ...

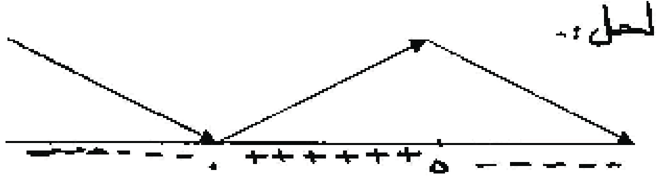


أوجد أ- قيم س الحرجة

ب- فترات التزايد والتناقص

ج- نقط القيم القصوى ونوعها

الحل:



أ- قيم س الحرجة {١، ٦}

ب- ق متناقص في (-∞، ١] ، [٦، ∞)

ق متزايد في [١، ٦]

ج- قيمة صغرى عند س = ١ (قيمتها ق(١))

قيمة عظمى عند س = ٦ قيمتها ق(٦)

إختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى

إيجاد القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية
يجب ان نتذكر في السؤال للحل نتبع مايلي
١. نجد اصفار المشتقة الاولى
٢. نعوض اصفار المشتقة الاولى في ق″ فإذا كان
أ - الناتج اكبر من صفر فإنه يوجد قيمة صغرى
ب. الناتج اصغر من صفر فإنه يوجد قيمة عظمى
جـ. الناتج صفر يفشل الاختبار.

١ بإستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم العظمى والصغرى للاقتران

ق(س) = ٣س² − س³ + ١

الحل: ق′(س) = ٦س − ٣س² = ٠
٣س(٢ − س) = ٠
س = ٠ ، س = ٢
ق″(س) = ٦ − ٦س
ق″(٠) = ٦ > ٠ . يوجد قيمة صغرى قيمتها ق(٠)
ق″(٢) = −٦ < ٠ . يوجد قيمة عظمى قيمتها ق(٢)

٢ ق(س) = س⁴

الحل: ق′(س) = ٤س³ = ٠ ⟸ س = ٠
ق″(س) = ١٢س²
ق″(٠) = ٠ يفشل الاختبار
نلجأ الى المشتقة الاولى

+ + + + + + : + + + + + +

لا يوجد قيم قصوى

٣ ق(س) = ٢س³ − ٣س² − ١٢س + ٥

٤ ق(س) = س² − ٦س

الحل: ق′(س) = ٢س − ٦ = ٠
٢س = ٦ ⟸ س = ٣
ق″(س) = ٢ > ٠ . قيمة صغرى عند س = ٣
ق″(٣) = ٢ > ٠ . ومقدارها ق(٣)

٥ إذا كان ق(٢) = ٧ ، ق′(٢) = ٠ ، ق″(٢) = ٣

الحل: يوجد قيمة صغرى عند س = ٢
لأنّ ق″(٢) > ٣ قيمتها ٧

٦ إذا كان ق′(٣) = ٠ ، ق″(٣) = −٦
ق(٣) = −٤ .

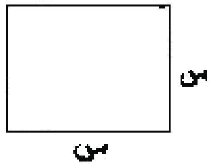
تطبيقات على الإشتقاق الضمني

قوانين هامة .

المربع

مساحة المربع $= \text{س}^2$

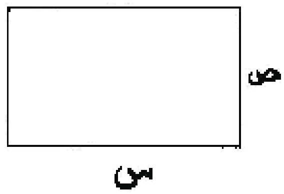
محيط المربع $= 4\,\text{س}$



المستطيل

مساحة المستطيل $= \text{س} \times \text{ص}$

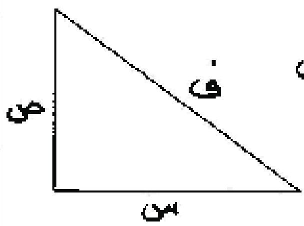
محيط المستطيل $= 2\text{س} + 2\text{ص}$



المثلث ١

نظرية فيثاغورس

ف $= \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

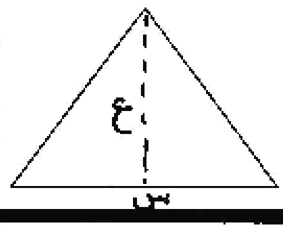


المثلث ٢

مساحة المثلث

$= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

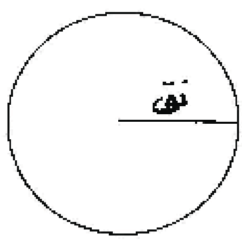
$= \frac{1}{2}\,\text{س}\,\text{ع}$



الدائرة

مساحة الدائرة $= \pi\,\text{نق}^2$

محيط الدائرة $= 2\pi\,\text{نق}$



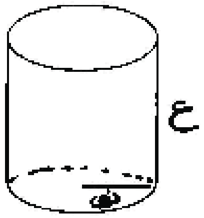
الكرة

حجم الكرة $= \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$

مساحة الكرة $= 4\pi\,\text{نق}^2$

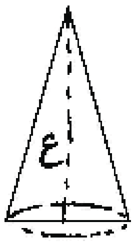
الاسطوانة

حجم الاسطوانة $= \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$



المخروط

حجم المخروط $= \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$



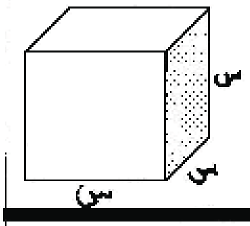
المسافة بين نقطتين

ف $= \sqrt{(\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2 + (\text{س}_2 - \text{س}_1)^2}$

المكعب

حجم المكعب $= \text{س}^3$

مساحة المكعب $= 6\,\text{س}^2$



خطوات حل المسألة .

١- نرسم الشكل ان كان بالإمكان من المعطيات

٢- تحديد الثوابت و المتغيرات والمعدلات الزمنية المعلومة و المطلوبة .

٣- تكوين العلاقة تحتوي على المطلوب وتربط بين المتغيرات والثوابت في المسألة

٤ - نشتق ضمنياً بالنسبة للزمن .

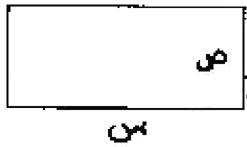
٥- اذا كان هناك متغير مجهول نعوض المعلوم في العلاقة الاصلية لإيجاد المجهول ثم نجد المطلوب

[١] صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام يزداد طولها بمعدل ٣ سم/ث ويزداد عرضها بمعدل ٢ سم/ث وفي لحظة معينة كان طولها يساوي ٨ سم وعرضها ٦ سم أوجد مايلي

أ- معدل التغير في محيط الصفيحة

ب- معدل التغير في مساحة الصفيحة

ج- معدل التغير في قطر الصفيحة



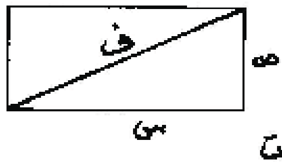
الحل: أ-

المعطيات: $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢$ ، س = ٨ ، ص = ٦

$\text{ح} = ٢\text{س} + ٢\text{ص}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٢ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٢ \times ٣ + ٢ \times ٢ = ١٠$ سم/ث



ب- $\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \times \text{ص} + \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \text{س}$

$= ٣ \times ٦ + ٢ \times ٨ = ٣٤$ سم²/ث

ج- $\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢ \times ٨ \times ٣ + ٢ \times ٦ \times ٢}{٢\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$

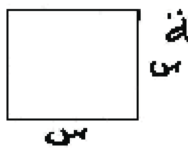
$= \frac{٧٢}{٢ \times ١٠} = \frac{٣٦}{١٠} = ٣,٦$ سم/ث

[٥] لوحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يزداد طول ضلعها بمعدل ٤ سم/د عندما يكون ضلعها ٨ سم جد كلاً مما يلي:

أ- معدل التغير في مساحة اللوحة

ب- معدل التغير في محيط اللوحة

ج- معدل التغير في طول قطر اللوحة



الحل:-

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤$ ، س = ٨

أ- $\text{م} = \text{س}^٢$

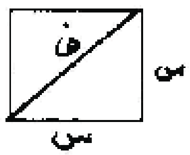
$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$= ٢ \times ٨ \times ٤ = ٦٤$ سم²/ث

ب- المحيط = ٤س

$\text{ح} = ٤\text{س}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤ \times ٤ = ١٦$ سم/ث



ج- $\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{س}^٢}$

$\text{ف} = \sqrt{٢\text{س}^٢}$

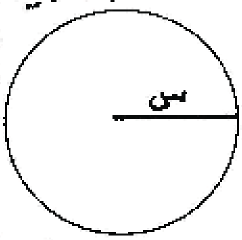
$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٤\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{٢\text{س}^٢}}$

$= \frac{٤ \times ٨ \times ٤}{٢\sqrt{٢ \times ٦٤}} = \frac{٦٤}{\sqrt{١٢٨}}$ سم/ث

[٣] يتمدد قرص دائري معدني فيزداد طول نصف قطره بمقدار ٠,٢ سم/ث في اللحظة التي يكون فيها نصف قطره (١٠ سم) جد مايلي

أ- معدل التغير في مساحته

ب- معدل التغير في محيطه



الحل:-

أ- $\text{م} = \pi \text{س}^٢$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢\pi\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٠,٢$ ، س = ١٠

$= ٢\pi \times ١٠ \times ٠,٢$

$= ٢\pi \times \cancel{١٠} \times \frac{٢}{\cancel{١٠}} = ٤\pi$ سم²/ث

ب- $\text{ح} = ٢\pi\text{س}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٢\pi\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

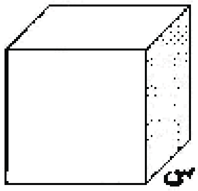
$= ٢\pi \times \frac{٢}{١٠} = ٠,٤\pi$ سم/ث

[٤] قرص معدني يتمدد بالحرارة فتزداد مساحته بمقدار ٨ سم²/ث جد معدل التغير في طول نصف قطر القرص عندما يصبح طول نصف قطره ٤ سم.

٥- مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠٫٠٢ سم/ث محافظاً على شكله عندما يكون ضلعه ١٠سم جد ما يلي:

أ- معدل تناقص حجمه

ب- معدل تناقص مساحته الكلية



الحل:-

أ- $ح = س^3$

$\frac{دح}{دن} = 3س^2 \times \frac{دس}{دن}$ ، $\frac{دس}{دن} = \frac{-2}{100}$ ، $س = 10$

$= 3 \times 10^2 \times \frac{-2}{100}$

$= \frac{-60}{10} = -6.0$ سم³/ث

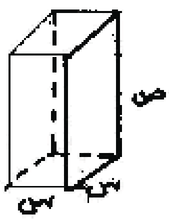
ب- $م = 6س^2$

$\frac{دم}{دن} = 12س \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = 12 \times 10 \times \frac{-2}{100} = -2.4$ سم²/ث

٦- مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد حجمه بمعدل ١٢سم³/د أوجد معدل التغير في طول ضلعه عندما يكون طول ضلعه ٢٠سم.

٧- متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل إذا كان ضلع القاعدة يتزايد بمعدل ½سم/د بينما يتناقص ارتفاعه بمعدل ١سم/د في اللحظة التي يكون فيها ضلع القاعدة ٨سم وارتفاعه ٥سم جد معدل التغير في حجم متوازي الأضلاع



الحل:-

$ح = س \times س \times ص$

$ح = س^2 \times ص$

$\frac{دح}{دن} = 2س \times \frac{دس}{دن} \times ص + \frac{دص}{دن} \times س^2$

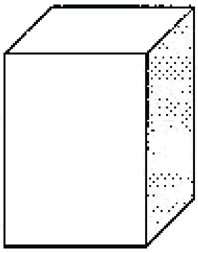
$\frac{دس}{دن} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{دص}{دن} = -1$ ، $س = 8$ ، $ص = 5$

$\frac{دح}{دن} = 2 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 5 + -1 \times 8^2$

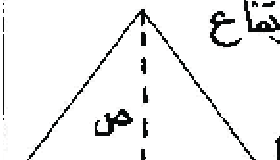
$= 40 - 64$

$= -24$ سم³/ث

٨- صندوق معدني قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ثلاث أمثال طول ضلع القاعدة يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل ٢سم/د احسب معدل التغير في حجم الصندوق عندما يكون طول ضلع القاعدة ١٠.



٩- صفيحة معدنية على شكل مثلث تتمدد بالحرارة فإذا كان معدل التزايد في طول قاعدتها ٠٫٢ سم/ث ومعدل التزايد في ارتفاعها ٠٫٣ سم/ث فما معدل التغير في مساحتها عندما يكون طول القاعدة ٥سم والارتفاع ٤سم.



الحل:-

$م = \frac{1}{2} س \times ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}\left(\frac{دس}{دن} \times ص + \frac{دص}{دن} \times س\right)$

$\frac{دس}{دن} = 0.2$ ، $\frac{دص}{دن} = 0.3$ ، $س = 5$ ، $ص = 4$

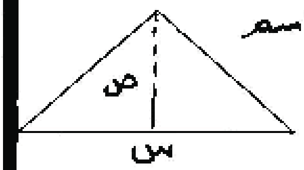
$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}\left(0.2 \times 4 + 0.3 \times 5\right)$

$= \frac{1}{2}\left(0.8 + 1.5\right)$

$= \frac{1}{2} \times (2.3) = \frac{2.3}{2}$ سم²/ث

[١٠] تتمدد صفيحة معدنية مثلثة الشكل طول قاعدتها ضعف ارتفاعها فإذا كان معدل زيادة طول القاعدة يساوي ٠,١ سم/ث جد معدل الزيادة في مساحتها عندما يكون طول القاعدة يساوي ١٠ سم

الحل:



$م = \frac{١}{٢} \times س \times ص$ $\qquad \frac{دس}{دن} = ٠,١$

$س = ١٠$

$ص = \frac{١}{٢} س$

$م = \frac{١}{٢} س \times \frac{١}{٢} س$

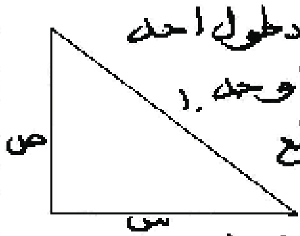
$م = \frac{١}{٤} س^٢$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٤} \times ٢ س \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} \times \cancel{١٠} \times \frac{١}{\cancel{١٠}}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} = ٠,٥$ سم/ث

[١١] مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت ويساوي ١٠ سم يزداد طول احد ضلعيه بمعدل $\frac{٣}{٢}$ سم/ث اوجد ١) معدل التغير في طول الضلع الثاني في اللحظة التي يكون فيها طول الضلع الاول ٨ سم



نجد ص من فيثاغورس

$ص = \sqrt{١٠٠ - س^٢}$

$ص = \sqrt{١٠٠ - ٨^٢}$

$ص = \sqrt{٣٦} = ٦$

$س = ٨$

$\frac{دس}{دن} = \frac{٣}{٢}$

$ص = \sqrt{١٠٠ - س^٢}$

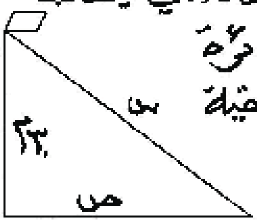
$\frac{دص}{دن} = \frac{-\cancel{٢} س \frac{دس}{دن}}{\cancel{٢}\sqrt{١٠٠ - س^٢}}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-٨ \times \frac{٣}{٢}}{\sqrt{١٠٠ - ٣٦}}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-١٢}{\sqrt{٣٦}}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-١٢}{٦} = -٢$ سم/ث

[١٢] يمسك محتصم بيده خيط طائرة تطير افقياً على ارتفاع ٣٠ م من سطح الارض اذا كانت السرعة التي يسحب محتصم فيها خيط الطائرة ٤م/د جد السرعة الافقية للطائرة عندما يكون طول الخيط الممتد اليها ٥٠م؟



الحل:

$\frac{دس}{دن} = -٤$ م/د

$س = ٥٠$

$\frac{دص}{دن} = ؟؟$

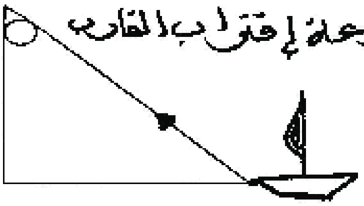
$ص = \sqrt{س^٢ - ٣٠^٢}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{\cancel{٢} س \frac{دس}{دن}}{\cancel{٢}\sqrt{س^٢ - ٣٠^٢}}$

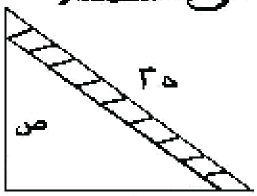
$\frac{دص}{دن} = \frac{٥٠ \times -٤}{\sqrt{٥٠^٢ - ٣٠^٢}}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-٢٠٠}{٤٠} = -٥$ سم/ث

[١٣] يقف رجل على رصيف حوض للسفن ويسحب حبلاً احد طرفيه مربوط بقارب بمعدل ٣٥ م/د ويمر طرفه الاخر ببكرة ترتفع (١٠) امتار عن خط سير القارب جد سرعة اقتراب القارب من حافة الرصيف عندما يكون طول الحبل بين البكرة والقارب ٢٦ م.



[١٤] سلم طوله ٢٥ يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية إذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢م/ث فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السلم على بعد ٣ ٣ عن الحائط.



الحل :-

$\text{ص} = \sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^{\text{٢}}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-\cancel{\text{٢}}\,\text{س}\ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{\cancel{\text{٢}}\sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^{\text{٢}}}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-\text{٣} \times \text{٢}}{\sqrt{\text{٢٥} - \text{٣}^{\text{٢}}}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-\text{٦}}{\sqrt{\text{١٦}}}$

$= \frac{-\text{٦}}{\text{٤}} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}}\ \text{م/ث}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٢ م/ث}$

$\text{س} = \text{٣}$

[١٧] مستطيل طوله ٨ سم وعرضه ٣ سم يتناقص طوله بمعدل ١سم/د ويزداد عرضه بمعدل ٢سم/د أوجد معدل التغير في مساحة المستطيل بعد مرور دقيقتين

$\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \times \text{ص} + \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \text{س}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = -\text{١} \times \text{٧} + \text{٢} \times \text{٦}$

$= -\text{٧} + \text{١٢}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٥}\ \text{سم}^{\text{٢}}\text{/د}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -\text{١}$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{٢}$

$\text{س} = \text{٨}$

$\text{ص} = \text{٣}$

بعد دقيقتين

$\text{س} = \text{٨} - (\text{٢} \times \text{١}) = \text{٦}$

$\text{ص} = \text{٣} + (\text{٢} \times \text{٢}) = \text{٧}$

[١٥] تتمدد كرة معدنية بالحرارة فيزداد حجمها بمعدل $\frac{\pi}{\text{٢}}$ سم³/ث أوجد معدل التغير في نصف القطر عندما يصبح نصف قطرها ٥ سم.

الحل :-

$\text{ح} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\pi\,\text{س}^{\text{٣}}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٤}}{\cancel{\text{٣}}} \times \pi \times \cancel{\text{٣}}\,\text{س}^{\text{٢}}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\frac{\cancel{\pi}}{\text{٢}} = \text{٤}\,\cancel{\pi}\ \text{٥}^{\text{٢}}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

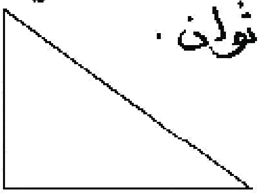
$\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \cancel{\text{١٠٠}}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \Leftarrow \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢٠٠}}\ \text{سم/ث}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\pi}{\text{٢}}$

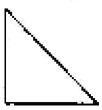
$\text{س} = \text{٥}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{؟؟}$

[١٨] مثلث قائم الزاوية في لحظة معينة كان طولا ضلعي القائمة ١سم، ٧سم على الترتيب فإذا كان الضلع الأول يتزايد بمعدل ٣سم/ث بينما يتناقص الضلع الثاني بمعدل ٢سم/ث فجد معدل التغير في طول الوتر بعد ثلاث ثوان.



[١٦] مثلث قائم الزاوية في لحظة معينة كان طولا ضلعي القائمة ٨سم، ٦سم على الترتيب فإذا كان الضلع الأول يتناقص بمعدل ١سم/د بينما يتزايد الثاني بمعدل ٢سم/د جد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين.



تطبيقات القيم القصوى

نميز هذا النوع بكلمة: أصغر، أكبر، أقل ما يمكن

لحل السؤال نتبع ما يلي:

1- نجعل العلاقة الرئيسية بدلالة متغير واحد
2- بعد جعل العلاقة بمتغير واحد نشتق ثم نساوي بالصفر
3- نحدد ونجد المطلوب.

[1] ما العددين الموجبين اللذان مجموعهما ٥٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

الحل:

المساعدة: س العدد الأول، ص العدد الثاني

$س + ص = ٥٠$

$س = ٥٠ - ص$

$م = س \times ص$

$م = (٥٠ - ص) \times ص$

$م = ٥٠ص - ص^2$

$\frac{دم}{دص} = ٥٠ - ٢ص = ٠$

$\frac{٢ص}{٢} = \frac{٥٠}{٢}$

$ص = ٢٥$

$س = ٥٠ - ص$

$س = ٥٠ - ٢٥ = ٢٥$

[2] عددين موجبين مجموعهما ٢٠ أوجد العددين بحيث

أ- يكون مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن
ب- يكون حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

[3] ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان حاصل ضربهما ٦٤ ومجموعهما أقل ما يمكن

الحل:

$س \times ص = ٦٤$

$ص = \frac{٦٤}{س}$

$ح = س + ص$

$ح = س + \frac{٦٤}{س}$

$\frac{دح}{دس} = ١ + \frac{-٦٤}{س^2} = ٠$

$\frac{١}{١} = \frac{٦٤}{س^2}$

$س^2 = ٦٤$

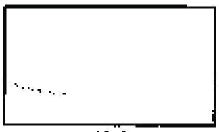
$س = ٨$ ، $س = -٨$ تهمل

$ص = \frac{٦٤}{٨} = ٨$

$س = ٨$ ، $ص = ٨$

[4] قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠ م² أوجد أقل محيط ممكن للمستطيل

الحل:


ص
س

$س \times ص = ٤٠٠$

$ص = \frac{٤٠٠}{س}$

$ح = ٢س + ٢ص$

$ح = ٢س + \frac{٢ \times ٤٠٠}{س}$

$ح' = ٢ + \frac{-٨٠٠}{س^2} = ٠$

$٢ = \frac{٨٠٠}{س^2}$

$٢س^2 = ٨٠٠$

$س^2 = ٤٠٠ \Leftarrow س = ٢٠$ ، -٢٠ تهمل

$ص = \frac{٤٠٠}{٢٠} = ٢٠$

أقل محيط $ح(٢٠) = ٢ \times ٢٠ + \frac{٢ \times ٤٠٠}{٢٠}$

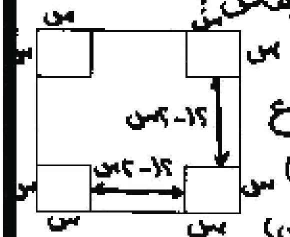
$= ٤٠ + ٤٠$

$ح = ٨٠$ م

[5] قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠ م أوجد بعدي القطعة لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

[6] مستطيل مساحته ١٠٠ سم² أوجد بعديه بحيث يكون طول قطره أقل ما يمكن؟

٧ صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم رفعنا من زواياها الاربع أربعة مربعات متساوية طول ضلع كل منها (س) ثم طوينا الجوانب بحيث اصبحت الصفيحة بشكل علبة مفتوحة من الاعلى جد قيمة (س) ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن ؟



الحل :

الحجم = طول × عرض × إرتفاع

ح = (١٢ - ٢س)(١٢ - ٢س)(س)

ح = (١٤٤ - ٤٨س + ٤س^{2})(س)

ح = ١٤٤س - ٤٨س^{2} + ٤س^{3}

ح' = ١٤٤ - ٩٦س + ١٢س^{2} = ٠ ÷ ١٢

س^{2} - ٨س + ١٢ = ٠

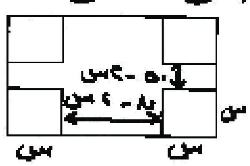
(س - ٢)(س - ٦) = ٠

س = ٢ ، س = ٦

عظمى عند س = ٢

ح(٢) = ١٢٨ سم^{3}

٨ يراد عمل صندوق مفتوح من الاعلى من قطعة مستطيلة الشكل ابعادها ٨٠ سم ، ٥٠ سم . وذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسها ثم ثني الاجزاء البارزة الى الاعلى ما حجم اكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة .



٩ قطعة ارض مستطيلة الشكل تقع على ضفة نهر مستقيم فإذا اراد مالكها تسييجها ولم تسييج الواجهة الواقعة على ضفة نهر فإذا كان لديه (٨٠٠م) من السياج أوجدي أبعاد اكبر مساحة يمكن سياجها ؟

مساعدة

ح = س + ٢ص

٨٠٠ = س + ٢ص

س = ٨٠٠ - ٢ص

الحل :

م = س × ص

م = (٨٠٠ - ٢ص) × ص

م = ٨٠٠ص - ٢ص^{2}

م' = ٨٠٠ - ٤ص = ٠

٤ص = ٨٠٠

ص = ٢٠٠م

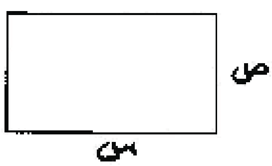
س = ٨٠٠ - ٢ × ٢٠٠

س = ٨٠٠ - ٤٠٠

س = ٤٠٠م

١٠ لدى رجل حقل مستطيل يريد تسييجه فإذا كان لديه (١٠٠٠م) من السياج أوجد اكبر مساحة يمكن سياجه ؟

الحل :



مساعدة

٢س + ٢ص = ١٠٠٠

س + ص = ٥٠٠

ص = ٥٠٠ - س

م = س × ص

م = (٥٠٠ - س) × س

م = ٥٠٠س - س^{2}

م' = ٥٠٠ - ٢س = ٠

٢س = ٥٠٠

س = ٢٥٠م

ص = ٥٠٠ - ٢٥٠

ص = ٢٥٠م

م = ٢٥٠ × ٢٥٠

م = ٦٢٥٠٠ م^{2}

(11) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠٠ م٢ تقع على ضفة نهر مستقيم فإذا اراد مالكها تسييجها ولم يسيج الواجهة الواقعة على ضفة النهر فأثبت ان طول السياج يكون اصغر ما يمكن إذا كان طول القطعة مساوياً مثلي عرضها ؟

(12) صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ سم٢ يراد طباعة اعلان عليها فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة واسفلها ١ سم وفي كل من الجانبين ٥.٠ سم اوجد بعدي الورقة لتكون المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن ؟

الحل :-

المطبوع = الطول × العرض

م = (س - ١)(ص - ٢)

م = (س - ١)($\frac{٣٢}{س}$ - ٢)

م = ٣٢ - $\frac{٣٢}{س}$ - ٢س + ٢

م = ٣٤ - $\frac{٣٢}{س}$ - ٢س

س × ص = ٣٢

ص = $\frac{٣٢}{س}$

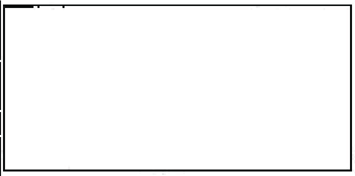
م' = + $\frac{٣٢}{س^٢}$ - ٢ = ٠ ⟸ $\frac{٣٢}{س^٢}$ = ٢

س٢ = ١٦

س = ٤

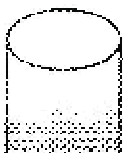
ص = ٨

(13) يراد تسييج قطعة ارض مستطيلة الشكل إذا كانت تكلفة المتر الواحد من جانبين متوازيين هي (٢ دينار) ومن الجانبين الآخرين دينار بين نجد مساحة اكبر قطعة مستطيلة يمكن تسييجها بمبلغ ٦٠٠ دينار



(14) اذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية ١٠ سم أوجد طول كل من ضلعي القائمة بحيث تكون مساحته اكبر ما يمكن .

(15) اسطوانة دائرية قائمة العلاقة بين ارتفاعها (ع) ونصف قطرها نق هي ع نق = ٣٠ - نق٢ إحسب اكبر حجم ممكن للاسطوانة



تطبيقات إقتصادية

بعض الرموز المستخدمة في هذا الدرس

ك(س) = التكلفة الكلية .
د(س) = الايراد الكلي .
ر(س) = الربح الكلي .

د(س) = ك(س) + ر(س)

ك(س) = د(س) ـ ر(س)

ر(س) = د(س) ـ ك(س)

د(س) = عدد القطع × سعر القطعة

رَ(س) : الربح الحدي .
كَ(س) : التكلفة الحدية .
دَ(س) : الايراد الحدي .

١ اذا كانت تكلفة س وحدة من سلعة معينة هي ك(س) = ٢٥٠٠ + ٣٠ س وكان إقتران الايراد الكلي د(س) = ٣٠٠ س² + ٢٥ س + ٣٠٠٠

تجد أ- التكلفة الحدية .
ب- الايراد الحدي .
جـ- الربح الحدي .

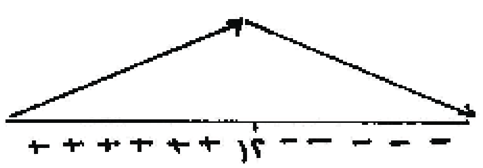
الحل:- أ- ك(س) = ٢٥٠٠ + ٣٠ س
كَ(س) = ٣٠

ب- د(س) = ٣٠٠ س² + ٢٥ س + ٣٠٠٠
دَ(س) = ٦٠٠ س + ٢٥

جـ- رَ(س) = دَ(س) ـ كَ(س)
رَ(س) = ٦٠٠ س + ٢٥ ـ ٣٠
رَ(س) = ٦٠٠ س ـ ٥

٢ اذا كان الايراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٣٢ س ـ س² + ١٥٠ والتكلفة الكلية ك(س) = ٨ س + ٥٠ حيث س عدد الوحدات المنتجة اوجد قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن .

الحل:-
ر(س) = د(س) ـ ك(س)
ر(س) = ٣٢ س ـ س² + ١٥٠ ـ ٨ س ـ ٥٠
ر(س) = ٢٤ س ـ س² + ١٠٠
رَ(س) = ٢٤ ـ ٢ س = ٠
٢ س = ٢٤
س = ١٢



٣ يبيع تاجر (س) من سلعة ما شهرياً بسعر ٥٠ دينار لكل وحدة واحدة فإذا كانت تكلفتها الكلية شهرياً هي $ك(س) = س^2 - ٢٥س + ٢٠٠$ أوجد عدد الوحدات س ليحقق التاجر أكبر ربح ممكن شهرياً

الحل: د(س) = السعر × عدد الوحدات

$د(س) = ٥٠ \times س$

$ر(س) = د(س) - ك(س)$

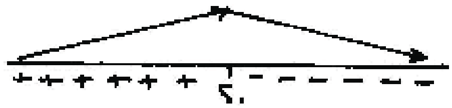
$ر(س) = ٥٠س - (س^2 - ٢٥س + ٢٠٠)$

$ر(س) = ٥٠س - س^2 + ٢٥س - ٢٠٠$

$ر(س) = ٤٠س - س^2 - ٢٠٠$

$ر'(س) = ٤٠ - ٢س = ٠$

$٢س = ٤٠ \Leftarrow س = ٢٠$



٤ إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من السجاد هي $ك(س) = س^3 - ٣٠٠س$ فكم عدد قطع السجاد اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن.

الحل:

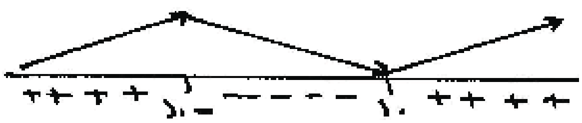
$ك(س) = س^3 - ٣٠٠س$

$ك'(س) = ٣س^2 - ٣٠٠ = ٠ \quad \div ٣$

$س^2 - ١٠٠ = ٠$

$س^2 = ١٠٠$

$س = ١٠$ $س = -١٠$ تهمل



٥ إذا كانت $ع = ٥٢ - \frac{س}{٤٠}$ هي معادلة السعر الطلب جد.

أ - الإيراد الكلي   ب - الإيراد الحدي عند $س = ٤٠$

الحل: $د(س) = س \times ع$

$د(س) = س(٥٢ - \frac{س}{٤٠})$

$د(س) = ٥٢س - \frac{س^2}{٤٠}$

$د'(س) = ٥٢ - \frac{٢س}{٤٠}$

ب -

$د'(٤٠) = ٥٢ - \frac{٢ \times \cancel{٤٠}}{\cancel{٤٠}}$

$د'(٤٠) = ٥٢ - ٢$

$د'(٤٠) = ٥٠$

٦ إذا كانت $ع = \frac{٢٠٠}{س+٣}$ تمثل معادلة السعر والطلب جد الإيراد الحدي عند إنتاج ٧ وحدات.

الحل: $د(س) = س \times ع$

$د(س) = س \times \frac{٢٠٠}{س+٣}$

$د(س) = \frac{٢٠٠س}{س+٣}$

$د'(س) = \frac{٢٠٠ \times (س+٣) - (١)(٢٠٠س)}{(س+٣)^2}$

$د'(س) = \frac{٢٠٠س + ٦٠٠ - ٢٠٠س}{(س+٣)^2}$

$د'(س) = \frac{٦٠٠}{(س+٣)^2}$

$د'(٧) = \frac{٦٠٠}{(٧+٣)^2}$

$د'(٧) = \frac{٦٠٠}{١٠٠}$

$د'(٧) = ٦$

$\boxed{٧}$ إذا كانت ع = ٢٢ − $\frac{س}{٢}$ هي معادلة المسعر الطلب لسلعة ينتجها مصنع معين وكان إقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٤س أوجد

أ- إقتران الإيراد الحدي.

ب- عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن.

$\boxed{٨}$ اذا كانت ع = ١٥ − $\frac{س}{٢}$ هي معادلة المسعر والطلب جد عدد الوحدات اللازم انتاجها يكون الايراد اكبر ما يمكن

$\boxed{٩}$ إذا كانت ع = ٢٤ − $\frac{٢س}{٣}$ تمثل معادلة المسعر الطلب جد عدد السلع التي يتحقق عندها أكبر إيراد.