2.250

المنهاج الجديد

MATHEMATICS

الرياضيات

توجيهي الفرع الأدبي - الفصل الدراسي الأول

مكتبة الوسام
ALWESAM
Tawjihi center & service store
قسم أسئلة الوزارة

الوحدة الثالثة :

تطبيقات التفاضل

2018/19

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store

الصف الثاني عشر

للفرعين الادبي والفندقي والسياحي

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

١- التفسير الهندسي

٢- التفسير الفيزيائي

٣- تطبيقات الاشتقاق

اولا- التزايد والتناقص

ثانيا- القيم القصوى

٤- تطبيقات اقتصادية

٥- حلول اسئلة الوحدة

٦- حلول جميع تدريبات واسئلة الكتاب

٧- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨- ٢٠١٨) مع الحلول النموذجية

٨- ورقة عمل على الوحدة مع الحلول النموذجية

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

التفسير الهندسي للمشتقة

الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(س_1، ص_1)$ ، $(س_2، ص_2)$ هو

$$\text{الميل} = م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

القاطع

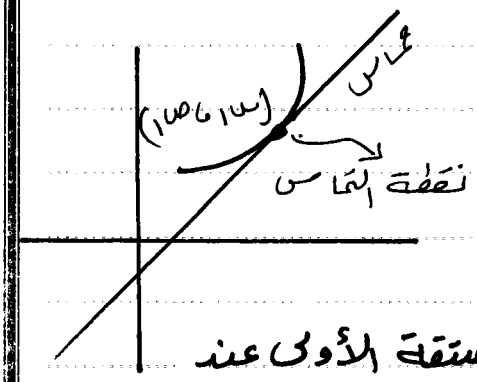
مستقيم يقطع منحنى الاقتران في نقطتين أو أكثر

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

= متوسط التغير

المماس

مستقيم يمس منحنى الاقتران في نقطة واحدة وتسمى نقطة التماس



ميل المماس = المشتقة الأولى عند نقطة التماس

$$= م = هـ'(س_1) = \left.\frac{ص}{س}\right|_{(س_1، ص_1)} = \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = س_1}$$

= ميل المنحنى

معادلة المماس

معادلة المماس هي $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

ولإيجاد معادلة المماس نتبع الخطوات التالية

① نجد الميل وذلك باشتقاق الاقتران ثم نعوض $س_1$ في المشتقة والعدد الناتج يكون هو الميل

② لإيجاد قيمة $ص_1$ نعوض $س_1$ في الاقتران

③ نكتب معادلة المماس $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ونضع مكان $س_1، ص_1، م$ قيمها

مكتبة المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كانت ص = ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} + ٨

فجد

أ) ميل المماس عند س = -١

ب) معادلة المماس للمنحنى ق عند النقطة (-١ ، ٥)

الحل

أ) ميل المماس = ق'(-١)

ق'(س) = ٦س^{٢} - ٢س

ق'(-١) = ٦(-١)^{٢} - ٢(-١) = ٦ + ٢ = ٨

ب) معادلة المماس هي

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص - ٥ = ٨ (س - (-١))

ص - ٥ = ٨ (س + ١)

ص - ٥ = ٨س + ٨ ⇐ ص = ٨س + ١٣

مثال ②

اذا كان ق(س) = (٢س - ٣)^{٢} (س - ٥)

فاوجد معادلة المماس للمنحنى ق(س) عند س = ١

الحل

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ق(١) = (٢ - ٣)^{٢} (١ - ٥)

= (-١)^{٢} (-٤)

= ١ × -٤ = -٤

نقطة المماس (١ ، -٤)

ميل المماس = ق'(١)

ق'(س) = ٢(٢س - ٣) × ٢ × (س - ٥) + (٢س - ٣)^{٢} × ١

ق'(١) = ٢(٢ - ٣) × ٢ × (١ - ٥) + (٢ - ٣)^{٢} × ١

= -١ - ٨ = -٩

معادلة المماس هي

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص + ٤ = -٩ (س - ١)

ص + ٤ = -٩س + ٩ ⇐ ص = -٩س + ١٣

مثال ③

اذا كان ق(س) = $\frac{٣س - ٢}{س + ١}$ فجد معادلة المماس للمنحنى ق(س) عند س = ٤

الحل

س$_{١}$ = ٤ ، ص$_{١}$ = ق(٤) = $\frac{٣ \times ٤ - ٢}{٤ + ١}$

= $\frac{١٢ - ٢}{٥}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

نقطة المماس (٤ ، ٢)

ميل المماس = ق'(٤)

ق'(س) = $\frac{(س + ١) \times ٣ - (٣س - ٢) \times ١}{(س + ١)^{٢}}$

ق'(٤) = $\frac{(٤ + ١) \times ٣ - (٣ \times ٤ - ٢)}{(٤ + ١)^{٢}}$

= $\frac{١٥ - ١٠}{٢٥}$ = $\frac{٥}{٢٥}$ = $\frac{١}{٥}$

معادلة المماس

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص - ٢ = $\frac{١}{٥}$ (س - ٤)

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

اذا كان $هـ(س) = ٣س^{٣} - ٢س + ١$

فجد معادلة المماس لمنحنى $هـ(س)$ عند النقطة $(١ ، ٢)$

الحل

$س_{١} = ١$ ، $ص_{١} = ٣$

ميل المماس $= هـ'(١)$

ملاحظة: هنا لا نشتق لتعويض مباشرة

$هـ'(س) = ٣(١)^{٢} - ٢ \times ١ + ١$

$= ٣ - ٢ + ١ = ٢$

معادلة المماس $ص - ٢ = ٢(س - ١)$

مثال ⑤

جد قيمة $س_{١}$ التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران $هـ(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ١٥س$ يساوي (١)

الحل

ميل المماس $= م = هـ'(س_{١}) = ١$

$هـ'(س) = \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} - ١٥$

$هـ'(س_{١}) = س_{١}^{٢} - ١٥ = ١$

$+١٥ \quad +١٥$

$س_{١}^{٢} = ١٦ \Leftarrow س_{١} = \pm\sqrt{١٦}$

$س_{١} = \pm ٤$

مثال ⑥

جد قيمة $س_{١}$ التي تجعل عندها ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = (س + ٢)^{٢}$ يساوي ١٢

الحل

ميل المماس $= هـ'(س_{١}) = ١٢$

$هـ'(س) = ٢(س + ٢)$

$هـ'(س_{١}) = ٢(س_{١} + ٢) = ١٢$

$\frac{٢}{٢} \quad \frac{١٢}{٢}$

$س_{١} + ٢ = ٦ \Leftarrow س_{١} = ٤$

$-٢ \quad -٢$

مثال ⑦

جد قيم $س_{١}$ التي يكون عندها المماس لمنحنى $هـ(س) = س^{٣} - ١٢س$ موازيًا لمحور السينات

الحل

ملاحظة

المماس يوازي محور السينات تعني أن ميل المماس $= هـ'(س_{١}) =$ صفر

الحل

$هـ'(س) = ٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{١٢}{٣} \Leftarrow س^{٢} = ٤$

بأخذ الجذر للطرفين

$\Leftarrow س = \pm\sqrt{٤}$

$= \pm ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

اذا كان ميل المماس للأقتران
ص = (٢ - س)^٤ عند النقطة (س١ ، ص١)
يساوي (٤) فاوجد س١ ؟

الحل

ميل المماس = ٤ ⇐ م = ٤

$\frac{ص}{س}\Big|_{س=س_1} = ٤$

$\frac{ص}{س} = ٤(٢-س)^{٣} \times -١$

$= -٤(٢-س)^{٣}$

$\frac{ص}{س}\Big|_{س=س_1} = -٤(٢-س_1)^{٣} = ٤$

$(٢-س_1)^{٣} = -١$ باخذ الجذر التكعيبي

$٢-س_1 = \sqrt[٣]{-١} = -١$

$-س_1 = -٣ \Leftarrow س_1 = ٣$

مثال (٩)

اذا كان ق(س) = ٤س^{-١} + ٩س
فجد معادلة المماس عند س = ٢

الحل

س١ = ٢ ، ص١ = ق(٢) = ٤(٢)^{-١} + ٩×٢

$= \frac{٤}{٢} + ١٨ = ٢ + ١٨ = ٢٠$

نقطة المماس (٢ ، ٢٠)

ميل المماس = ق'(٢)

ق'(س) = ٤×-١س^{-٢} + ٩

$= \frac{-٤}{س^{٢}} + ٩$

ق'(٢) = $\frac{-٤}{٤} + ٩ = -١ + ٩ = ٨$

معادلة المماس ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ٢٠ = ٨(س - ٢)

ص - ٢٠ = ٨س - ١٦ ⇐ ص = ٨س + ٤

مثال (١٠)

اذا كانت ص = ٢ع ، ع = ٣س + ١
فاوجد معادلة المماس عند س = ١

الحل

ميل المماس = $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

م = ٢ × ٣ = ٦

س١ = ١ ← ع = ٣×١ + ١ = ٤

ع = ٤ ← ص = ٢×٤ = ٨

نقطة المماس (١ ، ٨)

معادلة المماس

ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ٨ = ٦(س - ١)

ص = ٦س + ٢

مكتبة الهدى ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال (١١)

اذا كان $ه'(١) = ٢$ ، $ه(١) = ٣$

فاوجد معادلة المماس للأقتران $ه(س)$ عند $س = ١$

الحل

ميل المماس عند $س = ١$ يساوي $ه'(١) = ٢$

$س = ١ \leftarrow ه(١) = ٣$

نقطة المماس $(١ ، ٣)$

معادلة المماس

$ص - ٣ = ٢(س - ١)$

$ص = ٢س + ١$

مثال (١٢)

اذا كان $ه(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٥$

حيث ٢ عدد ثابت ، وكان ميل المماس عند $س = ٢$ يساوي ١٨ ، فما قيمة الثابت ٢؟

الحل

ميل المماس $= ه'(٢) = ١٨$

$ه'(س) = ٦٢س^{٢} + ٢س$

$ه'(٢) = ٦٢ \times ٤ + ٤ = ١٨$

$٢٤ + ٤ = ١٨$

$\frac{٢٤}{٤} = \frac{١٦}{٤} \leftarrow ٢ = ٤$

مثال (١٣)

اذا علمت ان ميل المماس للأقتران $ه(س)$ عند النقطة $(١ ، ٢)$ يساوي ٤ فجد قيمة $ه'(١)$

ميل المماس عند النقطة $(١ ، ٢)$

$= ه'(١) = ٤$

مثال (١٤)

اذا كانت $\lim_{ه \to ٠} \frac{ه(١+ه) - ه(١)}{ه} = ٤$

فاوجد معادلة المماس للأقتران $ه(س)$ عند النقطة $(١ ، ٣)$

الحل

$\lim_{ه \to ٠} \frac{ه(١+ه) - ه(١)}{ه} = ه'(١)$

$ه'(١) =$ ميل المماس $= ٤$

معادلة المماس

$ص - ٣ = ٤(س - ١)$

مكتبة الوفاء AL WEFAM
الوفاء ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

جد معادلة المماس للمنحنى الأقتران

$ص = \sqrt{٤٥ - ٢٠س}$ عند النقطة $(١، ٥)$

الحل

ميل المماس عند النقطة $(١، ٥)$

$= ق'(١) = \left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢٠}{\sqrt{٤٥ - ٢٠س}}$

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = \frac{-٢٠}{\sqrt{٤٥ - ٢٠}} = \frac{-٢٠}{\sqrt{٢٥}} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤$

معادلة المماس

$ص - ٥ = -٤(س - ١)$

$ص - ٥ = -٤س + ٤$

$ص = -٤س + ٩$

مثال (١٦)

جد معادلة المماس للمنحنى الأقتران

$ق(س) = ٣س^{٢} + ٢٧س$ عند النقطة $(١، ٥)$

الحل

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ٦س + ٢٧ \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$ق'(١) = ٦ \times ١ + \frac{٢٧}{٢\sqrt{١}} = ٦ + ١٣.٥ = ١٩.٥$

معادلة المماس

$ص - ٥ = ١٩.٥(س - ١)$

$ص - ٥ = ١٩.٥س - ١٩.٥$

$ص = ١٩.٥س - ١٤.٥$

مثال (١٧)

اذا كانت معادلة المماس للمنحنى الأقتران $ق(س) = س^{٢} - ب س + ١$ عند النقطة $(٣، ٥-)$ هي $ص = س - ٨$ جد قيمة الثابت ب

الحل

ميل المماس $= ق'(٣)$

$ق'(س) = ٢س - ب$

$ق'(٣) = ٢ \times ٣ - ب = ٦ - ب$

بما ان ميل المماس هو ميل

معادلة المماس

$\frac{د ص}{د س} = ١$

$٦ - ب = ١$

$-ب = -٥$

$\boxed{ب = ٥}$

مكتبة الوسام ALWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٨)

اذا كان ميل المماس
$و(س) = أس^2 + بس + ٥$ عند
النقطة $(١، و(١))$ يساوي ٤
جد $أ، ب$ ؟

الحل

ميل المماس $= و'(١)$

$و'(س) = ٢أس + ب$

$و'(١) = ٢أ \times ١ + ب = ٤$

$٢أ + ب = ٤$ --- (١)

لكن $(١، و(١))$ ⟸
$و(١) = ٢$ بالتعويض في
$و(س)$

$٢ = أ(١)^2 + ب \times ١ + ٥$

$٢ = أ + ب + ٥$

$-٣ = أ + ب$ --- (٢)

حل المعادلتين بالحذف

$٢أ + ب = ٤$

$أ + ب = -٣$ بالطرح

$أ = ٧$

بالتعويض في (٢)

$٧ + ب = -٣$

$ب = -١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

أمثلة الاسئلة الموضوعية

مثال ①

اذا كان $ق(س) = ٢س + ١$ فان ميل المماس للأقتران $ق(س)$ عند النقطة $(١، ٣)$ يساوي

أ) ١ ب) ٣ ج) ٢ د) صفر

الحل

ميل المماس $= ق'(١)$ عند $س = ١$

$ق'(س) = ٢$

$ق'(١) = ٢$ ← الاجابة ج

مثال ②

اذا كان ميل المماس للأقتران $ق(س) = ٢س^{٣} + ٥س + ٢$ عند $س = ١$ يساوي ٩ فان قيمة الثابت $أ$ تساوي

أ) -٢ ب) ٢ ج) ٤ د) ٩

الحل

ميل المماس عند $س = ١$ يساوي $ق'(١)$

$ق'(س) = ٦أس^{٢} + ٥$

$ق'(١) = ٦أ + ٥ = ٩$

$٦أ = ٤ \Leftarrow ٦أ + ٥ = ٩$

$أ = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ← الاجابة ب

مثال ③

اذا كان $ق(س) = \frac{-١}{س^{٢}}$ فان ميل المماس للأقتران $ق(س)$ عند $س = -١$ يساوي

أ) ٢ ب) -٢ ج) ١ د) ٠

الحل

$ق'(س) = \frac{-(-١) \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

يتبع

رابع اكل

$هـ'(-١) = \frac{٤}{٣(-١)} = \frac{٤}{-١} = -٤$

ميل المماس $= هـ'(-١) = -٤$

الاجابة (د)

مثال (٤)

اذا كان ميل المماس للأقتران $هـ(س)$ عند $س = ٣$ يساوي ٥

فان $هـ'(٣) = \lim_{ه \to ٠} \frac{هـ(٣+ه) - هـ(٣)}{ه}$

يساوي

أ) ٥ ب) ٠ ج) ٣ د) -٣

اكل

ميل المماس عند $س = ٣$

$= هـ'(٣)$

$\Leftarrow هـ'(٣)$ حسب التعريف

$= \lim_{ه \to ٠} \frac{هـ(٣+ه) - هـ(٣)}{ه}$

$= ٥$ الاجابة أ

مثال (٥)

معادلة المماس لمنحنى

$ص = ٤س^٢$ عند $س = ٠$ هي

أ) $س = ٨$ ب) $ص = -٨$

ج) $ص = ٠$ د) $س = ٠$

الحل

$\frac{دص}{دس} = ٨س$

ميل المماس عند $س = ٠$ يساوي ٨×٠

ميل المماس $= م = صفر$

نحدد $ص_١$ بتعويض $س = ٠$ في الاقتران

$ص_١ = ٤ \times ٠ = صفر$

النقطة هي $(٠, ٠)$

معادلة المماس

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٠ = صفر(س - صفر)$

$ص - ٠ = ٠$

$\Leftarrow ص = ٠$ الاجابة د

مكتبة الوسام ALWESAM

الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

ميّم س للنقطة على منحنى الاقتران
ق(س) = س² - ٤س + ٢ والتي
يكون ميل المماس عندها
صفرًا هي

أ) ٢ ب) -٢ ج) ٤ د) -٤

الحل

ميل المماس = ق'(س)
= ٢س - ٤
ميل المماس = صفر
٢س - ٤ = صفر ⟸ ٢س = ٤
س = ٤/٢ = ٢ ⟸ س = ٢

الاجابة (أ)

مثال ⑦

ميل المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س² - ٣س + ١ عند
النقطة (١، -١) يساوي

أ) -١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

الحل

ق'(س) = ٢س - ٣
ميل المماس عند (١، -١)
يساوي ق'(١) = ٢×١ - ٣
= ٢ - ٣
= -١

الاجابة (أ)

مثال ⑧

اذا كان ق(س) = ٢س + هـ(س)
وكان ميل المماس للاقتران هـ(س)
عند س = ١ يساوي ٤ فجد
ق'(١)

أ) ٤ ب) ٦ ج) -٤ د) ٢

الحل

ميل مماس هـ(س) عند س = ١
يساوي هـ'(١) = ٤
نشتق المعادلة ← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

$ق'(س) = ٢ + هـ'(س)$

$ق'(١) = ٢ + هـ'(١)$

$= ٢ + ٤ = ٦$

الاجابة (أ)

مثال ⑨

اذا كانت $هـ'(٢) = \lim_{ه \to ٠} \frac{هـ(٢+ه) - هـ(٢)}{ه} = ٥$

فان ميل المماس للاقتران $هـ(س)$ عند $س = ٢$ يساوي

أ) -٥ ب) ٢ ج) ٥ د) لا يمكن ايجادها

الحل

$هـ'(٢) = \lim_{ه \to ٠} \frac{هـ(٢+ه) - هـ(٢)}{ه} = هـ'(٢)$

$ه \to ٠ \quad = ٥$

ميل المماس لـ $هـ(س)$ عند $س = ٢$

هو $هـ'(٢)$

$= هـ'(٢) = ٥$ ميل المماس

الاجابة (ج)

مثال ⑩

ميل المماس لمنحنى

$هـ(س) = (٤ - س)^٣$ عند $س = ١$

يساوي

أ) ٢٧ ب) ٣ ج) -٢٧ د) -٧

الحل

ميل المماس $= هـ'(س)$ عند $س = ١$

$هـ'(س) = ٣(٤ - س)^٢ \times -١$

$هـ'(١) = ٣(٤ - ١)^٢ \times -١$

$= ٣ \times ٣^٢ \times -١$

$= ٩ \times ٣ \times -١ = -٢٧$

الاجابة (ج)

مثال ⑪

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $هـ(س)$ عند النقطة $(-١، ٣)$ يساوي ٥ فان $هـ'(-١)$ يساوي

أ) ٥ ب) -٥ ج) ٣ د) -١

الحل ميل المماس $= هـ'(-١)$

$= ٥$

مكتبة الوسام ALWSAM

المعلم ناجح الجمزاوي

(١٢) اذا كانت $ص = ٢ع + ٥$ ، $ع = س^{٢} + ١$ فان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = د(س)$ عند $س = ١$

أ) -٢ ب) ٢ ج) -٤ د) ٤

الحل

$$\text{ميل المماس} = \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$$

$$\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \frac{\text{ك ص}}{\text{ك ع}} \times \frac{\text{ك ع}}{\text{ك س}}$$

$$= ٢ \times ٢ س$$

$$= ٤ س$$

$$\left.\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}\right|_{س = ١} = ٤ \times ١ = \text{ميل المماس}$$

د

(١٣) اذا كان ميل المماس للاقتران $ص = (٢ - س)^{٤}$ عند النقطة $(س_{١}, ص_{١})$ يساوي ٤ فان قيمة $س_{١}$ تساوي

أ) -٣ ب) -٢ ج) ٢ د) ٣

الحل

$$\text{ميل المماس} = \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = ٤(٢ - س)^{٣} \times -١$$

$$٤ = ٤(٢ - س)^{٣}$$

$$(٢ - س)^{٣} = ١$$ بأخذ الجذر التكعيبي

$$٢ - س = ١$$

$$-س = -١$$

$$س = ١ \Leftarrow س = ٣$$

الاجابة د

(١٤) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $د(س)$ عند النقطة $(٣ ، ٧)$ يساوي ٨ فان $\lim_{س \to ٣} \frac{د(س) - د(٣)}{س - ٣}$ تساوي

أ) ٧ ب) ٨ ج) ٣ د) -٨

الحل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{د(س) - د(٣)}{س - ٣} = د'(٣)$$

$$= \text{ميل المماس عند } س = ٣$$

$$= ٨$$

ب

مركز الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١١٩

اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٣س$ ، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة $(٢، ق(٢))$.

الحل

$ق'(س) = ٢س - ٣$

ميل المماس عند النقطة $(٢، ق(٢))$

$= ق'(٢)$

$= ٢ \times ٢ - ٣ = ٤ - ٣ = ١$

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ٢ \times (س^{٢} + ١) \times ٢س$

$ق'(١) = ٢ \times (١^{٢} + ١) \times ١ \times ٢$

$= ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$

نقطة التماس $(١، ٤)$

معادلة المماس

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٤ = ٨(س - ١)$

$ص - ٤ = ٨س - ٨$

$+٤ \quad +٤$

$ص = ٨س - ٤$

تدريب ② ص ١٢٠

اذا كان $ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٢}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما $س = ١$

الحل

$س_{١} = ١ \quad ، \quad ص_{١} = (١^{٢} + ١)^{٢}$

$= ٢^{٢} = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM

التعلم مع ناجح الجمزاوي

الاسئلة

ص ١٢١

السؤال الأول

جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم س المبينة ازاء كل منها .

أ) $ق(س) = ٣س^{٢} + ٥$ ، $س = ٢$

الحل

$س_{١} = ٢ \Leftarrow ص_{١} = ٣ \times ٢^{٢} + ٥ = ١١$

نقطة المماس $(٢ ، ١١)$

ميل المماس $= ق'(٢)$

$ق'(س) = ٦س$

$ق'(٢) = ١٢ \Leftarrow$ ميل المماس $= ١٢$

معادلة المماس

$ص - ١١ = ١٢(س - ٢)$

$ص = ١٢س - ٢٤ + ١١$

$ص = ١٢س - ١٣$

ب) $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٦س + ١$ ، $س = ١$

الحل

$س_{١} = ١ \Leftarrow ص_{١} = ١ + ٣ - ٦ + ١ = ٣$

نقطة المماس $(١ ، ٣)$

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٦$

$ق'(١) = ٣ + ٦ - ٦ = ٣$

معادلة المماس

$ص - ٣ = ٣(س - ١)$

$ص - ٣ = ٣س - ٣ \Leftarrow ص = ٣س$

ج) $ق(س) = (٢س - ٤)(س^{٢} + ١)$ ، $س = صفر$

الحل

$س_{١} = ٠ \Leftarrow ص_{١} = (٠ - ٤)(٠ + ١) = -٤ \times ١ = -٤$

نقطة المماس $(٠ ، -٤)$

ميل المماس $= ق'(٠)$

$ق'(س) = (٢س - ٤) \times ٢س + (س^{٢} + ١) \times ٢$

$ق'(٠) = (٠ - ٤) \times ٠ + (٠ + ١) \times ٢$

$= ٢$

معادلة المماس

$ص + ٤ = ٢(س - ٠)$

$ص + ٤ = ٢س$

$ص = ٢س - ٤$

$ق'(س) = ٢س + ٣$

$ق'(١) = ٢ \times ١ + ٣ = ٥$

معادلة المماس هي

$ص - ٣ = ٥(س - ١)$

$ص - ٣ = ٥س - ٥ \Leftarrow ص = ٥س - ٢$

$+٣ \quad +٣$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

اذا كان $ق(س) = \frac{س^2 + 3س}{س^2 + 1}$ ، أجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١

الحل

$س_1 = 1 \Leftarrow ص_1 = \frac{2+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

نقطة المماس $(1, 2)$

$ق'(س) = \frac{(س^2+1) \times 2 - (2+3س) \times 2س}{(س^2+1)^2}$

$ق'(1) =$ ميل المماس

$= \frac{2(2+3) - 2(1+1)}{4(1+1)^2}$

$= \frac{8-4}{4} = \frac{4}{4} = 1$

معادلة المماس

$ص - 2 = 1(س - 1)$

$ص - 2 = س - 1$

$ص = س + 3$

السؤال الثالث

اذا كان $ق(س) = ب س^2 + 4س - 3$

حيث ب عدد ثابت ، وكان ميل المنحنى عندما $س = 3$ يساوي ٢٢ ، أجد قيمة ب

الحل

ميل المنحنى $= ق'(س)$ عند $س = 3$

$\Leftarrow ق'(3) = 22$

$ق'(س) = 2ب س + 4$

$ق'(3) = 6ب + 4$

$22 = 6ب + 4$

$18 = 6ب \Leftarrow ب = 3$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

اذا كان $ق(س) = س^٥ + ٤س^٢$ فجد ميل المماس للمنحنى للأقتران ق عندما س = ١

الحل

ميل المماس عندما س = ١ = $ق'(١)$

$ق'(س) = ٥س^٤ + ٨س$

$ق'(١) = ٥(١)^٤ + ٨(١)$

$= ٥ + ٨$

$= ١٣$

السؤال الخامس

اذا كان $ق(س) = (٣س^٢ - ٢)^٤$ فجد معادلة المماس للمنحنى للأقتران ق عند النقطة $(-١، ق(-١))$

الحل

$س = -١$ $\quad ص = ق(-١)$

$= (٣(-١)^٢ - ٢)^٤$

$= (٣ - ٢)^٤ = ١^٤ = ١$

نقطة المماس $(-١، ١)$

ميل المماس $= ق'(-١)$

$ق'(س) = ٤(٣س^٢ - ٢)^٣ \times ٦س$

$ق'(-١) = ٤(٣(-١)^٢ - ٢)^٣ \times ٦ \times -١$

$= ٤(٣ - ٢)^٣ \times -٦$

$= -٢٤ \times ١ = -٢٤$

معادلة المماس

$ص - ١ = -٢٤(س + ١)$

$ص + ١ = \pm \sqrt{-٢٤}$

$١ + \quad ١ -$

$ص = -٢٣ \quad -٢٥$

مكتبة الوسام ALWESAM

التعلم مع ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٣$ عند $س = ١$

الحل

$س_١ = ١ \Leftarrow ص_١ = ق(١) = ٣(١)^٢ + ٢(١) - ٣$
$= ٣ + ٢ - ٣ = ٢$

نقطة المماس $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ٦س + ٢$ ، $ق'(١) = ٦(١) + ٢$
$= ٨$

معادلة المماس هي

$ص - ٢ = ٨(س - ١)$

$ص - ٢ = ٨س - ٨ \Leftarrow ص = ٨س - ٦$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا علمت ان $ق(س) = ٢س$ فاوجد ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ٦$

أ) صفر ب) ٢ ج) ٦ د) ١٢

ميل المماس $= ق'(٦)$

$ق'(س) = ٢ \Leftarrow ق'(٦) = ٢$

ب

وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $ق(س) = \frac{٣}{س}$ فاوجد ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ٣$

أ) -١ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٩}$ د) ١

ميل المماس $= ق'(٣)$

$ق(س) = \frac{-٣}{س^٢}$ ①

$ق'(٣) = \frac{-٣}{٣^٢} = \frac{-٣}{٩} = -\frac{١}{٣}$

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = س + ٧\sqrt{س}$ عند $س = ١$

الحل

$س_١ = ١ \Leftarrow ص_١ = ق(١) = ١ + ٧ = ٢$

نقطة المماس $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ١ + \frac{٧}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow ق'(١) = ١ + \frac{٧}{٢}$
$= \frac{٩}{٢}$

معادلة المماس $ص - ٢ = \frac{٩}{٢}(س - ١)$

وزارة (٢٠١٠) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = \frac{1}{3س - 1}$ عندما س = صفر

الحل

س١ = صفر ⇐ ص١ = ق(٠) = $\frac{1}{3(0) - 1}$

$= \frac{1}{-1} = -1$

نقطة المماس (٠، -١)

ميل المماس = ق'(٠)

$ق'(س) = \frac{-3 \times 3}{(3س - 1)^2}$

$ق'(٠) = \frac{-9}{(-1)^2} = \frac{-9}{1} = -9$

معادلة المماس

ص - -١ = -٩ (س - ٠)

ص + ١ = -٩س ⇐ ص = -٩س - ١

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $ق(س) = (3س + 1)^3$ فجد
ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س)
عند س = ٢

الحل

ميل المماس = ق'(٢)

$ق'(س) = 3(3س + 1)^2 \times 3$

$ق'(٢) = 3(3 \times 2 + 1)^2 \times 3$

$= 6 \times 25 = 150$

وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^2 - 1$ فأوجد ميل
المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند
س = ٣

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٥٠ د) ٢

ميل المماس = ق'(٣)

ق'(س) = ٢س

ق'(٣) = ٢ × ٣ = ٦ ⓑ

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان ص = ق(س) = $(3س^3 - 2)^4$
فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران
ق عند س = ١

الحل

ميل المماس = ق'(١)

$ق'(س) = 4(3س^3 - 2)^3 \times 6س^2$

$ق'(١) = 4(3(1)^3 - 2)^3 \times 6 \times 1$

$= 24(3 - 2)^3 =$

$= 24 \times (1)^3 = 24 \times 1$

$= 24$

الوعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٢}$ فجد ميل المماس لمنحنى ق عند $س = ١$

الحل

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ٥س^{٤} + ٨س$

$ق'(١) = ٥(١)^{٤} + ٨ \times ١$

$= ٥ + ٨ = ١٣$

وزارة (٢٠١٣) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٣}{١ + ٥س^{٢}}$ عند النقطة $(٠، ٣)$

الحل

ميل المماس $= ق'(٠)$

$ق'(س) = \frac{-٣ \times ٢}{(١ + ٥س^{٢})^{٢}}$

$ق'(٠) = \frac{-٦}{(١ + ٠ \times ٥)^{٢}} = \frac{-٦}{١^{٢}} = -٦$

معادلة المماس

$ص - ٣ = -٦ (س - ٠)$

$ص - ٣ = -٦س$

$ص = -٦س + ٣$

وزارة (٢٠١٣) صيفية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = ٤ + \sqrt{س - ٢}$ عند النقطة $(٣، ٥)$

الحل

$س_{١} = ٣$ ، $ص_{١} = ٥$

ميل المماس $= ق'(٣)$

$ق'(س) = صفر + \frac{١}{٢\sqrt{س - ٢}}$

$ق'(٣) = \frac{١}{٢\sqrt{٣ - ٢}} = \frac{١}{٢ \times ١} = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس

$ص - ٥ = \frac{١}{٢}(س - ٣)$

$ص - ٥ = \frac{١}{٢}س - \frac{٣}{٢} \Leftarrow ص = \frac{١}{٢}س - \frac{٧}{٢}$

وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان $ق(س) = س(٣س - ١)^{٢}$ فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند $س = ١$

الحل

$س_{١} = ١ \Leftarrow ص_{١} = ق(١) = ١ \times (٣ \times ١ - ١)^{٢}$

$= ١ \times ٢^{٢} = ٤$

نقطة المماس $(١، ٤)$

$ق'(س) = س \times ٢(٣س - ١) \times ٣ + (٣س - ١)^{٢} \times ١$

حاصل ضرب + الثاني × مشتقة الأول

← يكمل الحل

مكتبة الوسام العلمية
المعلم ناجح الجمزاوي

هـ(١) = ١ × (٣ × ١ - ١)^٢ + ٣ × (١ - ١ × ٣)^٢ × ١

= ٢ × ٢^٢ × ٢ = ١٢ + ٤ = ١٦

معادلة المماس

ص - ٤ = ١٦ (س - ١)

ص - ٤ = ١٦ س - ١٦

ص = ١٦ س - ١٦ + ٤

ص = ١٦ س - ١٢

وزارة (٢٠١٤) صيفية

جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران

هـ(س) = ٢ / (٣س - ١) عند (٠، -٢)

الحل

ميل المماس = هـ'(٠)

هـ'(س) = -٢ × ٣ / (٣س - ١)^٢

هـ'(٠) = -٦ / (٣ × ٠ - ١)^٢ = -٦ / (-١)^٢ = -٦ / ١ = -٦

معادلة المماس

ص - -٢ = -٦ (س - ٠)

ص + ٢ = -٦ س

ص = -٦ س - ٢

وزارة (٢٠١٥) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران

هـ(س) = √(٣س^٢ + ٦) عند (١، ٣)

الحل

هـ'(س) = ٦ س / ٢√(٣س^٢ + ٦)

ميل المماس = هـ'(١)

= ٦ × ١ / ٢√(٣ × ١^٢ + ٦) = ٦ / ٢√٩ = ٦ / ٦ = ١

معادلة المماس

ص - ٣ = ١ × (س - ١)

ص - ٣ = س - ١ ⇐ ص = س + ٢

+٣ +٣

وزارة (٢٠١٥) صيفية

جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران

هـ(س) = ١ / س^٢ عند س = -١

الحل

س١ = -١ ⇐ ص١ = هـ(-١)

= ١ / (-١)^٢ = ١ / ١ = ١

نقطة المماس (-١، ١)

هـ'(س) = -١ × ٢س / س^٤ = -٢ / س^٣

هـ'(-١) = -٢ / (-١)^٣ = -٢ / -١ = ٢

ص - ١ = ٢ (س + ١) ⇐ ص = ٢س + ٣

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان $ق(س) = \frac{٢س}{٣س + ٤}$

جد ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = -١$

الحل

$$ق'(س) = \frac{(٣س+٤)(٢) - ٢س(٣)}{(٣س+٤)^{٢}}$$

$$ق'(-١) = \frac{(-٣+٤)(٢) - (-٢)(٣)}{(-٣+٤)^{٢}}$$

$$= \frac{(١)(٢) + ٦}{(١)^{٢}} = \frac{٨}{١} = ٨$$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٦س}{س^{٢}+٢}$ عند $(-١، -٢)$

الحل

$$ق'(س) = \frac{(س^{٢}+٢)(٦) - ٦س(٢س)}{(س^{٢}+٢)^{٢}}$$

$$ق'(-١) = \frac{(١+٢)(٦) - (-٦)(-٢)}{(١+٢)^{٢}}$$

$$= \frac{١٨ - ١٢}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

معادلة المماس

$ص - (-٢) = \frac{٢}{٣}(س - (-١))$

$ص + ٢ = \frac{٢}{٣}(س + ١)$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = س(١ - ٣س)^{٢}$ عند $س = ١$

الحل

$س_{١} = ١ \Leftarrow ص_{١} = ١(١ - ٣)^{٢}$

$= ١(-٢)^{٢} = ١ \times ٤$

$= ٤$

نقطة المماس $(١، ٤)$

$ق'(س) = س \times ٢(١ - ٣س)(-٣) + (١ - ٣س)^{٢} \times ١$

$ق'(١) =$ ميل المماس

$= ١ \times ٢(١ - ٣)(-٣) + (١ - ٣)^{٢}$

$= ٢(-٢)(-٣) + (-٢)^{٢}$

$= ١٢ + ٤ = ١٦$

معادلة المماس

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٤ = ١٦(س - ١)$

مكتبة نسام NAWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$هـ(س) = \sqrt{٤س - ١}$ عند $س = ٥$

الحل

$س_١ = ٥ \Leftarrow ص_١ = هـ(٥) = \sqrt{٤ \times ٥ - ١}$
$= \sqrt{٢٠ - ١} = \sqrt{١٩} = ٣$

نقطة المماس $(٥ ، ٣)$

$هـ'(س) = \frac{٤}{\sqrt{٤س - ١}} = \frac{٤}{\sqrt{٤س - ١}}$

$هـ'(٥) = \frac{١}{\sqrt{٤ \times ٥ - ١}} = \frac{١}{\sqrt{١٩}} = \frac{١}{٣}$

معادلة المماس
$ص - ٣ = \frac{١}{٣}(س - ٥)$

وزارة (٢٠١٨) شتوية جديد

اذا كان $هـ(س) = \sqrt[٣]{س}$ فجد
معادلة المماس لمنحنى الاقتران
هـ عند $س = ١$

الحل

$هـ(س) = س^{\frac{١}{٣}}$

$هـ'(س) = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣ \sqrt[٣]{س^٢}}$

ميل المماس $= م = هـ'(١) = \frac{١}{٣ \sqrt[٣]{١^٢}} = \frac{١}{٣ \times ١} = \frac{١}{٣}$

$ص_١ = هـ(١) = \sqrt[٣]{١} = ١$

النقطة $(١ ، ١)$ $م = \frac{١}{٣}$

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ١ = \frac{١}{٣}(س - ١)$

$ص - ١ = \frac{١}{٣} س - \frac{١}{٣}$
$+١ \quad +١$

$ص = \frac{١}{٣} س - \frac{١}{٣} + \frac{١}{١}$ توحيد مقام

$ص = \frac{١}{٣} س + \frac{٢}{٣}$

وزارة (٢٠١٨) شتوية قديم

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$هـ(س) = س^٢ + س$ عند $س = ١$

الحل

$هـ'(س) = ٢س + ١$

ميل المماس $= م = هـ'(١) = ٢ \times ١ + ١ = ٣$

$ص_١ = هـ(١) = ١^٢ + ١ = ٢$

النقطة $(١ ، ٢)$ $م = ٣$

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٢ = ٣(س - ١)$ $ص = ٣س - ١$

$ص - ٢ = ٣س - ٣$

وزارة (٢٠١٨) صيفية جديد

اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢}+٥}{٤س+٢}$ $س \neq -\frac{١}{٢}$

جد معادلة المماس للمنحنى الاقتران $ق$ عند النقطة $(١، ١)$

الحل

ميل المماس $= ق'(١)$

$$ق'(س) = \frac{(٤س+٢)(٢س) - (س^{٢}+٥)(٤)}{(٤س+٢)^{٢}}$$

$$ق'(١) = \frac{(٤+٢)(٢) - (١+٥)(٤)}{(٤+٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٦ \times ٢ - ٦ \times ٤}{٦^{٢}} = \frac{١٢-٢٤}{٣٦}$$

$$= \frac{-١٢}{٣٦} = -\frac{١}{٣}$$

النقطة $(١، ١)$ $م = -\frac{١}{٣}$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ١ = -\frac{١}{٣}(س - ١)$

$ص - ١ = -\frac{١}{٣}س + \frac{١}{٣}$ توحيد المقام

$ص = -\frac{١}{٣}س + \frac{١}{٣} + ١$

$ص = -\frac{١}{٣}س + \frac{٤}{٣}$

وزارة (٢٠١٨) صيفية

جد معادلة المماس للمنحنى الاقتران $ق(س) = (س+١)(س^{٢}+٣)$ عند $س = ١$

الحل

مشتقة حاصل ضرب

$ق'(س) = (س+١)(٢س) + (س^{٢}+٣)(١)$

$ق'(١) = (١+١)(٢)(١) + (١^{٢}+٣)(١)$

$= ٤ + ٤$

$= ٨$

$ص = ق(١) = (١+١)(١^{٢}+٣)$

$= ٢ \times ٤ = ٨$

النقطة $(١، ٨)$ $م = ٨$

معادلة المماس

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٨ = ٨(س - ١)$

$ص - ٨ = ٨س - ٨$

$ص = ٨س$

مكتبة الوسام ALWESAM

الوسام | ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية قديم

ميل مماسة المنحنى المعرّف
$f(x) = \sqrt{2x-1}$ عند $x=5$

الحل

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(5) = \frac{1}{\sqrt{2\times5-1}} = \frac{1}{\sqrt{10-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$x=5 \Rightarrow y = f(5) = \sqrt{2\times5-1}$

$= \sqrt{9} = 3$

النقطة $(5, 3)$ $m = \frac{1}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 5)$

$y - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} + 3$ (توحيد المقامات 3×1 و 1×3)

$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

التفسير الفيزيائي

اذا تحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) حيث ف : المسافة التي يقطعها الجسيم خلال زمن قدره (ن) فإن

① السرعة اللحظية ع(ن) = ف'(ن)
أي أن
السرعة = مشتقة المسافة

② التسارع اللحظي ت(ن) = ع'(ن)
= ف''(ن)
التسارع = مشتقة السرعة
= المشتقة الثانية للمسافة

ف ← ع ← ت
ف = ∫ ع
ع(ن) = ف'(ن)
ت(ن) = ع'(ن) = ف''(ن)

هناك ثلاث حالات :-

① الحالة الأولى
الزمن معلوم (معطى في السؤال) ويطلب السرعة والتسارع

② الحالة الثانية
الزمن (ن) غير معطى في السؤال ويطلب السرعة عند تسارع معين

③ الحالة الثالثة
الزمن (ن) غير معطى في السؤال ويطلب التسارع عند سرعة معينة

ملاحظات هامة

① تنعدم السرعة أو تتلاشى
نضع ع(ن) = صفر
لينعدم التسارع نضع ت(ن) = صفر

② موقع الجسم عند سرعة أو تسارع معين نجد الزمن من السرعة أو التسارع ونعوضه في العلاقة ف(ن)

③ الزمن دائماً موجب (ن ≥ ٠)

مكتبة الإسلام
المعلم ناجح الجمزاوي

أمثلة على الحالة الأولى

مثال ①

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن⁴ − ٥ن² + ٨ن احسب كلاً من السرعة والتسارع عندما ن = ٢ ثانية

الحل

① ع(ن) = ف'(ن)
= ٤ن³ − ١٠ن + ٨
ع(٢) = ٤(٢)³ − ١٠×٢ + ٨
= ٤×٨ − ٢٠ + ٨
= ١٢ + ٨ = ٢٠ م/ث

② ت(ن) = ع'(ن)
= ١٢ن² − ١٠
ت(٢) = ١٢×٢² − ١٠
= ١٢×٤ − ١٠ = ٤٨ − ١٠
= ٣٨ م/ث²

مثال ②

يتحرك جسيم على خط مستقيم حيث ان بعده عن نقطة الأصل يعطى وفقاً للأقتران ف حيث ف(ن) = ٣ن² + ٧ احسب سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة

الحل

ع(ن) = ف'(ن)
= ٦ن
ع(٣) = ٦×٣ = ١٨ م/ث

مثال ③

يتحرك جسيم على خط مستقيم حيث ان بعده عن نقطة الاصل يعطى وفقاً للأقتران ف حيث ف(ن) = √(٧ن) جد سرعة الجسيم بعد مرور (٤) ثوان

الحل

ع(ن) = ف'(ن)
= ٧ / (٢√(٧ن)) = ١ / √(٧ن)
ع(٤) = ١ / √(٧×٤) = ١ / ٨√٧

مثال ④

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ١/٣ ن³ + ١/٢ ن² + ٣ن جد سرعة الجسيم بعد ٣ ثواني

الحل ع(ن) = ١/٣ × ٣ن² + ١/٢ × ٢ن + ٣
= ن² + ن + ٣
ع(٣) = ٩ + ٣ + ٣ = ١٥

امثلة على الحالة الثانية والثالثة

مثال ①

اذا كان ف(ن) = ن³ - ٣ن² + ٥
اوجد المسافة التي يقطعها جسيم
ف بالأمتار ، ن بالثواني . ثم سرعة الجسيم عندما
يكون تسارعه ٤ م/ث²

الحل

ملاحظة

اعتمد هذه الطريقة في جميع الاسئلة

ع(ن) = ٣ن² - ٦ن
ع(١) = ٣(١)² - ٦(١)
= ٣ - ٦
= -٣

ت(ن) = ٦ن - ٦
٦ن - ٦ = ٠
٦ن = ٦
ن = ١

نعوضها

مثال ②

اذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم
يعطى (ن) من الثواني تعطى بالعلاقة
ف(ن) = $\frac{1}{3}$ ن³ - ٣ن² + ٥ن + ١٢
اجد التسارع عندما تنعدم السرعة

الحل

ع(ن) = $\frac{1}{3}$ × ٣ن² - ٦ن + ٥
= ن² - ٦ن + ٥

تنعدم السرعة ع(ن) = صفر
ن² - ٦ن + ٥ = ٠
(ن - ٥)(ن - ١) = ٠
ن = ٥ ، ن = ١ نعوضها في التسارع
ت(ن) = ٢ن - ٦
ت(٥) = ٢×٥ - ٦ = ١٠ - ٦ = ٤
ت(١) = ٢×١ - ٦ = ٢ - ٦ = -٤

مثال ③

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث
ان
ف(ن) = ٦ن² - ن³ أوجد
المسافة التي يقطعها الجسم حتى يصبح
تسارعه = صفر

مكتبة السلام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الحل

$ف'(ن) = ١٢ن - ٣ن^{٢}$

$ت(ن) = ف'(ن) = ١٢ - ٦ن$

المماس = صفر $\Leftarrow$ $١٢ - ٦ن = صفر$

$٦ن = ١٢ \Leftarrow ن = \frac{١٢}{٦} = ٢$

نعوضها في المسافة

$ف(٢) = ٦(٢)^{٢} - (٢)^{٣}$

$= ٢٤ - ٨ = ١٦$

مثال ④

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$ف(ن) = ٢ن^{٢} - ٤ن + ٣$ جد المسافة عندما تكون سرعة الجسم تساوي تسارعه ؟

الحل

$ع(ن) = ٤ن - ٤$

$ت(ن) = ٤$

السرعة = التسارع

$٤ن - ٤ = ٤$

$٤ن = ٨ \Leftarrow ن = \frac{٨}{٤} = ٢$

نعوضها في المسافة

$ف(٢) = ٢(٢)^{٢} - ٤ \times ٢ + ٣$

$= ٨ - ٨ + ٣ = ٣$ م

مثال ⑤

اذا مثل الاقتران $ف(ن)$ المسافة التي تقطعها جسيم بالأمتار من بدء حركته وكان $ف(ن) = ن^{٣} - ٥ن^{٢} + ٥$ فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث ؟

الحل

$ع(ن) = ٣ن^{٢} - ١٠ن$

$ت(ن) = ٦ن - ١٠$

$ت(ن) = ٤ \Leftarrow ٦ن - ١٠ = ٤$

$٦ن = ١٤ \Leftarrow ن = \frac{١٤}{٦} = ٢$

نعوضها في السرعة

$ع(٢) = ٣(٢)^{٢} - ١٠(٢) = ١٢ - ٢٠ = -٨$

مثال ⑥

يتحرك جسيم وفق العلاقة $ف(ن) = (ن-٢)^{٥}$ جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٢٠ م/ث^{٢} ؟

الحل

$ع(ن) = ف'(ن) = ٥(ن-٢)^{٤} \times ١$

$ت(ن) = ٥ \times ٤(ن-٢)^{٣} = ٢٠(ن-٢)^{٣}$

$ت(ن) = ٢٠ \Leftarrow ٢٠(ن-٢)^{٣} = ٢٠$

بالقسمة على ٢٠ $\Leftarrow (ن-٢)^{٣} = ١$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\sqrt[3]{(ن-٢)^{٣}} = \sqrt[3]{١} \Leftarrow$

$ن - ٢ = ١ \Leftarrow ن = ٣$

نعوضها في ع (ن)

$ع(٣) = ٥(٣-٢)^{٤} = ٥(١)^{٤} = ٥$

مثال ⑦

يتحرك جسيم وفق العلاقة

$ف(ن) = ن^{٢} - ٦ن + ٥$ حيث ف تقاس الجسيم عندما سرعته تساوي ٤٢ م/ث

الحل

$ع(ن) = ف'(ن) = ٢ن - ٦$

السرعة $= ٤٢$ م/ث

$٢ن - ٦ = ٤٢ \Leftarrow ٢ن = ٤٨ \Leftarrow ن = \frac{٤٨}{٢} = ٢٤$

$\Leftarrow ن = ٤$ نعوضها في التسارع

$ت(ن) = ٢ \Leftarrow ت(٤) = ٢$

مثال ⑧

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران ف حيث

$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٦ن^{٢} - ٧$ حيث ف تقاس بالأمتار ن بالثواني فما تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١٨ م/ث

الحل

$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ١٢ن$

السرعة $= ١٨$

$٦ن^{٢} - ١٢ن = ١٨ \Leftarrow ٦ن^{٢} - ١٢ن - ١٨ = ٠$

$\div ٦ \quad \div ٦$

$\Leftarrow ن^{٢} - ٢ن - ٣ = ٠$

$(ن - ٣)(ن + ١) = ٠$

$ن = ٣ \quad ن = -١$ نهمل

نعوضها في ت(ن)

$ت(ن) = ١٢ن$

$ت(٣) = ١٢ \times ٣ = ٣٦$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن² - ٩ن + ٥ احسب
سرعة الجسم بعد ان تقطع مسافة
قدرها ١٥ م

الحل

المسافة = ١٥
ف(ن) = ١٥
ن² - ٩ن + ٥ = ١٥
ن² - ٩ن - ١٠ = ٠
(ن - ١٠)(ن + ١) = ٠
ن = ١٠ ن = -١ تهمل
نعوضها في السرعة

ع(ن) = ٢ن - ٩
ع(١٠) = ٢ × ١٠ - ٩
= ٢٠ - ٩
= ١١

مثال ⑩

يتحرك جسم حيث أن
ف(ن) = ن² + ٣ن + ٢، وكانت
السرعة المتوسطة في [١، م]
تساوي السرعة اللحظية عندن = ٥
جد قيمة م ؟

الحل

السرعة المتوسطة = السرعة اللحظية

$\frac{ف(م) - ف(١)}{م - ١} = ٢ن + ٣$

$\frac{م^٢ + ٣م + ٦ - ٢ - ٣}{م - ١} = ٢ \times ٥ + ٣$

$\frac{م^٢ + ٣م - ٤}{م - ١} = \frac{١٣}{١}$ ضرب تبادلي

م² + ٣م - ٤ = ١٣(م - ١) = ١٣م - ١٣

بتجميع الحدود في طرف

م² + ٣م - ٤ - ١٣م + ١٣ = ٠

م² - ١٠م + ٩ = ٠

(م - ١)(م - ٩) = ٠

م = ١ م = ٩

م = ١ مرفوضة لأن بداية الفترة = ١

م = ٩

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

أمثلة على الاسئلة الموضوعية (ضع دائره)

① يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ٤ن² - ٤ن + ١ ، حيث
ف : المسافه بالامتار ، ن الزمن
بالثواني فان سرعته بعد ثانيتين
من بدء الحركه تساوي

أ) ٤ ب) ١٢ ج) -٤ د) ٨

الحل
ف'(ن) = ٦ن² - ١٦
ع(ن) = ف'(ن) = ١٢ن
ع(٢) = ١٢ × ٢ = ٢٤ م/ث

الاجابه (ب)

---

② يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢ن³ - ١٦ن + ٨
حيث ف المسافه بالامتار ن الزمن
بالثواني فان تسارع الجسم
بعد ثانيتين من بدء الحركه يساوي

أ) ٢٤ ب) -٢٤ ج) ١٢ د) -١٢

الحل
ع(ن) = ف''(ن) = ١٢ن - ١٦
ع(٢) = ١٢ × ٢ - ١٦ = ٨
ع(١) = ١٢ × ١ - ١٦ = -٤

الاجابه (د)

---

③ يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢ن³ - ٤ن² + ٢
وكانت سرعته بعد (١) ثانيه
من بدء الحركه تساوي ٤ م/ث
فان قيمة الثابت ٢ تساوي

أ) ١٢ ب) ٤ ج) ٣ د) -٤

الحل
ع(ن) = ٦ن² - ٨ن
ع(١) = ٦ - ٨ = -٢
ع(٢) = ٢٤ - ١٦ = ٨
ع(١) = ٦ن² - ٨ن
٤ = ٦ - ٨ ⇐ ٦ = ١٢
ن = ١٢/٦ = ٢

الاجابه (ب)

PHYSICS ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

④ يتحرك جسم وفقه العلاقه
ف(ن) = م(ن - ١)^{٢} حيث ف المسافه بالامتار، ن الزمن بالثواني
فاذا كانت سرعته بعد ٤ ثواني تساوي ١٢م/ث فجد قيمة الثابت م

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٤

الحل
ع(ن) = ف'(ن)
= ٢م(ن - ١)
ع(٤) = ٢م(٤ - ١) = ١٢
٦م = ١٢ ⟸ م = ١٢/٦ = ٢

(ج)

⑤ يتحرك جسم وفقه العلاقه
ف(ن) = ٦ن^{٢} - ن^{٣} حيث ف المسافه بالامتار، ن الزمن بالثواني
فان المسافه التي يقطعها الجسم بالامتار حتى يصبح سارعه صفرًا هي

أ) ١٢ ب) ١٦ ج) ٢٤ د) ٣٢

الحل
ع(ن) = ١٢ن - ٣ن^{٢}
ت(ن) = ١٢ - ٦ن
السارع = صفر ⟸
١٢ - ٦ن = ٠ ⟸ ١٢ = ٦ن
ن = ١٢/٦ = ٢ ⟸ ن = ٢ الزمن الذي تقطعها
ف(٢) = ٦(٢)^{٢} - ٣(٢)^{٣}
= ٦×٤ - ٨
= ٢٤ - ٨ = ١٦ م

(ب)

⑥ يتحرك جسم وفق العلاقه
ف(ن) = م ن^{٢} - ن^{٣} فاذا كان تسارعه بعد ثانيتين يساوي ٤م/ث^{٢} فجد قيمة الثابت م ؟

أ) -٨ ب) ١٢ ج) ٣ د) ٨

الحل
ف'(ن) = ٢م ن - ٣ن^{٢}
ت(ن) = ع'(ن) = ٢م - ٦ن
ت(٢) = ٢م - ٦×٢ = ٤
٢م = ١٢ + ٤ ⟸ م = ١٦/٢ = ٨

(د)

المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① صـ ١٢٣

اذا تحرك جسيم بحيث كان بُعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف(ن) = ٣ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢

احسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٩ن^{٢} - ٦ن

ع(٢) = ٩×٤ - ٦×٢ = ٣٦ - ١٢

= ٢٤ م/ث

تدريب ② صـ ١٢٣

يتحرك جسيم وفق العلاقة

ف(ن) = ٢ن^{٣} + ٤ن^{٢} + ٦

حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني

جد سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن^{٢} + ٨ن

ت(ن) = ف''(ن) = ١٢ن + ٨

ت(٢) = ١٢×٢ + ٨

= ٢٤ + ٨ = ٣٢ م/ث^{٢}

تدريب ③ صـ ١٢٤

يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة

ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢

احسب سرعة الجسيم عندما تنعدم تسارعه

الحل

ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٦ن

ت(ن) = ١٢ن - ٦

ت(ن) = ٠ تنعدم التسارع

١٢ن - ٦ = ٠

١٢ن = ٦

ن = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

نعوضها ←

ع($\frac{١}{٢}$) = ٦($\frac{١}{٢}$)^{٢} - ٦($\frac{١}{٢}$)

= $\frac{٦}{٤}$ - ٣

= $\frac{٦}{٤}$ - $\frac{١٢}{٤}$

= $\frac{-٦}{٤}$ = $\frac{-٣}{٢}$

الأسئلة

ص ١٢٥

السؤال الأول

اذا كان ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} هي المسافة التي يقطعها جسيم بالامتار بعد ن ثانية فجد :

أ) السرعة بعد مرور ثانيتين

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن

ع(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٦ × ٢

= ١٢ + ١٢ = ٢٤

ب) التسارع عندما تكون السرعة ٩ م/ث

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن

ع(ن) = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن = ٩ ←

٣ن^{٢} + ٦ن − ٩ = ٠ بالقسمة على ٣

ن^{٢} + ٢ن − ٣ = ٠

(ن + ٣)(ن − ١) = ٠

ن = −٣ تهمل ن = ١ نعوضها في التسارع

ت(ن) = ٦ن + ٦

ت(١) = ٦ × ١ + ٦ = ١٢

السؤال الثاني

تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢ن^{٢} اذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، م] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوان فجد قيمة م ؟

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٤ن

ع(٣) = ٤ × ٣ = ١٢ السرعة اللحظية

السرعة المتوسطة = $\frac{ف(م) - ف(٠)}{م - ٠}$ = ١٢

$\frac{٢(م)^{٢} - ٢(١٠)^{٢}}{م}$ = ١٢ ⇐ $\frac{٢م^{٢}}{م}$ = ١٢

⇐ ٢م = ١٢ ⇐ ٢م^{٢} − ١٢م = ٠ ⇐ ٢م(م − ٦) = ٠

م = ٠ تهمل

م = ٦

مكتبة الرسام ALRASSAM

العلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث ص١٢٥

اذا كان ف(ن) = (٢ن - ٢)^{٣} + ٤
عثل المسافه التي تقطعها جسيم بالامتار
بعد ن ثانيه ، جد المسافه المقطوعه
بعد مرور ٤ ثوان من بدء الحركه

الحل

المطلوب ف(٤) بتعويض مباشر
ف(٤) = (٢×٤ - ٢)^{٣} + ٤
= (٨ - ٢)^{٣} + ٤
= ٦^{٣} + ٤ = ٢١٦ + ٤
= ٢٢٠ م

اذا كان المطلوب السرعه بعد ٤ ثوان
ع(ن) = ٣ (٢ن - ٢)^{٢} × ٢
ع(٤) = ٦ (٢×٤ - ٢)^{٢}
= ٦ × (٨ - ٢)^{٢}
= ٦ × ٦^{٢} = ٦ × ٣٦
= ٢١٦ م/ث

السؤال الرابع ص١٢٥

اذا مثّل الاقتران ف(ن) المسافه التي
تقطعها جسيم بالامتار بعد ن ثانيه
من بدء حركته ، وكان
ف(ن) = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٥ ، فما سرعة
هذا الجسم عندما يكون تسارعه ٤م/ث^{٢}

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ١٢ن
ت(ن) = ٦ن - ١٢
ت(ن) = ٤ ⇐ ٦ن - ١٢ = ٤
٦ن = ١٦ ⇐ ن = ١٦/٦ = ١
بتعويضها في ع(ن)
ع(١) = ٣(١)^{٢} - ١٢
= ٣ - ١٢
= -٩

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس ص١٢٥

تحرك جسيم بحيث يكون بعده عن نقطة الاصل معطى بالعلاقة ف(ن) = ن٢ + ٤ ، متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن ٤ ثواني ؟

الحل

ع(ن) = ٢ن

ع(٤) = ٢ × ٤ = ٨ السرعه اللحظيه

سرعة المتوسط = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن) - ف(٠)}{ن - ٠}$

$$\frac{ن^2 + ٤ - (٠^2 + ٤)}{ن - ٠} = ٨$$

$$\frac{ن^2 + ٤ - ٤}{ن} = ٨ \Leftarrow \frac{ن^2}{ن} = ٨$$

$\Leftarrow$ ن = ٨

السؤال السادس

اذا تحركت سيارة وكان موقعها في اللحظه ن معرفاً بالاقتران ف(ن) = ٣٠ن٢ - ٤ن + ٦ حيث ف بالاقدام التي تقطعها السياره بالامتار ن الزمن بالثواني ، فجد سرعة السياره بعد مرور ٤ ثوان من بدء الحركه .

الحل

ع(ن) = ٦٠ن - ٤

ع(٤) = ٦٠ × ٤ - ٤

= ٢٤٠ - ٤ = ٢٣٦ م/ث

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

يتحرك جسيم حسب العلاقة
ف(ن) = ن^{٣} − ٢ن + ٧ حيث
ن : الزمن بالثواني ، ف : المسافة بالامتار
جد سرعة الجسيم عندما يصبح تسارعه
يساوي ١٢ م/ث^{٢} ؟

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٢

ت(ن) = ٦ن ، التسارع = ١٢

٦ن = ١٢ ← ن = ٢

تعوضها في السرعة

ع(٢) = ٣(٢)^{٢} − ٢ = ١٢ − ٢ = ١٠

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن^{٣} − ٣ن + ١٥ ، جد تسارع
هذا الجسيم عندما تصبح سرعته ٩ م/ث
الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٣

السرعة = ٩ ⇐ ٣ن^{٢} − ٣ = ٩

٣ن^{٢} = ١٢ ← ن^{٢} = ٤

ن = ± √٤ ن = ± ٢

ن = ٢ ن = −٢ نهمل

تعوضها في التسارع

ت(ن) = ٦ن

ت(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن^{٢} − ن + ٥ ، جد تسارع
الجسيم بعد مرور ٣ ثواني
م/ث^{٢} ٢٢ ، م/ث^{٢} ٤٥ ، م/ث^{٢} ٣٥ ، م/ث^{٢} ٢٦
الحل

ف(ن) = ن^{٢} − ن + ٥

ف′(ن) = ٢ن − ١

ت(ن) = ف″(ن) = ٢

ت(٣) = ٢

(٢)

الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) شتوية

يتحرك جسيم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٦ن^{٢} + ١٠ن − ١
أوجد سرعة هذا الجسم عندما تنعدم تسارعه.

الحل

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ١٢ن + ١٠

ت(ن) = ١٢ن − ١٢

تنعدم التسارع ⇐ ت(ن) = ٠

١٢ن − ١٢ = ٠ ⇐ ١٢ن = ١٢

← ن = ١ نعوضها في السرعة

ع(١) = ٦(١)^{٢} − ١٢×١ + ١٠

= ٦ − ١٢ + ١٠ = ٤ م/ث

وزارة (٢٠١٠) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٦ن
جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٤٨ م/ث

الحل

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٦

السرعة = ٤٨

٦ن^{٢} − ٦ = ٤٨

٦ن^{٢} = ٥٤ بالقسمة على (٦)

ن^{٢} = ٩ باخذ الجذر لكي يبقى

ن = ± ٣ ن = ٣ ، ن = −٣ نرفض

نعوض ن = ٣ في التسارع

ت(ن) = ١٢ن

ت(٣) = ١٢×٣ = ٣٦

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا تحرك جسيم وفق العلاقة
ف(ن) = ٢ن^{٢} + ١ فأوجد سرعة الجسم عندما (ن) ثانية

أ) ع(ن) = ٤ن^{٢} + ١ ب) ع(ن) = ٤ن + ١

ج) ع(ن) = ٤ن د) ع(ن) = ٤ن^{٢}

ع(ن) = ف′(ن)

= ٤ن

(ج)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ٢ن^٣ - ٥ن - ١٣ حيث سرعة الجسيم عندما يكون ساعة ٤ م/ث^٢

الحل

ف(ن) = ٢ن^٣ - ٥ن - ١٣

ع(ن) = ٦ن^٢ - ٥

ت(ن) = ١٢ن ، ت(ن) = ٢٤

١٢ن = ٢٤ ⇐ ن = ٢٤/١٢ = ٢

نعوضها في السرعة

ع(٢) = ٦(٢)^٢ - ٥

= ٢٤ - ٥ = ١٩

وزارة (٢٠١٢) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٣ن^٣ - ٦ن + ٩ حيث ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني اوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٣٠ م/ث

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٩ن^٢ - ٦

السرعة = ٣٠

٩ن^٢ - ٦ = ٣٠ ⇐ ٩ن^٢ = ٣٦

بالقسمة على ٩

ن^٢ = ٣٦/٩ = ٤ باخذ الجذر التربيعي

ن = ± √٤ = ± ٢

ن = ٢ ، ن = -٢ مرفوض

نعوضها في ت(ن)

ت(ن) = ١٨ن

ت(٢) = ١٨ × ٢ = ٣٦

وزارة (٢٠١٣) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقه الأقتران ف(ن) = ن^٣ - ن^٢ + ٥ حيث سرعة الجسم عندما يكون ساعة (١٠ م/ث)

الحل

ع(ن) = ٣ن^٢ - ٢ن

ت(ن) = ٦ن - ٢ التسارع = ١٠

٦ن - ٢ = ١٠ ⇐ ٦ن = ١٢

ن = ١٢/٦ = ٢ نعوضها في السرعة

ع(٢) = ٣(٢)^٢ - ٢ × ٢

= ١٢ - ٤ = ٨

وزارة (٢٠١٣) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ٢ن^٣ - ١٦ن + ٨ ن ≥ صفر ، احسب تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨ م/ث

الحل

ف(ن) = ٢ن^٣ - ١٦ن + ٨

ع(ن) = ٦ن^٢ - ١٦

السرعة = ٨

٦ن^٢ - ١٦ = ٨ ⇐ ٦ن^٢ = ٢٤

+١٦ +١٦

ن^٢ = ٤ ⇐ ن = ±√٤ = ±٢

ن = +٢ ن = -٢ مرفوض

ت(ن) = ١٢ن

ت(٢) = ١٢ × ٢ = ٢٤

الكل

ع(ن) = ٦ن^٢ - ١٦

ت(ن) = ١٢ن - ٢

التسارع = ٤ ⇐ ١٢ن - ٢ = ٤

+٢ +٢

١٢ن = ٦ ⇐ ن = ٦/١٢ = ١/٢

نعوضها في ع(ن)

ع(١/٢) = ٦(١/٢)^٢ - ١٦ × ١/٢

= ٦/٤ - ١ = ٦/٤ - ٤/٤ = ٦-٤/٤

= ٢/٤ = ١/٢

وزارة (٢٠١٤) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ن^٣ - ٢ن + ١ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ن ≥ ٠ جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٥ م/ث

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ٢

السرعة = ٥ ⇐ ٣ن^٢ - ٢ = ٥

+٢ +٢

٣ن^٢ = ٧ ⇐ ن^٢ = ٧/٣

√ √

ن = ±√٧/٣ = ±√٢١/٣

ن = √٢١/٣ ، ن = -√٢١/٣ مرفوض

نعوضها في التسارع ت(ن) = ٦ن

ت(√٢١/٣) = ٦ × √٢١/٣ = ٢√٢١

وزارة (٢٠١٤) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ن^٣ - ن^٢ + ١٠ ن ≥ ٠ حيث ف المسافة التي تقطعها الجسم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^٢

وزارة (٢٠١٥) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٧ حيث سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه ١٢ م/ث^{٢}

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٦ن

ت(ن) = ٦ن - ٦

التسارع = ١٢ ⇐ ٦ن - ٦ = ١٢

← ٦ن / ٦ = ١٨ / ٦ ← ن = ٣

نعوض في ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٦ن

ع(٣) = ٣(٣)^{٢} - ٦×٣

= ٢٧ - ١٨ = ٩

وزارة (٢٠١٥) صيفية

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٢} - ٣ن^{٢} ، ن ≥ ٠ حيث المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٣٠ م/ث^{٢}

الحل

ف'(ن) = ٦ن^{٢} - ٦ن

ت(ن) = ١٢ن - ٦

التسارع = ٣٠ ⇐ ١٢ن - ٦ = ٣٠

+٦ +٦

← ١٢ن / ١٢ = ٣٦ / ١٢ ⇐ ن = ٣

نعوض ن = ٣ في ف(ن)

ف(٣) = ٢(٣)^{٣} - ٣(٣)^{٢}

= ٥٤ - ٢٧ = ٢٧ م

وزارة (٢٠١٦) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ن^{٣} - ٧ن^{٢} + ٩ن + ٦ ، ن ≥ ١ حيث تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١ م/ث

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ١٤ن + ٩

السرعة = ١

٣ن^{٢} - ١٤ن + ٩ = ١ ⇐ ٣ن^{٢} - ١٤ن + ٨ = ٠

(٣ن - ٢)(ن - ٤) = ٠

٣ن / ٣ = ٢ / ٣ ، ن = ٤

ن = ٢/٣ مرفوض لأن ن ≥ ١ في السؤال

ن = ٤ نعوضها في التسارع

ت(ن) = ٦ن - ١٤

ت(٤) = ٦×٤ - ١٤

= ٢٤ - ١٤ = ١٠

المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للأقتران ف(ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + ٨ جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢}

الحل

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٢ن

ت(ن) = ١٢ن − ٢

التسارع = ٤ ⇐ ١٢ن − ٢ = ٤

١٢ن = ٦ ⇐ ن = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

نعوضها في السرعة

ع($\frac{١}{٢}$) = ٦($\frac{١}{٢}$)^{٢} − ٢ × $\frac{١}{٢}$

= ٦ × $\frac{١}{٤}$ − ١ = $\frac{٦}{٤}$ − $\frac{١}{١}$

= $\frac{٦}{٤}$ − $\frac{٤ \times ١}{٤ \times ١}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقه العلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ٨ن حيث ف المسافة التي تقطعها الجسيم بالامتار، ن الزمن بالثواني، جد المسافة التي تقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢}

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٨ن + ٨

ت(ن) = ٦ن − ٨

التسارع = ٤ ⇐ ٦ن − ٨ = ٤

٦ن = ١٢ ⇐ ن = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

نعوض ن = ٢ في المسافة

ف(٢) = (٢)^{٣} − ٤(٢)^{٢} + ٨ × ٢

= ٨ − ١٦ + ١٦

= ٨ م

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفي

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٩ن + ١ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالامتار، ن الزمن بالثواني، جد سارع الجسيم عندما تكون سرعته ١٢ م/ث

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٩

السرعة = ١٢

$٣ن^{٢} + ٩ = ١٢ \Leftarrow ٣ن^{٢} = ٣$

$ن^{٢} = ١ \Leftarrow ن = \pm ١$

ن = ١ ، ن = -١ مرفوض

نعوض ن = ١ في السارع

ت(ن) = ٦ن

ت(١) = ٦ × ١ = ٦

وزارة (٢٠١٨) شتوي جديد

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٧ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم بالامتار، ن الزمن بالثواني جد سرعة الجسم لحد ضرورع ثواني من بدء الحركة

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٦ن

ع(٤) = ٣(٤)^{٢} - ٦ × ٤

= ٣ × ١٦ - ٢٤

= ٤٨ - ٢٤

= ٢٤ م/ث

وزارة (٢٠١٨) شتوي قديم

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٦ن^{٢} - ٣ حيث ف المسافة المقطوعة بالامتار، ن الزمن بالثواني فان سارع الجسم بالمتر/ث^{٢}

أ) ١٢ن^{٢} ب) ١٢ن

ج) ٦ن^{٢} - ٦ د) ٦ن^{٢} - ٦

الحل

ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٦

ت(ن) = ١٢ن ①

ت(١ن) = ١٢ن

مكتبة الإسلام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفي

يتحرك جسيم حسب العلاقة
ف(ن) = ٣ن^٢ + ن حيث ف المسافة المقطوعة بالامتار، ن الزمن بالثواني ما سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين واحدة من بدء الحركة.

أ) ١٠ م/ث ب) ١٣ م/ث

جـ) ٦ م/ث د) ٧ م/ث

الحل

ع(ن) = ٦ن

ع(١) = ١×٦ = ٦ م/ث

(ج)

وزارة (٢٠١٨) صيفي

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن^٣ + ٩ن + ١
حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم عندما تكون سرعته ١٢ م/ث
جد ن عند

الحل ←

الحل

ع(ن) = ٣ن^٢ + ٩ = ١٢
-٩ -٩
-١٩

٣ن^٢/٣ = ٣/٣

ن^٢ = ١ ⟸ ن = ±١

ن = ١ ن = -١ مرفوض

ك(ن) = ٦ن

ك(١) = ١×٦ = ٦ م/ث^٢

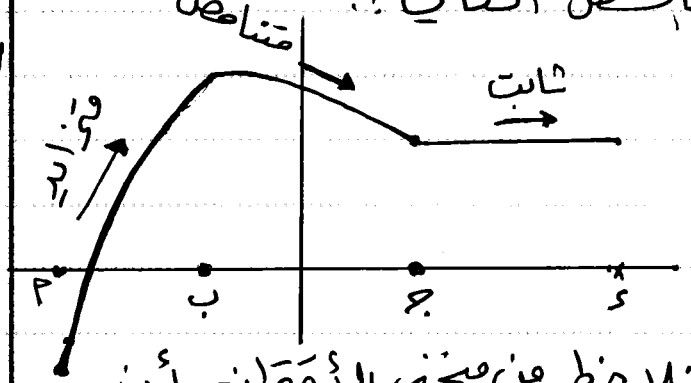
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تطبيقات الاشتقاق

التزايد والتناقص

اولاً : من منحنى الاقتران الاصلي (ق(س))

لنكن منحنى الاقتران ق(س) ممثلاً بالشكل التالي :



نلاحظ من منحنى الاقتران أن

١- ق(س) : متزايد في الفترة [أ، ب] عندما تزداد س فان ص تزداد

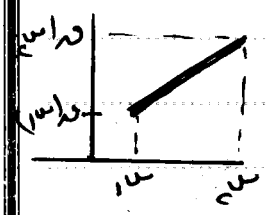
٢- ق(س) : متناقص في الفترة [ب، جـ] عندما تزداد س فان ص تناقص

٣- ق(س) : ثابت في الفترة [جـ، د] عندما تزداد س فان ص ثابت

تعريف

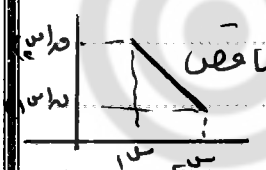
اذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [أ، ب] وكان س١، س٢ ∈ [أ، ب] فان

١) الاقتران ق يكون متزايداً في الفترة [أ، ب] اذا كان ق(س٢) > ق(س١) عندما س٢ > س١

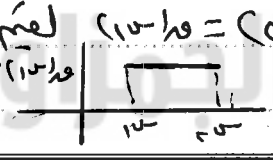


متزايد

٢) الاقتران ق يكون متناقصاً في الفترة [أ، ب] اذا كان ق(س٢) < ق(س١) عندما س٢ > س١



٣) الاقتران ق يكون ثابتاً اذا كان ق(س٢) = ق(س١) لجميع س١، س٢ ∈ [أ، ب]



ALWESAM
المعلم الوسام

مثال ①

اذا كان $ق(س_3) > ق(س_1)$ لكل $س_3 > س_1$ في الفترة $[م، ن]$ فان $ق(س)$ يكون في الفترة $[م، ن]$

أ) متناقص ب) متزايد

ج) ثابت د) لا يمكن تحديده

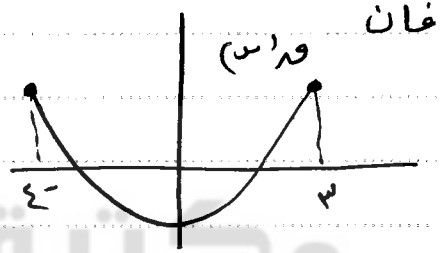
الحل

حسب تعريف المتزايد يكون $ق(س)$ متزايد في $[م، ن]$

الجواب ①

مثال ②

معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س)$ فان $ق(س)$ يكون متناقصًا في الفترة



أ) $[-٤، ٣]$ ب) $[-٤، ٠]$

ج) $[٠، ٣]$ د) $(-\infty، ٠]$

الحل

$ق(س)$ متناقص في الفترة $(-\infty، ٣]$

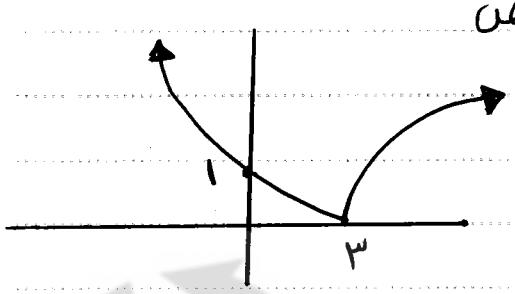
$ق(س)$ متزايد في الفترة $[٣، \infty)$

ملاحظة هامة

من اليسار إلى اليمين اذا كان الاقتران يصعد نقول عنه متزايد، ينزل نقول عنه متناقص

مثال ③

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س)$ أوجد فترات التزايد والتناقص



الحل

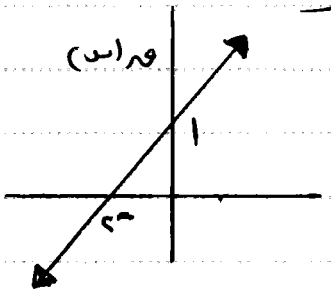
$ق(س)$ متناقص في الفترة $(-\infty، ٣]$

$ق(س)$ متزايد في الفترة $[٣، \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

وتعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ فإن $f(x)$ يكون متزايد على الفترة



أ) $[-\infty, 0]$ ب) $[1, \infty)$

ج) $(-\infty, \infty)$ د) $(-\infty, -3]$

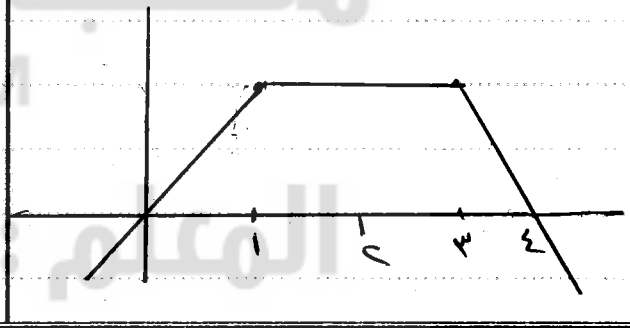
الحل

$f(x)$ متزايد على

$ح = (-\infty, \infty)$ (صاعد)

مثال ⑤

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران المرسوم بالشكل التالي



الحل

$f(x)$ متزايد $[1, 3]$	صاعد
$f(x)$ متناقص $[3, \infty)$	نازل
$f(x)$ ثابت $[1, 3]$	ثابت

مثال ⑥

اذا كان $f(x_2) = f(x_1)$ لجميع قيم x_1, x_2 في الفترة $[أ، ب]$ فإن $f(x)$ يكون في الفترة $[أ، ب]$

أ) متزايد ب) متناقص

ج) ثابت د) لاشيء مما ذكر

الحل

حسب تعريف التزايد والتناقص يكون $f(x)$ ثابت في الفترة $[أ، ب]$

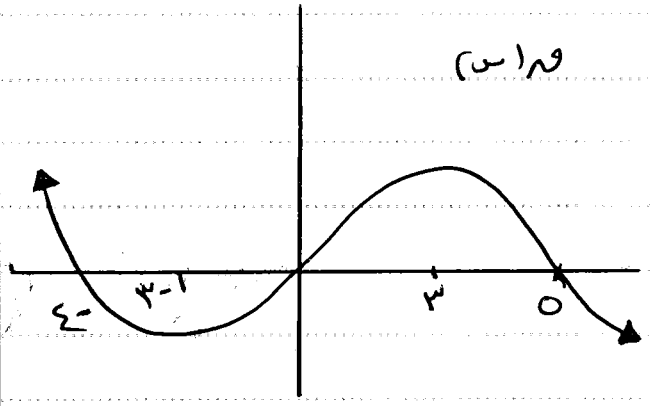
الاجابة (ج)

مكتبة الوسام ALWESAM

العلم / ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

الشكل المجاور يمثل منحنى $f(x)$ حدد فترات التزايد والتناقص



الحل

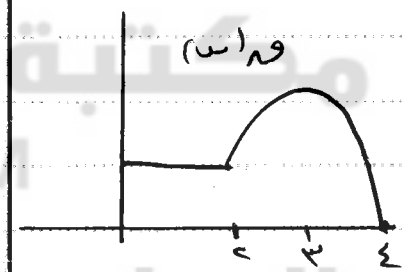
$f(x)$ متزايد في $[-٣, ٣]$

$f(x)$ متناقص في

$(-\infty, -٣] \cup [٣, \infty)$

مثال ⑧

اذا كان $f(x)$ ممثلاً بالشكل المجاور فان $f(x)$ متزايد في الفترة



أ) $[٢, ٥٠]$

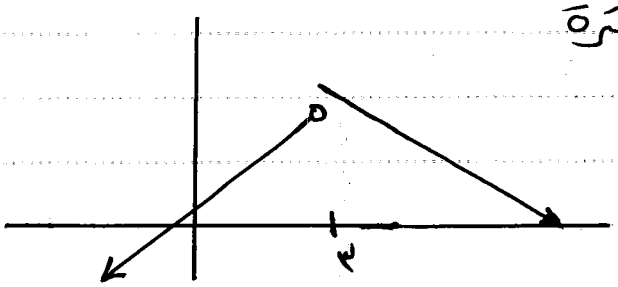
ب) $[٤, ٣]$

ج) $[٣, ٢]$

د) $[٤, ٠]$

مثال ⑨

الشكل المجاور يمثل منحنى $f(x)$ فان $f(x)$ يكون متناقصاً في الفترة



أ) $[٣, ٥]$ ب) $(-\infty, ٣)$

ج) $[٥, ٣]$ د) $[٣, \infty)$

الحل

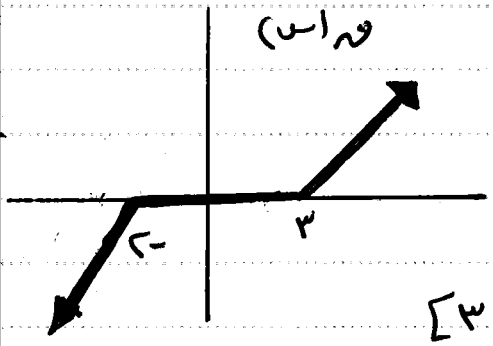
د) متناقص في الفترة $[٣, \infty)$ نازل

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم / ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(س)$ فان $f(س)$ متزايد على الفترة



أ) $[-٢, ٣]$

ب) $(-\infty, -٢]$ ج) $(-\infty, ٣]$

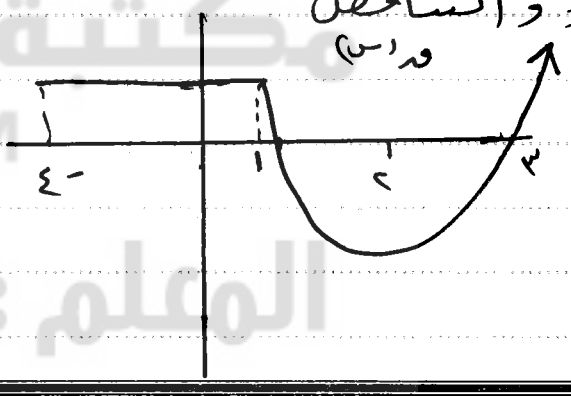
د) $[٣, \infty)$

الحل

$f(س)$ متزايد $[٣, \infty)$ صاعد

مثال (١١)

معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(س)$ جد فترات التزايد والتناقص



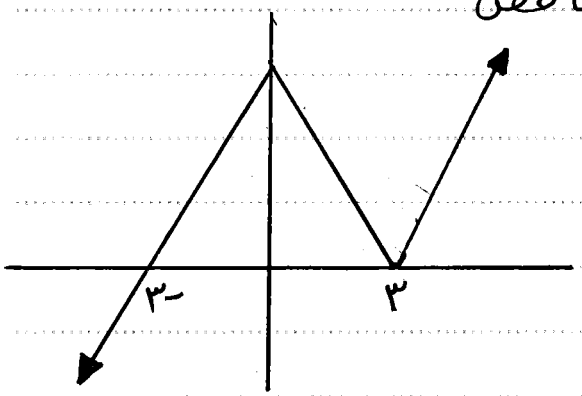
الحل

$f(س)$ متزايد $(-\infty, -٤] \cup [١, ٣]$ صاعد

متناقص $[-٤, ١]$ نازل

مثال (١٢)

معتمداً الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى $f(س)$ اوجد مجالات التزايد والتناقص



الحل

$f(س)$ ثابت في الفترة $[-٤, ١]$

$f(س)$ متناقص في الفترة $[١, ٢]$

$f(س)$ متزايد في الفترة $[٢, \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

ثانياً من المشتقة الاولى للاقتران

نظرية

اذا كان هـ اقتراناً متصلاً على الفترة [ا، ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (ا، ب) فإن

١) هـ يكون متزايداً في الفترة [ا، ب] اذا كانت هـ(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ (ا، ب)

٢) هـ يكون متناقصاً في الفترة [ا، ب] اذا كانت هـ(س) < ٠ لجميع قيم س ∈ (ا، ب)

٣) هـ يكون ثابتاً في الفترة [ا، ب] اذا كانت هـ(س) = صفر لجميع قيم س ∈ (ا، ب)

بمعنى أن

١) هـ(س) > ٠ ⟵ متزايد

٢) هـ(س) < ٠ ⟵ متناقص

٣) هـ(س) = ٠ ⟵ ثابت

يمكن ايجاد فترات التزايد والتناقص من خلال اشارة المشتقة الأولى للاقتران هـ(س) وذلك كما يلي

١. نجد هـ(س) : المشتقة الأولى

٢. نساوي المشتقة الأولى بالصفر

٣. نجد اصفار المشتقة الأولى وتسمى النقط الحرجة

٤. نضع اصفار المشتقة الأولى على خط الاعداد وندرس اشارة هـ(س) قبل وبعد كل صفر (نقطة حرجة)

٥. فترة الاشارة الموجبة يكون الاقتران متزايد

فترة الاشارة السالبة يكون الاقتران متناقص

ويكون الاقتران ثابتاً اذا كانت المشتقة = صفر

مكتبة الوسام AL-WESAM
الوسام | ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كانت $هـ'(س) > ٠$ لجميع قيم س في الفترة $(١، ٧)$ فان

ا) $هـ(س)$ متزايدة في $[١، ٧]$

ب) $هـ(س)$ متناقصة في $[١، ٧]$

ج) $هـ(س)$ ثابتة في $[١، ٧]$

د) لاشيء مما ذكر

الحل

حسب تعريف التزايد

$هـ'(س) > ٠$ متزايد $[١، ٧]$

الاجابة ا

مثال ②

جد فترات التزايد والتناقص لكل من الاقترانات التالية

① $هـ(س) = ٤س + ١$

الحل

$هـ'(س) = ٤$ دائماً موجب

لا يوجد نقط حرجة (اصفار المشتقة)

$\leftarrow$ $هـ(س)$ متزايد على ح

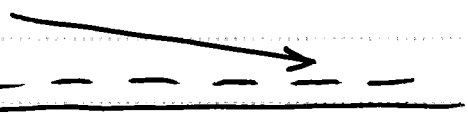
---

② $هـ(س) = ٣ - ٥س$

الحل

$هـ'(س) = -٥$ دائماً سالبا

لا يوجد نقط حرجة



$هـ(س)$ متناقص على ح $= (-\infty، \infty)$

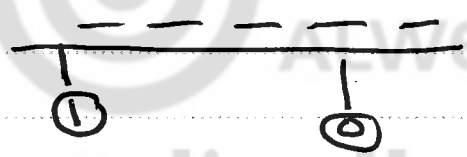
مثال ③

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $هـ(س) = ٥ - ٤س$ حيث $س \in [٠، ١]$

الحل

$هـ'(س) = -٥$ دائماً سالب

لا يوجد نقط حرجة



متناقص على $[١، ٥]$

مكتبة الوسام
ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

مثال ④
اذا كان $ه'(س) = -٣$ لجميع قيم $س \in (١، ٣)$ فان

أ) $ه(س)$ ثابتة على $[١، ٣]$

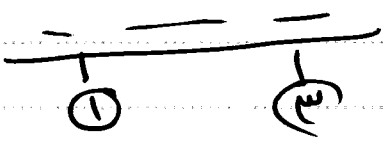
ب) $ه(س)$ متناقصة على $[١، ٣]$

ج) $ه(س)$ متزايدة على $[١، ٣]$

د) $ه(س)$ متزايدة على $ح$

الحل

$ه'(س) = -٣$ سالبة دائماً



$ه(س)$ متناقصة على $[١، ٣]$

الاجابة ب

مثال ⑤
اذا كان $ه'(س) > ٠$ لجميع قيم $س \in (-٥، ٥)$ فان

أ) $ه(س)$ متناقصة على $ح$

ب) $ه(س)$ متزايدة على $ح$

ج) $ه(س)$ ثابتة على $ح$

د) $ه(س)$ متناقصة $(-٥، ٥)$

الحل

$ه'(س) > ٠$ $\Leftarrow$ $ه(س)$ متزايدة على $ح$ وهي ⑧ الاجابة ب

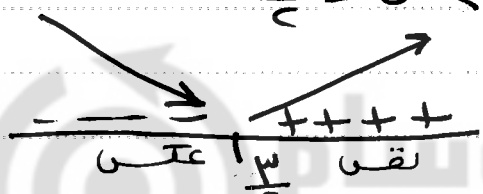
مثال ⑥
اذا كان $ه(س) = س^{٣} - ٣س + ١$ اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ه'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} = ٣ \Leftarrow س^{٢} = \frac{٣}{٣} = ١$

$\Leftarrow س = \pm ١$



متناقصة $(-١، ١)$

متزايدة $[-٥، -١) \cup (١، ٥]$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

اذا كان $ق(س) = ١ + ٤س - س^{٢}$

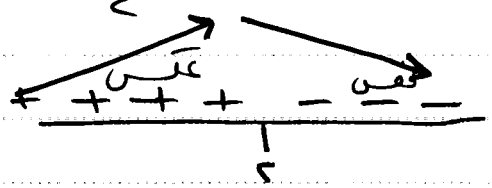
جد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = ٤ - ٢س$

$٤ - ٢س = ٠ \leftarrow ٢س = ٤$

$\leftarrow س = \frac{٤}{٢} = ٢$



$ق(س)$ متزايد $(-\infty ، ٢]$

$ق(س)$ متناقص $[٢ ، \infty)$

مثال ⑧

$ق(س) = س^{٣} - ٣س + ١$ أوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

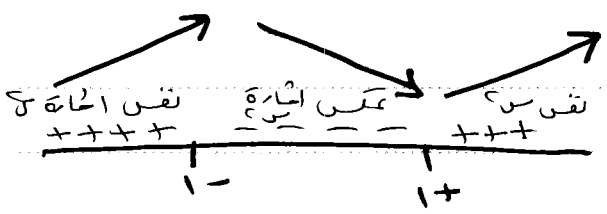
$٣س^{٢} - ٣ = ٠ \leftarrow ٣س^{٢} = ٣$

بالقسمة على ٣ $\leftarrow س^{٢} = ١$

باخذ الجذر التربيعي

$س = \pm \sqrt{١}$

$س = \pm ١$



متزايد $(-\infty ، -١] \cup [١ ، \infty)$

متناقص $[-١ ، ١]$

مثال ⑨

اذا كان $ق(س) = ٤س - ٢س^{٣} + ٢$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

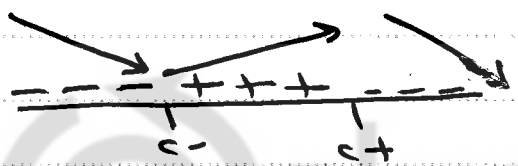
$ق'(س) = ٤ - ٦س^{٢}$

$٤ - ٦س^{٢} = ٠ \leftarrow ٦س^{٢} = ٤$

بالقسمة على ٦ $\leftarrow س^{٢} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

باخذ الجذر التربيعي $س = \pm \sqrt{\frac{٢}{٣}}$

$س = \pm \frac{\sqrt{٦}}{٣}$



متزايد $[-\frac{\sqrt{٦}}{٣} ، \frac{\sqrt{٦}}{٣}]$

متناقص $(-\infty ، -\frac{\sqrt{٦}}{٣}] \cup [\frac{\sqrt{٦}}{٣} ، \infty)$

مكتبة الوسام العلمية
AL-WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

$ق(س) = ٧$ أوجد فترات التزايد والتناقص للاقترانات $ق(س)$

أ) متزايد على ح

ب) متناقص على ح

جـ) ثابت على ح

د) ثابت على $[٠، ٥]$

الكل

$ق(س) = ٠$ ← ثابتة

صفر

$ق(س)$ ثابت لجميع قيم س الحقيقية

ح

الاجابة (د)

مثال (١١)

اذا كان $ق(س) = (س+١)(س+٣)$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

حاصل ضرب

$ق(س) = (س+١) \times ١ + (س+٣) \times ١$

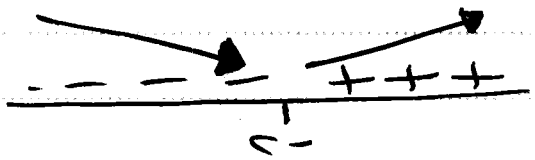
$= س+١+س+٣$

$= ٢س+٤$

$٢س+٤ = ٠ \Leftarrow ٢س = -٤$

بالقسمة على ٢

$س = -٤/٢ = -٢$



$ق(س)$ متناقص $(-\infty، -٢]$

$ق(س)$ متزايد $[-٢، \infty)$

مثال (١٢)

$ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س - ٦$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

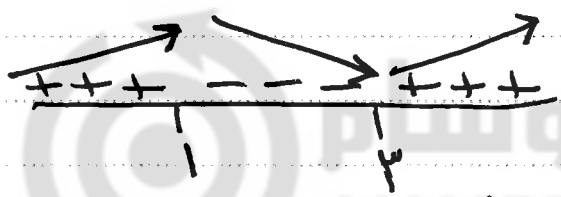
$ق'(س) = ٣س^٢ - ١٢س + ٩$

$٣س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$ بالقسمة على ٣

$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$

$(س-٣)(س-١) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = ١$



متزايد $(-\infty، ١] \cup [٣، \infty)$

متناقص $[١، ٣]$

مكتبة الوسام العلمية
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

$ق(س) = -س^3 - ٦س^2 + ١٥س - ٦$

اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = -٣س^2 - ١٢س + ١٥$

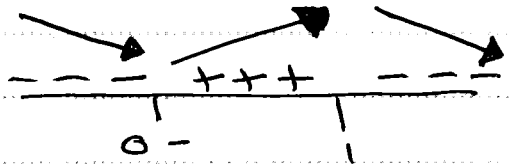
$-٣س^2 - ١٢س + ١٥ = ٠$

بالقسمة على -٣

$س^2 + ٤س - ٥ = ٠$

$(س + ٥)(س - ١) = ٠$

$س = -٥ ، س = ١$



تزايد $[-٥ ، ١]$

تناقص $(-\infty ، -٥] \cup [١ ، \infty)$

ملاحظه

نعتمد على اشارة $ق'(س)$ الاصليه أول اشتقاقه

مثال (١٤)

$ق(س) = (٢س - ٦)^3$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = ٣(٢س - ٦)^2 \times ٢$

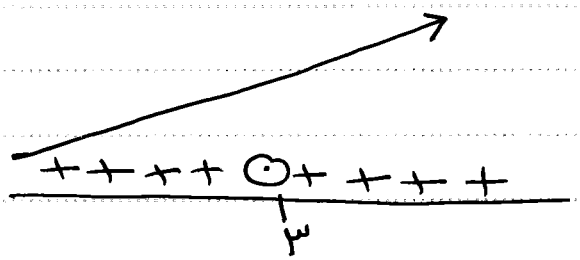
$= ٦(٢س - ٦)^2 =$ صفر

بالقسمة على ٦ $\Leftarrow$

$(٢س - ٦)^2 =$ صفر باخذ الجذر التربيعي

$٢س - ٦ = ٠ \Leftarrow$ $س = ٣$

$\frac{٦}{٢} = س \leftarrow$



$ق(س)$ متزايد على $ح = (-\infty ، \infty)$

ملاحظه

$ق'(س) = ٦(٢س - ٦)^2$ وجود التربيعي يجعل الاشارة داعماً موجبه

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

$ه(س) = (س-١)^{٤}$

اوجد مجالات التزايد والتناقص

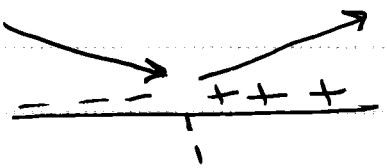
الحل

$ه'(س) = ٤(س-١)^{٣}$

$٤(س-١)^{٣} = ٠$ بالقسمة على ٤

$(س-١)^{٣} = ٠$ باخذ الجذر التكعيبي

$\Leftarrow س-١ = ٠ \Leftarrow س = ١$



متناقص $(-\infty, ١]$

متزايد $[١, \infty)$

ملاحظه

لكتابة دراسة الاشارة نعوض عدد أكبر من أو عدد اصغر في $ه'(س)$

مثال (١٦)

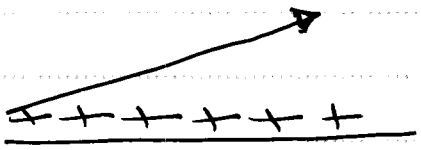
اذا كان $ه(س) = س^{٣} + س$

اوجد فترات التزايد و التناقص

الحل

$ه'(س) = ٣س^{٢} + ١$

$٣س^{٢} + ١$ لا تحلل



متزايد على ح $(-\infty, \infty)$

ملاحظه

الاقتران التربيعي الذي لا يحلل

$س^{٢} + عدد$

يأخذ اشارة واحدة

وهي اشارة معامل $س^{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

اذا كان $ق(س) = ١٦ - س^٢$ فإن $ق(س)$ يكون متزايدًا في الفترة

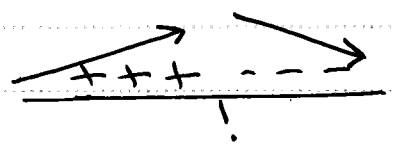
أ) $[٠، ٥)$ ب) $[-١٠، ٠]$

ج) $(-٥، ٠]$ د) $(-١، ٥]$

الحل

$ق'(س) = -٢س$

$-٢س = ٠ \quad س = ٠$



متزايد $(-٥، ٠]$ ج

مثال (١٨) انتبه

اذا كان $ق(س) = ٣س^٢ - ١٢$

فاوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$

الحل

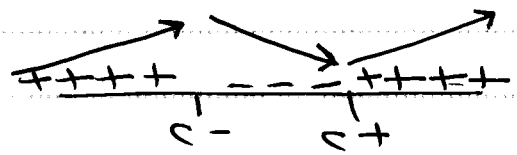
هنا نضع مباشرة $ق(س) = ٠$

$٣س^٢ - ١٢ = ٠$

$٣س^٢ = ١٢ \leftarrow س^٢ = \frac{١٢}{٣}$

$\leftarrow س^٢ = ٤$

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$



متزايد $(-٥، -٢] \cup [٢، ٥)$

متناقص $[-٢، ٢]$ متناقص

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

ثالثًا

فن رسمة منحنى ق(س)

الفكرة الرئيسية

هي تحويل الرسمة إلى خط الاعداد

① نحدد قيم س التي يقطع عندها منحنى المشتقة الأولى محور السينات حيث نوضع هذه القيم على خط الاعداد

② نقوم بدراسة الاشارة حول هذه القيم حيث تكون اشارة الفترة حسب موقع رسمة المنحنى كما يلي

١. الرسمة فوق محور السينات نضع اشارة موجبة

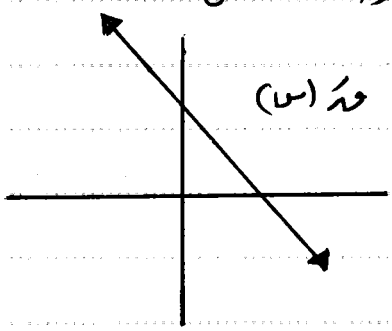
٢. الرسمة تحت محور السينات نضع اشارة سالبة

٣. الرسمة على محور السينات تكون ثابت

٤. نحدد فترات التزايد والتناقص من خط الاعداد كما تعلمنا سابقاً

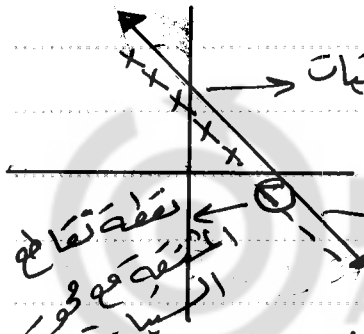
مثال ①

معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) جد فترات التزايد والتناقص.

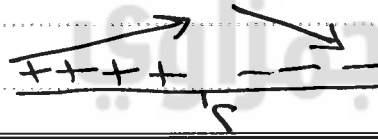


الحل

انتبه أن المنحنى هو منحنى المشتقة الأولى والمطلوب التزايد والتناقص للاقتران الأصلي وليس لمشتقة الاقتران لذلك نقوم بتحويل الرسمة الى خط الاعداد

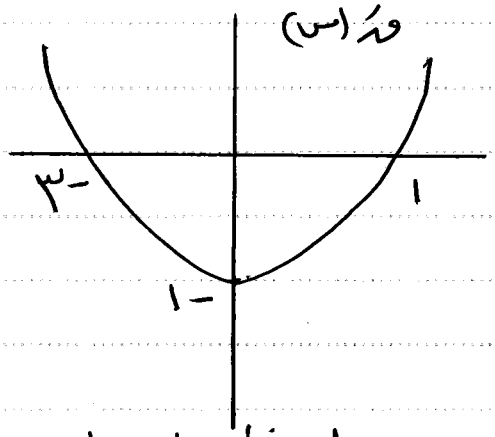


نحولها الى خط الاعداد



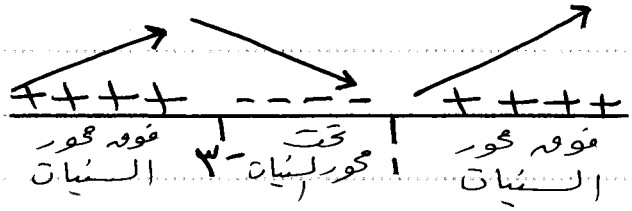
مثال ②

الشكل الجانبي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ اوجد فترات التزايد والتناقص.



الحل

نحول الرسمة الى خط الاعداد

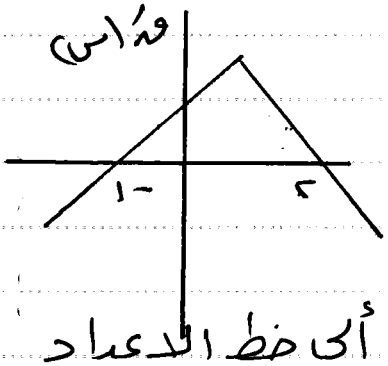


متزايد $(-\infty, -٣] \cup [١, \infty)$

متناقص $[-٣, ١]$

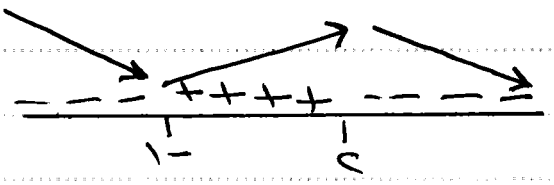
مثال ③

حسب الرسم الذي يمثل $ق'(س)$ جد فترات التزايد والتناقص



الحل

نحول الرسمة ألى خط الاعداد

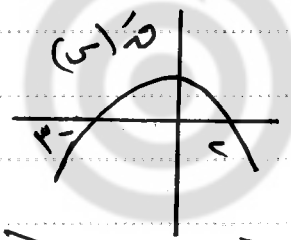


متزايد $[-١, ٢]$

متناقص $(-\infty, -١] \cup [٢, \infty)$

مثال ④

الشكل الجانبي يمثل منحنى $ق'(س)$ فان $ق(س)$ متزايد في الفترة



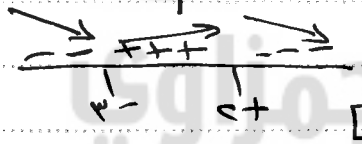
أ) $(-\infty, -٣]$

ب) $[٢, \infty)$

ج) $(-\infty, \infty)$

د) $[-٣, ٢]$

الحل

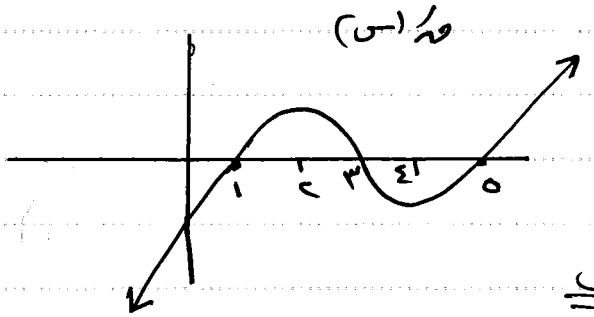


الجواب ⑤ $[-٣, ٢]$

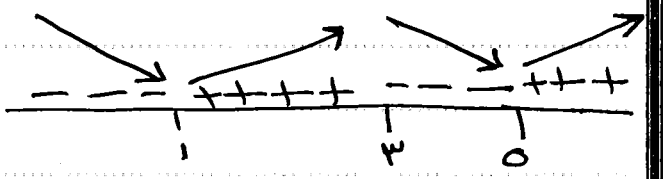
مكتبة الهدام ALHDAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

اشكل الجدول التالي يمثل منحنى $\text{ه}'(س)$ حيث فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ه}(س)$.



الحل

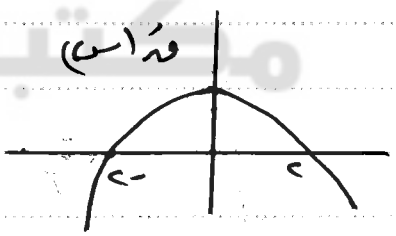


متزايد $[١، ٣] \cup [٥، \infty)$

متناقص $(-\infty، ١] \cup [٣، ٥]$

مثال ⑥ (مع انتبه)

يمثل الشكل المجاور منحنى $\text{ه}'(س)$ اوجد فترات التزايد للاقتران $\text{ه}(س)$



أ) $[-ج، ج]$ ب) $[-٣، \infty)$

ج) $[٠، \infty)$ د) $(-\infty، ٠]$

الحل

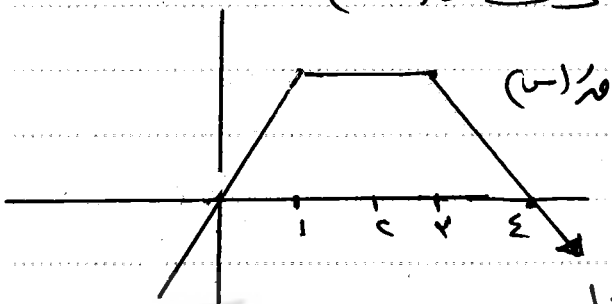
صح يجب الانتباه أن الرسمة تمثل منحنى $\text{ه}'(س)$ والمطلوب تزايد $\text{ه}(س)$ فنعتبرها عاكسة $\text{ه}(س)$ والمطلوب التزايد لـ $\text{ه}(س)$ أي ان الصاعد متزايد والنازل متناقص

متزايد $(-\infty، ٠] \cup [٤، \infty)$ صاعد

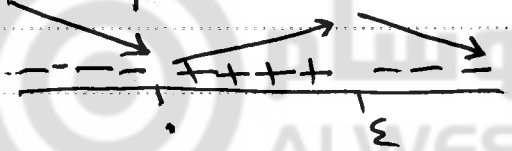
(S)

مثال ⑦

يمثل الشكل المجاور منحنى $\text{ه}'(س)$ اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ه}(س)$



الحل



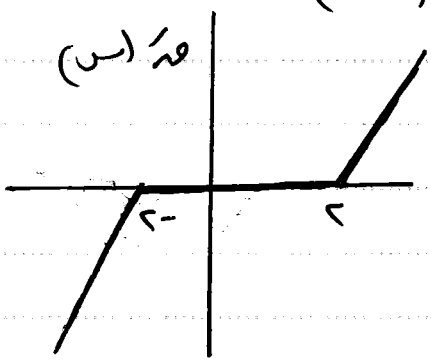
متزايد $[٠، ٤]$

متناقص $(-\infty، ٠] \cup [٤، \infty)$

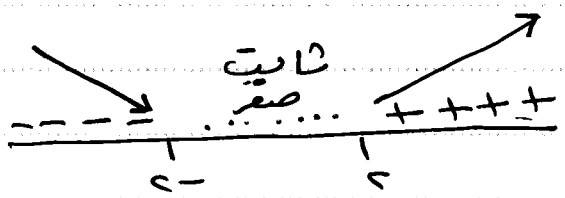
مكتبة الوسام ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

عيّن المجال ومجال قيم $هـ(س)$ أوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $هـ(س)$



الحل



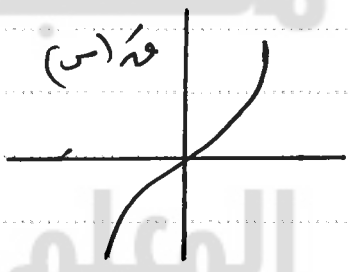
متزايد $[-٢، ٢]$

متناقص $(-\infty، -٢]$

ثابت $[-٢، ٢]$

مثال (٩)

بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى $هـ(س)$ فإن $هـ(س)$ متناقص بالفترة



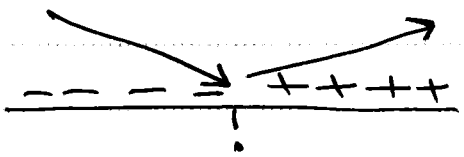
أ) $[-١، ٢]$

ب) $(-\infty، ٠]$

ج) $[٠، \infty)$

د) $[٠، ١]$

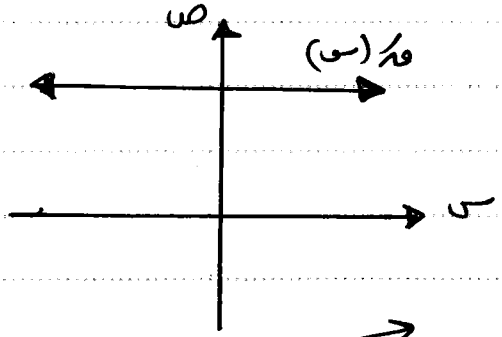
الحل



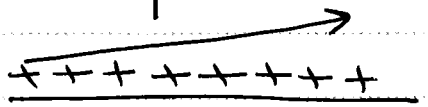
متناقص $(-\infty، ٠]$ ✓

مثال (١٠)

عيّن الشكل المجاور منحنى $هـ(س)$ أوجد مجالات التزايد والتناقص



الحل



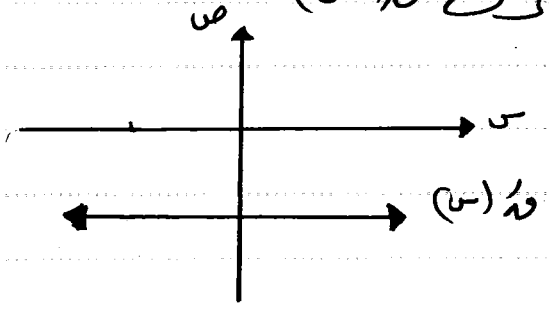
جميعه فوق محور السينات

متزايد على ح $(-\infty، \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١١)

عين الشكل الجانبي مخنى ق'(س) اوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)



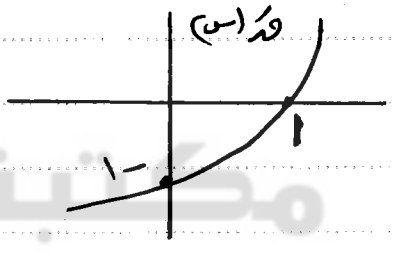
الحل

تحت محور السينات

متناقص على ح (-∞، ∞)

مثال (١٢)

عين الشكل المجاور مخنى ق'(س) فان ق(س) متزايد على الفترة



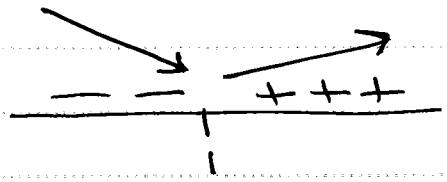
أ) [١، ∞)

ب) (-∞، -١]

ج) [-١، ١]

د) [-١، ∞)

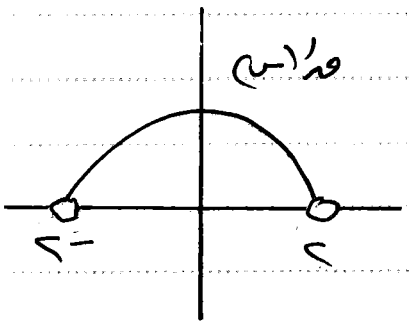
الحل



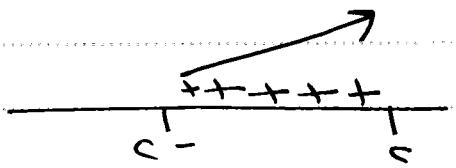
(أ) متزايد [١، ∞)

مثال (١٣)

عين الشكل المجاور مخنى ق'(س) اوجد مجالات التزايد والتناقص لمخنى ق(س)



الحل

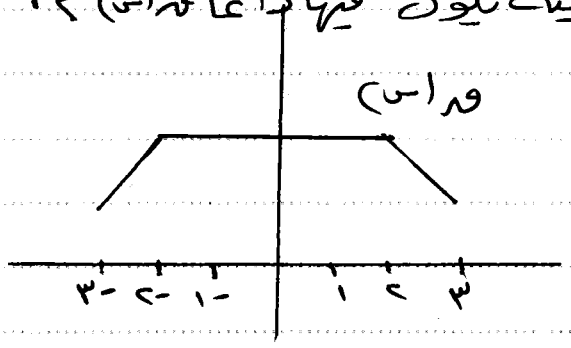


متزايد [-٢، ٢]

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) أعرف على الفترة [-٣، ٣] أي الفترات الآتية يكون فيها ق(س) < ٠



أ) (٢، ٣) ب) (-٢، ٢)

ج) (-٣، -٢) د) (-٣، ٣)

الحل

ق(س) < ٠ ق(س) متناقص

الفترة (-٣، -٢) ج

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

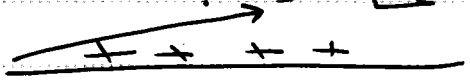
تدريب ① ص ١٣١

جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي

١) $هـ(س) = س^٣ + ٧$

$هـ'(س) = صفر + ٣س^٢ = ٣س^٢$

دائماً موجب



فترات التزايد $(-\infty, \infty)$

٢) $هـ(س) = (٢س - ٤)^٣$

الحل

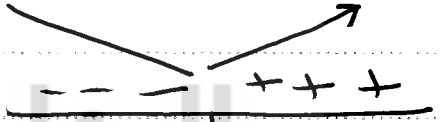
$هـ'(س) = ٣(٢س - ٤)^٢ \times ٢$

$= ٦(٢س - ٤) = ٠$

$٢س - ٤ = ٠$

$٢س = ٤$

$س = ٢$



فترات التناقص $(-\infty, ٢]$

فترات التزايد $[٢, \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

الأسئلة

ص ١٣٢

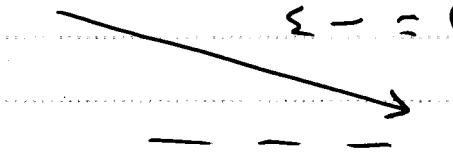
السؤال الأول

جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي

أ) $ق(س) = ٣ - ٤س$

الحل

$ق'(س) = -٤$



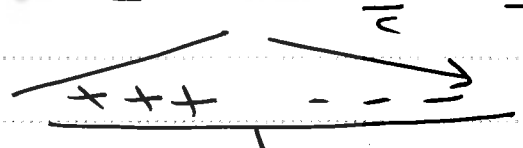
متناقص على ح أو $(-\infty, \infty)$

ب) $ق(س) = ٨س - س^٢$

الحل

$ق'(س) = ٨ - ٢س = ٠$

$\Leftarrow ٢س = ٨ \quad س = ٤$



متزايد $(-\infty, ٤]$

متناقص $[٤, \infty)$

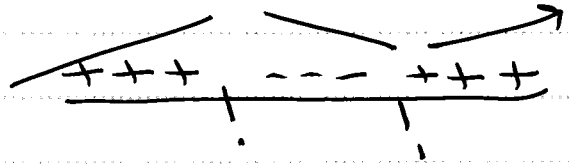
جـ) $ق(س) = ٤س^٣ - ٦س^٢ + ٢$

الحل

$ق'(س) = ١٢س^٢ - ١٢س = ٠$

$١٢س(س - ١) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ١$



متزايد $(-\infty, ٠] ، [١, \infty)$

متناقص $[٠, ١]$

د) $ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)$

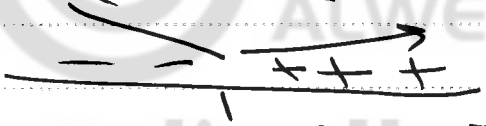
الحل

$ق(س) = س^٢ + ٣س + ٢س + ٦$ على الأقواس

$= س^٢ + ٥س + ٦$

$ق'(س) = ٢س + ٥ = ٠$

$٢س = -٥ \Leftarrow س = -\frac{٥}{٢}$



متزايد $[-\frac{٥}{٢}, \infty)$

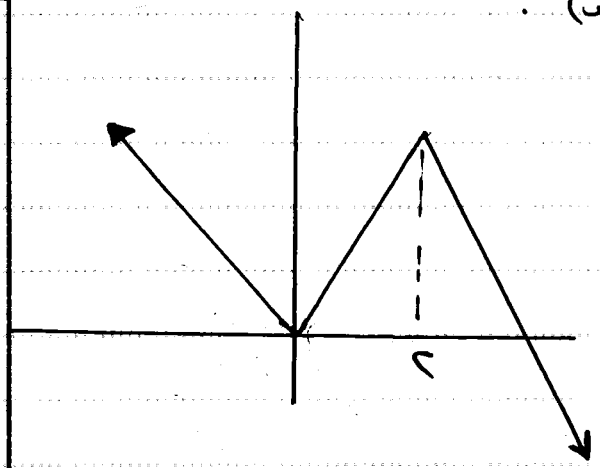
متناقص $(-\infty, -\frac{٥}{٢}]$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص١٣٢

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية ح جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).



الحل

متزايد [٠، ٢] صاعد

متناقص (-∞، ٠] ، [٢، ∞)

هابط

السؤال الثالث

بين ان الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٥ يكون متزايد لجميع س ∈ ح

الحل

ق'(س) = ٣س^{٢} + ٦س لا يحلل

بأخذ اشارة واحدة هي اشارة س^{٢}

+ + + + + + + +

متزايد على ح (-∞، ∞)

السؤال الرابع

اذا كان ق'(س) = هـ'(س)

اثبت ان ق(س) = هـ(س) + جـ

حيث جـ عدد ثابت

الحل

ق'(س) = هـ'(س)

⇐ ق'(س) - هـ'(س) = صفر

وكما نعلم مشتقة ق(س) - مشتقة هـ(س) = صفر يكون

ق'(س) - هـ'(س) = ثابت

لان مشتقة الثابت = صفر

وكليه الثابت = جـ

⇐ ق(س) - هـ(س) = جـ

⇐ ق(س) = هـ(س) + جـ

مكتبة الوسام ALWESAM الأستاذ ناجح الجمزاوي

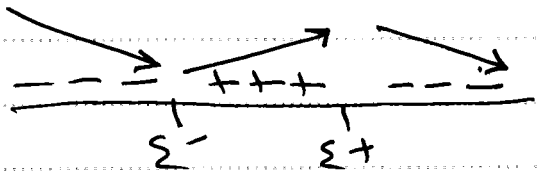
أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
$ق(س) = س(٤٨ - س^٢)$

الحل

$ق(س) = ٤٨س - س^٣$ فك الاقواس
$ق'(س) = ٤٨ - ٣س^٢$
$٤٨ - ٣س^٢ = ٠ \leftarrow ٣س^٢ = ٤٨$
بالقسمة على ٣ $\leftarrow س^٢ = \frac{٤٨}{٣} = ١٦$
باخذ الجذر الذي يعطي $س = \pm\sqrt{١٦}$
$س = \pm ٤$



تزايد $[-٤، ٤]$

تناقص $(-\infty، -٤] \cup [٤، \infty)$

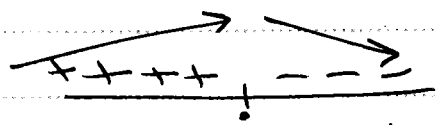
وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان الاقتران $ق(س) = ا - س^٢$
فان الاقتران ق يكون متزايدا في الفترة

أ) $[٠، \infty)$ ب) $[-١، ١]$
ج) $(-\infty، ٠]$ د) $[٠، ١]$

الحل

$ق'(س) = -٢س$
$-٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$



متزايد $(-\infty، ٠]$
الاجابة (ج)

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان الاقتران
$ق(س) = ٢س^٣ - ٤٢س + ٢$ فجد
فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق

← تابع الحل

مكتبة الوسام AL WESSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

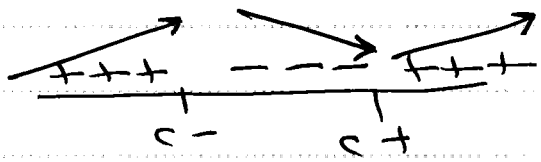
الحل

$ق'(س) = ٦س - ٤$

$٦س = ٤$ بالقسمة على ٦

$س = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ باخذ الجذر التربيعي

$س = \pm\sqrt{\frac{٤}{٩}} = \pm\frac{٢}{٣}$



متزايد $[-\infty, -\frac{٢}{٣}] \cup [\frac{٢}{٣}, \infty]$

متناقص $(-\infty, \frac{٢}{٣}) \cap (\frac{٢}{٣}, \infty)$

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اذا كان $ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} + ١$

فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$

الحل

$ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

$٦س - ٣س^{٢} = ٠$

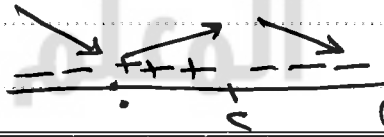
$٣س(٢ - س) = ٠$ اخراج ٣س عامل مشترك

$٣س = ٠ \leftarrow$ **$س = ٠$**

$٢ - س = ٠ \leftarrow س = ٢$

متزايد $[٠, ٢]$

متناقص $(-\infty, ٠] \cup [٢, \infty)$



وزارة (٢٠١٠) شتوية

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = س^{٢}(٦ - س)$

الحل

فك الأقواس

$ق(س) = ٦س^{٢} - س^{٣}$

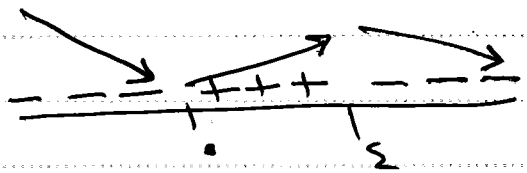
$ق'(س) = ١٢س - ٣س^{٢}$

$١٢س - ٣س^{٢} = ٠$ اخراج ٣س عامل مشترك

$٣س(٤ - س) = ٠$

$٣س = ٠ \leftarrow س = ٠$

$٤ - س = ٠ \leftarrow س = ٤$



متزايد $[٠, ٤]$

متناقص $(-\infty, ٠] \cup [٤, \infty)$

وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $ق(س) = ١٢س - س^{٣}$

جد فترات التزايد والتناقص

← يتبع الحل

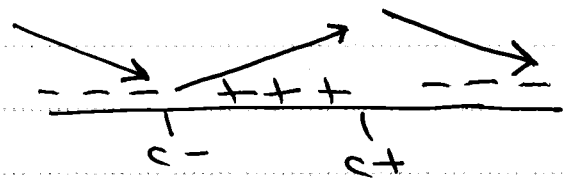
الحل

$ه'(س) = ١٢ - ٣س^٢$

$١٢ - ٣س^٢ = ٠ \leftarrow ٣س^٢ = ١٢$

بالقسمة على ٣

$س^٢ = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

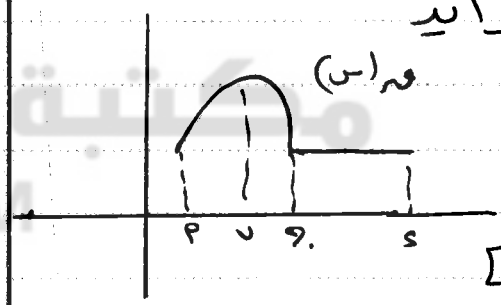


متزايد $[-٢ ، +٢]$

متناقص $(-\infty ، -٢] \cup [+٢ ، \infty)$

وزارة (٢٠١١) شتوية

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الأقتران $ه(س)$، أي الفترات الآتية يكون فيها الأقتران $ه(س)$ متزايد



أ) $[٢ ، ٩]$

ب) $[١ ، ٤]$

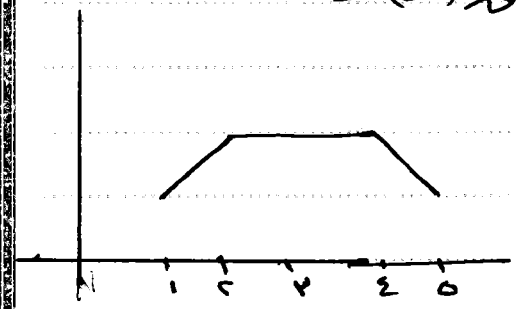
ج) $[٤ ، ٩]$

د) $[١ ، ٤]$

أكمل الصامد متزايد $[٣ ، ٦]$ ①

وزارة (٢٠١١) صيفية

① معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الأقتران $ه(س)$ المعرف على الفترة $[١ ، ٥]$ أي الفترات الآتية فيها دائماً $ه'(س) = ٠$



أ) $(٢ ، ١)$

ب) $(٤ ، ١)$

ج) $(٤ ، ٢)$

د) $(٥ ، ٢)$

الحل $ه'(س) = ٠$ الاقتران ثابت في الفترة $[٢ ، ٤]$

$\Leftarrow ه'(س) = ٠$ في $(٢ ، ٤)$

② جد فترات التزايد والتناقص للأقتران $ه(س) = س^٣ - ٤٨س + ٥$

الحل

$ه'(س) = ٣س^٢ - ٤٨ = ٠$

$\leftarrow ٣س^٢ = ٤٨ \leftarrow س^٢ = \frac{٤٨}{٣} = ١٦$

$س = \pm \sqrt{١٦} = \pm ٤$

متزايد $(-\infty ، -٤] \cup [٤ ، \infty)$ متناقص $[-٤ ، ٤]$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان $ق(س) = س^3 - 3س^2 + 4$
فجد فترات التزايد والتناقص

الحل

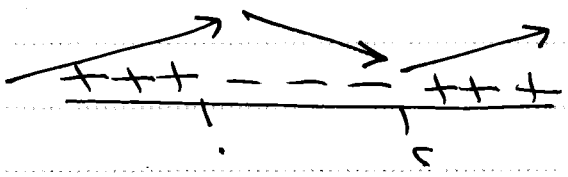
$ق'(س) = 3س^2 - 6س = 0$

اخراج $3س$ عامل مشترك

$3س(س - 2) = 0$

$3س = 0 \leftarrow س = 0$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$

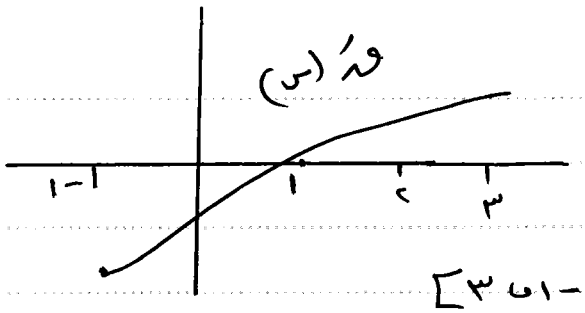


تزايد $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

تناقص $[0, 2]$

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ في الفترة $[-1, 3]$ كون الاقتران $ق(س)$ متزايدًا في الفترة

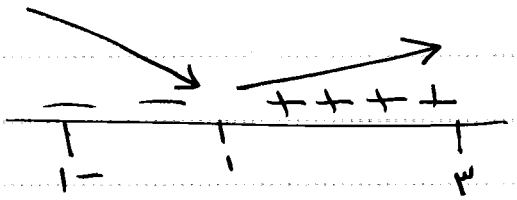


أ) $[-1, 3]$

ب) $[1, 3]$

ج) $[-1, 1]$ د) $[0, 3]$

الحل



متزايد $[1, 3]$ (ب)

وزارة (٢٠١٣) شتوية

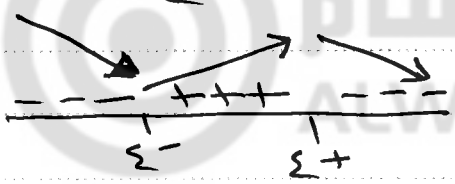
اذا كان $ق(س) = 4س - س^3$ أوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = 4 - 3س^2 = 0$

$3س^2 = 4 \leftarrow س^2 = \frac{4}{3} = \frac{4}{4} = 1$

$س = \pm\sqrt{1} = \pm 1$



متزايد $[-1, 1]$

متناقص $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

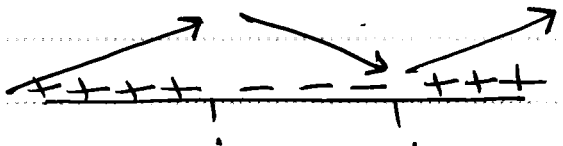
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان $ق(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$
اوجد فترات التزايد والتناقص.

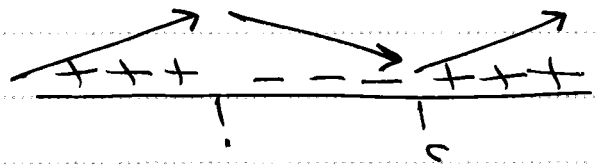
الحل

$ق'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س$
اخراج $١٢س$ عامل مشترك
$١٢س(س - ١) = ٠$
$١٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$
$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$



تزايد $(-\infty, ٠] \cup [١, \infty)$
تناقص $[٠, ١]$

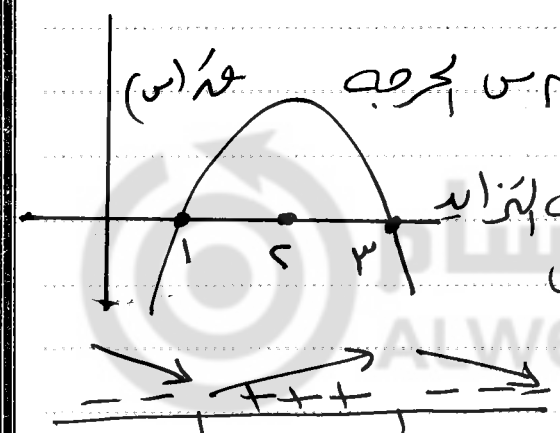
اخراج $٣س$ عامل مشترك
$٣س(س - ٢) = ٠$
$٣س = ٠ \leftarrow س = ٠$
$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$



تزايد $(-\infty, ٠] \cup [٢, \infty)$
تناقص $[٠, ٢]$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة الأولى للاقتران $ق(س)$ اجب عما يأتي



١) جد قيم $س$ الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص

الحل

١) قيم $س$ الحرجة $\{١، ٣\}$
٢) تزايد $[١، ٣]$
تناقص $(-\infty, ١] \cup [٣, \infty)$

وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢}$
اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

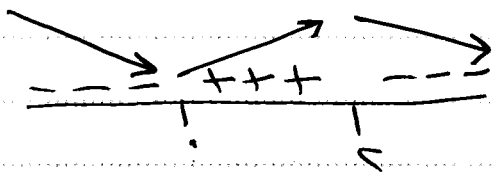
$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٦س = ٠$

وزارة (٢٠١٥) شتوية

إذا كان $ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} + ٤$
أوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

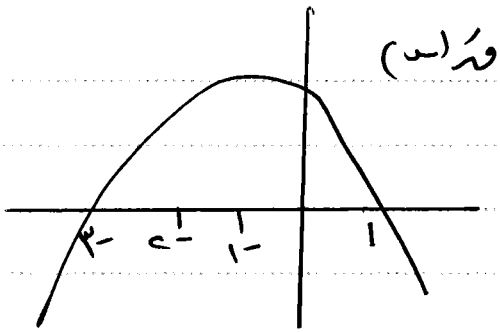
$ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢} = ٠$
اخراج $٣س$ عامل مشترك
$٣س(٢ - س) = ٠$
$٢ - س = ٠ \leftarrow س = ٢$
$٣س = ٠ \leftarrow س = ٠$



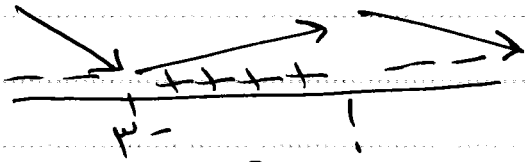
متزايد $[٠ ، ٢]$
متناقص $(-\infty ، ٠] \cup [٢ ، \infty)$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ جد:
١) قيم س الحرجة للاقتران ق
٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق



الحل

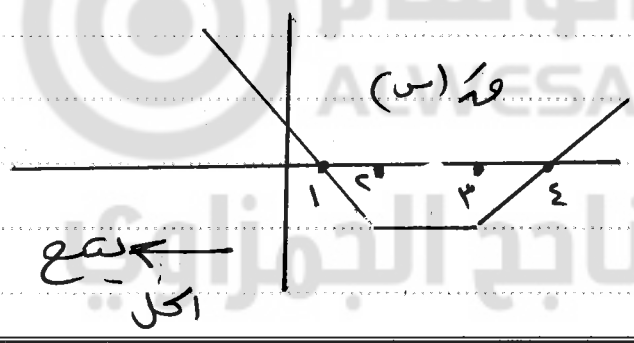


١) قيم س الحرجة $\{-٣ ، ١\}$

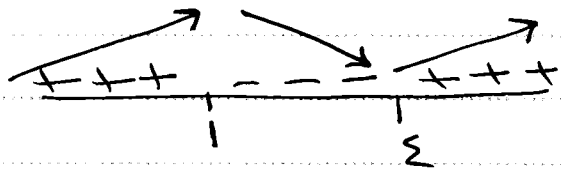
٢) متزايد $[-٣ ، ١]$
متناقص $(-\infty ، -٣] \cup [١ ، \infty)$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ اعتمد على الشكل في إيجاد
١) قيم س الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص



الحل



١) مقام س الحرجة {١، ٤}

٢) متزايد $(-\infty, 1] \cup [4, \infty)$

٣) متناقص $[1, 4]$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $f(س) = ٦س^{٢} - س^{٣} + ٣$ جد فترات التزايد والتناقص للاقتران f

الحل

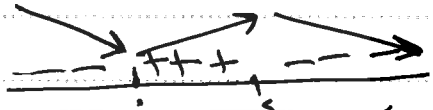
$f'(س) = ١٢س - ٣س^{٢} = ٠$

اخراج ٣س عامل مشترك

$٣س(٤ - س) = ٠$

$٣س = ٠ \leftarrow س = ٠$

$٤ - س = ٠ \leftarrow س = ٤$

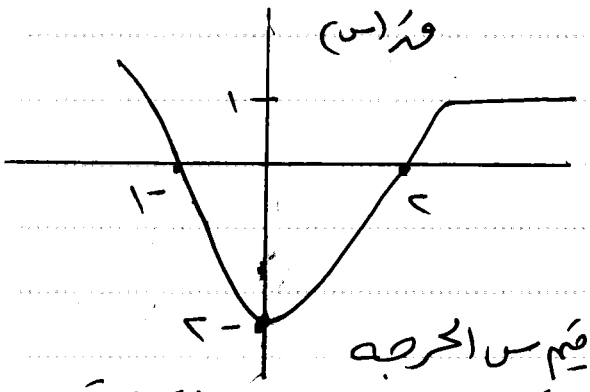


متزايد $[0, 4]$

متناقص $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

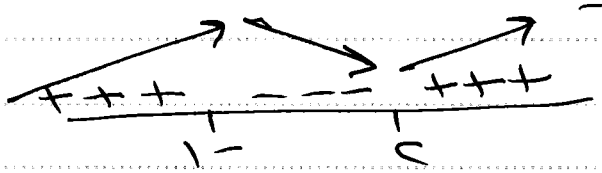
① اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران f(س) المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية اجب عما يأتي



١) حدد قيم س الحرجة

٢) حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران f

الحل



١) قيم س الحرجة {-١، ٢}

متزايد $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

متناقص $[-1, 2]$

مكتبة الوسام
AlWesam
الوسام ناجح الجمزاوي

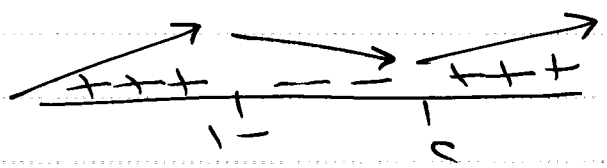
④ بين ان $و(س) = س^٥ + ٢س$ متزايدة على مجموعة الاعداد الحقيقية

الحل

$و'(س) = ٥س^٤ + ٢$

$و'(س) > ٠$ موجبة

$\therefore$ و متزايدة على مجموعة الاعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$



متزايدة $(-\infty, -١] \cup [٢, \infty)$

متناقصة $[-١, ٢]$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

لتكن $و(س) = \frac{١}{٣}س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ - ٢س + ٧$

جد كلا مما يأتي للاقتران $و(س)$

أ) فترات التزايد والتناقص

الحل

$و'(س) = \frac{١}{٣} \times ٣س^٢ - \frac{١}{٢} \times ٢س - ٢$

$= س^٢ - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$

$س + ١ = ٠ \leftarrow س = -١$

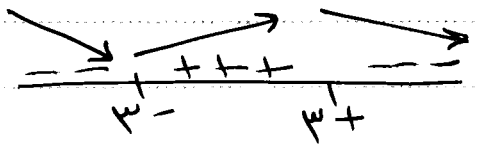
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية جديد

اذا كان $ق(س) = س(٢٧ - س^٢)$
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$

الحل

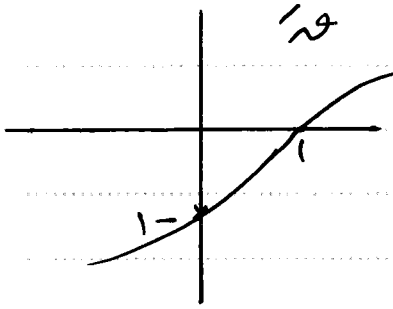
$ق(س) = ٢٧س - س^٣$ فك القوس
$ق'(س) = ٢٧ - ٣س^٢ = ٠$
$\leftarrow ٣س^٢ = ٢٧ \Leftarrow س^٢ = \frac{٢٧}{٣} = ٩$
باخذ الجذر للطرفين
$س = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$



متزايد $[-٣ ، ٣]$
متناقص $(-\infty ، -٣] \cup [٣ ، \infty)$

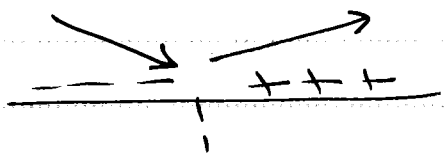
وزارة (٢٠١٨) شتوية قديم

(١) تحدد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأول للاقتران $ق$ حيث يكون منحنى الاقتران $ق$ متناقصاً في الفترة



أ) $[-\infty ، -١]$
ب) $(-\infty ، ١]$
ج) $[-١ ، ١]$
د) $[١ ، \infty)$

الحل

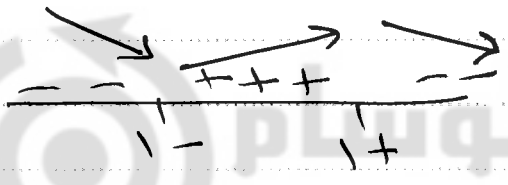


متناقص $(-\infty ، ١]$ ب

(٢) اذا كان $ق(س) = -٢س^٣ + ٦س + ٤$
جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$

الحل

$ق'(س) = -٦س^٢ + ٦ = ٠$
$\leftarrow ٦س^٢ = ٦$ بالقسمة على ٦
$س^٢ = ١$ باخذ الجذر للطرفين
$س = \pm ١$

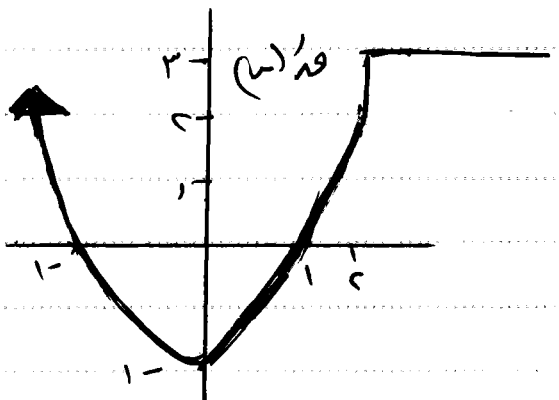


متزايد $[-١ ، ١]$
متناقص $(-\infty ، -١] \cup [١ ، \infty)$

مكتبة الوسام AL-WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية جديد

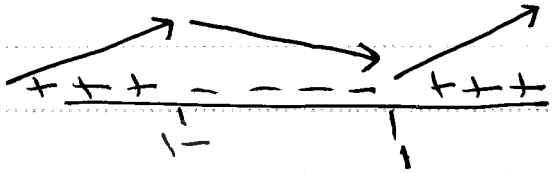
① معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران هـ فالفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران هـ متناقصاً ؟



أ) $(-\infty, 0]$ ب) $[-1, 1]$

ج) $[0, 2]$ د) $(-\infty, 1]$

الحل



متناقص $[-1, 1]$ ب

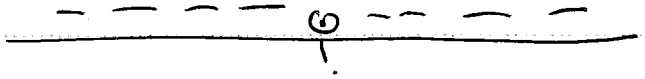
② بين ان الاقتران ل(س) = $-3س^3$ يكون متناقصاً لجميع قيم س الحقيقية.

الحل

هـ'(س) = $-3س^2$

$-3س^2 = 0$ ، $س = 0$

دائماً سالب



متناقص $ح = (-\infty, \infty)$

وزارة (٢٠١٨) صيفية قديم

اذا كان هـ(س) = $\frac{1}{3}س^3 - \frac{1}{2}س^2$ جد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران هـ .

الحل

هـ'(س) = $\frac{1}{3} \times 3س^2 - \frac{1}{2} \times 2س$

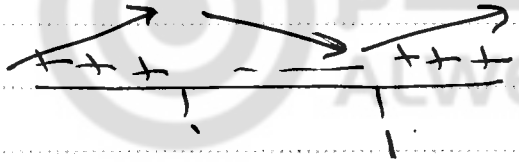
$= س^2 - س = 0$

اخراج س عامل مشترك

$س(س-1) = 0$

$س = 0$

$س - 1 = 0 \Leftarrow س = 1$



فترات التزايد $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

متناقص $[0, 1]$

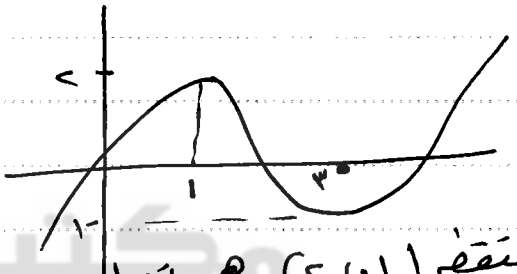
مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

القيم القصوى

النقطه الحرجه

هي النقط التي يتغير عندها الاقتران من حالة التزايد الى التناقص أو العكس ويكون عندها المماس افقي أي ان $ه'(س) = ٠$
وهي توجد عند القمم والقيعان

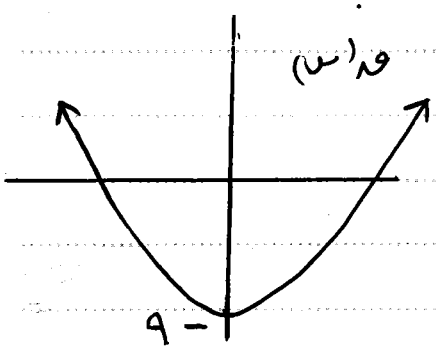
مثال ①



عند النقط (١، ٢) هي نقط حرجه لأن قبلها متزايد وبعدها متناقص ويكون $ه'(١) = ٠$
النقطه (٣، -١) نقط حرجه لأن قبلها متناقص وبعدها متزايد

وايضاً $ه'(٣) = ٠$

مثال ②
الشكل الجانبي يمثل منحنى $ه(س)$ اوجد النقط الحرجه



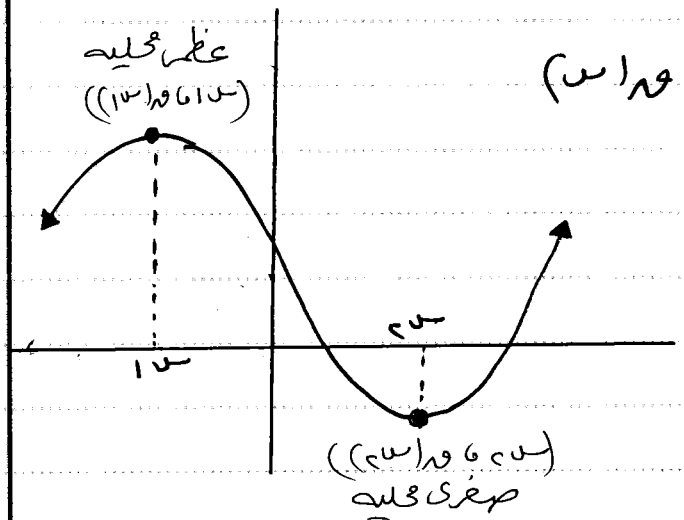
النقط الحرجه هي (٠، -٩) لأن الاقتران قبلها متناقص وبعدها متزايد
ايضاً $ه'(٠) = ٠$

ملاحظه
نلاحظ ان النقط الحرجه موجودة عند القمم والقيعان

جامعة القدس المفتوحة
الأستاذ ناجح الجمزاوي

القيم القصوى من الأقتران الأصلي (ق(س))

لنكن منحنى الاقتران ق(س) كما في الشكل



نلاحظ ان

١- يكون للأقتران اعلى قيمة عند س١ وتكون هذه القيمة ماوية لناتج تعويض س١ في الاقتران الاصلي ق(س) ونقول

عند س = س١ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(س١)

٢- يكون للأقتران أصغر قيمة عند س٢ وتكون هذه القيمة ماوية لناتج التعويض لـ س٢ في الاقتران الاصلي ق(س) ونقول

عند س = س٢ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(س٢)

نلاحظ

القيمة الصغرى هي ق(س٢)

القيمة العظمى هي ق(س١)

تسمى القيم العظمى والقيم الصغرى للأقتران ق(س) بالقيم القصوى

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

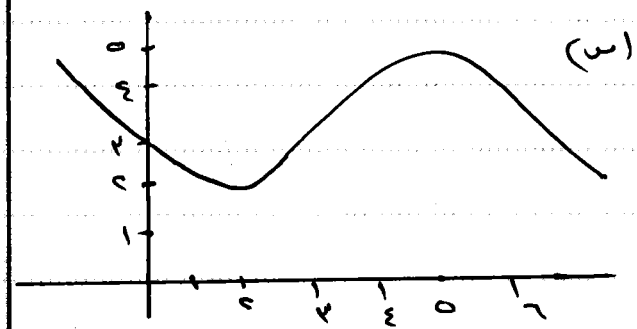
مثال ①

محمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ه(س)$ اوجد ما يلي

١) الاعداد والنقط الحرجة

٢) القيم القصوى (أن وجدت) وحدد نوعها

٣) قيمة $ه(٥)$ ، $ه(٢)$



الحل

① الاعداد الحرجة هي ٢ ، ٥

النقط الحرجة

$(٢ ، ه(٢)) = (٢ ، ٣)$

$(٥ ، ه(٥)) = (٥ ، ٥)$

② عند $س = ٢$ قيمة صغرى محلية وقيمتها $ه(٢) = ٢$

عند $س = ٥$ قيمة عظمى محلية وقيمتها $ه(٥) = ٥$

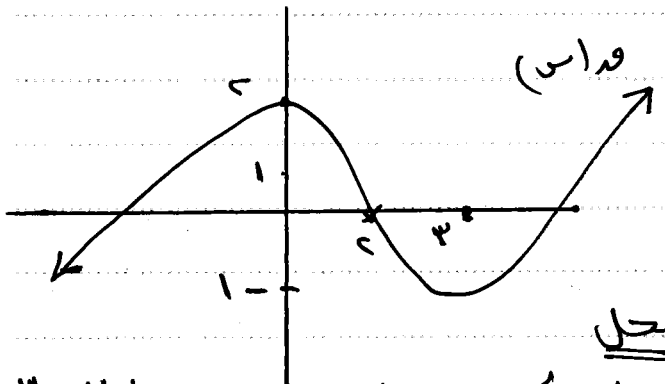
③ $ه(٥) =$ صفر ، $ه(٣) =$ صفر لأنها نقط حرجة

ملاحظة

القيم القصوى دائماً نقط حرجة لكن ليس كل نقطة حرجة قيمة قصوى .

مثال ②

حسب الرسم المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ه(س)$ جد القيم القصوى ، والنقط الحرجة .



الحل

الاعداد الحرجة عند $س = ٠$ ، عند $س = ٣$

النقط الحرجة $(٠ ، ٢)$ ، $(٣ ، ١-)$

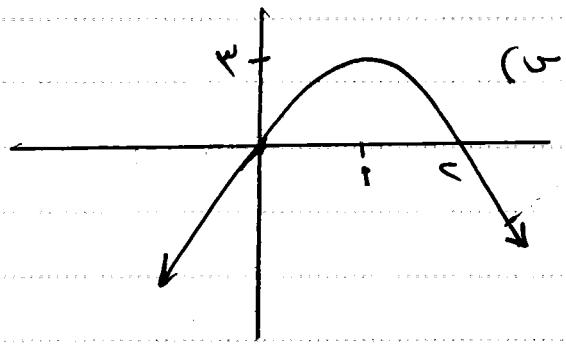
عند $س = ٠$ قيمة عظمى محلية وقيمتها $ه(١) = ٢$

عند $س = ٣$ قيمة صغرى محلية وقيمتها $ه(٣) = ١-$

مكتبة الوسام
AL WISSAM
الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ③

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س)$ أوجد النقط الحرجة والقيم القصوى.



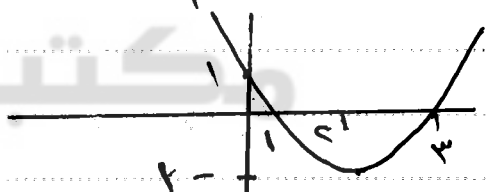
النقطة الحرجة هي $(١، ٣)$

عند $س = ١$ قيمة عظمى وقيمتها

$ق(١) = ٣$

مثال ④

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س)$ فأوجد النقط الحرجة لكل من $ق(س)$ والقيم القصوى



النقطة الحرجة $(٢، -١)$

عند $س = ٢$ قيمة صغرى وهي

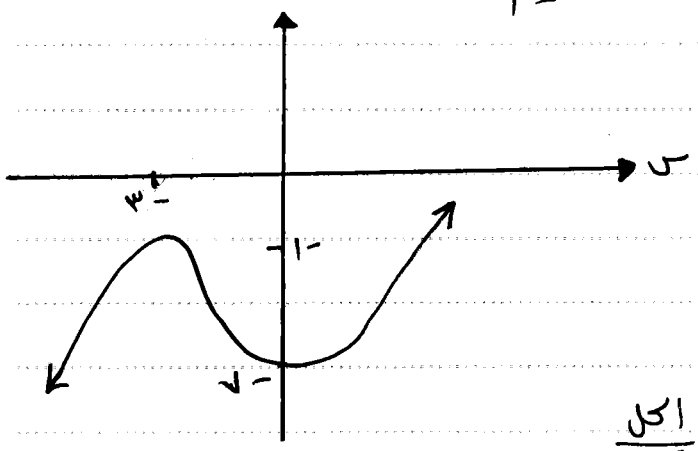
$ق(٢) = -١$

مثال ⑤

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س)$ جد

① النقط الحرجة

② القيم القصوى



الحل

النقط الحرجة

$(-٣، -١)$ ، $(٠، -٧)$

عند $س = -٣$ قيمة عظمى

وقيمتها $ق(-٣) = -١$

عند $س = ٠$ قيمة صغرى

وقيمتها $ق(٠) = -٧$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

القيم القصوى
من إختبار المشتقة الاولى

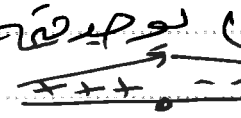
لإيجاد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى نحكيه اتباع الخطوات التالية

١. نجد قاس) المشتقة الأولى.

٢. نجد اصفار المشتقة الأولى بوضع قاس) = صفر ونكون هي النقط الحرجه

٣. نضع اصفار المشتقة على خط الاعداد وندرس اشارة قاس) قبل وبعد كل عدد (صفر)

٤. اذا تغيرت الاشاره من (+) الى (−) يوجد قيمه عظمى



٥. اذا تغيرت الاشارة من (−) إلى (+) يوجد قيمه صغرى

٦. اذا بقيت الاشاره +++ أو −−− لايوجد قيم قصوى

ملاحظه

خطوات ايجاد القيم القصوى وفترات التزايد والتناقص هي نفسها.

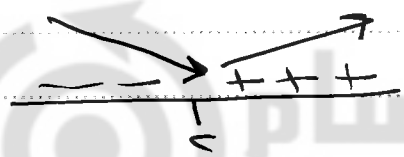
مثال ①

جد النقط الحرجه والقيم القصوى للاقتران قاس) = س٣ − ٤س + ٢

الحل

قاس) = ٣س٢ − ٤

٣س٢ − ٤ = ٠ ← س = ٤/٣ = ٢



النقطه الحرجه (٢، قا٢) = (٢، −٦)

عند س = ٢ يوجد قيمه صغرى وقيمتها = −٦

مكتبة الوسام KUTUBAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ②

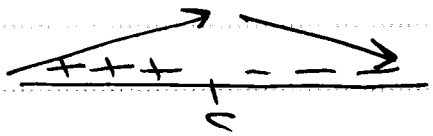
اذا كان $ه(س) = ١٢س - ٣س^{٢} + ١$

فاوجد الاعداد الحرجه و النقط الحرجه والقيم القصوى (إن وجدت) وبين نوعها .

الحل

$ه'(س) = ١٢ - ٦س = ٠$

$س = \frac{١٢}{٦} = ٢$

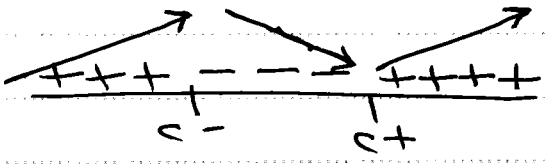


الاعداد الحرجه $س = ٢$

النقطه الحرجه $(٢ ، ه(٢)) = (٢ ، ١٣)$

عندما $س = ٢$ قيمة عظمى وقيمتها

$ه(٢) = ١٣$



الاعداد الحرجه $س = -٢ ، س = ٢$

النقط الحرجه

$(-٢ ، ه(-٢)) = (-٢ ، ١٦)$

$(٢ ، ه(٢)) = (٢ ، -١١)$

عندما $س = -٢$ قيمة عظمى وقيمتها

$ه(-٢) = ١٦$

عندما $س = ٢$ قيمة صغرى وقيمتها

$ه(٢) = -١١$

مثال ③

اذا كان $ه(س) = س^{٣} - ١٢س + ٥$

جد النقط الحرجه والقيم القصوى إن وجدت وبين نوعها .

الحل

$ه'(س) = ٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$٣س^{٢} = ١٢ \leftarrow س^{٢} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

مثال ④

اذا كان $ه(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ١$

فاوجد القيم القصوى و الاعداد الحرجه

الحل

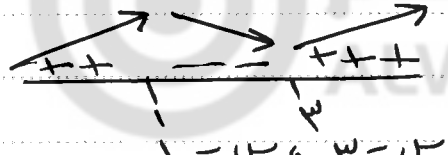
$ه'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠$

بالقسمة على $٣ \Leftarrow س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س - ١) = ٠$

$س - ٣ = ٠ \leftarrow س = ٣$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$



الاعداد الحرجه $س = ٣ ، س = ١$

عندما $س = ١$ قيمة عظمى وقيمتها $ه(١) = ٥$

عندما $س = ٣$ قيمة صغرى وقيمتها $ه(٣) = ١$

مكتبة النسام NEWESAM العلم والمعرفة

مثال ⑤

اذا كان $ق(س) = (س-٢)^{٤}$

اوجد الاعداد الحرجة والقيم القصوى إن وجدت وبين نوعها.

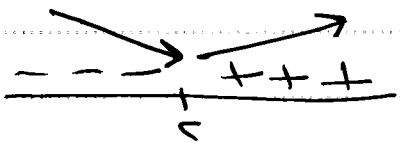
الحل

$ق'(س) = ٤(س-٢)^{٣} \times ١ = ٠$

$= ٤(س-٢)^{٣} = ٠$

بالقسمة على ٤ ← $(س-٢)^{٣} = ٠$

← $س-٢ = ٠$ ← $س = ٢$



الاعداد الحرجة $س = ٢$

عند $س = ٢$ قيمة صغرى وقيمتها

$ق(٢) =$ صفر

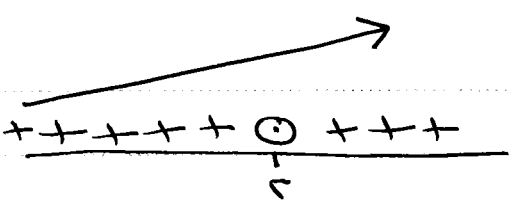
مثال ⑥

اذا كان $ق(س) = (س-٢)^{٣}$ أوجد النقط الحرجة والقيم القصوى إن وجدت وبين نوعها.

الحل

$ق'(س) = ٣(س-٢)^{٢} = ٠$ دائماً توجد

$س-٢ = ٠$ ← $س = ٢$



النقطة الحرجة $(٢، ٠)$

لا توجد قيم قصوى.

مثال ⑦

اذا كان $ق(س) = س^{٢}(٣-س)$

جد النقط الحرجة والقيم القصوى إن وجدت وبين نوعها.

الحل

$ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}$ فك القوس

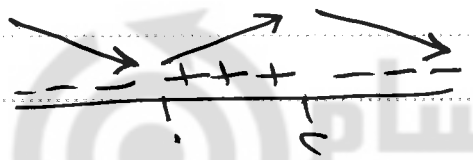
$ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢} = ٠$

اخراج $٣س$ عامل مشترك

$٣س(٢-س) = ٠$

$٣س = ٠$ ← $س = ٠$

$٢-س = ٠$ ← $س = ٢$



النقط الحرجة $(٠، ق(٠)) = (٠، ٠)$

$(٢، ق(٢)) = (٢، ٤)$

عند $س = ٠$ قيمة صغرى وهي $ق(٠) = ٠$

عند $س = ٢$ قيمة عظمى وهي $ق(٢) = ٤$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اذا كان $ق(س) = س^٤ - ٦$

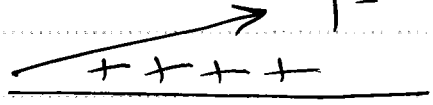
اوجد النقط الحرجة والقيم القصوى وان وجدت

الحل

$ق(س) = ٤س^٣$ دائماً موجب

لا يوجد نقط حرجة

لا يوجد قيم قصوى



مثال ⑨

اذا كان $ق(س) = (س^٢ - ٩)(س + ٣)$

اوجد العدد الحرجة والقيم القصوى وان وجدت حدد نوعها:

الحل نفك الأقواس

$ق(س) = س^٣ + ٣س^٢ - ٩س - ٢٧$

$ق'(س) = ٣س^٢ + ٦س - ٩ = ٠$

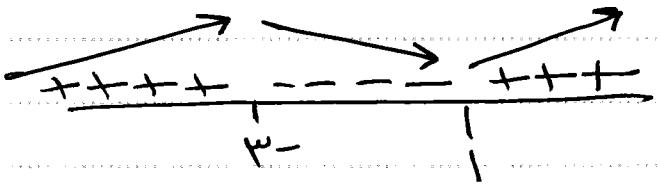
بالقسمة على ٣

$س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س + ٣ = ٠ \leftarrow س = -٣$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$



العدد الحرجة $س = -٣، س = ١$

عند $س = -٣$ قيمة عظمى وقيمتها

$ق(-٣) =$ صفر

عند $س = ١$ قيمة صغرى وقيمتها

$ق(١) = -٣٢$

مثال ⑩

اذا كان للاقترانين

$ق(س) = ٢س^٢ - ٨س + ٣$ نقطة حرجة عندما $س = ١$ فاوجد قيمة ٢؟

الحل

$س = ١$ حرجة $\leftarrow ق'(١) =$ صفر

$ق'(س) = ٤٢س - ٨$

$ق'(١) = ٤٢ \times ١ - ٨ =$ صفر

$٤٢ - ٨ = ٠$

$٤٢ = ٨ \Leftarrow \frac{٨}{٤٢} = ٢$

$٢ = \frac{٤}{٣}$

مكتبة الرياضيات ALMATHS
المعلم ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

عرجه أوعظمى أوصغرى عند $س = ب$ تعني أن

$هـ'(ب) = صفر$

مثال (١١)

اذا كان $هـ(س) = ل س^3 - 9 س^2$

حيث ل : عدد ثابت وكان لهذا الأقتران قيمة عظمى عند $س = 2$

فما قيمة الثابت ل ؟

الحل

قيمة عظمى عند $س = 2$

$\leftarrow$ عند $س = 2$ نقطة حرجه

$\leftarrow هـ'(2) = 0$

$هـ'(س) = 3ل س^2 - 18 س$

$هـ'(2) = 3ل(2)^2 - 18 \times 2 = 0$

$12ل - 36 = 0$

$12ل = 36$

$ل = \frac{36}{12} = 3$

$ل = 3$

مثال (١٢)

اذا كان $هـ(س) = س^2 + \frac{ب}{س}$ $س \neq 0$

وكان له قيمة صغرى عند $س = 2$

فجد قيمة الثابت ب ؟

الحل

قيمة صغرى عند $س = 2$ تعني أن

$هـ'(2) = صفر$

$هـ'(س) = 2س - \frac{ب}{س^2}$ قوانين الاشتقاق

$هـ'(2) = 2 \times 2 - \frac{ب}{(2)^2} = 0$

$4 - \frac{ب}{4} = 0$

$-4 \quad -4$

$-\frac{ب}{4} = -4$ ضرب تبادلي

$-ب = -16$

$ب = 16 \Leftarrow$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

ليكن $ه(س) = أ س^{٣} - ٤ س + ٤$
وكان $ه(٢) =$ صفر أوجد
القيم القصوى للاقتران $ه(س)$

الحل

نجد أ أولاً

$ه(٢) =$ صفر $\Leftarrow$

$أ(٢)^{٢} - ٤ \times ٢ + ٤ = ٠$

$٤أ - ٨ + ٤ = ٠$

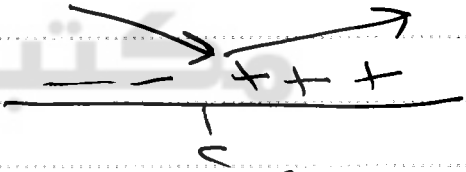
$٤أ = ٤ \Leftarrow أ = \frac{٤}{٤} = ١$

ليصبح الاقتران

$ه(س) = س^{٣} - ٤ س + ٤$

$ه'(س) = ٣ س^{٢} - ٤ = ٠$

$٣ س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$



عند $س = -٢$ تغير إشارة $ه'$ من + إلى −
فتكون $ه(-٢)$ قيمة عظمى

مثال (١٤)

اذا كان $ه(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢}$
وكان له نقطة حرجة عند $(١، ٥)$
فجد قيمة $أ$ ، $ب$ ؟

الحل

نقطة حرجة عند $(١، ٥) \leftarrow$ تعني أن

① $ه'(١) =$ صفر

② $ه(١) = ٥$

① $ه'(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س$

$ه'(١) = ٣ أ(١)^{٢} + ٢ ب(١) = ٠$

$٣ أ + ٢ ب = ٠$ ---①

② $ه(١) = أ(١)^{٣} + ب(١)^{٢} = ٥$

$أ + ب = ٥$ ---②

نحل المعادلتين بالحذف

$٣ أ + ٢ ب = ٠$

$أ + ب = ٥ \times -٢ \Leftarrow$

$٣ أ + ٢ ب = ٠$

$-٢ أ - ٢ ب = -١٠$

$أ = -١٠$ نعوضها في ②

$-١٠ + ب = ٥$

$+١٠ \quad +١٠$

$ب = ١٥$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

اذا كان $هـ(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} + ١$ فاوجد القيم القصوى للاقتران هـ إن وجدت

الحل

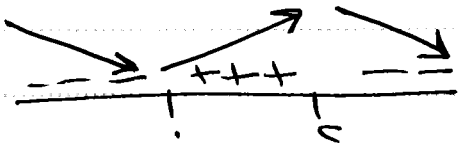
$هـ'(س) = ٦س - ٣س^{٢} = ٠$

اخرج ٣س عامل مشترك

$٣س(٢ - س) = ٠$

$٣س = ٠ \leftarrow س = ٠$

$٢ - س = ٠ \leftarrow س = ٢$



عند $س = ٠$ قيمة صغرى وقيمتها

$هـ(٠) = ١$

عند $س = ٢$ قيمة عظمى وقيمتها

$هـ(٢) = ٣(٢)^{٢} - (٢)^{٣} + ١$

$= ١٢ - ٨ + ١$

$= ٥$

مثال (١٦)

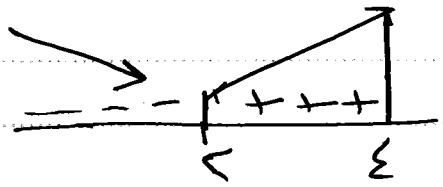
اذا كان $هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ١$ معرفاً على الفترة $[٢، ٤]$ أوجد القيم القصوى وحدد نوعها.

الحل

$هـ'(س) = ٢س - ٤ = ٠$

$٢س = ٤ \leftarrow س = ٢$

نحدد الفترة



نلاحظ الاعداد

عند $س = ٢$ قيمة صغرى $= هـ(٢) = -٣$

عند $س = ٤$ قيمة عظمى وقيمتها $هـ(٤) = ٩$

مثال (١٧)

$هـ(س) = -٤س + ٦$ معرفاً على الفترة $[-٣، ٠]$ اوجد القيم القصوى

الحل

$هـ'(س) = -٤$

عند $س = ٠$ قيمة صغرى

وقيمتها $= هـ(٠) = ٦$

عند $س = -٣$ قيمة عظمى وقيمتها

$هـ(-٣) = ١٨$

مكتبة المعلم ALMOALEM

مثال (١٨)

اذا كان $ق(س) = \frac{1}{3}س^3 + \frac{1}{2}س^2 - جـ س + ٨$

فان القيم الحرجة للاقتران $ق(س)$

أ) $س = \{-جـ، ١\}$ ب) $س = \{جـ، -١\}$

ج) $س = \{جـ، ٠\}$ د) $\{١، ٠\}$

الحل

$ق'(س) = \frac{1}{3} \times ٣س^2 + \frac{1}{2} \times ٢س - جـ$

$= س^2 + س - جـ = ٠$

$= (س + جـ)(س - ١)$

$س = -جـ$ ، $س = ١$

القيم الحرجة $\{-جـ، ١\}$ (أ)

مثال (١٩)

اذا كان للاقتران $ق(س) = ٢س^3 - ١٢جـس + ١$

قيمة حرجة عندما $س = ٣$ فان

قيمة ٢ تساوي

أ) $جـ$ ب) ٦ ج) ١٢ د) $-جـ$

الحل

$ق'(س) = ٦س^2 - ١٢جـ$

$ق'(٣) = ٠$ حرجة

$٠ = ١٢ - ٣ \times ٢ جـ$

$٢جـ = ١٢ \leftarrow ٦جـ = ١٢$

$جـ = \frac{١٢}{٦} = ٢$ (أ)

مثال (٢٠)

اذا كان $ق(س) = س^2 - ٦س$

فان للاقتران $ق(س)$ قيمة

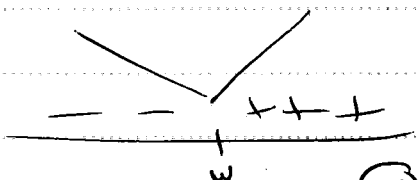
صفرى عندما $س =$ ؟

أ) ٤ ب) ٣ ج) ٢ د) ١

الحل

$ق'(س) = ٢س - ٦ = ٠$

$٦ = ٢س \leftarrow س = ٣$



الاجابة (ب)

مثال (٢١)

اذا كان للاقتران $ق(س) = ٢س^3 - ٣س^2$

قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ فان قيمة

الثابت ٢ ؟

أ) ٢ ب) -٢ ج) -٣ د) ٣

الحل

$ق'(س) = ٦٢س^2 - ٦س$

$ق'(١) = ٦٢ - ٦ = ٠$ قيمة صغرى

$٦٢ = ٦$

$٢ = \frac{٦}{٣} = جـ$ (أ)

مثال (٢٢)

اذا كان ه اقتران متصلاً وكان
ه(س) = (س - ١) (س + ٤) فان
مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ه

أ) {-١، -٤} ب) {-١، ٤}
ج) {١، ٤} د) {-٤}

الحل اكتب صفا ه(س)
(س - ١) (س + ٤) = ٠ مباشرة
س = ١ س = -٤
د) {١، -٤}

مثال (٢٣)

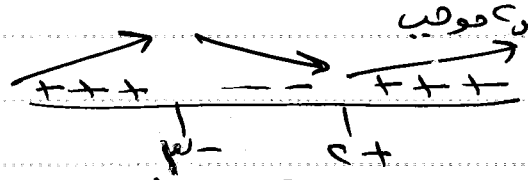
اذا كان ه اقتران متصلاً
وكان ه(س) = (س - ٢)(س + ٣)
فان للاقتران قيمة عظمى عند

أ) س = ٢ ب) س = -٣
ج) س = -٢ د) س = ٣

الحل
صفا ه(س) = ٠ مباشرة
دون استقامة

(س - ٢)(س + ٣) = ٠
س = ٢ ، س = -٣

معامل س٢ موجب



عند س = -٣ قيمة عظمى
الاجابة (أ)

مثال (٢٤)

اذا كان ه(س) = (٣س - ٦)^٣
فان الاعداد الحرجة هي

أ) ٣ ب) ٦
ج) ٢ د) ٩

الحل
ه(س) = ٣(٣س - ٦)^٢ × ٣
٩(٣س - ٦)^٢ = ٠
٣س - ٦ = ٠
٣س = ٦
س = ٦/٣ = ٢
الاجابة (ج)

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

ايجاد القيم القصوى ق رسمة ق'(س)

الخطوات

١. تحويل الرسمة إلى خط الاعداد بنفس طريقة التزايد و التناقص.

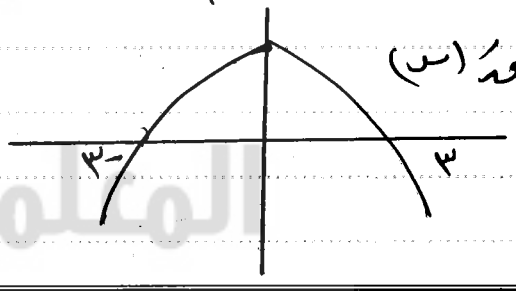
٢. ايجاد نقط تقاطع منحنى ق'(س) مع محور السينات وتكون هي قيم س الحرجة.

٣. عوض محور السينات = ق'(س) فوجب

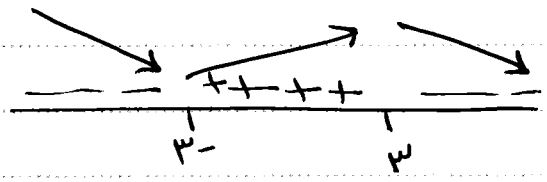
٤. تحت محور السينات تكون ق'(س) سالبة

مثال ①

الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) أوجد الاعداد الحرجة والقيم القصوى



الحل



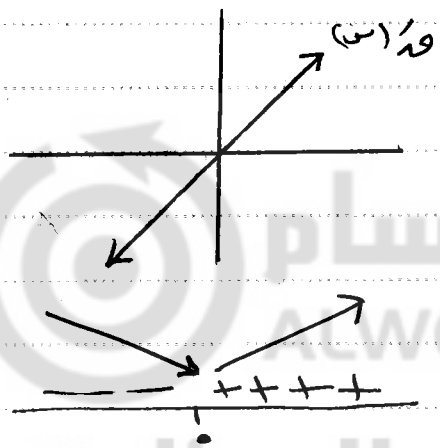
قيم س الحرجة هي س = ٣ ، ٣-

عند س = ٣- قيمة صغرى وقيمتها ق(٣-)

عند س = ٣ قيمة عظمى وهي ق(٣)

مثال ②

الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) أوجد قيم س الحرجة والقيم القصوى



الحل

س الحرجة س = ٠

عند س = ٠ قيمة صغرى وهي ق(٠)

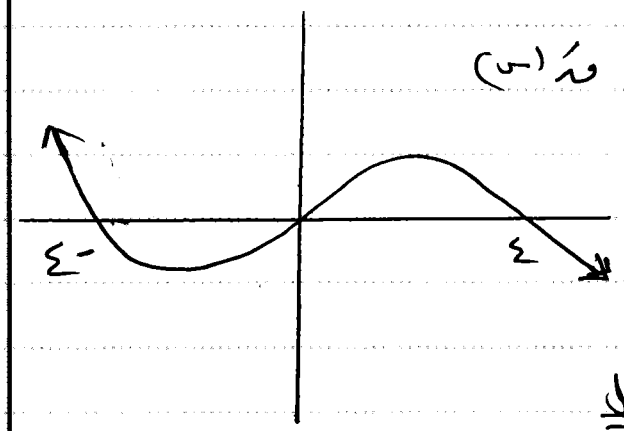
مركز الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٣)

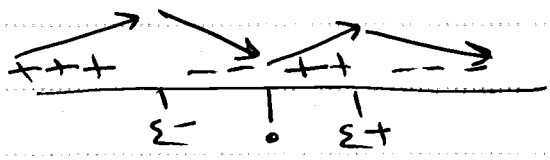
الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ أوجد

① قيم س الحرجة

② القيم القصوى وحدد نوعها



الحل



قيم س الحرجة $س = -٤ ، ٠ ، ٤$

عند $س = -٤$ قيمة عظمى وقيمتها $f(-٤)$

عند $س = ٠$ قيمة صغرى وقيمتها $f(٠)$

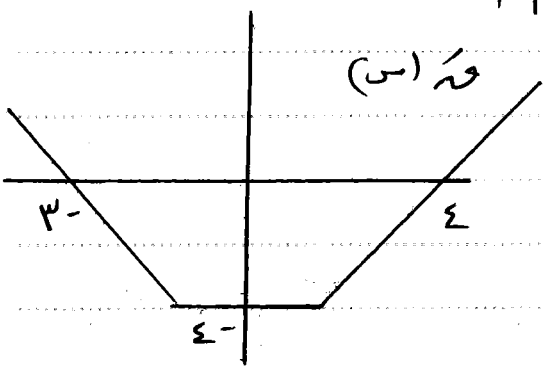
عند $س = ٤$ قيمة عظمى وقيمتها $f(٤)$

مثال (٤)

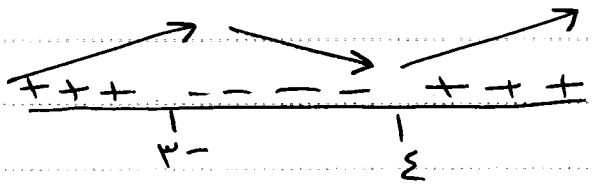
مثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى أوجد

١) قيم س الحرجة

٢) القيم القصوى



الحل



قيم س الحرجة هي $س = ٤ ، -٣$

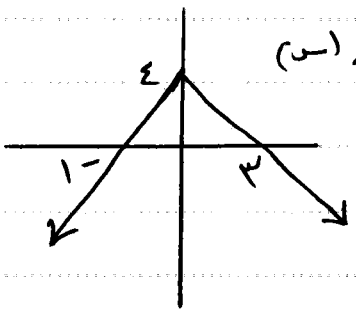
عند $س = -٣$ قيمة عظمى وقيمتها $f(-٣)$

عند $س = ٤$ قيمة صغرى وقيمتها $f(٤)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

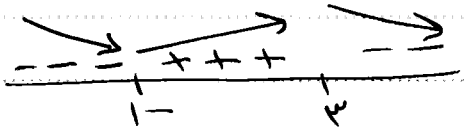
مثال ⑤

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) فان للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س تساوي



أ) صفر ب) -١ ج) ٣ د) ٤

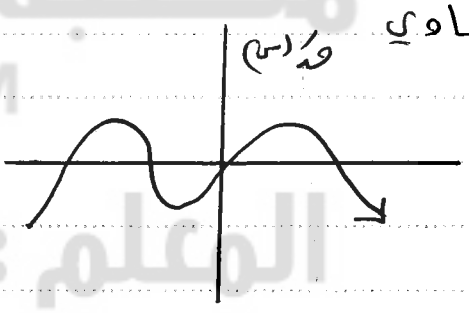
الحل



قيمة عظمى عند س = ٣ ⑤

مثال ⑥

معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) فان عدد قيم س الحرجة يساوي



أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

الحل

عدد قيم س الحرجة يساوي (٤) وهي نقط تقاطع رسمة ق(س) مع محور السينات ⑤

مثال ⑦

اذا كان ق(س) = أس^{٣} - ٦س وكان س = ١ نقطة حرجة فان قيمة أ تساوي

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

الحل

س = ١ عندها نقطة حرجة

← ق'(١) = صفر

ق'(س) = ٣أس^{٢} - ٦

ق'(١) = ٣أ(١)^{٢} - ٦ = ٠

٣أ - ٦ = ٠

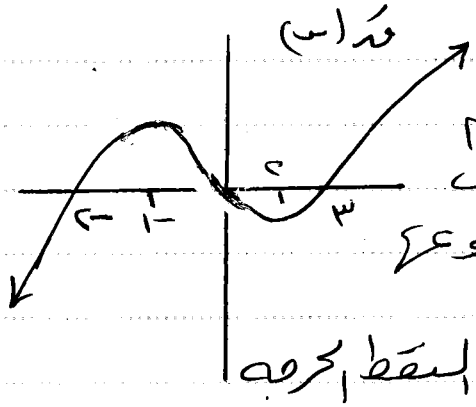
٣أ = ٦

أ = ٢ ⑥

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

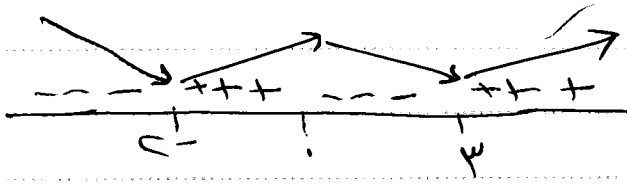
اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى لاقتران $ق(س)$ وكانت $ق(-٢)=-٣$، $ق(٠)=٤$، $ق(-١)=١$، $ق(٣)=-٢$، $ق(٢)=٥$



① اوجد القيم القصوى وحدد نوعها

② اوجد نقط الحرجة

الحل



النقط الحرجة

$(-٢، -٣)$، $(٠، ٤)$، $(٣، -٢)$

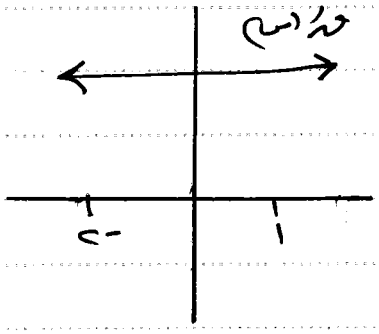
عند $س=-٢$ يمثل صغرى وهي $ق(-٢)=-٣$

عند $س=٠$ يمثل عظمى وهي $ق(٠)=٤$

عند $س=٣$ يمثل صغرى وهي $ق(٣)=-٢$

مثال ⑨

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق(س)$ فان للاقتران $ق(س)$ قيم قصوى عند س تساوي



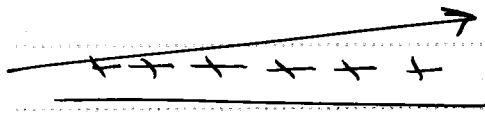
أ) $س=٠$

ب) $س=١$

ج) $س=-٢$

د) لا يوجد قيم قصوى

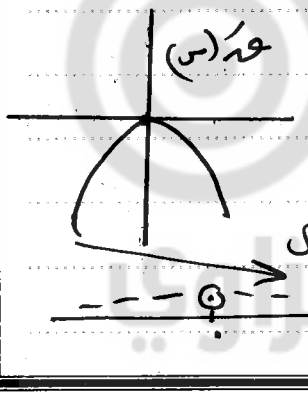
الحل



لا يوجد قيم قصوى (د)

مثال ⑩

الشكل المجاور يمثل $ق(س)$ فان قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى هي



أ) $\{٠\}$

ب) $\{١\}$

ج) $\{٢\}$

د) لا يوجد قيم قصوى

الاجابة (د)

مكتبة الوسام ALWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

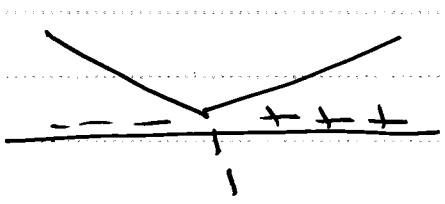
تدريب ① ص١٢٦

جد النقط والاعداد الحرجه والقيم القصوى المحليه (ان وجدت) للأقتران
$هـ(س) = س^٢ - ٢س + ١$

الحل

$هـ'(س) = ٢س - ٢ = ٠$

$\Leftarrow ٢س = ٢ \quad س = ١$



العدد الحرجه $س = ١$

النقط الحرجه $(١، هـ(١))$

$= (١، ٠)$

عند $س = ١$ يمتلك صغرى محليه

وهي $هـ(١) = ٠$

تدريب ② ص١٢٨

اذا كان $هـ(س) = ٢س(١٢ - س^٢)$
مجد كلاً مما يأتي

١) فترات التزايد والتناقص
٢) قيم س الحرجه
٣) القيم القصوى محدداً نوعها.

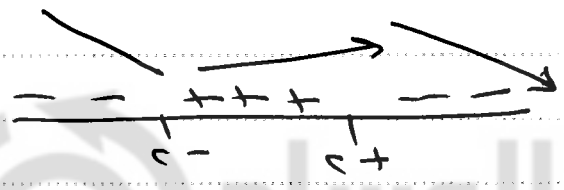
الحل

$هـ(س) = ٢٤س - ٢س^٣$ ملك القوس

$هـ'(س) = ٢٤ - ٦س^٢ = ٠$

$\Leftarrow ٦س^٢ = ٢٤ \quad س^٢ = ٤$

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$



فترات $[-\infty، -٢]$

فتنا قص $(-\infty، -٢]$ ، $[٢، \infty)$

قيم س الحرجه $= \{-٢، ٢\}$

عند $س = -٢$ يمتلك صغرى محليه وهي $هـ(-٢)$

$س = ٢$ يمتلك عظمى محليه وهي $هـ(٢)$

مكتبة الوسام العلمية
ALWISAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الأسئلة

ص ١٤١

السؤال الأول

جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي

أ) $ق(س) = س^3 - ٣س + ١$

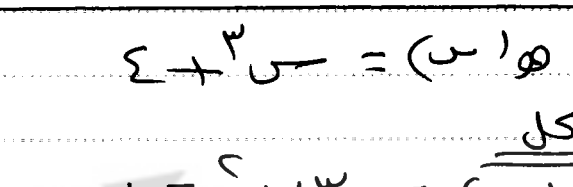
الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ٣ = ٠$

$٣س^2 = ٣$

$س^2 = ١$

$س = \pm ١$



عند $س = ١$ قيمة صغرى محلية وهي $ق(١) = -١$ (١، -١)

عند $س = -١$ قيمة عظمى محلية وهي $ق(-١) = ٣$ (-١، ٣)

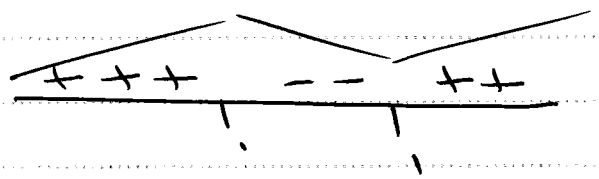
ب) $ل(س) = ٤س^3 - ٦س^2 + ٢$

الحل

$ل'(س) = ١٢س^2 - ١٢س = ٠$

$١٢س(س - ١) = ٠$

$س = ٠$ $س = ١$



عند $س = ١$ قيمة صغرى محلية وهي $ق(١) = ٠$

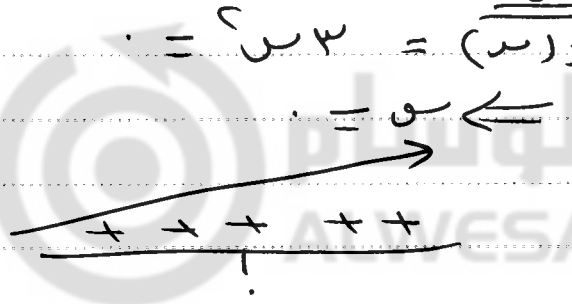
عند $س = ٠$ قيمة عظمى محلية وهي $ق(٠) = ٢$

ج) $هـ(س) = س^3 + ٤$

الحل

$هـ'(س) = ٣س^2 = ٠$

$س = ٠$



لا يوجد قيم قصوى.

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الأول (5) ص١٤١

$أ(س) = س^٣ - ٢س^٢ - ٤س + ٨$

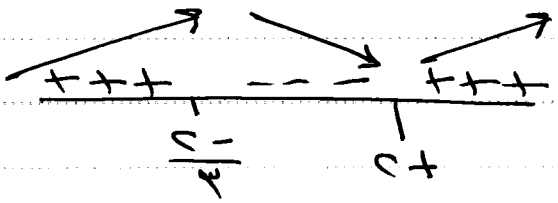
$أ'(س) = ٣س^٢ - ٤س - ٤ = ٠$

$(٣س + ٢)(س - ٢) = ٠$

$٣س + ٢ = ٠ \leftarrow ٣س = -٢$

$\leftarrow س = \frac{-٢}{٣}$

$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$



عند $س = \frac{-٢}{٣}$ قيمة عظمى محلية

وقيمتها $أ(\frac{-٢}{٣}) = \frac{٥٦}{٢٧}$

عند $س = ٢$ قيمة صغرى محلية

وقيمتها $أ(٢) = ٠$

السؤال الثالث ص١٤١

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ه$

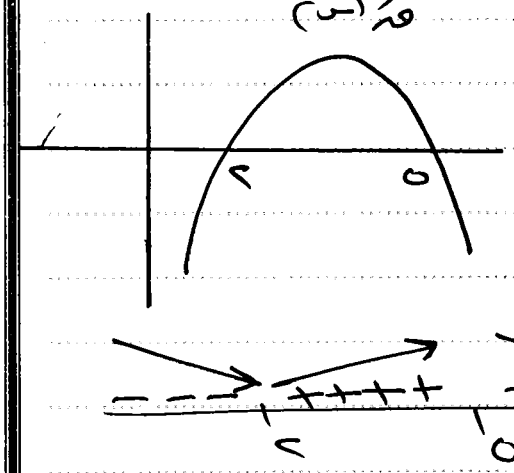
حيث $ه'(٢) = ه'(٥) = صفر$ جد

كلاً مما يلي

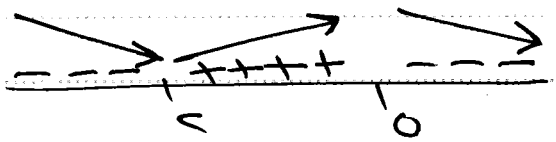
أ) قيم $س$ الحرجة

ب) فترات التزايد والتناقص

ج) نقط القيم القصوى محدداً نوعها



الحل



أ) قيم $س$ الحرجة $\{٢، ٥\}$

ب) تزايد $[٢، ٥]$

تناقص $(-\infty، ٢] \cup [٥، \infty)$

ج) عند $س = ٢$ قيمة صغرى محلية

عند $س = ٥$ قيمة عظمى محلية

مكتبة الوسام AWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع ص ١٤١

اذا كان للاقتران
$ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٤$ قيمة حرجة عندما $س = ٢$ أوجد قيمة الثابت $أ$ ؟

الحل

عند $س = ٢$ حرجة $\Leftarrow$

$ق'(٢) = ٠$

$ق'(س) = ٦س - ٢أ$

$ق'(٢) = ٦ \times ٢ - ٢أ = ٠$

$١٢ - ٢أ = ٠$

$٢أ + ٢أ$

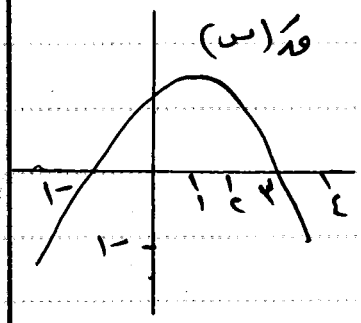
$١٢ = ٢أ$

$أ = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

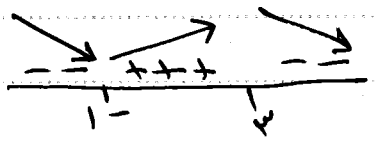
وزارة (٢٠٠٨) شتوية

معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $هـ'(س)$ فإن للاقتران $هـ(س)$ قيمة عظمى عندما س تساوي



أ) -١
ب) ١
ج) ٢
د) ٣

الحل



قيمة عظمى عند س = ٣ (د)

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان $هـ(س) = س^٣ - ٣س + ١$ فاوجد القيم الصغرى والعظمى للاقتران هـ

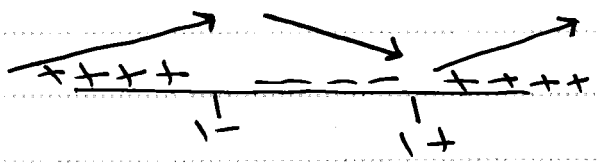
الحل

$هـ'(س) = ٣س^٢ - ٣ = ٠$

$\leftarrow ٣س^٢ = ٣$ بالقسمة على ٣

$س^٢ = ١$ باخذ الجذر التربيعي

$س = \pm ١$



عند $س = -١$ وقيمتها $هـ(-١)$

$هـ(-١) = (-١)^٣ - ٣ \times -١ + ١$

$= -١ + ٣ + ١ = ٣$

عند $س = ١$ وقيمتها $هـ(١)$

$هـ(١) = (١)^٣ - ٣ \times ١ + ١$

$= ١ - ٣ + ١ = -١$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

بالاعتماد على جدول الاشارات المجاور فإن للاقتران $هـ(س)$ قيمة عظمى عندما س تساوي

س	$-\infty$	-٢	٤	∞
$هـ'(س)$	++++	-- --	++++	
$هـ(س)$	↗	↘	↗	

أ) -٢ ب) صفر ج) ١ د) ٤

الحل

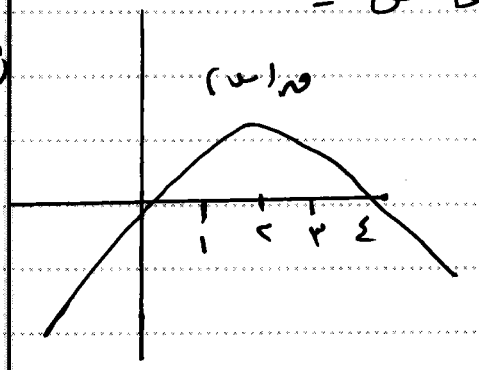
عند $س = -٢$ قيمة عظمى وقيمتها $هـ(-٢)$

عند $س = ٤$ قيمة صغرى وقيمتها $هـ(٤)$

الجواب (أ)

وزارة (٢٠١٠) شتوية

محمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(س)$، فإن للأقتران $f(س)$ نقطة حرجة عندما $س =$

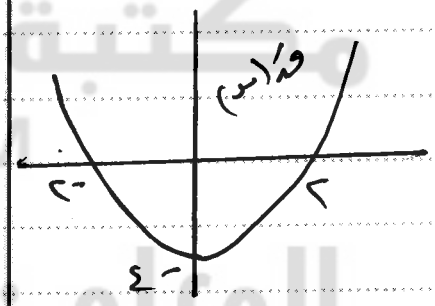


أ) ٤
ب) ٢
ج) ١
د) صفر

الحل عند $س = ٢$ (حرجة)
ما قبلها متزايد وما بعدها متناقص

وزارة (٢٠١٠) صيفية

(١) محمدًا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للأقتران $f(س)$ فإن للأقتران $f(س)$ نقطة حرجة عندما $س$ تساوي



أ) ٠
ب) ٠، ٢، -٢
ج) -٤
د) ٢، -٢

الحل

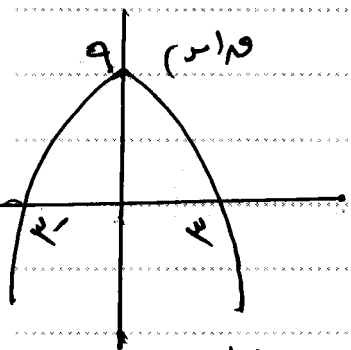
النقط الحرجة هي نقط تقاطع رسم $f'(س)$ مع محور السينات

الاجابة ٢، -٢ (د)

(٢) الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(س)$ معتمدًا الشكل جد

أ) القيم القصوى للاقتران ان وجدت وحدد نوعها

ب) فترات التزايد



الحل

أ) عند $س = ٠$ قيمة عظمى وقيمتها $f(٠) = ٩$

ب) فترات التزايد $(-\infty, ٠]$ صاعد

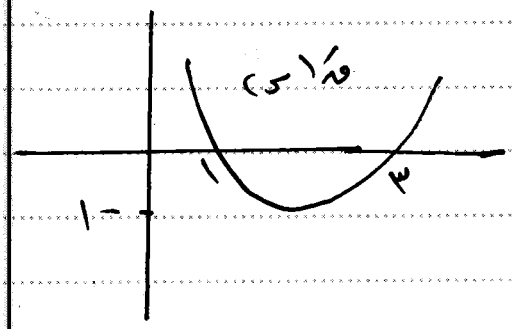
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١١) شتوية

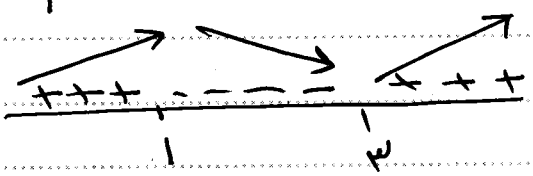
معتمدًا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $هـ(س)$ أجب عما يأتي:

١) قيم س الحرجة للاقتران $هـ(س)$

٢) قيم س التي يكون عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران هـ



الحل



١) قيم س الحرجة $س = ١ ، ٣$

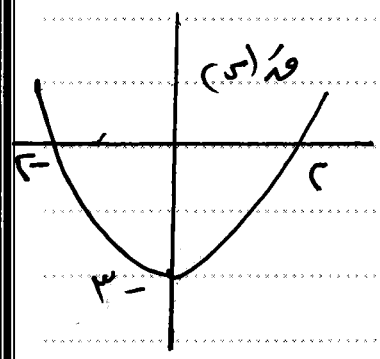
٢) عند $س = ١$ قيمة عظمى محلية وقيمتها $هـ(١)$

عند $س = ٣$ قيمة صغرى محلية وقيمتها $هـ(٣)$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

(١)

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى هـ فان للاقتران المتصل هـ قيمة صغرى عندما س تساوي



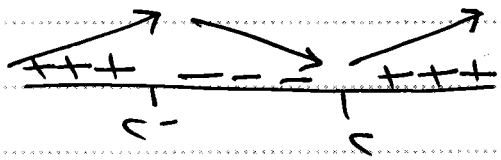
أ) ٢

ب) -٣

ج) -٢

د) صفر

الحل



قيمة صغرى محلية عند $س = -٢$

(ب)

(٢)

اذا كان $هـ(س) = ٢س^٣ + ٤س + ٥$

لنقطة حرجة عند $س = ١$ فان قيمة $أ$

أ) -٢ ب) ٢ ج) صفر د) ٥

الحل

$هـ'(س) = ٣أس^٢ + ٤$

$هـ'(١) = ٣أ + ٤ = ٠$ لنقطة حرجة $هـ'(١) = ٠$

$٣أ = -٤$

$أ = -\frac{٤}{٣}$ (أ)

مكتبة السلام AWSTAR
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^2 - ١$ فان للأقتران ق قيمة حرجة عند س تساوي

أ) ٢ ب) ١ ج) -١ د) صفر

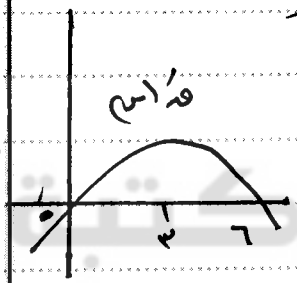
الحل

$ق'(س) = ٢س = ٠$

$٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$ (د)

وزارة (٢٠١٣) شتوية

(١) فحصاً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للأقتران ق المعرف على ح، عدد النقط الحرجة للأقتران $ق(س)$ هو



أ) ١ ب) ٦

ج) ٣ د) ٢

النقط الحرجة: نقط تقاطع منحنى $ق'(س)$ مع محور السينات وهي

عند $س = ٠$ ، $س = ٦$

عدد النقط الحرجة = نقطتان (د)

(٥) اذا كان $ق(س) = ٤٨س - س^3$ فاجب عما يأتي:

١) جد فترات التزايد والتناقص للأقتران ق

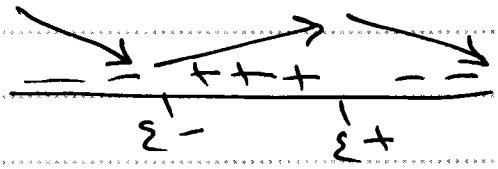
٢) جد القيم العظمى والصغرى إن وجدت للأقتران $ق(س)$

الحل

$ق'(س) = ٤٨ - ٣س^2 = ٠$

$٣س^2 = ٤٨ \leftarrow س^2 = \frac{٤٨}{٣} = ١٦$

$س = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$



١) فترات التزايد $[-٤، ٤]$

فترات التناقص $(-\infty، -٤] \cup [٤، \infty)$

٢) عند $س = -٤$ يوجد صغرى محلية وقيمتها $ق(-٤) = -١٢٨$

عند $س = ٤$ يوجد عظمى محلية وهي $ق(٤) = ١٢٨$

مكتبة الوسام AL WESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) صيفي

① اذا كان $ق(س) = ٣س^{٣} - ٩س + ٤$ له نقطة حرجة عند $س = ٢$ فان قيمة الثابت ٩ تساوي.

أ) صفر ب) ٦ ج) ٨ د) ١٢

الحل

نقطة حرجة عند $س = ٢$

$\Leftarrow ق'(٢) = ٠$

$ق'(س) = ٦س - ٩$

$ق'(٢) = ٦ \times ٢ - ٩ = ٠$

$١٢ - ٩ = ٠ \leftarrow ٩ = ١٢$

اكوا ب (د)

---

② اذا كان $ق(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$ فجد

١) فترات التزايد للاقتران ق

٢) قيم س التي يكون عندها قيمة عظمى أو صغرى للاقتران ق وحدد نوعها

الحل

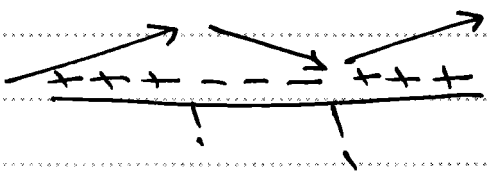
$ق'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س = ٠$

اخراج $١٢س$ عامل مشترك

$١٢س(س - ١) = ٠$

$١٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$



١) فترات التزايد $(-\infty, ٠] \cup [١, \infty)$

٢) عند $س = ٠$ قيمة عظمى محلية وقيمتها $ق(٠) = ٢$

عند $س = ١$ قيمة صغرى محلية وقيمتها $ق(١) = ٠$

مجموعة الوسام ALWESAM الوسام ناجح الجمزاوي

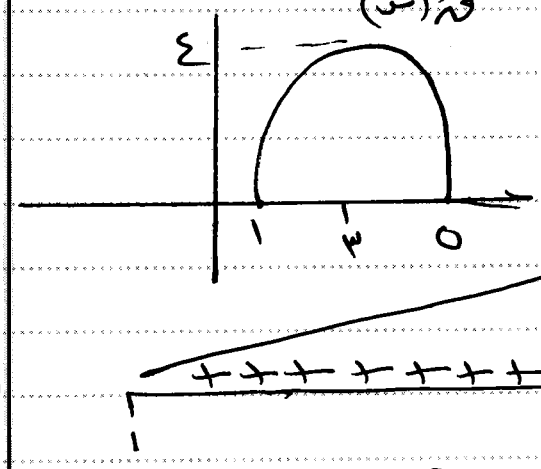
وزارة (٢٠١٤) شتوية

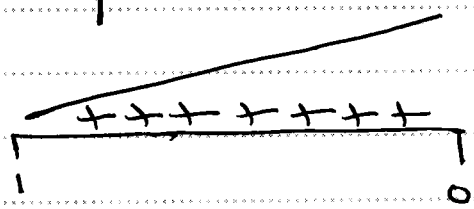
اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ق$ فإن $ق$ له

اجب عما يأتي

جـ) قيم $س$ التي يكون عندها قيم قصوى للاقتران $ق$ وحدد نوعها

$ق'(س)$





عند $س = ١$ قيمة صغرى

عند $س = ٥$ قيمة عظمى

وزارة (٢٠١٤) صيفية

① اذا كان $ق(س) = ١٢س - س^{٣}$

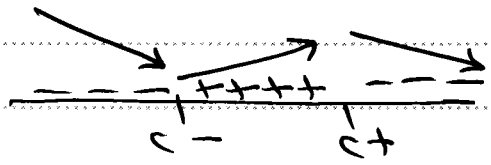
جد القيم العظمى والصغرى أن وجد لاقتران $ق$

الحل

$ق'(س) = ١٢ - ٣س^{٢} = ٠$

$١٢ = ٣س^{٢} \leftarrow س^{٢} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

$س = \pm ٢$



عند $س = -٢$ قيمة صغرى محلية

وقيمتها $ق(-٢) = -١٦$

عند $س = ٢$ قيمة عظمى محلية

وقيمتها $ق(٢) = ١٦$

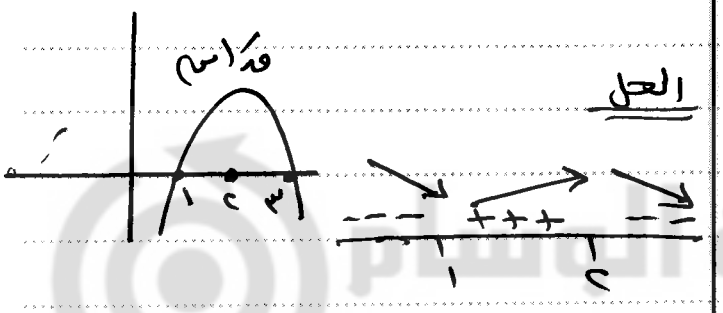
② محمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$

اجب عما يأتي

أ) جد قيم $س$ الحرجة للاقتران $ق(س)$

ب) جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق$

العل



أ) قيم $س$ الحرجة هي ١، ٢

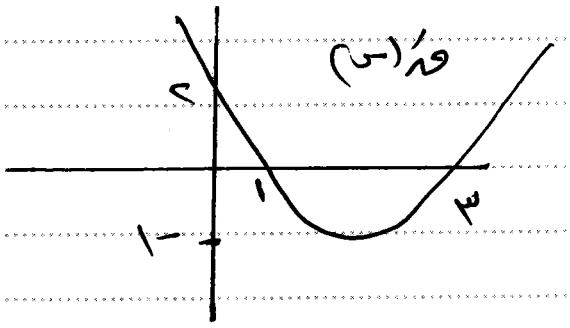
ب) متزايد $[١، ٢]$

متناقص $(-\infty، ١] \cup [٢، \infty)$

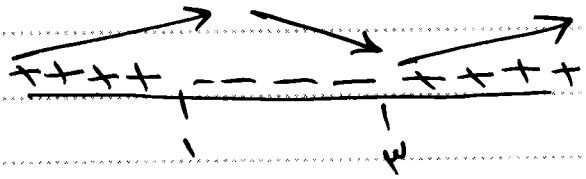
مكتبة الرسام
Rassam
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٥) شتوية

محمد أعلى الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى لاقتران $هـ(س)$ حيث قيم $س$ التي يكون لاقتران $هـ$ عندها قيم قصوى وبين نوعها.



الحل



عند $س = ١$ قيمة عظمى محلية

قيمتها $هـ(١)$

عند $س = ٣$ قيمة صغرى محلية

قيمتها $هـ(٣)$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

① اذا كان $هـ(س) = ٢س(١٢ - س^٢)$ فجد القيم العظمى والصغرى (ان وجدت) لاقتران $هـ(س)$.

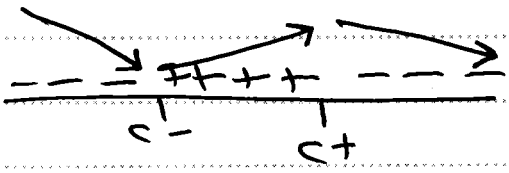
الحل

$هـ(س) = ٢٤س - ٢س^٣$ مجال الفرض

$هـ'(س) = ٢٤ - ٦س^٢ = ٠$

$٦س^٢ = ٢٤ \Leftarrow س^٢ = \frac{٢٤}{٦} = ٤$

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$



عند $س = -٢$ قيمة صغرى محلية

وقيمتها $هـ(-٢) = -٣٢$

عند $س = ٢$ قيمة عظمى محلية

وقيمتها $هـ(٢) = ٣٢$

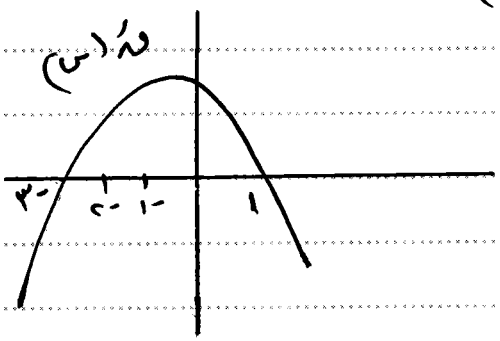
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٥) صيفية

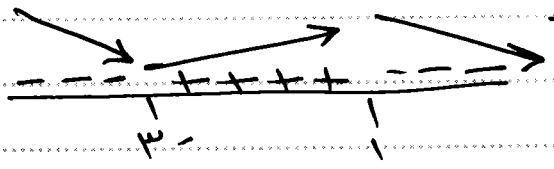
④ اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $هـ(س)$ جد

١) قيم س الحرجة للاقتران هـ

٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران $هـ(س)$



الحل



١) قيم س الحرجة هي ١، -٣

٢) متزايد $[-٣، ١]$

متناقص $(-\infty، -٣] \cup [١، \infty)$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

① اذا كان $هـ(س) = ٦س^٢ - س^٣ + ٨$ جد القيم العظمى والصغرى (ان وجدت) للاقتران $هـ(س)$.

الحل

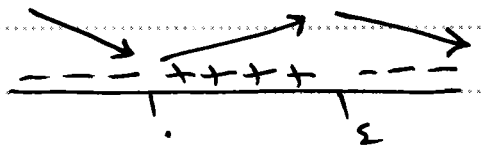
$هـ'(س) = ١٢س - ٣س^٢ = ٠$

اخراج $٣س$ عامل مشترك

$٣س(٤ - س) = ٠$

$٣س = ٠ \leftarrow س = ٠$

$٤ - س = ٠ \leftarrow س = ٤$



عند $س = ٤$ قيمة عظمى محلية وقيمتها

$هـ(٤) = ٤٠$

عند $س = ٠$ قيمة صغرى محلية

وقيمتها $هـ(٠) = ٨$

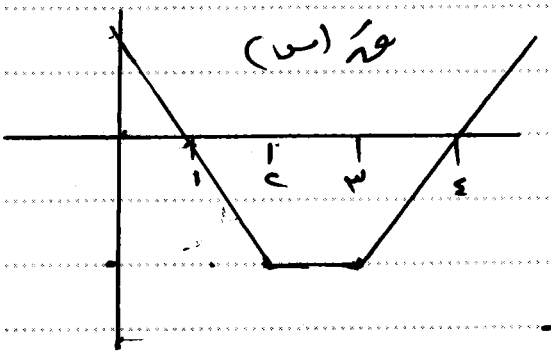
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) شتوية

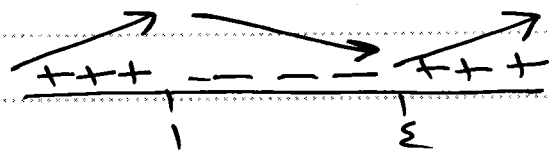
④ تمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران و(س) اعتمد على الشكل لإيجاد:

١) قيم س الحرجة للاقتران و

٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران و



الحل



١) قيم س الحرجة هي ١، ٤

٢) تتزايد (-∞، ١] ∪ [٤، ∞)

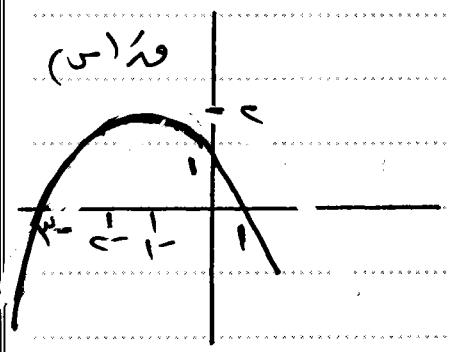
وتتناقص [١، ٤]

وزارة (٢٠١٦) صيفية

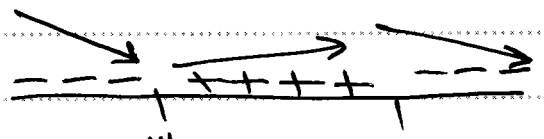
معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران و(س) المعرف على ع اجب عما يأتي

١) كم عدد القيم الحرجة للاقتران و

٢) أكتب قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى وبين نوعها.



الحل



١) عدد النقط الحرجة نقطتان

عندس = -٣، ١

٢) عندس = -٣ قيمة صغرى محلية

عندس = ١ قيمة عظمى محلية

مكتبة الهدف AL-HADAF

المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

① جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) للاقترانات
$هـ(س) = س^3 - ١٢س$

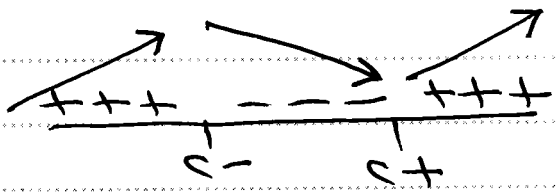
الحل

$هـ'(س) = ٣س^2 - ١٢ = ٠$

$\Leftarrow ٣س^2 = ١٢$

$\leftarrow س^2 = \frac{١٢}{٣} = ٤$

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$



عند $س = -٢$ يمثل عظمى محلية
وقيمتها $هـ(-٢) = ١٦$

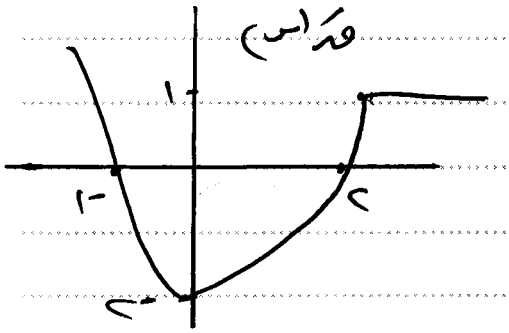
عند $س = ٢$ يمثل صغرى محلية
وقيمتها $هـ(٢) = -١٦$

② اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران هـ المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية اجب عما يأتي

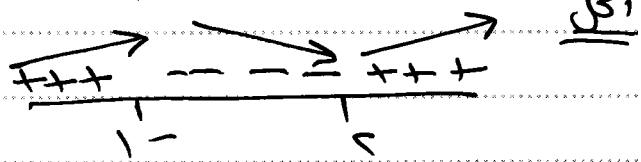
١) جد قيم س الحرجة للاقتران هـ

٢) جد فترات التزايد والتناقص

٣) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ عندما $س = ٠$



الحل



١) قيم س الحرجة $= -١، ٢$

٢) متزايد $(-\infty، -١] \cup [٢، \infty)$
متناقص $[-١، ٢]$

٣) ميل المماس عندما $س = ٠$
يساوي $هـ'(٠)$ وهي ميل
$هـ(س)$
$\Leftarrow هـ'(٠) = -٢$

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

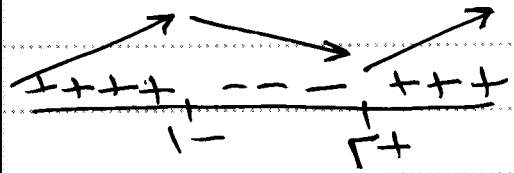
وزارة (٢٠١٧) صيفية

① لتكن
$هـ(س) = \frac{1}{3}س^3 - \frac{1}{2}س^2 - ٢س + ٧$
حيث كل مما يأتي لاقتران هـ

١) فترات التزايد والتناقص
٢) القيم العظمى والصغرى إن وجدت

الحل

$هـ'(س) = \frac{1}{3} \times ٣س^2 - \frac{1}{2} \times ٢س - ٢$
$= س^2 - س - ٢ = ٠$
$(س - ٢)(س + ١) = ٠$
$س = ٢ ، س = -١$



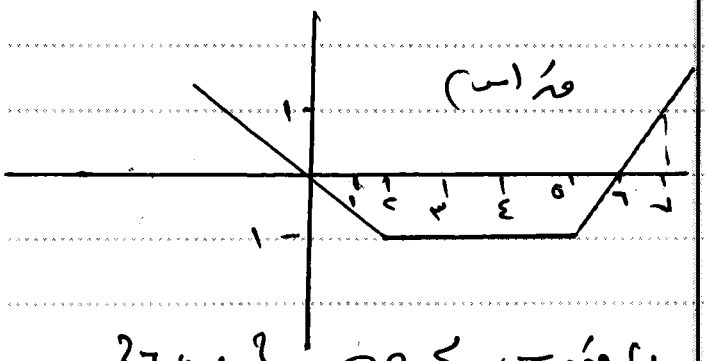
١) تزايد $(-\infty, -١] \cup [٢, \infty)$
تناقص $[-١, ٢]$
٢) عند $س = -١$ قيمة عظمى محلية
وقيمتها $هـ(-١) = \frac{٤٩}{٦}$
عند $س = ٢$ قيمة صغرى محلية
وقيمتها $هـ(٢) = \frac{١١}{٣}$

② معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران هـ(س) حيث كل مما يأتي

١) قيم س الحرجة للاقتران هـ

٢) أجد $\lim_{ه \to ٠} \frac{هـ(٢ + ه) - هـ(٢)}{ه}$

٣) ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران هـ عند $س = ٧$



١) قيم س الحرجة $\{٢، ٥\}$
نقط تقاطع الرسم مع محور السينات

٢) أجد $\lim_{ه \to ٠} \frac{هـ(٢ + ه) - هـ(٢)}{ه} = هـ'(٢)$
من الرسم $هـ'(٢) = -١$

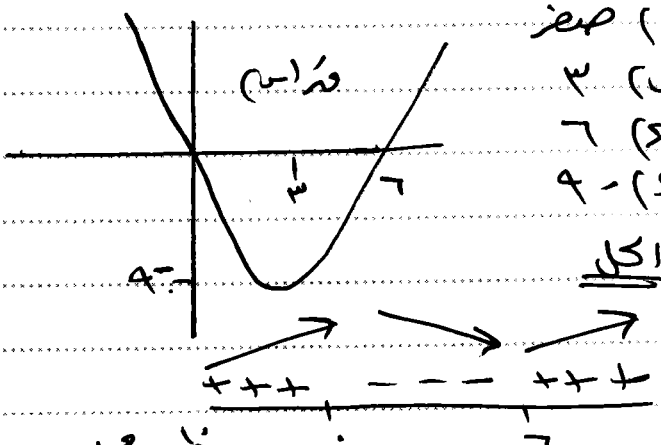
٣) ميل المماس عند $س = ٧$
يساوي $هـ'(٧)$ من الرسم
$هـ'(٧) = ١$

مكتبة الهدف AWGEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) شتوية جديد

(١) محدداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $هـ$ ما قيمة $س$ التي يكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $هـ$

أ) صفر
ب) ٣
ج) ٦
د) -٩



الحل

عند $س = ٠$ عظمى محلية

الاجابة (أ)

(٢) اذا كان للاقتران $هـ(س) = أ س^٣ + ٦س - ٤$ قيمة حرجة عند $س = -١$ حيث $أ$ ؟

أ) -٤ ب) ٦ ج) -٣ د) ٣

الحل

$هـ'(-١) = ٠ \Leftarrow هـ'(س) = ٣أ س^٢ + ٦$

$هـ'(-١) = ٣أ \times (-١)^٢ + ٦ = ٠$

$٣أ + ٦ = ٠ \Leftarrow ٣أ = -٦$

$أ = \frac{-٦}{٣} = -٢$ (د)

وزارة (٢٠١٨) شتوية قديم

(١) اذا كان $هـ$ اقترانًا متصلاً وكان $هـ'(س) = (س+٣)(س-١)$ فان مجموعة قيم $س$ الحرجة للاقتران $هـ$ هي

أ) $\{١، ٣\}$ ب) $\{-٣، ١\}$
ج) $\{-١، ٣\}$ د) $\{-٣، ١\}$

الحل

$(س+٣)(س-١) = ٠$

$س = -٣ \quad س = ١$ $\quad \{-٣، ١\}$ (د)

(٢) اذا كان $هـ(س) = ٦س - س^٢$ فان للاقتران قيمة عظمى عندما $س$ تساوي

أ) ٦ ب) صفر ج) -٣ د) ٣

الحل

$هـ'(س) = ٦ - ٢س = ٠$

$٢س = ٦ \leftarrow س = ٣$

عند $س = ٣$ قيمة عظمى

(د)

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

تابع وزارة (٢٠١٨) شتوية

(٣) اذا كان $ق(س) = -٢س^{٣} + ٦كس + ٤$ حيث كلاً مما يأتي للاقتران ق

١) فترات التزايد والتناقص

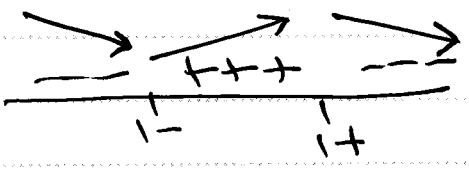
٢) القيم القصوى (العظمى والصغرى) إن وجدت

الحل

$ق'(س) = -٦س^{٢} + ٦ = ٠$

$\frac{-٦س^{٢}}{-٦} = \frac{-٦}{-٦} \Leftarrow س^{٢} = ١$

$س = \pm\sqrt{١} = \pm ١$



١) متزايد $[-١، ١]$

متناقص $(-\infty، -١] \cup [١، \infty)$

٢) عند $س = -١$ قيمة صغرى محلية

وقيمتها $ق(-١) = ٠$

عند $س = ١$ قيمة عظمى محلية

وقيمتها $ق(١) = ٨$

وزارة (٢٠١٨) صيفية جديد

اذا كان ق اقترانًا متصلاً وقابلاً للاشتقاق وكان

$ق'(س) = ٤س^{٢}(س + ٦)$ فما مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

أ) $\{٠، -٦\}$ ب) $\{٠، ٦\}$

ج) $\{٠، ٤٥\}$ د) $\{٠، -٤٥\}$

الحل

$ق'(س) = ٤س^{٢}(س + ٦) = ٠$

$٤س^{٢} = ٠ \leftarrow س = ٠$

$س + ٦ = ٠ \leftarrow س = -٦$

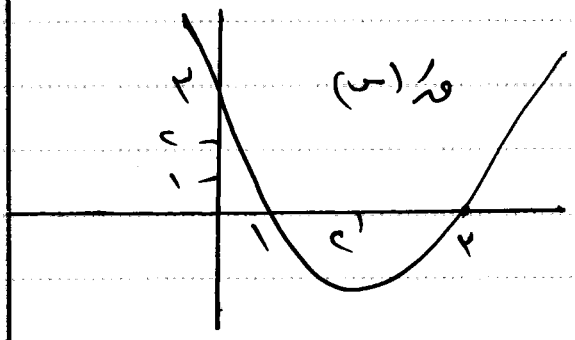
النقط الحرجة $\{٠، -٦\}$

(أ)

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية

يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ المعرف على $[-١، ٣]$



١) فالمجموعة التي تمثل مدى الاقتران $ق$ هي

أ) $\{-١، ٣\}$ ب) $\{-١، ٢\}$

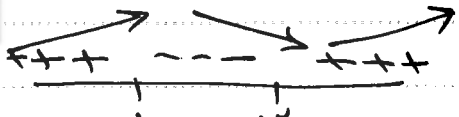
ج) $[-١، ٢]$ د) $\{٣، ٢\}$

الحل: مدى $ق = \{-١، ٣\}$ (أ)

٢) فالقيمة $س$ التي يكون عندها للاقتران $ق$ قيمة عظمى محلية

أ) ٢ ب) صفر ج) ١ د) ٣

الحل



عظمى عند $س = ١$

(ج)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تطبيقات اقتصاديه

تعريف

مفاهيم تتعلق بانتاج وصنع من سلعة معينه في فترة محدودة

س : عدد الوحدات المنتجة
ك(س) : اقتران التكلفه الكلية
ك'(س) : اقتران التكلفه الحديه

د(س) : اقتران الايراد الكلي
د'(س) : اقتران الايراد الحدي

ر(س) : اقتران الربح الكلي
ر'(س) : اقتران الربح الحدي

قوانين هامة

① الايراد الكلي = عدد الوحدات × سعر الوحدة
د(س) = س × سعر الوحدة

② الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفه الكليه
ر(س) = د(س) - ك(س)

③ الربح الحدي = الايراد الحدي - التكلفه الحديه
ر'(س) = د'(س) - ك'(س)

ملاحظه

يكون الربح أكبر ما يمكن عندما تكون مشتقته الأولى (الربح الحدي) تساوي صفر ما أي أن
ر'(س) = صفر
⇐
ر'(س) = د'(س) - ك'(س) = ٠
← د'(س) = ك'(س)
أي ان
الربح يكون أكبر ما يمكنه عندما يكون
التكلفه الحديه = الايراد الحدي

المعلم: ناجح الجمزاوي

خطوات إيجاد اكبر ربح ممكن

① كتابة اقتران الربح الكلي :

ر(س) = د(س) − ك(س)

② اذا لم يعطى الايراد الكلي نطبقه

د(س) = س × السعر

③ نجد ر'(س) فنشتقه الاقتران بعد تجهيزه

④ نجعل ر'(س) = صفر

ونحل المعادلة (نحسب قيمة س)

⑤ التأكد من الحل

أن القيمة الناتجة هي عظمى

على ضوء الاعداد

مثال ①

اذا كان ك(س) هو اقتران التكلفه الكليه لانتاج س قطعة من منتج معين ، د(س) هو اقتران الايراد الكلي فاوجد ربح الكلي (اكبر ربح ممكن)

④ الربح الكلي = د(س) − ك(س)

⑤ ر'(س) = د'(س) − ك'(س) = ٠

مثال ②

اذا كان اقتران الايراد الكلي للبيعات هو د(س) = ٦٠س − س٢ ، واقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٢٠ + ٨س حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما اوجد ما يلي

① الايراد الحدي ② التكلفه الحديه

③ اقتران الربح الكلي ④ الربح الحدي

⑤ قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن

يتبع الحل

مكتبة المعلم ناجح الجمزاوي

الحل

① الايراد الكلي $د(س) = ٦٠س - س^{٢}$

الايراد الحدي $د'(س) = ٦٠ - ٢س$

② التكلفه الكليه $ك(س) = ٢٠ + ٨س$

التكلفه الحديه $ك'(س) = ٨$

③ الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفه الكليه

$ر(س) = (٦٠س - س^{٢}) - (٢٠ + ٨س)$

$= ٦٠س - س^{٢} - ٢٠ - ٨س$

$= ٥٢س - س^{٢} - ٢٠$

④ الربح الحدي $= ر'(س)$

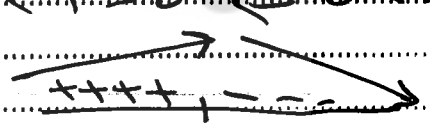
$= ٥٢ - ٢س$

⑤ الربح اكبر ما يمكن

$ر(س) = ٥٢س - س^{٢} - ٢٠$

$ر'(س) = ٥٢ - ٢س = ٠$

$٥٢ = ٢س \Leftarrow س = ٢٦$



اكبر ما يمكن

مثال ③

وجد مصنع للأثاث ان التكلفه الكليه بالدينار للأنتاج الاسبوعي لغرف نوم عددها س تعطى بالأقتران

$ك(س) = س^{٣} - ٣٠س^{٢} + ٢٤٠س + ٥٠٠$

حدد عدد الغرف اللازم انتاجها حتى تكون التكلفه اقل ما يمكن

الحل

$ك(س) = س^{٣} - ٣٠س^{٢} + ٢٤٠س + ٥٠٠$

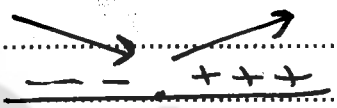
$ك'(س) = ٣س^{٢} - ٦٠س + ٢٤٠ = ٠$

بالقسمه على ٣

$س^{٢} - ٢٠س + ٨٠ = ٠$

$(س - ١٠)(س + ٨) = ٠$

$س = ١٠ \quad س = -٨$ مهمل



اقل تكلفه عند انتاج

$س = ١٠$ غرف نوم

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

تنتج وصنع س من الوحدات في الاسبوع من بضاعة معينة وسيع الوحدة عقدا = ص دينار. اذا كانت تكلفة الانتاج لهذه الوحدات هي $س^2 + ٦س + ٢٠٠$ دينار وكانت العلاقة بين س ، ص هي $٤س = ١٠٠ - ٢ص$ فجد قيمة س التي يحقق عندها المصنع أكبر ربح ممكنة

الحل

الايراد الكلي = عدد الوحدات × سعر الوحدة

$د(س) = س \times ص$

لكن يجب ان تكون بدلالة س فقط

لكن نتخلص من السؤال نعوض عادة

$٤س = ١٠٠ - ٢ص$

$\Leftarrow ٢ص = ١٠٠ - ٤س$ بالقسمة على ٢

$ص = ٥٠ - ٢س$ ونعوض قيمة ص

$\Leftarrow د(س) = س(٥٠ - ٢س)$

$= ٥٠س - ٢س^2$

التكلفة الكلية

$ك(س) = س^2 + ٦س + ٢٠٠$

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$ر(س) = د(س) - ك(س)$

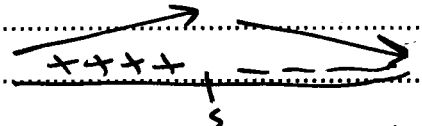
$= (٥٠س - ٢س^2) - (س^2 + ٦س + ٢٠٠)$

$= ٥٠س - ٢س^2 - س^2 - ٦س - ٢٠٠$

$= -٣س^2 + ٤٤س - ٢٠٠$

$ر'(س) = -٦س + ٤٤ = ٠$

$-٦س = -٤٤ \Leftarrow س = \frac{-٤٤}{-٦} = ٧$



أكبر ما يكون عندما $س = ٧$

مثال ⑤

اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو $د(س) = -٢س^2 + ٦٠س$ دينار واقتران التكلفة الكلية $ك(س) = ٢٠س$ حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فجد قيمة س التي تحصل الربح أكبر ما يمكن

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$ر(س) = د(س) - ك(س)$

$= -٢س^2 + ٦٠س - ٢٠س$

$= -٢س^2 + ٤٠س$

$\Leftarrow$ نتبع الحل

ر(س) = -٤س + ٤٠ = ٠

٤س = ٤٠ ⇐ س = ١٠

+++++ | - - - -

١٠

عند س = ٤٠ أكبر ما عليه

مثال (٦)

ينتج مصنع س من الوحدات في الاسبوع من بضاعة معينة، ويبيع الوحدة بعد ص دينار، اذا كانت كلفة الانتاج لهذه الوحدات هي ٢٥٠ + س² + ١٥٠ س + ٥٠٠ دينار، وكانت العلاقة بين س، ص هي ٥س = ٣٨١ - ٣ص، فجد متى ان ربح يحصل عليه هذا المصنع هو عندما تكون الانتاج الاسبوعي ٣٠ وحدة

الحل

الايراد الكلي = عدد الوحدات × سعر الوحدة

د(س) = س × ص

٥س = ٣٨١ - ٣ص ⇐

٣ص = ٣٨١ - ٥س ÷ على ٣

ص = ٣٨١/٣ - ٥/٣ س

ر(س) = د(س) - ك(س)

= س (١٢٧ - ٥/٣ س) - (٢٥٠ + س² + ١٥٠ س + ٥٠٠)

ر(س) = ١٢٧س - ٥/٣ س² - ٢٥٠ - س² - ١٥٠ س - ٥٠٠

= -١٥س - ٥٠

ر(س) = ١١٢س - ٢٨/١٥ س² - ٥٠٠

ر'(س) = ١١٢ - ٥٦/١٥ س = ٠

١١٢ = ٥٦/١٥ س ⇐ س = ١١٢ × ١٥ / ٥٦

⇐ س = ٣٠

+++++ | - - -

٣٠

أكبر ما عليه عند س = ٣٠

مثال (٧)

اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٦٠س - س² واقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٢٠ + ٨س حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما فجد اكبر ربح ممكن

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

ر(س) = د(س) - ك(س)

= ٦٠س - س² - (٢٠ + ٨س)

= ٦٠س - س² - ٢٠ - ٨س

= -س² + ٥٢س - ٢٠

ر'(س) = الربح الحدي

= -٢س + ٥٢

مثال (٨)

يبيع مصنع الوحدة من سلعة معينة بسعر ٧٠٠ دينارًا فاذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لانتاج س وحدة من هذه السلعة اسبوعيًا هي

ك(س) = ٦١٠٠ + ٥٠س + ٠٫٠٢٥س²

ما عدد الوحدات التي يجب انتاجها وبيعها اسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح ممكن

الحل د(س) = سعر الوحدة × عدد الوحدات

ر(س) = د(س) − ك(س)

= ٧٠س − (٦١٠٠ + ٥٠س + ٠٫٠٢٥س²)

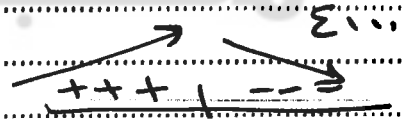
ر(س) = ٧٠س − ٦١٠٠ − ٥٠س − ٠٫٠٢٥س²

= ٢٠س − ٦١٠٠ − ٠٫٠٢٥س²

ر′(س) = ٢٠ − ٠٫٠٥س

٠٫٠٥س = ٢٠

س = ٢٠ / ٠٫٠٥ = ٤٠٠



أي ما عليه عند س = ٤٠٠

مثال (٩)

ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريا فاذا كانت تكلفة انتاجها تحقق العلاقة

ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤٠س + س²

وكان بيع الثلاجة الواحدة بسعر ٥٠٠ دينار لكل ثلاجة

أ) أوجد الايراد الكلي للمصنع من بيع الثلاجات

ب) عدد الثلاجات التي يجب تحقيقها لكي يربح المحل

الحل

س = عدد القطع

أ) الايراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة

= س × ٥٠٠

= ٥٠٠ س

ب) ر(س) = د(س) − ك(س)

= ٥٠٠س − (٣٦٠٠٠ + ٤٠س + س²)

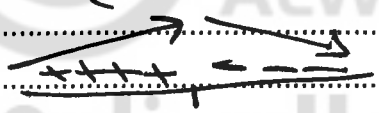
= ٥٠٠س − ٣٦٠٠٠ − ٤٠س − س²

= ٤٩٦س − ٣٦٠٠٠ − س²

ر′(س) = ٤٩٦ − ٢س = ٠

٢س = ٤٩٦

س = ٤٩٦ / ٢ = ٢٤٨



س = ٢٤٨ أي ما عليه

مثال (١٠)

اذا كان د(س) = ١٦س − س² − ٢٠
ك(س) = ٤س² − ٨س + ١٥، هما
إيراد س من وحدات سلعة
معينة وتكلفتها فجد
أ) اقتران الربح
ب) قيمة س التي تجعل الربح أكبر
ما يمكن

الحل

(أ) ر(س) = د(س) − ك(س)

ر(س) = (١٦س − س² − ٢٠) − (٤س² − ٨س + ١٥)
ر(س) = ١٦س − س² − ٢٠ − ٤س² + ٨س − ١٥
= −٥س² + ٢٤س − ٣٥

(ب) ر'(س) = د'(س) − ك'(س)
= −١٠س + ٢٤ = ٠
← −١٠س = −٢٤ ← س = ٢٤/١٠
← س = ٢٫٤

س = ٢٫٤ التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

مثال (١١)

اذا كان ك'(س) = ٣٠ + ٣س²
اقتران التكلفة الكلية لانتاج
س قطعة من سلعة ما، فان
التكلفة الحدية لانتاج (١٠) قطع
من السلعة تقريباً هي

أ) ٦٠ ب) ١٢٠ ج) ٩٠ د) ١٠٠

الحل

ك'(س) = ٦س
ك'(١٠) = ٦ × ١٠ = ٦٠
الاجابة (أ)

مثال (١٢)

اذا كان اقتران الإيراد الكلي هو
د(س) = −٢س² + ٨٠س فان
الاقتران الذي يمثل الايراد الحدي هو

أ) −٢س² + ٨٠س ب) −٤س + ٨٠
ج) −٤س + ٨٠س د) −٤س − ٨٠

الحل

(ب) د'(س) = −٤س + ٨٠

مكتبة الهدى NEWSEAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اذا كان ك(س) هو اقتران التكلفه الكليه لانتاج س قطعة من منتج معين ، د(س) هو اقتران الايراد الكلي فان اقتران الربح الكلي ر(س) يساوي

أ) ك(س) − د(س)
ب) ك(س) + د(س)
ج) د(س) × ك(س)
د) د(س) − ك(س)

الحل

ر(س) = د(س) − ك(س)
= الايراد الكلي − التكلفه الكليه

(د)

مثال (١٤)

اذا كان اقتران الايراد الكلي لبيع س وحدة من منتج يعطى بالعلاقه د(س) = ٨٠س − ٢س٢ فان الايراد الحدي عند بيع ١٠ قطع من المنتج يساوي

أ) ٤٠ ب) ٨٠ ج) ٦٠ د) ١٠

الحل

د'(س) = ٨٠ − ٤س

د'(١٠) = ٨٠ − ٤×١٠

= ٨٠ − ٤٠

= ٤٠

(أ)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص١٥١

اذا كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو د(س) = ٥٠ س + ٠,٢ س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣٠ س + ٠,٤ س^{٢} + ٢٠٠ دينار، حيث س عدد الوحدات المبيعة، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

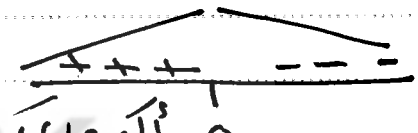
ر(س) = د(س) − ك(س)

= (٥٠ س + ٠,٢ س^{٢}) − (٣٠ س + ٠,٤ س^{٢} + ٢٠٠)

ر'(س) = ٥٠ + ٠,٤ س − ٣٠ − ٠,٨ س = ٠

= ٢٠ − ٠,٤ س = ٠

← ٠,٤ س = ٢٠ ⇐ س = ٢٠ / ٠,٤ = ٥٠



تدريب ② ص١٥٢

وجد مصنع لانتاج اجهزة الالكترونية ان التكلفة الكلية بالدينار لانتاج س من الاجهزة اسبوعيًا تعطى بالاقتران ك(س) = ٠,٥ س + ٣٠٠ اذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ − س) دينار، فجد قيمة س التي تجعل الربح الاسبوعي أكبر ما يمكن.

د(س) = سعر الجهاز × عدد الاجهز

= (٢٠٠ − س) × س = ٢٠٠ س − س^{٢}

ر(س) = د(س) − ك(س)

= (٢٠٠ س − س^{٢}) − (٠,٥ س + ٣٠٠)

ر'(س) = ٢٠٠ − ٢ س − ٠,٥ = ٠

١٥٠ − ٢ س = ٠

← ٢ س = ١٥٠ ⇐ س = ١٥٠ / ٢ = ٧٥

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الكتاب

ص ١٥٣

السؤال الأول

اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٨٠س + س^{٢} واقتران التكلفه الكليه هو ك(س) = ٤٠ + ١٦٠س ، حيث س عدد الوحدات المنتجه من سلعة ما فجد الربح الكلي ؟ .

ر(س) = د(س) - ك(س)

= ٨٠س + س^{٢} - (٤٠ + ١٦٠س)

= ٨٠س + س^{٢} - ٤٠ - ١٦٠س

= س^{٢} - ٨٠س - ٤٠

ر(س) = ٢س - ٨٠ الربح الحدي

السؤال الثاني

فيتج وصنع للحواسيب س جهازاً اسبوعياً فاذا كانت تكلفة الانتاج الكلي الاسبوعي بالدنانير تعطى بالعلاقة ك(س) = ٢٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢} وكان سعر الجهاز الواحد ٥٠٠ دينارا فما عدد الاجهزه التي يجب ان يبيعها المصنع اسبوعيا لتحقيق أكبر ربح ممكنة

الحل

الايراد الكلي = عدد الاجهزه × سعر الجهاز

= س × ٥٠٠

د(س) = ٥٠٠س

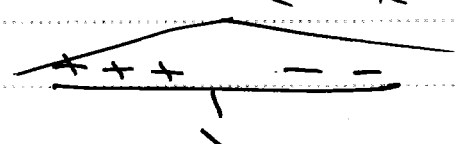
ر(س) = د(س) - ك(س)

= ٥٠٠س - (٢٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢})

ر(س) = ٥٠٠ - ٥٠ - ٢س = ٠

٤٥٠ - ٢س = ٠

٢س = ٤٥٠ ⟸ س = ١٠٠



أكبر ربح ممكنة س = ١٠٠

مركز الوسام ALWESAM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث ص ١٥٣

اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات د(س) = ٦٠س − س² دينار، واقتران التكلفه الكليه هو ك(س) = ٢٠ + ٨س حيث س عدد الوحدات المنتجه من سلعة ما جد الربح الحدي ؟

الحل

ر(س) = د(س) − ك(س)

= ٦٠س − س² − (٢٠ + ٨س)

= ٦٠س − س² − ٢٠ − ٨س

= −س² + ٥٢س − ٢٠

ر(س) = الربح الحدي

= −٢س + ٥٢

= ٥٢ − ٤س

السؤال الرابع

اذا كان د(س) = ١٦س − س² − ٢٠

ك(س) = ٢س² − ٨س + ١٥، حيث ايراد س من وحدات سلعه معينه وتكلفتها، جد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

الحل

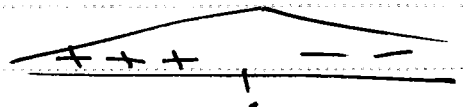
ر(س) = د(س) − ك(س)

= (١٦س − س² − ٢٠) − (٢س² − ٨س + ١٥)

ر(س) = ١٦ − ٢س − ٤س + ٨

= −٦س + ٢٤ = ٠

$\frac{-٦س}{-٦} = \frac{-٢٤}{-٦}$ ⇐ س = ٤



س = ٤ أكبر ما يمكن

مركز الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس ص ١٥٣

لينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريًا فاذا كانت تكلفة انتاجها تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤٠٠س + س٢ وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار. أوجد عدد الثلاجات التي يجب ان يبيعها المصنع شهريًا لتحقيق أكبر ربح ممكن

الحل

د(س) = ٥٠٠ س

ر(س) = د(س) − ك(س)

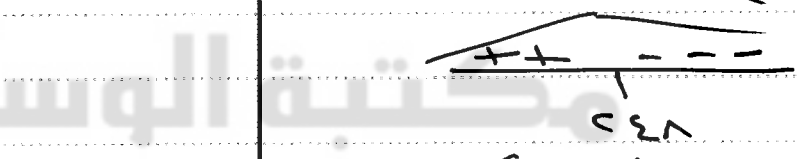
= ٥٠٠ س − (٣٦٠٠٠ + ٤٠٠ س + س٢)

= ٥٠٠ س − ٣٦٠٠٠ − ٤٠٠ س − س٢

ر(س) = ٥٠٠ − ٤٠٠ − ٢س = ٠

= ٤٩٦ − ٢س = ٠

٢س = ٤٩٦ ، س = ٢٤٨



س = ٢٤٨ أكبر ما يمكن

السؤال السادس

يبيع احد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ٩٠ دينارًا فاذا كانت التكلفة الكلية لانتاج س وحدة من هذه السلعة اسبوعيًا تعطى بالعلاقة:

ك(س) = ٠٫٠٢ س٢ + ٧٠ س + ١٠٠

جد الربح الحدي.

د(س) = عدد الوحدات × سعر الوحدة

= س × ٩٠ = ٩٠ س

ر(س) = د(س) − ك(س)

= ٩٠ س − (٠٫٠٢ س٢ + ٧٠ س + ١٠٠)

= ٩٠ س − ٠٫٠٢ س٢ − ٧٠ س − ١٠٠

ر(س) = ٩٠ − ٠٫٠٤ س − ٧٠

= ٢٠ − ٠٫٠٤ س

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

(١) اذا كان اقتران التكلفه الكليه لانتاج س قطعة من منتج تحقق بالعلاقه
ك(س) = ٣٠٠ - ٥س + س² فان التكلفه الحديه عندما س = ١٠ تساوي
أ) ١٥ ب) ٢٥ ج) ٥٠ د) ٣٥٠

الحل

ك'(س) = -٥ + ٢س

ك'(١٠) = -٥ + ٢×١٠

= -٥ + ٢٠ = ١٥

الجواب (أ)

(٢) ينتج مصنع للحواسيب س جهاز اسبوعيا فاذا كانت تكلفه الانتاج الكلي الاسبوعي تحقق بالعلاقه
ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س²
وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٥٠٠) دينارا - فجد ما يأتي
١) اقتران الايراد الكلي
٢) اقتران الربح الكلي
٣) عدد الاجهزه التي يجب ان يبيعها المصنع اسبوعيا لتحقيق اكبر ربح

الحل

١) الايراد الكلي د(س) = س × سعر الوحده
د(س) = س × ٥٠٠ = ٥٠٠س

٢) ر(س) = د(س) - ك(س)

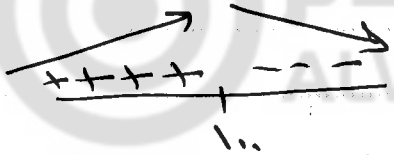
ر(س) = ٥٠٠س - (٣٠٠٠ + ٥٠س + س²)

= ٥٠٠س - ٣٠٠٠ - ٥٠س - س²

= -س² + ٤٥٠س - ٣٠٠٠

٣) ر'(س) = -٢س + ٤٥٠ = ٠

-٢س = -٤٥٠ ← س = -٤٥٠/-٢ = ١٢٥



اكبر ربح عندما س = ١٢٥

مركز الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان الايراد الكلي لبيع س وحدة من منتج ما يُعطى بالعلاقة
د(س) = ٦٠س - ٢س^{٢} فان الايراد الحدي عندما س = ١٠ يساوي

أ) ٢٠ ب) ٣٠ ج) ٤٠ د) ١٥

الحل

الايراد الحدي = د'(س)
د'(س) = ٦٠ - ٤س
د'(١٠) = ٦٠ - ٤×١٠ = ٦٠ - ٤٠
= ٢٠ (أ)

وزارة (٢٠١٩) شتوية

اذا كان أ'(س) هو اقتران التكلفه الكليه لانتاج س قطعه من منتج معين ، د(س) هو اقتران الايراد الكلي فان اقتران الربح الكلي ر(س) يساوي

أ) أ(س) - د(س) ب) ل(س) + د(س)
ج) د(س) × أ(س) د) د(س) - أ(س)

الاجابه (د)

وزارة (٢٠١٩) صيفية

اذا كان الايراد الكلي الناتج عن بيع (س) قطعة من منتج ما هو د(س) = ٣٠س - س^{٢} والتكلفه الكليه أ(س) = ١٠س فجد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن:

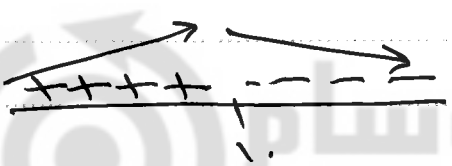
الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفه الكليه
ر(س) = د(س) - أ(س)
= ٣٠س - س^{٢} - ١٠س
= ٢٠س - س^{٢}

ر'(س) = ٢٠ - ٢س = ٠

٢٠ - ٢س = ٠ ⟸ ٢س = ٢٠

⟸ س = ٢٠/٢ = ١٠



أكبر ربح عند س = ١٠

المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٠) شتوية

لبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (٩٠) دينارًا، فإذا كانت التكلفة الكلية لانتاج (س) وحدة من هذه السلعة اسبوعيًا تعطى بالعلاقة

ك(س) = ٠,٢ س^{٢} + ٧٠ س + ١٠٠ دينار

أجد الربح الحدي.

الحل

الايراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة

د(س) = س × ٩٠ = ٩٠ س

الربح الكلي = د(س) − ك(س)

ر(س) = ٩٠ س − (٠,٢ س^{٢} + ٧٠ س + ١٠٠)

ر(س) = ٩٠ س − ٠,٢ س^{٢} − ٧٠ س − ١٠٠

= ٢٠ س − ٠,٢ س^{٢} − ١٠٠

الربح الحدي = ر'(س)

= ٢٠ − ٠,٤ س

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٧) وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان اقصى ان الايراد الكلي لبيعان سلعة ما هو

ر(س) = ٥٠ س - ٠,٣ س^{٢} دينار

واقصى ان التكلفه الكليه

ك(س) = ٣٠ س دينار حيث

س عدد الوحدات ، جد قيمة س

التي تجعل الربح اكبر ما يمكن.

الحل

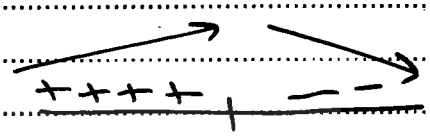
الربح الكلي = ر(س) - ك(س)

= ٥٠ س - ٠,٣ س^{٢} - ٣٠ س

ر(س) = ٢٠ س - ٠,٣ س^{٢}

ر'(س) = ٢٠ - ٠,٦ س = ٠

س = $\frac{-٢٠}{-٠,٦}$ = ٥



س = ٥ اكبر ربح ممكن

مثال (١٨) وزارة (٢٠١٢) شتوية

يبيع مصنع الوحدة من سلعة معينه بسعر (٨٠) دينارا ، فاذا كانت التكلفه الكلية بالدينار لانتاج (س) وحدة من هذه السلعه اسبوعيا تعطى بالعلاقه

ك(س) = ٠,٠٠٥ س^{٣} + ٠,٦ س^{٢} + ١١٢ س

حيث عدد الوحدات التي يجب انتاجها وبيعها اسبوعيا لتحقيق اكبر ربح ممكن

الحل

الايراد الكلي = ر(س) = عدد الوحدات × السعر

ر(س) = ٨٠ س

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفه الكليه

ر(س) = ر(س) - ك(س)

= ٨٠ س - (٠,٠٠٥ س^{٣} + ٠,٦ س^{٢} + ١١٢ س)

= ٨٠ س - ٠,٠٠٥ س^{٣} - ٠,٦ س^{٢} - ١١٢ س

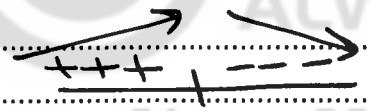
= - ٠,٠٠٥ س^{٣} - ٠,٦ س^{٢} + ٨٠ س

ر'(س) = - ٠,٠١٥ س^{٢} - ١,٢ س + ٨٠ = ٠

٠,٠١٥ س^{٢} + ١,٢ س - ٨٠ = ٠

س = $\frac{-١,٢ \pm \sqrt{١,٤٤ + ٤ \times ٠,٠١٥ \times ٨٠}}{٠,٠٣}$

= ٥٠



مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س٢
اقترن التكلفه الكليه لانتاج
س قطعة من سلعة ما، فإن
التكلفه الحديه لانتاج (٢٠)
قطعة من السلعه نفسها هي

أ) ٤٠ ب) ١٦٠ ج) ١٢٠ د) ٤٦

الحل

التكلفه الحديه = ك'(س)
ك'(س) = ٦س
ك'(٢٠) = ٦×٢٠ = ١٢٠

الاجابه (ج)

وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان ك(س) اقتران التكلفه الكليه، د(س) اقتران الايراد الكلي لمصنع صنع س عدد الوحدات المنتجه اسبوعيا، يكون الربح الاسبوعي اكبر ما يمكن عندما

أ) ر'(س) = ٠
ب) ك'(س) = - د'(س)
ج) د'(س) > صفر
د) ك'(س) = د'(س)

الحل

ر(س) = د(س) - ك(س)
ر'(س) = د'(س) - ك'(س) = ٠
⇐ د'(س) = ك'(س)

(د)

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٩) وزارة (٢٠١٣) شتوية

وحيد مصنع لانتاج اجهزة الكترونية ان التكلفة الكلية بالدينار لانتاج س من الاجهزة اسبوعيًا تحقق بالاقتران ك(س) = ٠,٥ س + ٣٠٠ فاذا بيع الجهاز الواحد بسعر (٢٠٠ - س) دينار ، جد قيمة س التي تجعل الربح الاسبوعي أكبر ما يمكن

الحل

الايراد الكلي = عدد الاجهزة × سعر الجهاز

د(س) = س (٢٠٠ - س)

= ٢٠٠ س - س٢

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

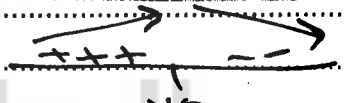
ر(س) = ٢٠٠ س - س٢ - (٠,٥ س + ٣٠٠)

= ٢٠٠ س - س٢ - ٠,٥ س - ٣٠٠

= ١٥٠ س - س٢ - ٣٠٠

ر'(س) = ١٥٠ - ٢ س = ٠

٢ س = ١٥٠ ← س = ١٥٠/٢ = ٧٥



مثال (٢٠) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان اقتران الايراد الكلي طبيعان وينتج عما هو د(س) = ٨٠ س - س٢ واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٦٠ + ٤ س دينارًا حيث س عدد الوحدات التي يجب انتاجها وبيعها لتحصل على أكبر ربح ممكن

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

ر(س) = د(س) - ك(س)

= (٨٠ س - س٢) - (٦٠ + ٤ س)

= ٨٠ س - س٢ - ٦٠ - ٤ س

= ٧٦ س - س٢ - ٦٠

ر'(س) = ٧٦ - ٢ س = ٠

٢ س = ٧٦ ← س = ٧٦/٢ = ٣٨

أكبر ربح محلة س = ٣٨

ACWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٢١) وزارة (٢٠١٤) صيفية

يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (١٠٠) دينارا فاذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لانتاج (س) وحدة من هذه السلعة اسبوعيا تعطى بالعلاقة

ك(س) = ٠٫٣ س٢ + ٦٠ س + ٧٠٠

جد الربح الحدي

الحل

الايراد الكلي = عدد المبيع × سعر السلعة

د(س) = س × ١٠٠ = ١٠٠ س

الربح الكلي = د(س) − ك(س)

= ١٠٠ س − (٠٫٣ س٢ + ٦٠ س + ٧٠٠)

= ١٠٠ س − ٠٫٣ س٢ − ٦٠ س − ٧٠٠

= ٤٠ س − ٠٫٣ س٢ − ٧٠٠

الربح الحدي = ر(س)

= ٤٠ − ٠٫٦ س

مثال (٢٢) وزارة (٢٠١٥) شتوية

اذا كان الايراد الكلي الناتج من بيع (س) قطعة من منتج هو د(س) = ٥ س٢ + ٦ س والكلفة الكلية ك(س) = ٣ س٢ + س + ٥٠ فجد الربح الحدي

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي − التكلفة الكلية

= د(س) − ك(س)

ر(س) = ٥ س٢ + ٦ س − (٣ س٢ + س + ٥٠)

ر(س) = ٥ س٢ + ٦ س − ٣ س٢ − س − ٥٠

= ٢ س٢ + ٥ س − ٥٠

الربح الحدي = ر(س)

= ٤ س + ٥

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مذكرة (٢٠١٥) صيفية

يبيع مصنع الوحده الواحده من سلعه معينه بسعر (١٥٠) جنيها اذا كانت التكلفه الكليه لانتاج (س) وحدة من هذه السلعه تعطى بالعلاقه:

ك(س) = ٠,٠٢ س^{٢} + ٣٠ س + ٢٠٠

فاوجد الربح الحدي.

الحل

الايراد الكلي = عدد السلع × سعر السلعه

= س × ١٥٠

= ١٥٠ س

الربح الكلي = الايراد الكلي − التكلفه الكليه

ر(س) = ١٥٠ س − (٠,٠٢ س^{٢} + ٣٠ س + ٢٠٠)

ر(س) = ١٥٠ س − ٠,٠٢ س^{٢} − ٣٠ س − ٢٠٠

= ١٢٠ س − ٠,٠٢ س^{٢} − ٢٠٠

ر'(س) = ١٢٠ − ٠,٠٤ س

مذكرة (٢٠١٦) شهرية

وجد وصنع لانتاج العاب الاطفال ان التكلفه الكليه لانتاج س لعبه اسبوعيا تعطى بالاقتران

ك'(س) = ٠,٠٦ س + ٠,٠٢ س^{٢} + ٢٠٠ وأن الربح الناتج عن بيع س لعبه هو ٠,٠٢ س^{٢} + ٦٥ س + ٦٥

جد الايراد الحدي

الحل

ر(س) = ٠,٠٢ س^{٢} + ٦٥ س + ٦٥

ك(س) = ٠,٠٦ س + ٠,٠٢ س^{٢} + ٢٠٠

ر(س) = د(س) − ك(س)

د(س) = ر(س) + ك(س)

= ٠,٠٢ س^{٢} + ٦٥ س + ٦٥ + ٠,٠٦ س + ٠,٠٢ س^{٢} + ٢٠٠

د(س) = ٠,٠٤ س^{٢} + ٧٠ س + ٢٦٥

الايراد الحدي = ر'(س)

ر'(س) = ٠,٠٨ س + ٧٠

ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٦) صيفية

يبيع مصنع لوحده الواحده من سلعة معينة بسعر (٦٠) دينارا فاذا كانت التكلفه الكليه لانتاج (س) وحدة من هذه السلعه تعطى بالعلاقه

ك(س) = ٠,٤ س٢ + ١٢ س + ٥٠٠

اوجد الربح الحدي

الحل

ر(س) = عدد الوحدات × سعر الوحده

= س × ٦٠

= ٦٠ س

ر'(س) = ر(س) − ك(س)

= ٦٠ س − (٠,٤ س٢ + ١٢ س + ٥٠٠)

= ٦٠ س − ٠,٤ س٢ − ١٢ س − ٥٠٠

= ٤٨ س − ٠,٤ س٢ − ٥٠٠

ر'(س) = ٤٨ − ٠,٨ س

الربح الحدي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

ينتج مصنع س من اجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٦٠٠ − س) دينارا، واذا كانت التكلفه الكليه لانتاج س من الاجهزه تعطى بالعلاقه ك(س) = ٠,٤ س٢ + ٦٠ س + ٤٠٠ دينارا حيث عدد الاجهزة التي يجب ان ينتجها ويبيعها المصنع شهريا حتى يكون ربحه اكبر ما يمكن

الحل

ر(س) = سعر الجهاز × عدد الاجهزة

= (٦٠٠ − س) × س

= ٦٠٠ س − س٢

ر(س) = ر(س) − ك(س)

= ٦٠٠ س − س٢ − (٠,٤ س٢ + ٦٠ س + ٤٠٠)

ر'(س) = ٦٠٠ − ٢س − ٦٠ − ٠,٨ س = ٠

٥٤٠ − ١,٨ س = ٠

١,٨ س = ٥٤٠

س = ٥٤٠ / ١,٨

−	+	−

٥٠٠ اكبر ما يمكن

س = ٥٠٠

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ١٧س − س² واقتران التكلفه الكليه ك(س) = ٣س² − ٧س + ٢٠ حيث س عدد الوحدات المنتجه من سلعة ما ، جد الربح الحدي

الحل

ر(س) = د(س) − ك(س)

ر(س) = (١٧س − س²) − (٣س² − ٧س + ٢٠)

= ١٧س − س² − ٣س² + ٧س − ٢٠

= ٢٤س − ٤س² − ٢٠

ر'(س) = ٢٤ − ٨س

= الايراد الحدي

وزارة (٢٠١٨) شتوية جديد

اذا كان اقتران التكلفه الكليه لانتاج س قطعة من سلعه ما هو ك(س) = (٥٠ + ٣س²) دينار، جد التكلفه الحديه لانتاج ٣٠ قطعة من هذه السلعه .

الحل

التكلفه الحديه = ك'(س)

ك'(س) = ٦س

ك'(٣٠) = ٣٠ × ٦ = ١٨٠

وزارة (٢٠١٨) شتوية قديم

اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د(س) = (−٥س² + ٦٠س) دينار واقتران الربح الكلي ر(س) = (٢٠س − ٢٠٠) دينار جد اقتران التكلفه الحديه

الحل

ر(س) = د(س) − ك(س)

٢٠س − ٢٠٠ = −٥س² + ٦٠س − ك(س)

⇐ ك(س) = −٥س² + ٦٠س − ٢٠س + ٢٠٠

ك(س) = −٥س² + ٤٠س + ٢٠٠

التكلفه الحديه ك'(س)

ك'(س) = −١٠س + ٤٠

مكتبة الهدى ALWEDAN

المعلم ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٨) صيفية جديد

لتنتج مصنع ثلاجات س ثلاجة اسبوعيًا فاذا كانت تكلفة الانتاج الكلي الاسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة

ك(س) = س^{٢} + ٧٠ س + ٣٥٠٠ وكان سعر الثلاجة (٤٠٠) دينار فما عدد الثلاجات التي يجب انتاجها وبيعها اسبوعيًا للحصول على ربح أكبر ما يمكن

الحل

د(س) = س × سعر الثلاجة

= س × ٤٠٠ = ٤٠٠ س

ر(س) = د(س) − ك(س)

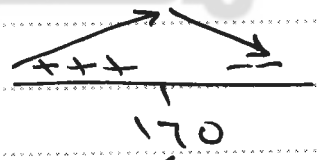
= ٤٠٠ س − (س^{٢} + ٧٠ س + ٣٥٠٠)

= ٤٠٠ س − س^{٢} − ٧٠ س − ٣٥٠٠

= ٣٣٠ س − س^{٢} − ٣٥٠٠

ر'(س) = ٣٣٠ − ٢ س = ٠

$\frac{-٣٣٠}{-٢}$ = س ⇐ س = ١٦٥



س = ١٦٥ للحصول على أكبر ربح ممكن

وزارة (٢٠١٨) صيفية قديم

① اذا كان اقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٢٠ + ٥ س^{٢} دينار، حيث س عدد القطع المنتجة من سلعة ما فان قيمة التكلفة الحدية بالدينار لانتاج (١٠) قطع تساوي

أ) ٥٠ ب) ١٠٠ ج) ١٢٠ د) ٣٠

الحل

ك'(س) = ١٠ س

ك'(١٠) = ١٠ × ١٠ = ١٠٠ ⓑ

② اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٥٠ س − س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣٠ + ٦ س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما فما الربح الكلي

الحل

ر(س) = د(س) − ك(س)

ر(س) = ٥٠ س − س^{٢} − (٣٠ + ٦ س)

ر(س) = ٥٠ س − س^{٢} − ٣٠ − ٦ س

= ٤٤ س − س^{٢} − ٣٠

ر'(س) = ٤٤ − ٢ س

مكتبة الوسام WESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

أسئلة الوحدة

السؤال الأول

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ف(ن) = ن³ - ١٢ن + ٣ ، حيث
ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالامتار
ن الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم
عندما تساوي سرعته ٢٤ م/ث

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن² - ١٢ = ٢٤

$\frac{٦ن^٢}{٦} = \frac{٣٦}{٦}$ ⇐ ن² = ٩

ن = ٣ ، ن = -٣ مرفوض

ت(ن) = ١٢ ن

ت(٣) = ١٢ × ٣ = ٣٦

السؤال الثاني

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ف(ن) = م(ن - ١)² حيث ف
المسافة التي يقطعها الجسيم بالامتار
ن الزمن بالثواني ، اذا كانت سرعة
الجسيم المقطوعة تبدأ ثوانٍ
تساوي ١٢ م/ث جد قيمة الثابت م

الحل

ع(ن) = ف'(ن)
= ٢م (ن - ١)
ع(٤) = ١٢
ع(٤) = ٢م (٤ - ١) = ١٢
١٢ = ٣ × ٢م
$\frac{٦م}{٦} = \frac{١٢}{٦}$ م = ٢

السؤال الثالث وزارة (٢٠١٠) صيفية

الحل في مثال (١٦) ص
امثلة الدرس ص ٩٦
الدعسيه

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع ص١٥٤

اذا كان $ق(س) = س^2(6-س)$
اوجد
أ) فترات التزايد والتناقص
ب) القيم القصوى

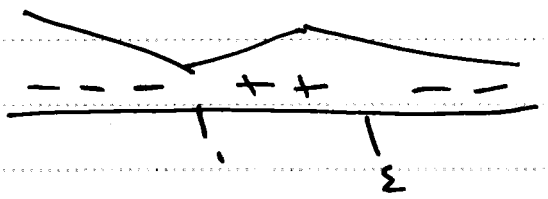
الحل

$ق(س) = 6س^2 - س^3$

$ق'(س) = 12س - 3س^2 = 0$

$3س(4-س) = 0$

$س = 0 \quad س = 4$



فترات التزايد $[0, 4]$

فترات التناقص $(-\infty, 0]$ ، $[4, \infty)$

عند $س = 0$ نقطة صغرى محلية

$ق(0) = 0$

عند $س = 4$ نقطة عظمى محلية

$ق(4) = 32$

السؤال الخامس

لبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار. فاذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لانتاج $س$ وحدة من هذه السلعة اسبوعيا تحقق العلاقة

$ك(س) = 0.3س^2 + 40س + 700$

جد الربح الحدي.

الحل

$د(س) = 100س$

$ر(س) = د(س) - ك(س)$

$= 100س - (0.3س^2 + 40س + 700)$

$ر'(س) = 100 - 0.6س - 40$

$= 60 - 0.6س$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال السادس (محذوف)

السؤال الرابع

اذا كان $ق(س) = س(٣س - ١)^{٢}$ جد معادلة المماس المنحنى $ق$ عندما $س = ١$

الحل

$س = ١ \Leftarrow ص_{١} = ١ \times (٣ \times ١ - ١)^{٢}$

$= ٢٧ = ٤$

النقطة $(١، ٤)$

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق(س) = س(٩س^{٢} - ٦س + ١)$

$= ٩س^{٣} - ٦س^{٢} + س$ ضرب اقواس

$ق'(س) = ٢٧س^{٢} - ١٢س + ١$

$ق'(١) = ٢٧ - ١٢ + ١ = ١٦$

معادلة المماس

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٤ = ١٦(س - ١)$

السؤال الثامن (محذوف)

السؤال السابع

اذا كان $ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢}$ وكان اقتران التكلفه الكليه لانتاج س قطعة من سلعة ما ، فجد التكلفه الحديه لانتاج ٢٠ قطعة من هذه السلعه

الحل

$ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢}$

$ك'(س) =$ التكلفه الحديه $= ٦س$

$ك'(٢٠) = ٢٠ \times ٦ = ١٢٠$

السؤال الحادي

اذا كان $ق(س) = (٣س - ٤)^{٣}$ فجد قيمة س التي تجعل $ق(س) = ٣٦$

الحل

$ق(س) = ٣(٣س - ٤)^{٢} = ٣٦$

$٩(٣س - ٤)^{٢} = ٣٦ \Leftarrow (٣س - ٤)^{٢} = \frac{٣٦}{٩}$

$\Leftarrow (٣س - ٤)^{٢} = ٤$ باخذ الجذر التربيعي

$٣س - ٤ = \pm ٢$

$٣س - ٤ = ٢ \Leftarrow ٣س = ٦ \Leftarrow س = ٢$

$٣س - ٤ = -٢ \Leftarrow ٣س = ٢ \Leftarrow س = \frac{٢}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الحادي عشر

سيكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة اربعة بدائل واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح

① اذا كان الأقتران
$ق(س) = أ س^2 - ١٢ س + ١$ يحقق حرجه
عندما $س = ٣$ ، فان قيمة أ تساوي

الحل

نقطة حرجة عند $س = ٣$
$ق'(٣) =$ صفر
$ق'(س) = ٢ أ س - ١٢$
$ق'(٣) = ٦ أ - ١٢ =$ صفر
$٦ أ = ١٢ \leftarrow أ = \frac{١٢}{٦} = ٢$

الجواب (أ)

② اذا كان ميل المماس للأقتران
$ص = (٢ - س)^٤$ عند النقطة
$(س_١ ، ص_١)$ يساوي ٤ فان قيمة
$س_١$ تساوي

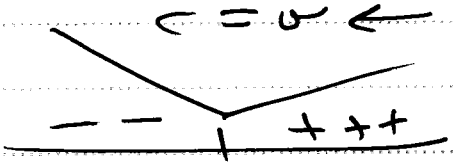
الحل

$ق'(س_١) = ٤$
$ق'(س) = \frac{٤}{٤-} (٢ - س)^{٣} \times -١ = \frac{٤}{٤-}$
$(٢ - س_١) = ١-$ باخذ الجذر التكعيبي
$٢ - س_١ = \sqrt[٣]{١-} = ١-$
$س_١ = ٣- \leftarrow س_١ = ٣$

الجواب (د)

③ اذا كان $ق(س) = س^2 - ٤ س$
فان الأقتران ق له قيمة صغرى عندما
س تساوي

$ق'(س) = ٢ س - ٤ = ٠$
$٢ س = ٤ \leftarrow س = ٢$



عند $س = ٢$ قيمة صغرى

الجواب (ب)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

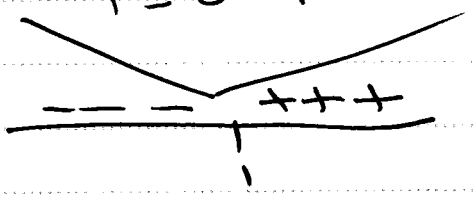
④ متى يكون المقدار $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢$ متزايداً

الحل

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٦س - ٢ = ٠$

$٣س^{٢} - ٦س - ٢ = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} = ٦س + ٢$

$\Leftarrow س = ١$



متزايد $[١، ∞)$

الجواب ⓑ

⑤ يتحرك جسم وفق العلاقة $ف(ن) = ٦ن^{٢} - ن^{٣}$ ، حيث ف المسافة بالامتار التي يقطعها الجسم في زمن قدره ن ثانية المسافة التي يقطعها الجسم بالامتار حتى يصبح ساكناً هي

الحل

$ف'(ن) = ١٢ن - ٣ن^{٢}$

$ع(ن) = ف'(ن) = ١٢ - ٦ن = ٠$

الساكن $= ٠$

$١٢ - ٦ن = ٠$

$١٢ = ٦ن \quad ن = ٢$

لتعويضها في المسافة

$ف(٢) = ٦(٢)^{٢} - ٢^{٣}$

$= ٢٤ - ٨ = ١٦$

الجواب ⓐ

⑥ اذا كان للمقدار $ق(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢}$ قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ فان قيمة الثابت ٢ تساوي

الحل

قيمة صغرى عند $س = ١$

$\Leftarrow س = ١$ تقطع جـ

$ق'(١) = صفر$

$ق'(س) = ٦س^{٢} - ٦س$

$ق'(١) = ٦ - ٦ = ٠$

$\frac{٦}{٣} = \frac{٦أ}{٣} \quad أ = ٢$

الجواب ⓑ

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم ناجح الجمزاوي

الاستاذ ناجح الجمزاوي

الثاني ثانوي الأدبي | الوحدة الثانية | المستوى الثالث

تطبيقات التفاضل

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ | ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

ورقة عمل

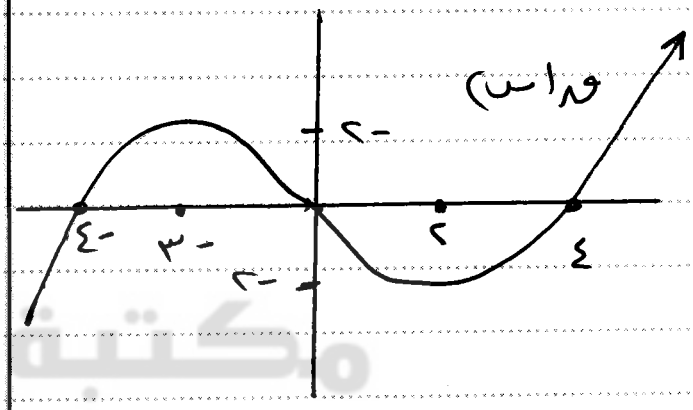
السؤال الأول

(أ) محمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) أوجد

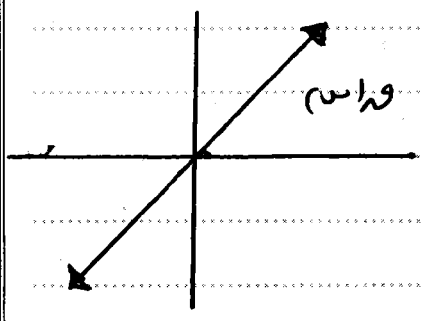
١) مجـ س الدرجة

٢) فترات التزايد والتناقص

٣) القيم القصوى أن وجدت وحدد نوعها.



(ب) محمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) فان ق(س) يكون متزايداً على الفترة



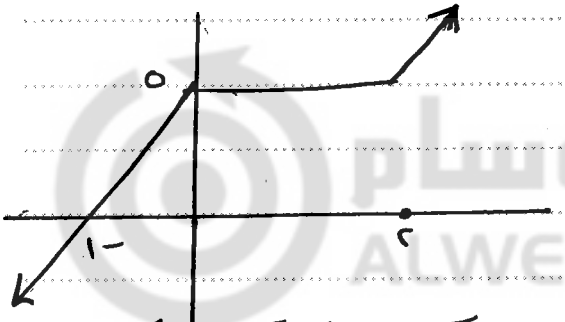
أ) ح

ب) (٠،٥٠]

ج) (-∞،٠]

د) [١،٠]

(ج) محمداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س) فان ق(س) يكون ثابتاً في الفترة



أ) [-١،٥] ب) [٢،٠]

ج) [٥،∞) د) (-∞،٥]

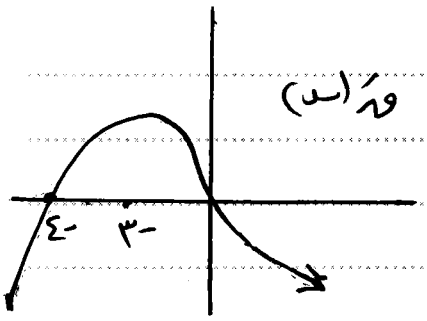
مكتبة الوسام
AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

(ب) معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $q(س)$ اوجد

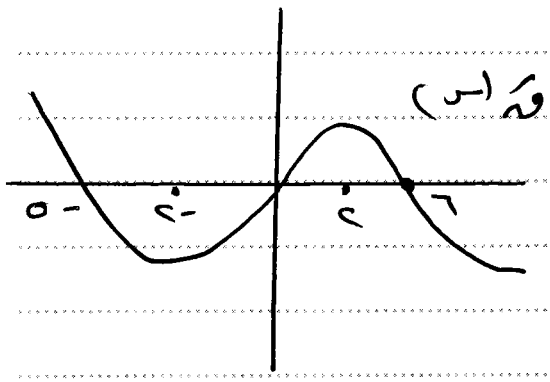
١) قيم س الحرجة

٢) فترات التزايد والتناقص

٣) القيم القصوى



(ج) معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $q(س)$



السؤال الثاني

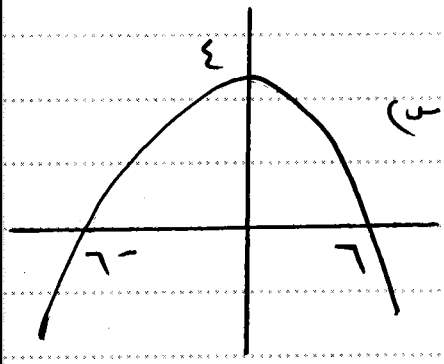
معتمداً على الاشكال التالية التي تمثل منحنيات لدالة الأولى اوجد مايلي

١) قيم س الحرجة

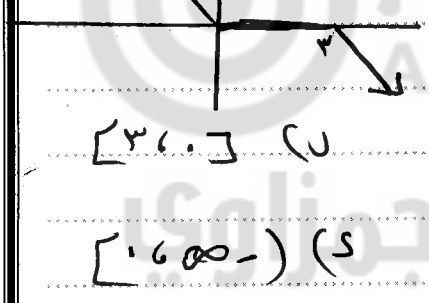
٢) فترات التزايد والتناقص

٣) القيم القصوى إن وجدت

(أ)

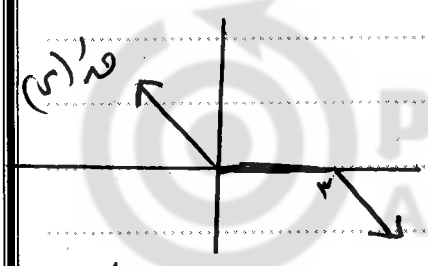


(ب)



السؤال الثالث

(أ) الشكل المجاور يمثل منحنى $q(س)$ فإن $q(س)$ يكون متزايد على الفترة

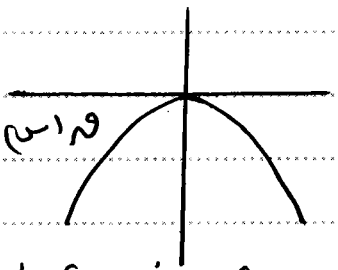


أ) $[٣,٠]$ ب) $(-\infty,٣]$

ج) $[٣,\infty)$ د) $(-\infty,٠]$

مكتبة الوسام
ALWESAM

(ب) الشكل المجاور يمثل منحنى $ه(س)$ ، فإن الاقتران $ه(س)$ له قيمة عظمى عندما $س$ تساوي



أ) ١ ب) ٢ ج) صفر د) -٣

(ج) إذا علمت أن الاقتران $ه(س) = ٨س - ٤س^{٢}$ وكان للاقتران $ه(س)$ نقطة حرجة عندما $س = ٢$ فإن قيمة $أ$ تساوي

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٥ د) ٨

(د) إذا كان $ه(س) = ٣س^{٢} - ١٢س$ وكان للاقتران $ه(س)$ قيمة عظمى عندما $س = ١$ فإن قيمة $أ$ تساوي

أ) ٣ ب) ٢ ج) -٢ د) -٣

(هـ) إذا كان الإيراد الكلي يعظم بالعلاقة $د(س) = ٩٠س - س^{٢}$ فإن الإيراد الكلي عندما $س = ١٠$ يساوي

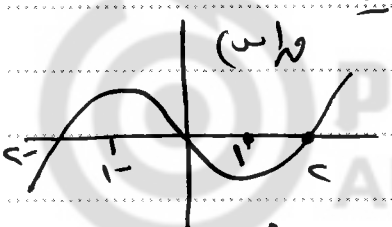
أ) ٨٠ ب) ٧٠ ج) ٢٠ د) ٨٠

(و) إذا كان $ه(٢) =$ صفر وكان $ه(س) > ٠$ لجميع قيم $س < ٢$ وكانت $ه(س) < ٠$ لجميع قيم $س > ٢$ فإن عند $س = ٢$

أ) قيمة عظمى ب) قيمة صغرى

ج) لا يوجد هم قصوى د) لا شيء مما ذكر

(ز) بالاعتماد على الشكل الذي يمثل $ه(س)$ فإن للاقتران $ه(س)$ مماس أفقي عندما $س =$



أ) {٢} ب) {-١، ١}

ج) {-٢، ٢} د) {-٢}

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

جد فترات التزايد والتناقص والنقط الحرجة والقيم القصوى ونوعها (إن وجدت) لكل من الاقترانات التالية

① $ق(س) = ٤س^{٣} - ١٦س + ٩$

② $ق(س) = س^{٤}(س-١)$

③ $ق(س) = ١٦ - ٤س^{٢}$

④ $ق(س) = ٤س - ٢س^{٢}$

⑤ $ق(س) = -٥س + ٣$

⑥ $ق(س) = ٦س + ٤$

⑦ $ق(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٦س + ١$

⑧ $ق(س) = س^{٣} + ٨س + ١٢$

⑨ $ق(س) = س^{٤} + ٢س^{٢} + ١$

⑩ $ق(س) = \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} + ٤س + ٩$

⑪ $ق(س) = س^{٣} - ٣س + ٢$

⑫ $ق(س) = ٨$

السؤال الخامس

⑬ اذا كان

$ق(س) = (س-٤)(س-٣)$

جد فترات التزايد والتناقص والنقط الحرجة والقيم القصوى

⑭ اذا كان $ق(س) = ٦س + ٥$ معرفاً على الفترة $[٦،١]$ جد مايلي

أ) فترات التزايد والتناقص

ب) القيم القصوى

⑮ اذا كان $ق(س) = ٦$ فان $ق(س)$ يكون متزايداً على الفترة

أ) $[١٥٠]$ ب) $[٦٥٠]$

ج) $(-٥٥،٥٥)$ د) $[-٦٥٠]$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

(أ) اذا كان سعر القطعة الواحدة (٥س٣ + س٢) والتكلفه الكليه ك(س) = ٧ س٢ ، اوجد الربح الحدي عندس = ٢

(ب) اذا كان الايراد الكلي د(س) = ٥ س٢ + ٣س والتكلفه الكليه ك(س) = ٨س - ٥ جد الربح الحدي عندس = ٢

(ج) اذا كان الربح الكلي ر(س) = ٥س٢ + ٣س والتكلفه الكليه ك(س) = ٧س - ٣ جد الايراد الحدي عندس = ٢

(د) اذا كان الربح الكلي ر(س) = $\frac{س^3}{3}$ - $\frac{5س^2}{2}$ + ٦س

جد عدد القطع التي تكون الربح أكبر ما يمكن

(هـ) اذا كانت د(س) = ٥٠س - س٢ هو اقتران الايراد الكلي الناتج عن بيع س وحدة من منتج ما ك(س) = ١٠س هو اقتران التكلفه الكليه لهذا المنتج اوجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

(و) عضو البيت اذا كان اقتران التكلفه الكليه ك(س) = ١٠س واقتران الايراد الكلي د(س) = ٥٠س - س٢ الناتج عن بيع س وحدة اوجد ما يلي

(١) التكلفه الحديه

(٢) الربح الكلي

(٣) الربح الحدي

(ز) اذا كانت التكلفه الكليه لانتاج س قطعه من وضع ما تعطى بالعلاقه ك(س) = ٢٠٠٠ - ٤٠٠س + س٢ جد عدد القطع الواجب انتاجها للحصول على أقل تكلفه ممكنه

مكتبة الهندسة ناجح الجمزاوي

الاجابة النموذجية

السؤال الأول

(أ)

١) قيم س الحرجة $\{-٣، ٢\}$

٢) متزايد $(-\infty، -٣]$
$[٢، \infty)$
متناقص $[-٣، ٢]$

٣) عند $س = -٣$ قيمة عظمى محلية
$(-٣، -٢)$
عند $س = ٢$ قيمة صغرى محلية
$(٢، -٢)$

(ب) متزايد على $(-\infty، \infty) = ح$
(أ)

(ج) ثابت في الفترة
(ب) $[٠، ٢]$

(د)

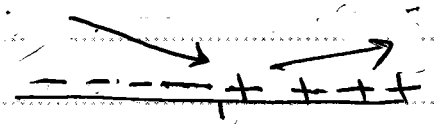
١) قيم س الحرجة $س = ٠$

٢) متزايد $(-\infty، ٠]$
متناقص $[٠، \infty)$

٣) $(٠، ٤)$ قيمة عظمى محلية

السؤال الثاني

(أ)



١) قيم س الحرجة $س = ٠$

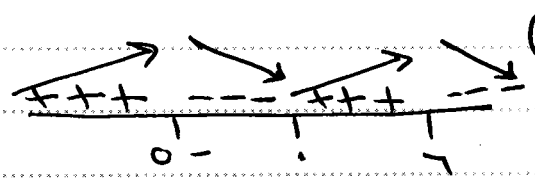
٢) متزايد $(٠، \infty]$

٣) عند $س = ٠$ قيمة صغرى

(ب)

١) قيم س الحرجة $س = ٠، -٤$

٢) متزايد $[-٤، ٠]$
متناقص $(-\infty، -٤] \cup [٠، \infty)$
عند $س = -٤$ قيمة صغرى محلية
$س = ٠$ قيمة عظمى محلية

ⓐ 

١) قيم س الحرجة $\{-٥، ٠، ٦\}$

٢) متزايد $(-\infty، -٥] \cup [٠، ٦]$

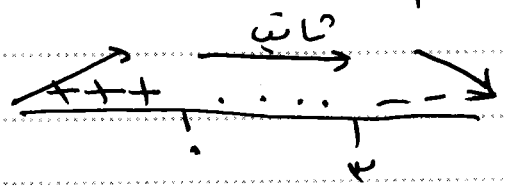
متناقص $[-٥، ٠] \cup [٦، \infty)$

٣) عند $س = -٥$ قيمة عظمى محلية

عند $س = ٠$ قيمة صغرى محلية

عند $س = ٦$ قيمة عظمى محلية

السؤال الثالث

ⓐ 

متزايد $(-\infty، ٢]$ ⓑ

ⓑ عند $س = ٠$ قيمة عظمى المحلية

الاجابة ⓐ

ⓐ $ق'(س) = ٨س^٢ - ٨$

$ق'(ج) =$ صفر نقطة حرجة

$٨ج^٢ - ٨ = ٠$

$٨ج^٢ = ٨ \leftarrow ج^٢ = \frac{٨}{٨} = ١$

الاجابة ⓐ

ⓑ $ق'(س) = ٦س^٢ - ١٢$

$ق'(١) =$ صفر قيمة عظمى

$٦ - ١٢ = ٦ \times ١^٢ - ١٢ \leftarrow ٠ = ٦ - ١٢$

$٦ = ١٢ \leftarrow ٦ج^٢ = ١٢ \leftarrow ج^٢ = \frac{١٢}{٦} = ٢$

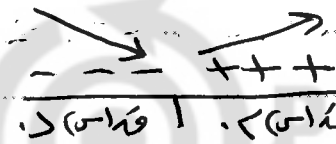
الاجابة ⓑ

ⓒ الايراد الحدي $د'(س)$

$د(س) = ٩٠س - س^٢$

$د'(١٠) = ٩٠ - ٢ \times ١٠ = ٩٠ - ٢٠ = ٧٠$

الاجابة ⓑ

ⓓ 

$\Leftarrow$

عند $س = ٢$ قيمة صغرى محلية

الاجابة ⓑ

تابع ←

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

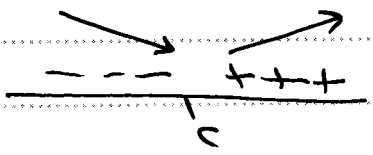
فرع (ل) السؤال الثالث

① يكون للأمتار محاس اقصر عند القيم العظمى والنقط الحرجة
س = -١ ، س = ١

الاجابة ① {-١، ١}

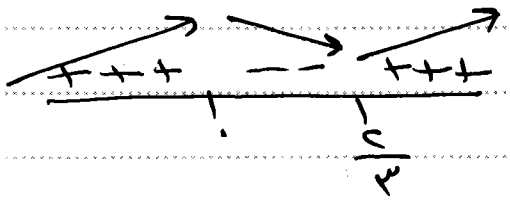
السؤال الرابع

①
ق'(س) = ٨س - ١٦ = ٠
٨س = ١٦ ← س = ٢



النقطة الحرجة (٢، ق(٢))
= (٢، -٧)
قيمة ق [٢، ∞)
متناقص (-∞، ٢]
عند س = ٢ قيمة صغرى محلية
وهي -٧
(٢، -٧)

② ق(س) = س^٢ (س - ١)
= س^٣ - س^٢
ق'(س) = ٣س^٢ - ٢س
اخراج س عامل مشترك
س (٣س - ٢) = ٠
س = ٠ ← ٣س - ٢ = ٠
س = ٠ ، س = ٢/٣



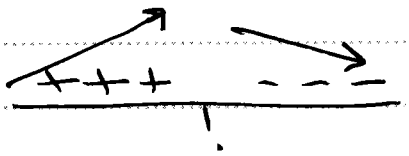
النقطة الحرجة (٠، ٠)
(٢/٣، -٤/٢٧)
متناقص [٠، ٢/٣]
متزايد (-∞، ٠] ∪ [٢/٣، ∞)
عند س = ٠ قيمة عظمى محلية وهي
ق(٠) = ٠
عند س = ٢/٣ قيمة صغرى محلية
وهي -٤/٢٧

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

③ $ق(س) = ١٦ - ٤س^{٢}$

$ق'(س) = -٨س = ٠$

$س = ٠$



$س = ٠$ فيه حرجة $(٠، ١٦)$

متزايد $(-\infty، ٠]$

متناقص $[٠، \infty)$

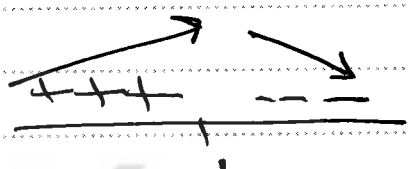
عند $س = ٠$ فيه عظمى ومقدارها

$ق(٠) = ١٦$

④ $ق(س) = ٤س - ٤س^{٢}$

$ق'(س) = ٤ - ٨س = ٠$

$٤ = ٨س \leftarrow س = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$



عند $س = ١$ نقطة حرجة $(١، ٢)$

متزايد $(-\infty، ١]$

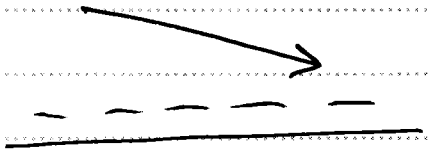
متناقص $[١، \infty)$

عند $س = ١$ فيه عظمى محلية

وقيمتها $ق(١) = ٢$

⑤ $ق(س) = -٥س + ٣$

$ق'(س) = -٥$



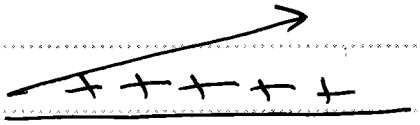
لا يوجد نقط حرجة

متناقص على ح

لا يوجد قيم قصوى

⑥ $ق(س) = ٦س + ٤$

$ق'(س) = ٦$



لا يوجد نقط حرجة

متزايد على ح

لا يوجد قيم قصوى

مكتبة الوسام ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

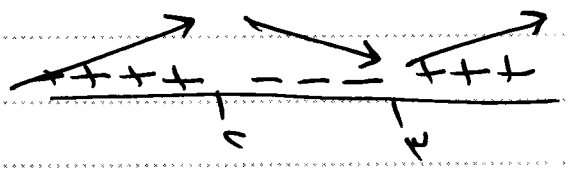
⑦ $ق(س) = \frac{س^3}{3} - \frac{5س^2}{2} + 6س + 1$

$ق'(س) = \frac{3س^2}{3} - \frac{10س}{2} + 6$

$= س^2 - 5س + 6 = 0$

$(س - 3)(س - 2) = 0$

$س = 3$ ، $س = 2$



ق تتناقص على $[2, 3]$

ق تتزايد على $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

عند $س = 2$ يكون $ق$ أكبر ما يمكن

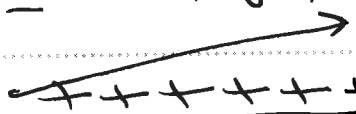
$ق(2) = \frac{11}{3}$

عند $س = 3$ يكون $ق$ أصغر ما يمكن

$ق(3) = \frac{11}{2}$

⑧ $ق(س) = س^3 + 6س + 12$

$ق'(س) = 3س^2 + 6$ لكل $س$



لا يوجد نقط حرجة

$ق$ تتزايد على $ح$ / لا يوجد قيم قصوى

⑨ $ق(س) = س^4 + 3س^2 + 1$

$ق'(س) = 4س^3 + 3س = 0$

$4س(س^2 + 3) = 0$

$4س(س + ت\sqrt{3})(س - ت\sqrt{3}) = 0$

$س + ت\sqrt{3} = 0 \leftarrow س = -ت\sqrt{3}$

عند $س = 0$ نقطة حرجة $(0, 1)$

$ق$ تتزايد $[0, \infty)$

$ق$ تتناقص $(-\infty, 0]$

عند $س = 0$ يكون $ق$ أصغر ما يمكن محلية

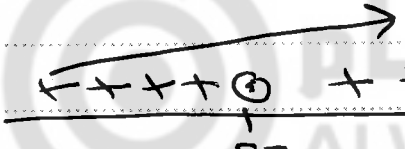
وقيمتها $ق(0) = 1$

⑩ $ق(س) = \frac{س^3}{3} + 2س^2 + 4س + 9$

$ق'(س) = س^2 + 4س + 4 = 0$

$(س + 2)(س + 2) = 0$

$س + 2 = 0 \leftarrow س = -2$



$ق$ تتزايد على $ح$

لا يوجد قيم قصوى

عند $س = -2$ نقطة حرجة

مؤسسة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

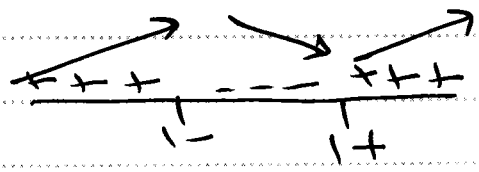
(١١) $ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ٤$

$ق'(س) = ٣س^2 - ٦س = ٠$

$٣س(س - ٢) = ٠$

$٣(س)(س - ٢) = ٠$

$س = ٠ \leftarrow$ أو $س = ٢$



عند $س = ٠$ يوجد عظمى محلية

$(٠، ق(٠)) = (٠، ٤)$

متزايدة $[٠، ٢]$

متناقصة $(-\infty، ٠] \cup [٢، \infty)$

عند $س = ٢$ يوجد صغرى محلية

وقيمتها $ق(٢) = ٠$

(١٢) $ق(س) = ٨$

$ق'(س) = ٠$

يوجد حرج لأن كامل

نقط حرج $= ح$

$ق(س)$ ثابتة على $(-\infty، \infty)$

السؤال الخامس

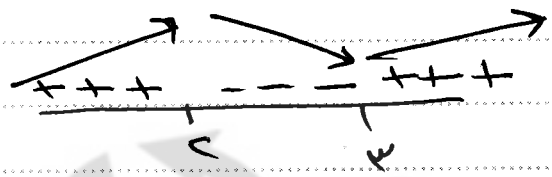
(أ) $ق(س) = (س - ٣)(س - ٤)^2$

$ق'(س) = (س - ٤)^2 + 2(س - ٣)(س - ٤) = ٠$

$(س - ٤)(س - ٤ + ٢س - ٦) = ٠$

$(س - ٤)(٣س - ١٠) = ٠$

$س = ٤$ أو $س = \frac{١٠}{٣}$



يوجد حرج $\{٣، ٤\}$

متزايدة $(-\infty، ٣] \cup [٤، \infty)$

متناقصة $[٣، ٤]$

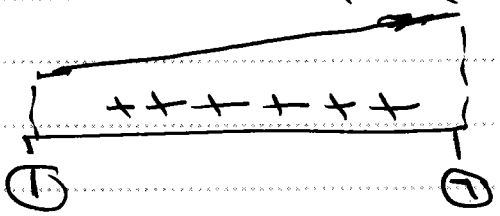
عند $س = ٤$ يوجد عظمى محلية

$س = ٣$ يوجد صغرى محلية

المعلم ناجح الجمزاوي

(١) $ق'(س) = ٦س + ٥$

$ق'(س) = ٦$



فترات $[٦ ، ١]$

عند $س = ١$ قيمة صغرى

عند $س = ٦$ قيمة عظمى

---

(٢) $ق'(س) = ٦$

+ + +

فترات $ق$ تزايد $= [٠ ، ٥٦]$

الاجابة (ج)

السؤال السادس

(أ) $د(س) = س \times (٥س^٣ + س^٤)$

$= ٥س^٤ + س^٣$

$ك'(س) = ٧س^٢$

$ر(س) = د(س) - ك'(س)$

$= ٥س^٤ + س^٣ - ٧س^٢$

$ر'(س) = ٢٠س^٣ + ٣س^٢ - ١٤س$

$ر'(٢) = ٢٠(٢)^٣ + ٣(٢)^٢ - ١٤ \times ٢$

$= ١٦٠ + ١٢ - ٢٨$

$= ١٤٤$

(ب) $ر(س) = د(س) - ك'(س)$

$= ٥س^٢ + ٣س - (٢٨ - ٥)$

$= ٥س^٢ + ٣س - ٢٨ + ٥$

$= ٥س^٢ - ٣س - ٢٥ + ٥$

$ر'(س) = ١٠س - ٥$

$ر'(٢) = ٢٠ - ٥ = ١٥$ ا وتزايد

(ج) $ر(س) = د(س) - ك'(س)$

$٥س^٢ + ٣س = د(س) - (٣س^٢ - ٧س + ٣)$

$د(س) = ٥س^٢ + ٣س^٢ - ٧س + ٣$

$= ٥س^٢ + ٣س^٢ - ١٠س + ٣$

$ك'(س) = ١٠س + ١٠$

$ك'(٢) = ٢٠ + ١٠$

$= ٣٠$

مكتبة الوسام AlWesam
العلم / ناجح الجمزاوي

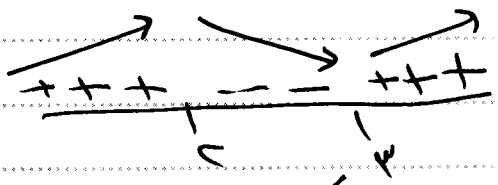
(٤)

$ر(س) = \frac{س^٣}{٣} - \frac{٥س^٢}{٢} + ٦س$

$ر'(س) = س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = ٣ ، س = ٢$



عند $س = ٢$ أكبر رج

(٥)

$د(س) = ٥٠س - س^٢$

$أ(س) = ١٠س$

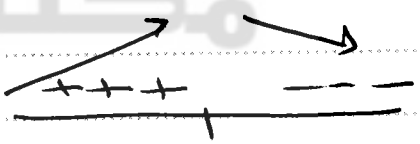
$ر(س) = د(س) - أ(س)$

$= ٥٠س - س^٢ - ١٠س$

$= ٤٠س - س^٢$

$ر'(س) = ٤٠ - ٢س = ٠$

$٢س = ٤٠ \leftarrow س = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠$



عند $س = ٢٠$ أكبر ربح ممكنة

(٦)

$أ(س) = ١٠س$

$د(س) = ٥٠س - س^٢$

① التكلفه الحديه

$أ(س) = ١٠$

② الربح الكلي $= د(س) - أ(س)$

$ر(س) = ٥٠س - س^٢ - ١٠س$

$= ٤٠س - س^٢$

③ الربح الحدي $= ر'(س) = ٤٠ - ٢س$

(٧)

$أ(س) = ١٠٠س$

$د(س) = ٥٠٠س - س^٢$

① التكلفه الحديه

$أ(س) = ١٠٠$

② الربح الكلي $= د(س) - أ(س)$

$ر(س) = ٥٠٠س - س^٢ - ١٠٠س$

$= ٤٠٠س - س^٢$

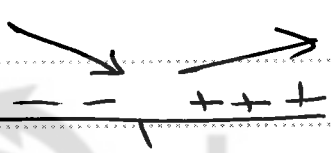
③ الربح الحدي $= ر'(س) = ٤٠٠ - ٢س$

$أ(س) = ١٠٠ + ٤٠٠س - س^٢$

$أ'(س) = ٤٠٠ - ٢س = ٠$

$٢س = ٤٠٠$

$\leftarrow س = \frac{٤٠٠}{٢} = ٢٠٠$



أقل تكلفه عند $س = ٢٠٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
الهندسي ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

امنياتي بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي