الصف الثاني عشر

الفرعين العلمي والصناعي

الوحدة الثاثة

تطبيقات التفاضل

١- تطبيقات هندسية

٢- تطبيقات فيزيائية

٣- المعدلات المرتبطة بالزمن

٤- النقط الحرجة

٥- التزايد والتناقص

٦- القيم القصوى

٧- التقعر

٨- تطبيقات القيم القصوى

٩-اسئلة الوحدة وحلولها

١٠- حلول جميع تدريبات واسئلة الكتاب

١١- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨- ٢٠١٧) مع الحلول النموذجية

١٢- ورقة عمل على كل درس مع الحلول النموذجية

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

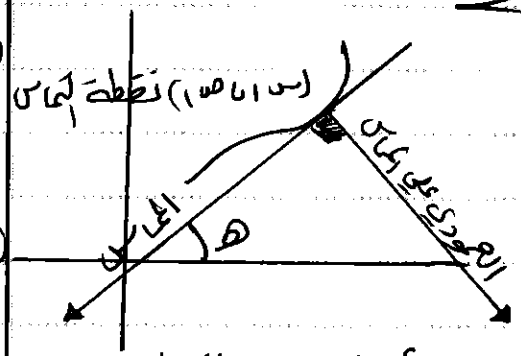
٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تطبيقات هندسية

التفسير الهندسي للمشتقة



تفسر المشتقة الأولى عند النقطة (س١ ، ص١) على انها ميل المماس لمنحنى ق(س) عند تلك النقطة

اي أن المماس هو الخط المستقيم الذي يمس أو يقطع منحنى ق(س) في نقطة تسمى نقطة التماس (س١ ، ص١)

ميل المماس = ميل المنحنى = ق'(س١)
= ظا هـ

حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات الموجب (الاتجاه الموجب)

ميل المماس عند (س١ ، ص١) = م = ق'(س١)

معادلة المماس عند نقطة التماس (س١ ، ص١)

ص - ص١ = م (س - س١)

معادلة العمودي على المماس عند (س١ ، ص١)

ص - ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س - س١)

ملاحظات هامة

① ميل المستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) يساوي م = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$

② اذا توازى مستقيمان فان ميلهما متساوي م١ = م٢

③ اذا تعامد مستقيمان فان
م١ × م٢ = -١
م١ = $\frac{-١}{م٢}$

④ المستقيم الذي يوازي محور السينات يسمى مستقيم افقي ويكون ميله يساوي صفر (المشتقة = صفر)

⑤ ميل المستقيم على الصورة ص = م س + ن
يساوي م = معامل س

⑥ ميل المستقيم الذي على الصورة
م س + ن ص + د = ٠
يساوي = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-م}{ن}$

⑦ المستقيم الذي يوازي محور الصادات ميله غير معروف = ظا٩٠°
← ينتج

⑨ لايجاد نقطه تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ق(س) = ٠ أو ص = ٠.

لايجاد نقطه تقاطع الأقتران مع محور الصادات نضع س = ٠.

لايجاد نقطه (نقط) التقاطع بين اقترانين نساويهما معًا ق(س) = هـ(س)

لايجاد تقاطع علاقتين ضمنيتين نعوض احداهما في الأخرى

مثال
جد نقط التقاطع بين العلاقتين
$س^2 - ص^2 = 9$ ، $س + ص = 3$

الحل
$س + ص = 3 \leftarrow ص = 3 - س$
نعوضها في الأولى
$س^2 - (3-س)^2 = 9$
$س^2 - (9 - 6س + س^2) = 9$
$س^2 - 9 + 6س - س^2 = 9$
$6س = 18 \Leftarrow س = 3$
$ص = 3 - 3 = ٠$
النقطه (٣، ٠)

أولاً
ايجاد معادلة المماس والعمودي اذا علمت نقطة التماس

لأيجاد معادلة المماس يلزم النقطة (نقطة التماس (س١، ص١)) والميل، واذا علمت س١ فانستطيع ايجاد ص١ بتعويض س١ في ق(س)

مثال ①
اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الأقتران ق(س) = $س^2 + 3$ عند النقطة (١، ٣٠).

الحل
(س١، ص١) = (١، ٣٠) نقطة التماس
الميل = ق'(س١) = ق'(١)
ق'(س) = ٢س ⇐ ق'(١) = صفر

معادلة المماس هي
$ص - ص_1 = م (س - س_1)$
$ص - 3 = 0 (س - 1)$
$ص - 3 = ٠$
$\Leftarrow ص = 3$

معادلة العمودي — ضد ب
$ص - 3 = \frac{-1}{0} (س - 1)$ بما ان
$س = ٠$ محور الصادات

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال ②

اوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى $ه(س) = \frac{٤س}{٤س - ١}$ عند $س = ١$

الحل

$س_١ = ١$ نجد $ص_١ = ه(س_١) = ه(١)$

$= \frac{٤}{٤-١} = ٤$

نقطة التماس هي $(١، ٤)$

ميل المماس $= ه'(١)$

$ه'(س) = \frac{(٤س - ١)(٤) - ٤س(٤)}{(٤س - ١)^٢}$

$ه'(١) = \frac{(٣)(٤) - ٤(٤)}{(٣)^٢} = \frac{-٤}{٩}$

معادلة المماس هي

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٤ = -\frac{٤}{٩}(س - ١)$

$٩ص - ٣٦ = -٤س + ٤$

$٩ص = -٤س + ٤٠$

معادلة العمودي هي

$ص - ص_١ = \frac{-١}{\text{ميل المماس}}(س - س_١)$

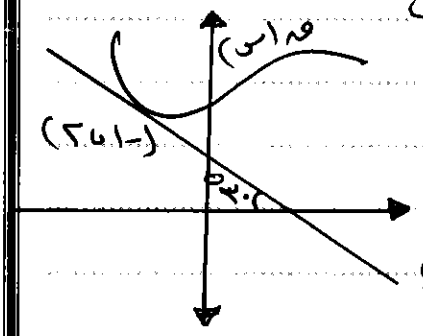
$ص - ٤ = \frac{-١}{-\frac{٤}{٩}}(س - ١)$

$ص - ٤ = \frac{٩}{٤}(س - ١)$

$ص = \frac{٩}{٤}س - \frac{٩}{٤} + ٤ = \frac{٩}{٤}س + \frac{٧}{٤}$

مثال ③

بالاعتماد على الشكل المجاور جد معادلة المماس



الحل

نقطة التماس هي $(-١، ٢)$

ميل المماس $= ظا(١٨٠ - ٣٠) = ظا ١٥٠°$

$= -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (لا يحاط بموجب)

معادلة المماس هي

$ص - ٢ = -\frac{١}{\sqrt{٣}}(س + ١)$

مثال ④

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة

$٧ص^٢ - س^٣ص + س + ٥٣ = ص$ عند النقطة $(١، ٤)$ ؟

الحل

نقطة التماس $(س_١، ص_١) = (١، ٤)$

نشتقه ضمنياً

$١٤ص ص' - (س^٣ \times ص' + ص \times ٣س^٢) + ١ = ٠$

نعوض النقطة $(١، ٤)$ لإيجاد $ص'$

$١٤ \times ٤ ص' - (١ ص' + ٤ \times ٣) + ١ = ٠$

$٥٦ ص' - ص' - ١٢ + ١ = ٠$

$٥٥ ص' - ١١ = ٠ \leftarrow ص' = \frac{١١}{٥٥}$

يتبع الحل

ميل المماس = $-\frac{٤٧}{٥٠}$ ، ميل العمودي = $\frac{٥٠}{٤٧}$

معادلة المماس

$ص - ١ = -\frac{٤٧}{٥٠}(س - ٤)$

معادلة العمودي

$ص - ١ = \frac{٥٠}{٤٧}(س - ٤)$

مثال ⑤

أثبت ان المماس لمنحنى الاقتران $و(س) = س^{٢}$ عند النقطة $(ب، ب^{٢})$ يقطع محور الصادات عند النقطة $(٠، \frac{ب}{٢})$

الحل

نجد معادلة المماس.

$و'(س) = ٢س \Leftarrow$ ميل المماس $= و'(ب)$

$= ٢ب$

نقطة المماس هي $(ب، ب^{٢})$

معادلة المماس هي

$ص - ب^{٢} = ٢ب(س - ب)$

ولايجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع $س = ٠$

$ص - ب^{٢} = ٢ب(٠ - ب)$

$ص - ب^{٢} = -٢ب^{٢}$

$ص = -٢ب^{٢} + ب^{٢} = -ب^{٢}$

$س = \frac{ب^{٢}}{٢ب} = \frac{١}{٢}ب$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي $(٠، \frac{ب}{٢})$

مثال ⑥

اوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $م(س)$ اذا كان $م = ٣ع^{٢} - ٥ع + ٧$

$ع = ٢س + ١$ عند $س =$ صفر

الحل

$س = ٠ \Leftarrow م(١) =$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ع = ١$

وعندما $ع = ١$ فان $م = ٣(١)^{٢} - ٥(١) + ٧$

$= ٥$

نقطة المماس هي $(٠، ٥)$

ميل المماس : نستخدم قاعدة السلسلة

$\frac{دم}{دس} = \frac{دم}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= (٦ع - ٥) \times ٢$

$\left|\frac{دم}{دس}\right| = (٦ \times ١ - ٥) \times ٢ = ٢$

$ع = ١$

معادلة المماس هي

$ص - ٥ = ٢(س - ٠)$

$ص - ٥ = ٢س$

$ص = ٢س + ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
للعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

اوجد معادلة المماس و العمودي لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٢}{١ + جتا س}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

عندما $س = \frac{\pi}{٢}$ فان $ق(\frac{\pi}{٢}) = \frac{٢}{١ + جتا \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{٢}{١ + ٠} = \frac{٢}{١} = ٢$

نقطة المماس $(\frac{\pi}{٢}, ٢)$

ميل المماس $= ق'(\frac{\pi}{٢})$

$ق'(س) = \frac{-٢ \times -جا س}{(١ + جتا س)^{٢}}$

$ق'(\frac{\pi}{٢}) = \frac{٢ \times جا \frac{\pi}{٢}}{(١ + جتا \frac{\pi}{٢})^{٢}} = \frac{٢ \times ١}{(١ + ٠)^{٢}}$

$= ٢$

معادلة المماس

$ص - ٢ = ٢ (س - \frac{\pi}{٢})$

معادلة العمودي

$ص - ٢ = -\frac{١}{٢} (س - \frac{\pi}{٢})$

مثال (٨)

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $س ص^{٢} = جا (س + ص)$ عند النقطة $(٠, ٠)$.

الحل

نقطة المماس $(٠, ٠)$

نشتق

$س \times ٢ ص ص' + ص^{٢} \times ١ = جتا (س + ص) (١ + ص')$

نعوض $(٠, ٠)$

$٠ \times ٢ \times ٠ ص' + ٠^{٢} \times ١ = جتا ٠ \times (١ + ص')$

$ص' = ١ \times (١ + ص')$

$\Leftarrow ص' = -١$

معادلة المماس $ص - ٠ = -١ (س - ٠)$

مثال (٩)

اوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $ص^{٢} + (س - ص)^{٣} = ٩$ عند النقطة $(س_١, ٠, -١)$ التي تقع على منحنى العلاقة

الحل

نعوض $(س_١, ٠, -١)$ في العلاقة

$(-١)^{٢} + (س_١ + ١)^{٣} = ٩$

$\Leftarrow (س_١ + ١)^{٣} = ٩ - ١ = ٨$ اخذ للطرفين

$س_١ + ١ = ٢ \Leftarrow س_١ = ١$

نقطة المماس هي $(١, ٠, -١)$

نجد الميل بالاشتقاق ضمنياً

$٢ ص ص' + ٣ (س - ص)^{٢} (١ - ص') = ٠$

نعوض النقطة $(١, ٠, -١)$ يتبع الحل

$-٢ص^{٢}-١٢ص+٣(١+ص)^{٤}(١-ص)=٠$

$-٢ص^{٢}+١٢(١-ص)=٠$

$-٢ص^{٢}+١٢-١٢ص=٠$

$-١٤ص=-١٢ \Leftarrow ص=\frac{١٢}{١٤}=\frac{٦}{٧}$

معادلة المماس هي

$ص+١=\frac{٦}{٧}(س-١)$

مثال (١٠)

اذا كانت $ص=٣س-٥$ هي معادلة التحودي عند النقطة $(٢،ق(٢))$ اوجد هنا $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ عند $س=٢$

$\Delta س \to ٠$

الحل

بما ان $ص=٣س-٥$ هي معادلة التحودي ميل التحودي $=٣$ (مقدار ثابت)

$\Leftarrow$ ميل المماس $=-\frac{١}{٣}$ عند النقطة $(٢،ق(٢))$

وعليه فان $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ عند $\Delta س \to ٠$

$=-\frac{١}{٣}$

مثال (١١)

اذا كان $هـ(٢)=٥$ ، $قـ(٥)=-٤$

$(قـ \circ هـ)(٢)=٨$ فاوجد معادلة المماس لمنحنى $هـ(س)$ عند $س=٢$

الحل

نقطة المماس هي $(٢،هـ(٢))$

$=(٢،٥)$

ميل المماس $=هـ'(٢)$

$(قـ \circ هـ)'(٢)=قـ'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$٨=قـ'(٥) \times هـ'(٢)$

$٨=-٤ \times هـ'(٢)$

$\Leftarrow هـ'(٢)=\frac{٨}{-٤}=-٢$

معادلة المماس هي

$ص-٥=-٢(س-٢)$

ملاحظة

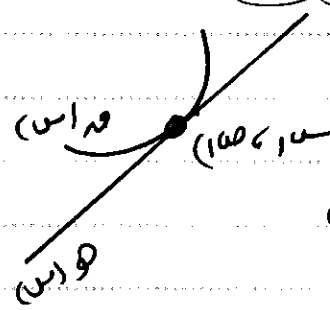
ميل الخط المستقيم

$أ س+ب ص+جـ=صفر$

يساوي $=\frac{-أ}{ب}=-\frac{\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظه هامة جداً



عند نقطة إلتماس
(س١، ص١)
يتحقق شرطان
① ه(س١) = هـ(س١)
② ه'(س١) = هـ'(س١)
أي أن
الصورة = الصورة
المشتقة = المشتقة

مثال (١٢)
اوجد قيمة الثابت جـ في الأقتران
ه(س) = س٢ + جـ والذي يجعل
المستقيم ص = ٤س مماساً له

الحل
عند نقطة إلتماس ه(س١) = صـ
س١٢ = ٤ ⇐ س١ = ٢
ه(٢) = صـ(٢)
٤ + جـ = ٤ × ٢
٤ + جـ = ٨ ⇐ جـ = ٤
نلاحظ المشتقة = المشتقة
الصورة = الصورة

مثال (١٣)
اذا كان صـ = س٢ + ٣ يمس
الأقتران ه(س) = ب س٢ + ب س + ١٠
عند س = ١ فاوجد قيمة ب ، ب ؟

الحل
عند س = ١
① الصورة = الصورة
ه(١) = صـ(١)
ب(١)٢ + ب(١) + ١٠ = ٢(١) + ٣
ب + ب + ١٠ = ٥
ب + ب = -٥ ---- ①
② المشتقة = المشتقة
ه'(١) = صـ'(١)
ه'(س) = ٢ب س + ب
صـ' = ٢
٢ب(١) + ب = ٢
ب + ب = ٢ ---- ②
نحل المعادلتين
ب + ب = -٥ بالطرح
ب + ب = ٢
-ب = -٧ ⇐ ب = ٧
نعوض ب = ٧ في المعادلة ①
٧ + ب = -٥
ب = -١٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)
جد قيمة الثابت جـ الذي يجعل المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠) ، (-٣، ٥) مماساً لمنحنى الأقتران
$$ق(س) = \frac{جـ}{س + ١}$$

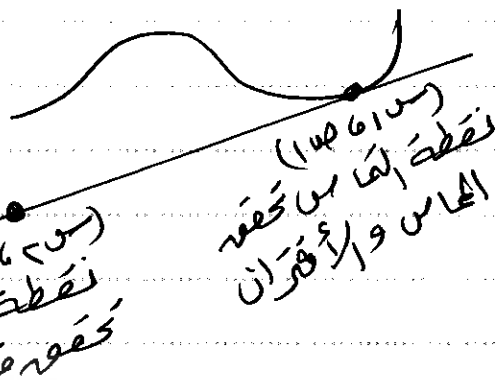
الحل
ميل المماس $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٠}{-٣ - ٢} = -١$

معادلة المماس هي
$ص - ٠ = -١(س - ٢)$
$ص = -س + ٢$
عند نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$
① $ق(س_١) = ص(س_١)$
$$\frac{جـ}{س_١ + ١} = -س_١ + ٢$$
$$\Leftarrow جـ = (-س_١ + ٢)(س_١ + ١) \quad ---①$$
② $ق'(س_١) = ص'(س_١)$
$$\frac{-جـ}{(س_١ + ١)^٢} = -١$$
$$\Leftarrow جـ = (س_١ + ١)^٢ \quad ---②$$
من ① ، ②
$(س_١ + ١)^٢ = (-س_١ + ٢)(س_١ + ١)$
بالقسمة على $س_١ + ١$
$س_١ + ١ = -س_١ + ٢$
$٢س_١ = ١ \Leftarrow س_١ = \frac{١}{٢}$
بالتعويض في ②
$جـ = (\frac{١}{٢} + ١)^٢ = (\frac{٣}{٢})^٢ = \frac{٩}{٤}$

ثانياً
معادلة المماس والعمودي اذا كانت نقطة التماس مجهولة

لأيجاد نقطة التماس
① نجد ميل المماس
② نجد $ق'(س)$
③ نضع $ق'(س_١)$ = ميل المماس
ومنها نجد $س_١$ ، نعوضها في قاعدة الأقتران لايجاد $ص_١$

ملاحظة هامة



في حالة النقطة الخارجية
كالنقطة $(س_٢ ، ص_٢)$ فهي لا تحقق منحنى الأقتران $ق(س)$ لكنها تحقق معادلة المماس فقط
$\Leftarrow$ ميل المماس = المشتقة
أي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = ق'(س_١)$

مثال ①

جد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الأقتران $f(س) = س^2 - 3س + 1$ حيث ان المماس يصنع زاوية مقدارها $45°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

ميل المماس $= f'(س_1) = ظا\theta$

$2س_1 - 3 = ظا45 = 1$

$2س_1 = 4 \longleftarrow س_1 = 2$

نعوضها في $f(س)$ لايجاد $ص_1$

$f(2) = 2^2 - 3\times2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$

نقطة التماس هي $(2, -1)$

ميل المماس $= 1$

معادلة المماس: $ص + 1 = 1(س - 2)$

معادلة العمودي: $ص + 1 = -1(س - 2)$

مثال ②

اذا رسم من النقطة $(0, -2)$ مماسان لمنحنى $f(س) = س^2 + 2$ فجد معادلات المماس لمنحنى $f(س)$

الحل

نفرض ان نقطة التماس هي $(س_1, ص_1)$

ميل المماس $= f'(س_1)$

$\frac{ص_1 + 2}{س_1 - 0} = 2س_1$ ← ①

ولكن النقطة $(س_1, ص_1)$ تقع على منحنى $f(س)$ ← تحقق معادلته

$ص_1 = س_1^2 + 2$ ← ②

نعوض $ص_1$ في معادلة ①

$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{س_1^2 + 2}{س_1}$

$2س_1^2 = س_1^2 + 4 \leftarrow س_1^2 = 4$

$س_1 = 2$ أو $س_1 = -2$

عندما $س_1 = 2 \leftarrow ص_1 = 2^2 + 2 = 6$

نقطة التماس الأولى $(2, 6)$

عندما $س_1 = -2 \leftarrow ص_1 = 6$

نقطة التماس الثانية هي $(-2, 6)$

① $(2, 6)$

ميل المماس $= f'(2) = 2\times2 = 4$

معادلة المماس: $ص - 6 = 4(س - 2)$

② $(-2, 6)$

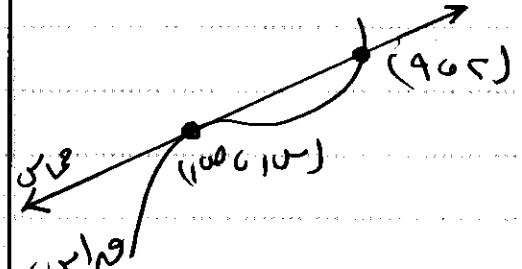
ميل المماس $= f'(-2) = -4$

معادلة المماس: $ص - 6 = -4(س + 2)$

مصطفى الشامي ALWSHAM
الشامي : ناجح الجمزاوي

مثال ③

رسم محاس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س^{٣} + ١ عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$)
قطع المنحنى في نقطة ثانية هي
(٢، ٩) جد معادلة هذا المحاس



الحل

ميل المحاس = ميل المنحنى

$$\frac{ص_{١} - ٩}{س_{١} - ٢} = ٣س_{١}^{٢}$$

ولكن ص$_{١}$ = س$_{١}^{٣}$ + ١

$$\Leftarrow \frac{س_{١}^{٣} + ١ - ٩}{س_{١} - ٢} = ٣س_{١}^{٢}$$

س$_{١}^{٣}$ − ٨ = ٣س$_{١}^{٣}$ − ٦س$_{١}^{٢}$

٢س$_{١}^{٣}$ − ٦س$_{١}^{٢}$ + ٨ = ٠ بالقسمة على ٢

س$_{١}^{٣}$ − ٣س$_{١}^{٢}$ + ٤ = ٠

بالقسمة التركيبية بجرب العوامل للعدد ٤ (−١) اخذ

	١	−٣	٠	٤
−١		٤	−٤	٤
	١	−٤	٤	٠

(س + ١)(س^{٢} − ٤س + ٤) = ٠

(س + ١)(س − ٢)(س − ٢) = ٠

← س$_{١}$ = −١ ، ص$_{١}$ = ٢

عندما س$_{١}$ = −١ فإن ص$_{١}$ = (−١)^{٣} + ١ = ٠

(−١، ٠)

عندما س$_{١}$ = ٢ ← ص$_{١}$ = ٢^{٣} + ١ = ٩

(٢، ٩) تحقق

معادلة المحاس

ص − ٠ = ٣(س − (−١))

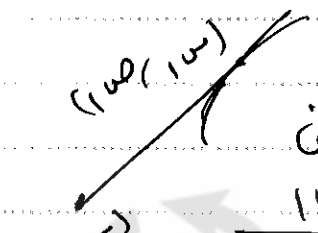
ص = ٣س + ٣

مثال ④

جد معادلة المحاس المرسوم من النقطة (−٥، ٠) لمنحنى الاقتران
ق(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٥}$

الحل

نفرض ان نقطة المحاس هي
(س$_{١}$، ص$_{١}$)



ميل المحاس = ميل المنحنى

$$\frac{ص_{١} - ٠}{س_{١} + ٥} = \frac{١س_{١}}{\sqrt{س_{١}^{٢} + ٥}}$$

ولكن ص$_{١}$ = $\sqrt{س_{١}^{٢} + ٥}$

$$\frac{\sqrt{س_{١}^{٢} + ٥}}{س_{١} + ٥} = \frac{٢س_{١}}{٢\sqrt{س_{١}^{٢} + ٥}}$$

ضرب تبادلي ← ليتبع

$ق(س_1^2 + 20) = ق س_1 (س + 5)$

$س_1^2 + 20 = ق س_1^2 + 10 س_1$

$10 س_1 = 40 \Leftarrow س_1 = 4$

$\Leftarrow ص = \sqrt{4^2 + 20} = \sqrt{36} = 6$

نقطة التماس هي $(4, 6)$

ميل المماس $= \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{ق 4}{ق 4^2 + 20}$

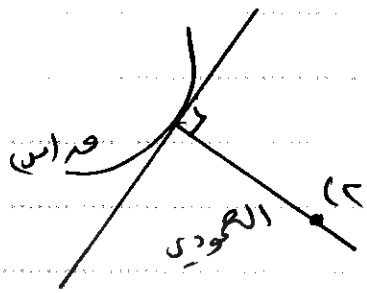
معادلة المماس

$ص - 6 = \frac{2}{3}(س - 4)$

مثال ⑤

اذا كان $ق(س) = \frac{1}{4} س^2$ وكان العمودي على المنحنى يمر بالنقطة $(1, 2)$ فاوجد معادلة العمودي

الحل



نقطة التماس $(س_1، ص_1)$

ميل العمودي $= \frac{ص_1 - 2}{س_1 - 1}$

ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{\frac{1}{2} س_1}$

$= \frac{-2}{س_1}$

$\frac{ص_1 - 2}{س_1 - 1} = \frac{-2}{س_1}$

لكن $ص_1 = \frac{1}{4} س_1^2$

$\frac{\frac{1}{4} س_1^2 - 2}{س_1 - 1} = \frac{-2}{س_1}$

$\frac{1}{4} س_1^3 - 2 س_1 = -2 س_1 + 2$

$\frac{1}{4} س_1^3 = 2 \Leftarrow س_1^3 = 8$

$س_1 = 2$

$\Leftarrow ص_1 = \frac{1}{4}(2)^2 = 1$

نقطة التماس $(2, 1)$

ميل العمودي $= \frac{-2}{2} = -1$

معادلة العمودي

$ص - 1 = -1(س - 2)$

مثال ⑥

جد جميع النقط الواقعة على منحنى العلاقة $س^2 - 4س + ص^2 - 10 = 0$ التي عندها المماس المرسوم للمنحنى يوازي المستقيم الذي معادلته $3س + 4ص = 0$

الحل

نفرض ان نقطة التماس هي $(س_1، ص_1)$

ميل المماس = ميل المنحنى

$\frac{ص_1 - 0}{س_1 - 4}$ ← يتبع

نشتق ضمنياً

$٤س - ٤ + ٢ص ص' = ٠$

$٢ص ص' = -٤س + ٤$

$ص' = \frac{-٤س+٤}{٢ص} = \frac{-٢س+٢}{ص}$

$\frac{ص_١ - ٠}{س_١ - ٤} = \frac{-٢س_١+٢}{ص_١}$

$ص_١^٢ = -٢س_١^٢ + ٨س_١ + ٢س_١ - ٨$ ---①

وكذلك $(س_١ ، ص_١)$ تحقق ضمنياً العلاقة

$٤س_١^٢ - ٤س_١ + ص_١^٢ - ١٠ = ٠$

$ص_١^٢ = -٤س_١^٢ + ٤س_١ + ١٠$ ---②

بتعويض معادلة ② في معادلة ①

$٤س_١^٢ + ٨س_١ - ٨ = -٤س_١^٢ + ٤س_١ + ١٠$

$١٠س_١ = ١٨ \quad س_١ = ٣$

بالتعويض في معادلة ②

$ص_١^٢ = -٤(٣)^٢ + ٤ \times ٣ + ١٠$

$ص_١^٢ = -٣٦ + ١٢ + ١٠ = ٤$

$ص_١ = \pm ٢$

النقط هي $(٣ ، ٢)$ ، $(٣ ، -٢)$

مثال ①

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(٢ ، \frac{١}{٢})$ ويكون عمودي على المنحنى

$ص = س^٢$ ؟

الحل

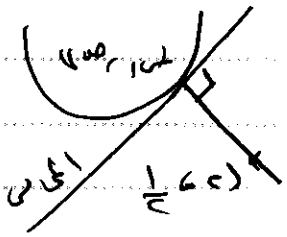
نفرض ان نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$

وحيث $ص = س^٢$ ميل المماس $= ٢س_١$

← ميل العمودي $= \frac{-١}{٢س_١}$

ايضاً ميل العمودي

$= \frac{ص_١ - \frac{١}{٢}}{س_١ - ٢}$



$\frac{-١}{٢س_١} = \frac{ص_١ - \frac{١}{٢}}{س_١ - ٢}$ $\quad ص_١ = س_١^٢$

$\frac{-١}{٢س_١} = \frac{س_١^٢ - \frac{١}{٢}}{س_١ - ٢}$

$٢س_١^٣ - ٤س_١ = -س_١^٢ + ٢$

$٢س_١^٣ = ٤ \leftarrow س_١^٣ = ١ \leftarrow س_١ = ١$

$ص_١ = (١)^٢ = ١$

النقطة هي $(١ ، ١)$

ميل العمودي $= \frac{-١}{١ - ٢} = \frac{-١}{-١} = ١$

معادلة العمودي

$ص - ١ = ١ (س - ١)$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اوجد معادلة المماس للمنحنى
$ص^2 - ١٦س = صفر$ اذا كانت
معادلة العمودي $ص + س = ٩$

الحل

ميل العمودي
$ص' + ١ = ٠ \Leftarrow ص' = -\frac{١}{ص}$

ميل المماس $= \frac{-١}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-١}{-\frac{١}{ص}} = ص$

نشتق المعادلة ضمنيًا
$٢ص \cdot ص' - ١٦ = صفر$
$٢ص \cdot ص' = ١٦ \Leftarrow ص' = \frac{١٦}{٢ص}$
ميل المماس $= ص = \frac{١٦}{٢ص}$
$\Leftarrow ٤ص = ١٦ \quad ص = ٤$
لكن $ص^2 - ١٦س = ٠$
$٤^2 - ١٦س = ٠$
$\Leftarrow ١٦ - ١٦س = ٠ \leftarrow س = ١$
معادلة المماس هي
$ص - ٤ = ٢(س - ١)$

مثال ⑨

اذا كان منحنى $ق(س) = ٢س^2 + بس + ٤$
يقطع محور الصادات في النقطة $(٠، ٣)$
وله مماسان، المماس الأول عند
النقطة $س = -١$، ويصنع زاوية
مقدارها $٤٥°$ مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات، والمماس الثاني عند
النقطة $س = ٢$ ويصنع زاوية
مقدارها $١٣٥°$ مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات. اوجد $أ، ب، ج$؟

الحل

النقطة $(٠، ٣)$ تقع على $ق(س)$
$ق(٠) = ٣$
$أ(٠)^2 + ب(٠) + ج = ٣$
$\Leftarrow ج = ٣$

المماس الأول عند $س = ١$
ميل المماس $= ظا٤٥ \leftarrow ق'(-١) = +١$
$ق'(س) = ٢أس + ب$
$ق'(-١) = -٢أ + ب = ١$ ---①

المماس الثاني عند $س = ٢$
ميل المماس $= ظا١٣٥ = -ظا٤٥ = -١$
$ق'(٢) = ٤أ + ب = -١$ ---②

حل المعادلتين
$-٢أ + ب = ١$ بالطرح
$٤أ + ب = -١$
$-٦أ = ٢ \Leftarrow أ = -\frac{١}{٣}$
نعوض في ①
$-٢ \times -\frac{١}{٣} + ب = ١$
$ب = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)
اثبت أن $ه(س) = ٣س^٢ + ٥س + ٥$
$هـ(س) = س^٣ + س^٢ - ٢س + ١$ مماسين
عند النقطة $(-١، ٢)$

الحل
عند النقطة $(-١، ٢)$ يجب التحقق
من الشرطين.
(١) $ه(-١) = هـ(-١)$
$٣(-١)^٢ + ٥(-١) + ٥ = (-١)^٣ + (-١)^٢ - ٢(-١) + ١$
$٣ = ٣$
تحقق

(٢) $ه'(-١) = هـ'(-١)$
$ه'(س) = ٦س + ٥$
$هـ'(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٢$
$ه'(-١) = ٦(-١) + ٥ = -١$
$هـ'(-١) = ٣ + ٢(-١) - ٢ = -١$
تحقق ⟸ $ه$ ، $هـ$ مماسين
عند $(-١، ٢)$

مثال (١١)
جد معادلة المماس للمنحنى
$ه(س) = س^٣ + ١$ عند نقطة
تماسه مع محور السينات

الحل
نجد نقطة تماس مع محور السينات
نوجد $ص = ٠$

$\Leftarrow س^٣ + ١ = ٠ \Leftarrow س^٣ = -١$
$\Leftarrow س = -١$
النقطة $(-١، ٠)$
ميل المماس $= ه'(س) = ٣س^٢$
$ه'(-١) = ٣$
معادلة المماس $ص - ٠ = ٣(س + ١)$

مثال (١٢)
جد جميع النقط الواقعة على منحنى
العلاقة $س^٢ + ص^٢ - ٢ص = ٦٧$
والتي يكون ميل المماس لهذا المنحنى
عند كل منها يساوي ٤ ؟

الحل
نفرض ان النقطة $(س_١، ص_١)$ نقطة
التماس
باشتقاق معادلة المنحنى ضمنياً
$٢س + ٢ص ص' - ٢ص' = ٠$
$ص'(٢ص - ٢) = -٢س$
$ص' = \frac{-٢س}{٢ص - ٢} = \frac{-س}{ص - ١}$
ميل المماس $= ٤ = \frac{-س_١}{ص_١ - ١}$
$\Leftarrow ٤ص_١ - ٤ = -س_١$
$س_١ = ٤ - ٤ص_١$ ---(١)
لكن $(س_١، ص_١)$ تحقق معادلة المنحنى
$\Leftarrow س_١^٢ + ص_١^٢ - ٢ص_١ = ٦٧$ ---(٢)
بتعويض (١) في (٢) ينتج ان
$\Leftarrow$ ينتج الكل

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

$(٤ع ص_١)^{٢} + ص_١^{٢} - ٢ص_١ ع = ٦٧$

$١٦ ع^{٢} ص_١^{٢} + ص_١^{٢} - ٢ص_١ ع = ٦٧$

$١٦ - ٣٤ ص_١ + ١٦ - ٦٧ = ٠$

$١٧ ص_١^{٢} - ٣٤ ص_١ - ٥١ = ٠$

بالقسمة على ١٧

$ص_١^{٢} - ٢ص_١ - ٣ = ٠$

$(ص_١ - ٣)(ص_١ + ١) = ٠$

$ص_١ = ٣ \quad ، \quad ص_١ = -١$

بالتعويض في معادلة ①

$ص_١ = ٣ \leftarrow س_١ = ٤ - ٢ \times ٤$

$= -٨$

$ص_١ = -١ \leftarrow س_١ = ٤ - ٢ \times ٤$

$= ٨$

النقط $(-٨ ، ٣) ، (٨ ، -١)$

مثال (١٣)

اوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $س^{٢} + ص = ص^{٢}$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم $ص + س + ١ = ٠$ الموجود في الربع الثالث

الحل

$س = -ص - ١$ نعوضها بدل س في العلاقة $س^{٢} + ص = ص^{٢}$

$(-ص - ١)^{٢} + ص = ص^{٢}$

$ص^{٢} + ٢ص + ١ + ص = ص^{٢}$

$٣ص = -١ \leftarrow ص = \frac{-١}{٣}$

$س = -ص - ١$

$= -\frac{-١}{٣} - ١ = -\frac{٢}{٣}$

نقطة التقاطع هي $(-\frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣})$

نفرض المماس يقطع محور الصادات

$ص = م س + ص_{ص}$

$-٢ = م \times -\frac{٢}{٣} + ص_{ص}$

$-\frac{٤}{٣} + ص_{ص} = -\frac{٢}{٣} م$

$\Leftarrow ص_{ص} + \frac{٢}{٣} م = \frac{٤}{٣}$

$\frac{٥}{٣} م = \frac{٤}{٣} \Leftarrow ص_{ص} = \frac{٤}{٥}$

معادلة المماس هي

$ص - \frac{-١}{٣} = \frac{٤}{٥}(س - \frac{-٢}{٣})$

مثال (١٤)

اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين

$٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٤٥ \quad ، \quad ٤س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٥$

عند نقطة تقاطع المنحنين في الربع الأول يكونان متعامدين

الحل

نجد نقط التقاطع إما بالحذف أو التعويض

← نتبع

← تابع الكل

نرتب المعادلة الثانية

$س^2 = ٥ + ٤ص^2$ ونعوضها في الأولى.

$٤(٥ + ٤ص^2) + ٩ص^2 = ٤٥$

$٢٠ + ١٦ص^2 + ٩ص^2 = ٤٥$

$٢٥ص^2 = ٢٥$

$ص^2 = ١ \Leftarrow ص = \pm ١$

نأخذ $\boxed{ص = ١}$ في الربع الأول

نجد س بالتعويض في المعادلة الثانية

$س^2 - ٤ = ٥ \leftarrow س^2 = ٩$

$\Leftarrow س = ٣ ، -٣$

وفي الربع الأول $س = ٣$

← نقطة التقاطع والتماس هي $(٣ ، ١)$

نشتق المعادلة ضمنياً

$٨س + ١٨ص \, ص' = ٠$

نعوض النقطة $(٣ ، ١)$

$٨ \times ٣ + ١٨ \times ١ \, ص' = ٠$

$\leftarrow ١٨ص' = -٢٤ \leftarrow ص' = \frac{-٢٤}{١٨} = \frac{-٤}{٣}$

ميل المماس $= \frac{-٤}{٣}$

نشتق الثانية

$٢ - ٨ص'^2 - ٨ص \, ص'' = ٠$ نعوض $(٣ ، ١)$

$٢ - ٨ \times \frac{١٦}{٩} - ٨ص'' = ٠$

$\leftarrow ٨ص'' = -\frac{٦}{٩} \leftarrow ص'' = \frac{-٣}{٤}$

$م_١ \times م_٢ = \frac{-٤}{٣} \times \frac{-٣}{٤} = -١$

المماسان متعامدان

مثال (١٥)

أوجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع العلاقة $ص^2 + ٢س - ٤ = س ص$ مع محور الصادات.

الحل

نعوض $س = ٠$ لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات.

$ص^2 + ٢ \times ٠ - ٤ = ٠ \times ص$

$ص^2 - ٤ = ٠ \Leftarrow ص = \pm ٢$

نقط التقاطع $(٠ ، ٢)$ ، $(٠ ، -٢)$

نشتق العلاقة ضمنياً

$٢ص \, ص' + ٢ = س \, ص' + ص \times ١$

① عند النقطة $(٠ ، ٢)$

$٢ \times ٢ \, ص' + ٢ = ٠ \times ص' + ٢$

$٤ص' = ٠ \Leftarrow ص' = ٠$

معادلة المماس

$ص - ٢ = ٠ (س - ٠)$

$ص = ٢$

② عند النقطة $(٠ ، -٢)$

$-٢ \times ٢ \, ص' + ٢ = ٠ \times ص' + ٢$

$-٤ص' = -٤ \Leftarrow ص' = ١$

معادلة المماس هي

$ص + ٢ = ١ (س - ٠)$

$ص + ٢ = س$

$ص = س - ٢$

مكتبة السلام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ثالثاً

التوازي والتعامد

مثال ①
جد معادلة المماس للأقتران
$ق(س) = س^2 + 4س + 3$
اذا كان المماس يوازي المستقيم
$ص = 6س - 5$

الحل
$ق'(س) = 2س + 4$ ، $م_{ل} = 6$
المماس // المستقيم
$ق'(س_1) = م_{ل}$
$2س_1 + 4 = 6 \Leftarrow 2س_1 = 2 \Leftarrow س_1 = 1$
$ق(1) = 1^2 + 4 \times 1 + 3 = 8$
نقطة المماس $(1 ، 8)$
ميل المماس $= 6$
معادلة المماس $ص - 8 = 6(س - 1)$

مثال ②
اذا كان $ق(س) = س^2 + 1$ جد
معادلة المماس للأقتران $ق(س)$
اذا كان المماس يعامد $ص = \frac{س + 1}{4}$

$\leftarrow$ الحل

الحل
$ق'(س) = 2س$ ، $م_{ل} = \frac{1}{4}$
ميل المماس $\times$ ميل المستقيم $= -1$
$ق'(س_1) \times م_{ل} = -1$
$2س_1 \times \frac{1}{4} = -1$
$\frac{س_1}{2} = -1 \leftarrow س_1 = -2$
$ق(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$
نقطة المماس هي $(-2 ، 5)$
ميل المماس $= ق'(-2) = 2 \times -2 = -4$
معادلة المماس هي
$ص - 5 = -4(س + 2)$

مثال ③
جد النقطة على منحنى الاقتران
$ق(س) = ظا س$ التي يكون عندها
المماس موازيًا للمستقيم $ص = 2س$
حيث $س \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$

الحل
$ق'(س) = قا^2 س$ ، $م_{ل} = 2$
المماس // المستقيم $\Leftarrow$ ميل المماس $=$ ميل المستقيم
$قا^2 س_1 = 2 \leftarrow قا س_1 = \pm\sqrt{2}$
لكن $س \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$
$\Leftarrow قا س_1 = \sqrt{2} \leftarrow س_1 = \frac{\pi}{4}$
$ق(\frac{\pi}{4}) = ظا \frac{\pi}{4} = 1$
النقطة هي $(\frac{\pi}{4} ، 1)$

مثال ④
اذا كان ق(س) = $\frac{ل(س) + ٨س}{هـ(س)}$
حيث هـ(س) ≠ ٠ ، وكان لمنحنى كل من ل(س) ، هـ(س) مماسًا افقيًا عند النقطة (١ ، ٤) فما قيمة ق'(١)

الحل
النقطة (١ ، ٤) تحقق ل ، هـ
← ق(١) = $\frac{٤}{٤}$ = ١
مماس افقي عند النقطة (١ ، ٤)
← ل'(١) = صفر ، هـ'(١) = صفر

ق'(س) = $\frac{هـ(س) \times (ل'(س) + ٨) - (ل(س) + ٨س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

ق'(١) = $\frac{هـ(١) \times (ل'(١) + ٨) - (ل(١) + ٨) \times هـ'(١)}{(هـ(١))^{٢}}$

ق'(١) = $\frac{٤ \times (٠ + ٨) - (٤ + ٨) \times ٠}{٤^{٢}}$

= $\frac{٤ \times ٨}{١٦}$ = $\frac{٣٢}{١٦}$ = ٢

مثال ⑤
جد جميع النقط الواقعة على منحنى
ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥س + ٧
والتي يكون المماس لمنحنى ق(س) عندها موازيًا لمستقيم س + ٥ص + ٢ = ٠

الحل
نفرض نقطة التماس هي (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)
نشتق معادلة المنحنى
ق'(س) = ٦س^{٢} − ٦س + ٥
ميل المماس = ق'(س$_{١}$) = ٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ + ٥
ميل المستقيم = $\frac{-١}{٥}$

ميل المستقيم × ميل العمودي = −١
$\frac{-١}{٥}$ × (٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ + ٥) = −١

٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ + ٥ = ٥
٦س$_{١}^{٢}$ − ٦س$_{١}$ = ٠
٦س$_{١}$ (س$_{١}$ − ١) = ٠
س$_{١}$ = ٠ ، س$_{١}$ = ١
ق(٠) = ٧ ، ق(١) = ١١
النقط (٠ ، ٧) ، (١ ، ١١)

مثال ⑥
جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة ٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٥ موازيًا للمستقيم ٩س − ٨ص = ١

الحل
نفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس
نشتق ضمنيًا
١٨س + ٣٢ص ص' = ٠
٣٢ص ص' = −١٨س ←
ص' = $\frac{-١٨س}{٣٢ص}$ = $\frac{-٩س}{١٦ص}$ ←

مكتبة الوسام
AL WESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

ميل المماس = $\frac{-9جتا س}{16جا ص}$ ، ميل المستقيم = $\frac{9}{8}$

المماس // المستقيم

$\frac{-9جتا س}{16جا ص} = \frac{9}{8}$ ⟸ $-8جتا س = 16جا ص$

⟸ $-جتا س = 2جا ص$ ---- ①

⟸ $جتا س = -2جا ص$

نقطة المماس $(جتا س ، جا ص)$ تحقق المعادلة لتكون $جتا س = -2جا ص$ في العلاقة

$(-2جا ص)^2 + 16جا^2 ص = 25$

$4جا^2 ص + 16جا^2 ص = 25$

$36جا^2 ص = 25$ ⟸ $جا^2 ص = 1$ ⟸ $جا ص = \pm 1$

عندما $جا ص = 1$ ⟸ $جتا س = -2$

عندما $جا ص = -1$ ⟸ $جتا س = 2$

النقط هي

$(2 ، -1)$ ، $(-2 ، 1)$

مثال ⑦

اثبت ان المماسين للمنحنيين $س^2 + ص^2 = 8س$ ، $ص = س^2$ متعامدين عند النقطة $(0 ، 0)$

الحل

نقطة المماس $(0 ، 0)$

نشتق ضمنياً

$2س + 2ص ص' = 8$

$ص' = \frac{4 - س}{ص}$

ميل المماس $= \frac{4}{0}$ كمية غير معرفة

المماس يوازي محور الصادات

$ص = س^2$ ⟸ $ص' = 2س$

ميل المماس $= 2 \times 0 = 0$ صفر

⟸ المماس يوازي محور السينات

⟸ المماسين متعامدين

مثال ⑧

جد جميع قيم $(س)$ بحيث يكون المنحنى $ق(س) = 4جتا^2 س$ مماساً افقياً في الفترة $[0 ، \pi 6]$

الحل

$(جتا س ، جا ص)$ نقطة المماس

$ق'(س) = 4 \times 2جتا س (-جا س) = -8جتا س جا س$

المماس افقي ⟸ ميل المماس = صفر

$-8جتا س جا س = 0$

⟸ $س = \frac{\pi}{2} + ن\pi$ ، $ن \in ص$

أو $س = \frac{3\pi}{4} + ن\pi$

⟸ $س = \frac{\pi}{4} + ن\pi$ أو $س = \frac{3\pi}{4} + ن\pi$

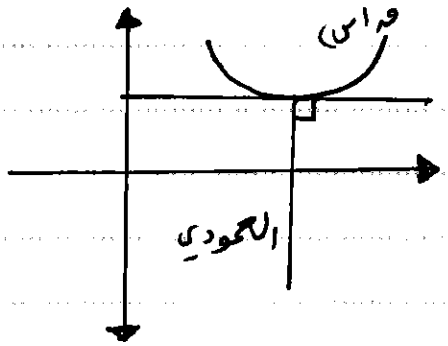
عندما $ن = 0$ ⟸ $س = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4} \in$ الفترة

$ن = 1$ ⟸ $س = \frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4} \notin$ الفترة

$\therefore س = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$

ملاحظة هامة

① اذا كان العمودي على المماس يوازي محور الصادات فان المماس يوازي محور السينات (المماس افقي)



②
تكون النقطة (س١ ، ص١) نقطة تماس منحنيين ق ، هـ ، يجب توفر شرطين

① ميل ق × ميل هـ = ١

② ق(س١) = هـ(س١)

(س١ ، ص١) نقطة مشتركة نقطة تماس

مثال

جد نقط تماس منحنيين الاقترانين ق(س) = س٢ ، هـ(س) = -س٢ + ٢س + ١

الحل

لتكن (س١ ، ص١) نقطة التماس

ق(س) = س٢

ميل ق(س) = ٢س

هـ(س) = -س٢ + ٢س + ٢

ميل هـ(س) = -٢س + ٢

ميل ق × ميل هـ = -١

٢س١ × (-٢س١ + ٢) = -١

٤س١٢ - ٤س١ + ١ = ٠

(٢س١ - ١)(٢س١ - ١) = ٠

٢س١ - ١ = صفر

س١ = ١/٢

ق(١/٢) = (١/٢)٢ = ١/٤

هـ(١/٢) = -(١/٢)٢ + ٢(١/٢) + ١

= ١/٤

⇐ ق(١/٢) = هـ(١/٢)

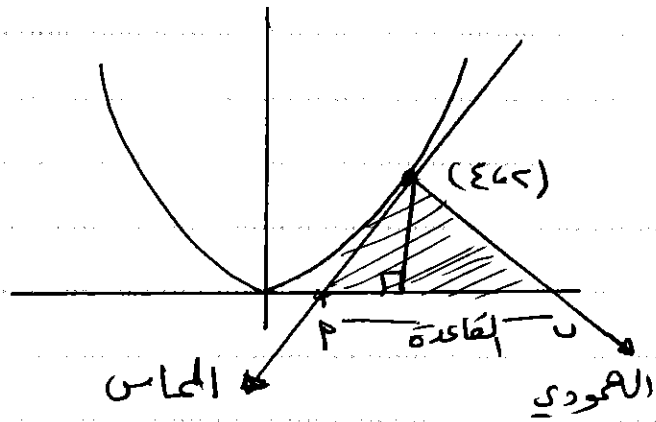
(١/٢ ، ١/٤) نقطة التماس

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام : ناجح الجمزاوي

أمثلة وتطبيقات هندسية متنوعة

مثال ①

اوجد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس ومحور السينات للأقتران $ق(س) = س^2$ عند النقطة $(٢، ٤)$



نجد معادلة المماس والعمودي

$ق'(س) = ٢س$ ، ميل المماس $= ق'(٢) = ٤$

معادلة المماس $ص - ٤ = ٤(س - ٢)$

نجد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات

نوعوض $ص = ٠ \leftarrow ٠ - ٤ = ٤(س - ٢)$

$\leftarrow س - ٢ = -١ \leftarrow س = ١$

النقطة $(١، ٠)$ = النقطة P

معادلة العمودي $ص - ٤ = -\frac{١}{٤}(س - ٢)$

نجد نقطة تقاطع العمودي مع محور السينات

$ص = ٠ \Leftarrow$

$٠ - ٤ = -\frac{١}{٤}(س - ٢)$

$\leftarrow ١٦ = س - ٢ \leftarrow س = ١٨$

النقطة $(١٨، ٠) = ب$

طول القاعدة $= ب - أ = ١٨ - ١ = ١٧$

الارتفاع $= ٤$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ١٧ \times ٤ = ٣٤$

مثال ② سؤال من الكتاب

اوجد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة $(١، ٥)$ لمنحنى الأقتران $ق(س) = س^2 + ٣$ والعمودي على المماس عند نقطة المماس والمحور $ص = ١$

الحل

لتكن نقطة المماس $(س_١، ص_١)$

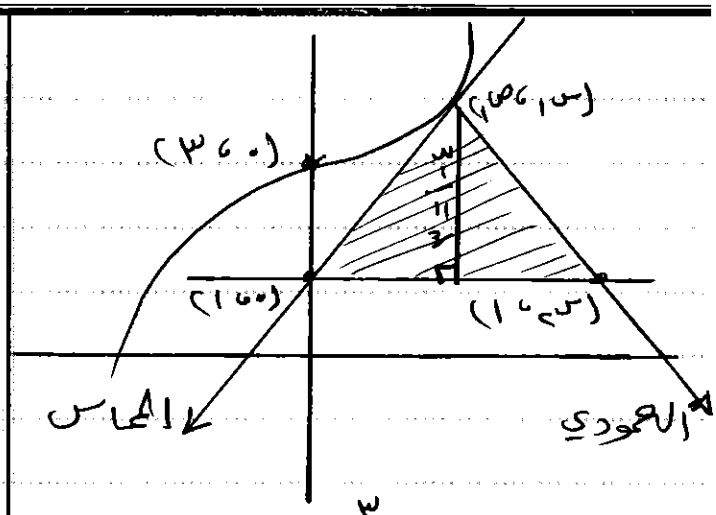
$ق'(س) = ٢س \leftarrow$ ميل المماس $= ٢س_١$

ميل المماس $= \frac{ص_١ - ١}{س_١}$ لكن $ص_١ = س_١^2 + ٣$

$\Leftarrow$ ميل المماس $= \frac{س_١^2 + ٣ - ١}{س_١} = \frac{س_١^2 + ٢}{س_١}$

$\leftarrow$ يتبع الحل

ALWESAM
الواسم : ناجح الجمزاوي



$\Leftarrow 3س_1^2 = \frac{س_1^3 + 2}{س_1}$

$\leftarrow 3س_1^2 = س_1^3 + 2 \leftarrow 2س_1^3 = 2$

$\leftarrow س_1^3 = 1 \leftarrow س_1 = 1$

$ق(1) = (1)^3 + 3 = 4$

نقطة التماس $(س_1، ص_1) = (1، 4)$

ميل المماس $= ق'(1) = 3$

ميل العمودي $= \frac{-1}{3}$

معادلة المماس $ص - 4 = 3(س - 1)$

$\leftarrow ص = 3س + 1$

معادلة العمودي $ص - 4 = \frac{1}{3}(س - 1)$

نجد نقطة تقاطع العمودي مع $ص = 1$

$1 = \frac{-1}{3}س + \frac{13}{3}$

$-س + 13 = 3 \Leftarrow س = 10$

النقطة هي $(10، 1) = (س، ص)$

القاعدة $= 10$

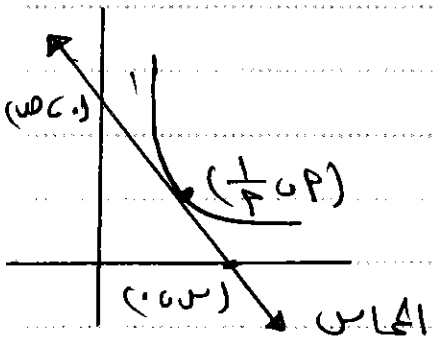
الارتفاع $= 4 - 1 = 3$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 10 \times 3$

$= 15$

مثال (٣)

اثبت ان مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى $ص = \frac{1}{س}$ عند النقطة $(\frac{1}{2}، 2)$ والمحورين $س، ص$ (الربع الأول) تساوي ٢ وحدة مربعة



الحل

$ص' = \frac{-1}{س^2}$

ميل المماس عند النقطة $(\frac{1}{2}، 2) = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

معادلة المماس $ص - 2 = -4(س - \frac{1}{2})$

نجد نقطة تقاطع مع محور الصادات

نضع $س = 0$

$ص - 2 = -4(0 - \frac{1}{2})$

$ص = 2 + 2 = 4$

نجد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات

نضع $ص = 0$

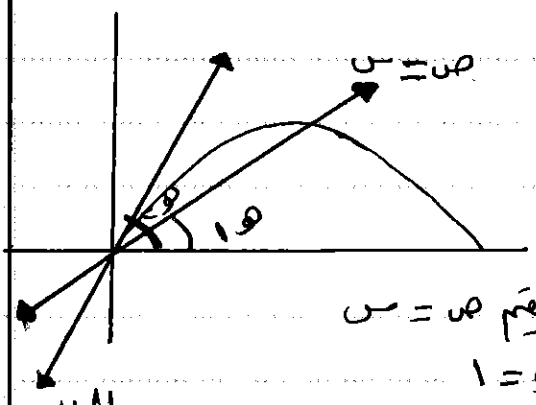
$0 = -4س + 2 \leftarrow 4س = 2 \leftarrow س = \frac{1}{2}$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④

من الشكل المجاور، أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران
ق(س) = √(٣س − س²) عند النقطة (٠، ٠)



ميل المستقيم ص = س
ميله = ١
ظا θ١ = ١ ← θ١ = π/٤
ق(س) = √(٣س − س²)
ق'(س) = (٣ − ٢س) / (٢√(٣س − س²))
ميل المماس = ق'(٠) = √٣
← ظا θ٢ = √٣ ← θ٢ = π/٣
الزاوية المحصورة θ = θ٢ − θ١
= π/٣ − π/٤ = π/١٢

الحل

ميل المماس = − معامل س / معامل ص = −(−٨)/٤ = ٢

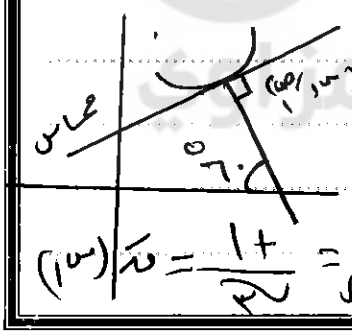
لتكن (س١، ص١) نقطة التماس
ميل المماس = ميل المنحنى
ق'(س) = ٣/٢ س − ٨ س^(−٢)
ق'(س١) = ٣/٢ − ٨ × (−١/٤) س١^(−٢)
ق'(س١) = ٣/٢ + ٤ / √(س١³)
ق'(س١) = ٣/٢ + ٤ / √(س١³)
٣/٢ + ٤ / √(س١³) = ٢ ← ٤ / √(س١³) = ١/٢
← √(س١³) = ٨ ← س١³ = ٦٤
← س١ = ∛٦٤ = ٤
ص١ = ٣/٢ × ٤ − ٨/√٤٣ = ٦ − ٤ = ٢
نقطة التماس هي (٤، ٢)
النقطة تحقق معادلة المماس
٨ أ ٤ − ٤ ب ٢ + د = ٠
⇐ ٣٢ − ٨ ب + د = ٠ ← د = ٤ب − ٢٤

مثال ⑤

اذا كان المستقيم ٨س − ٤ص + د = ٠ يمس منحنى الاقتران
ق(س) = ٢/٣ س − ٨/√س عند
قيمة د ؟

مثال ⑥

في الشكل المجاور، أوجد ق'(س١)



الحل
ميل العمودي = ظا ١٢٠°
= −√٣
ميل المماس = −١ / ميل العمودي = +١ / √٣ = ق'(س١)

مكتبة الرسام
Alwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = \sqrt{٣}$

فاوجد قياس زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق عند النقطة $(٢ ، ق(٢))$

الحل

ميل المماس = ظا زاوية المماس

$ق'(٢) = \sqrt{٣}$

$\leftarrow$ ظا هـ $= \sqrt{٣}$ $\leftarrow$ اعمل

هـ $= ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠^{\circ}$

مثال (٨)

اذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٢ب س^{٢} + ١$

وكان ميل المماس المرسوم لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ١$ هو $(-\frac{١}{٥})$ فاوجد قيمة الثابت ب ؟

الحل

ميل المماس = ميل المنحنى

ميل المماس $= -\frac{١}{٥} \leftarrow$ ميل العمودي $= ٥$

ميل المنحنى $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٢ب س$

$ق'(١) = ٣ - ٢ب = ٥$

$-٢ب = ٢ \leftarrow ب = -١$

مثال (٩)

اذا كانت معادلة المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ٢$ هي $ص + ٢س = ١١$

وكانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى $هـ(س)$ عند $س = ٣$ هي $٤ص + س = ١٥$ وكانت $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ فاوجد $ل'(٣)$

الحل

نجد كل من $ق(٣)$ ، $ق'(٣)$ ، $هـ(٣)$ ، $هـ'(٣)$

المماس لمنحنى $ق(س)$ هو $ص + ٢س = ١١$

$ق(٣) =$ نعوض ٣ في المماس

$= -٢ \times ٣ + ١١ = ٥$

$ق(٣) = ٥$

$ص = -٢ \quad ق'(٣) = -٢$

المماس لمنحنى $هـ(س)$ $٤ص + س = ١٥$

$هـ(٣) = ص(٣) = \frac{١٥ - ٣}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$هـ'(٣) = \frac{-١}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-١}{-\frac{١}{٤}} = ٤$

$ل'(س) = ق'(س) \times هـ(س) + هـ'(س) \times ق'(س)$

$ل'(٣) = ق'(٣) \times هـ(٣) + هـ'(٣) \times ق(٣)$

$= -٢ \times ٣ + ٤ \times ٥$

$= ٢٠ - ٦ = ١٤$

ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

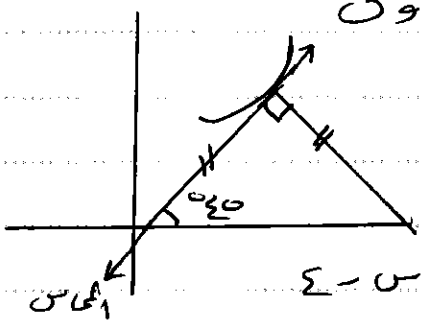
مثال (١٠)

اوجد قيم س على المنحنى
$ص = \frac{1}{3}س^3 - س^2 - 4س + 1$
والتي يصنع كل من المماس والعمودي
عند المماس عندهما مع محور السينات
مثلث متساوي الساقين

الحل

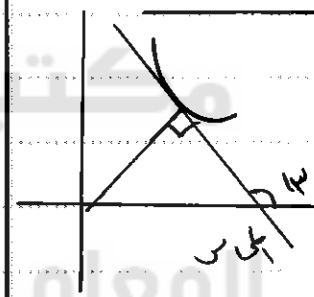
يوجد حالتان

① الحالة الأولى



$ص' = س^2 - 2س - 4$
$= ظا ٤٥° = 1$
$س^2 - 2س - 5 = 0$ بالقانون العام
$س = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$
$= \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$

② الحالة الثانية

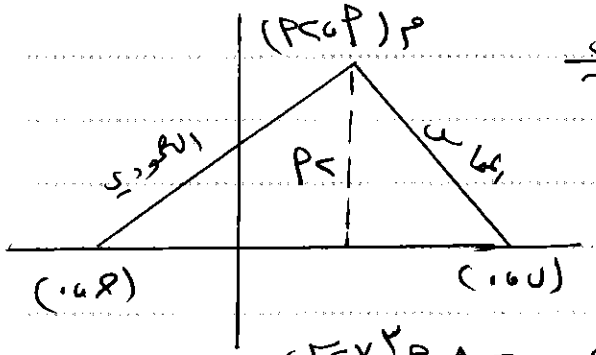


$ص' = س^2 - 2س - 4$
$= ظا ١٣٥° = -1$
$س^2 - 2س - 3 = 0$
$(س - 3)(س + 1) = 0$
$س = 3$ ، $س = -1$

مثال (١١)

اذا قطع المماس والعمودي لمنحنى
$و(س) = \frac{8أ^3}{3أ^2 + س^2}$ عند النقطة $(أ، ٢أ)$
محور السينات في النقطتين $ب، جـ$
على الترتيب فجد مساحة مثلث $م ب جـ$

الحل



$و'(س) = \frac{-8 \times 2أ^3 س}{(3أ^2 + س^2)^2}$

$و'(أ) = \frac{-8 \times 2أ^3 \times أ}{(3أ^2 + أ^2)^2} = \frac{-16أ^4}{16أ^4} = -1$

$\Leftarrow$ ميل المماس $= -1$

وايضاً ميل المماس $= \frac{٠ - ٢أ}{ب - أ} = -1$

$\Leftarrow -٢أ = أ + ب \Leftarrow ب = ٣أ$

ميل العمودي $= 1$

وايضاً ميل العمودي $= \frac{٠ - ٢أ}{جـ - أ} = 1$

$\Leftarrow ٢أ = جـ - أ \Leftarrow جـ = ٣أ$

$ب جـ = ٣أ - (-أ) = ٤أ$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ٤أ \times ٢أ$
$= ٤أ^2$

مكتبة الهدف
AL-HADAF
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① صـ ١٥٩

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الدالة ق(س) = √(س+٣) عند النقطة (١، ٢)

الحل

ميل المماس = ق'(١)

ق'(س) = $\frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

ق'(١) = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ⇐ ق'(١) = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

معادلة المماس هي

ص − ٢ = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (س − ١)

معادلة العمودي هي

ص − ٢ = −٢√٢ (س − ١)

تدريب ② صـ ١٦٠

بيّن ان مماس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{س}$ وهما من منحنى الاقتران هـ(س) = س متعامدان عند نقطة تقاطعهما

نقطة التقاطع هي

ق(س) = هـ(س)

$\frac{٤}{س}$ = س ⇐ س² = ٤

⇐ س = ± ٢

عند س = ٢ ⇐ ص = ٢

س = −٢ ص = −٢

ميل ق(س) = ق'(س) = $\frac{-٤}{س^2}$

ق'(٢) = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

ميل هـ(س) = ١

ميل ق × ميل هـ = −١ × ١ = −١

متعامدان

ميل ق(س) عند س = −٢

ق'(−٢) = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

ميل ق × ميل هـ = −١ × ١ = −١

متعامدان

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

تدريب ③ ص ١٦١

بين ان للمنحنى الاقتران
$هـ(س) = جا^2 س$ محاسبا افقيا في
الفترة $[0, \pi]$

الحل

المماس الافقي ⇐ $هـ'(س) = صفر$

$هـ'(س) = 2 جا س جتا س = 0$

⇐ $جا 2س = 0$ متطابقة

$2س = 0$ أو $2س = \pi$

$س = \frac{\pi}{2}$

تدريب ④ ص ١٦٢

اذا كان $هـ(س) = جـ س^2 + د س + 2$
وكان فيما س اذا ميل المماس للمنحنى
الاقتران هـ عند النقطة $(2, هـ(2))$
هو ١٣٥° ، فجد قيمة الثابت د

الحل

ميل المماس $= هـ'(س)$

$ظا ١٣٥ = هـ'(2)$

$-1 = 2 جـ(2) + د$ ⇐ $س = 1$

⇐ $-1 = 4جـ + د$

$-1 = 3جـ$ ⇐ $د = -\frac{1}{3}$

تدريب ⑤ ص ١٦٣

بين ان للمنحنى اقتران $هـ(س)$
حيث $هـ(س) = 5 - س^2$ محاسبين
مرسومين من النقطة $(3, 1)$

الحل

نفرض نقطة تماس $(س_1, ص_1)$

ميل المماس $= هـ'(س_1)$

$\frac{ص_1 - 1}{س_1 - 3} = \frac{-2س_1}{1}$

$ص_1 = -2س_1^2 + 6س_1$ لكن
$ص_1 = 5 - س_1^2$

$5 - س_1^2 = -2س_1^2 + 6س_1$ ⇐

$س_1^2 - 6س_1 + 5 = 0$

$(س_1 - 1)(س_1 - 5) = 0$

$س_1 = 1$ ⇐ $ص_1 = 5 - 1 = 4$
$(1, 4)$ تماس الأول

$س_1 = 5$ ⇐ $ص_1 = 5 - 25 = -20$
$(5, -20)$ تماس الثاني

معادلة المماس الأول $(ص - 4) = -2(س - 1)$

معادلة المماس الثاني $(ص + 20) = -10(س - 5)$

تمارين وسائل

صفحة (٤ ، ١٦)

(١) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٦س - ٥$ عند النقطة $(١ ، ٢)$

الحل

ميل المماس $= ق'(١)$

$ق'(س) = ٢س + ٦ \Leftarrow ق'(١) = ٨$

معادلة المماس هي

$ص - ٢ = ٨(س - ١)$

$ص = ٨س - ٦$

(٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣}$ عند نقطة تماسه مع المستقيم $ص - س - ٦ = ٠$

الحل

$ص = س + ٦$ ، $ق(س) = س^{٢}$

حيث نقطة التقاطع $ص = ق(س)$

$س^{٢} = س + ٦ \Leftarrow س^{٢} - س - ٦ = ٠$

قسمة تركيبية

	١	-١	-٦
٢		٢	٦
	١	٢	٠

$(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٣) = ٠$

$\Leftarrow س = ٢$

$\Leftarrow ص = ٢^{٣} = ٨$

النقطة $(٢ ، ٨)$

الميل $ق(س) = ٣س^{٢}$

$ق'(٢) = ١٢$

$ص - ٨ = ١٢(س - ٢)$

(٣) جد النقط الواقعة على منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٢س + ٣$ التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

ميل المماس $=$ ميل المنحنى

$ظا \frac{٣\pi}{٤} = ق'(س)$

$-١ = ٢س - ٢$

$٢س = ١ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$ص = (\frac{١}{٢})^{٢} - ٢(\frac{١}{٢}) + ٣$

$= \frac{١}{٤} - ١ + ٣$

$= \frac{١٣}{٤}$

النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{١٣}{٤})$

(٤) جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة (ص - ٤)^{٢} = س + ٢ التي يكون عندها المماس موازيًا لمستقيم الذي معادلته ٣س + ٦ص + ٢ = ٠

الحل

ميل المستقيم = ميل العلاقة

٣ + ٦ص = ٠ ⟹ ص = $-\frac{٣}{٦}$

م = $-\frac{١}{٢}$

ميل العلاقة

٢(ص - ٤) × ص = ١

ص = $\frac{١}{٢(ص-٤)}$ = م

م = م

$\frac{١}{٢(ص-٤)}$ = $-\frac{١}{٢}$ بمقارنة

-٢(ص - ٤) = ٢ بالقسمة على -٢

ص - ٤ = -١ ⟹ ص = ٣

ص = ٢ ⟹ (٣ - ٤)^{٢} = ك + ٢

⟹ ١ = ك + ٢ ⟹ ك = -١

النقطة هي (-١ ، ٣)

---

(٥) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٣ حيث يكون المماس محوديًا على المستقيم الذي معادلته ٦ص - ٣س - ٥ = ٠

ميل المماس × ميل المحودي = -١

ميل المحودي ٦ص = ٣س - ٥

ص = ٢

⟹ ص = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢}$ × (٢ك - ٤) = -١

ك - ٢ = -١ ⟹ س = ١

⟹ ص = (١)^{٢} - ٤ × ١ + ٢

= ١ - ٤ + ٢ = صفر

النقطة هي (١ ، ٠)

---

(٦) جد معادلة المماس والمحودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ عند النقطة (١ ، ٢)

الحل

ق(س) = $\frac{٢}{س}$

ميل المماس = $\frac{٢}{١}$ = -٢

معادلة المماس

ص - ٢ = -٢(س - ١)

معادلة المحودي

ص - ٢ = $\frac{١}{٢}$ (س - ١)

(٧) جد قيمة كل من الثابتين ب ، جـ اللذين يجعلان للمستقيم الذي معادلته ص = ٢س + ٥ مماساً لمنحنى ق(س) = س٢ + ب س + جـ عند النقطة (٠ ، ٥)

الحل

ميل المماس = ميل المنحنى

ص = ٢س + ٥ ⇐ صَ = ٢

٢ = ٢ب + جـ عند س = ٠

١ = ٠ + ب ⇐ ب = ١

ق(٠) = ٥ ، ب = ١

ق(س) = س٢ + س + د

ق(١) = ٠ + ٠ + د = ٥

د = ٥

---

(٨) اذا كان المستقيم ٢س - ص + ٨ = ٠ عمودي على مماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٢}{س}$ عند النقطة (س١ ، ص١) جد قيم الثابت جـ ؟

الحل

بما ان ⇐

المشتقة = ميل المستقيم

٢ = صَ = ٠ ⇐ صَ = ٢ ⇐ ميل المستقيم

٢ = $\frac{+٢}{س^٢}$ ⇐

س٢ = ١ ⇐ س = ±١

عند س = ١ ، ص = ٢ + جـ

الصورة ٥ = الصورة ٥

٢ + جـ = $\frac{-٢}{١}$ ⇐ ١ + جـ = ٥

جـ = ٤

عند س = -١

ص = $\frac{-٢}{-١}$ + ٥ = ٢ + ١ = ٣

ص = ٢ + جـ ⇐ ٣ = ٢ + جـ

جـ = ٤

---

(٩) جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة س = ص٢ - ٤ ص عند تقاطعه مع محور الصادات

تقاطع مع محور الصادات ⇐ س = ٠

٠ = ص٢ - ٤ ص ⇐ ص(ص - ٤) = ٠

ص = ٠ ⇐ س = ٠ ⇐ (٠ ، ٠)

ص = ٤ ⇐ س = ٠ ⇐ (٠ ، ٤)

عند (٠ ، ٤) م =

١ = ٢ ص صَ - ٤

١ = ٨ صَ - ٤ ⇐ صَ = $\frac{٥}{٨}$

ص - ٠ = $\frac{٥}{٨}$ (ص - ٠)

عند (٠ ، ٠) ١ = ٢ ص صَ - ٤

⇐ صَ = $\frac{٥}{٨}$ ليس عند صفره

س = ٠ اما س

مكتبة الوسام ALWESAM

(١٠) جد قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$ص^2 + س^2 + 6ص - 4س + 4 = 0$ عند النقطة $(3، -1)$

ظا الزاوية = ميل المماس

$2ص \frac{دص}{دس} + 2س + 6\frac{دص}{دس} - 4 = 0$

$\frac{دص}{دس}(2ص + 6) + 2س - 4 = 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-2س + 4}{2ص + 6}$ عند النقطة $(3، -1)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-6 + 4}{-2 + 6} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

ظا هـ $= -1$

هـ $= 135°$

---

(١١) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = 3$ ظتا $س + 2$ قتا $س$ عند $س = \frac{\pi}{4}$

$ق'(س) = -3$ قتا$^2 س + 2$ قتا $س$ ظا $س$

$ق'(\frac{\pi}{4}) = -3(\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(1)$

$= -3 \times 2 + 2\sqrt{2}$

$= -6 + 2\sqrt{2}$

عند ما $س = \frac{\pi}{4}$

$ص = 3$ ظتا $(\frac{\pi}{4}) + 2$ قتا $(\frac{\pi}{4})$

$= 3 \times 1 + 2\sqrt{2}$

$= 3 + 2\sqrt{2}$

$(\frac{\pi}{4}، 3 + 2\sqrt{2})$ $م = -6 + 2\sqrt{2}$

المماس

$(ص - (3 + 2\sqrt{2})) = (-6 + 2\sqrt{2})(س - \frac{\pi}{4})$

العمودي

$(ص - (3 + 2\sqrt{2})) = \frac{1}{-6 + 2\sqrt{2}}(س - \frac{\pi}{4})$

---

(١٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران

$هـ(س) = س^2 - \frac{3}{2}س + \frac{3}{2}$

مماس مشترك

$ق'(س) = هـ'(س)$

$\frac{1}{2\sqrt{س}} = 2س - \frac{3}{2}$ بالتربيع

$\frac{1}{4س} = (2س - \frac{3}{2})^2$

$\frac{1}{4س} = 4س^2 - 6س + \frac{9}{4}$

$4س^2 - 6س + \frac{9}{4} - \frac{1}{4س} = 0$

بضرب المقام

$16س^3 - 24س^2 + 9س - 1 = 0$

قسمة تركيبية

	$س^2$	$س^3$	$س$	حدثابت
1	١٦	٠	١٥-	١-
	١	١٦	١٦	

$$(س-١)(١٦س^2+١٦س+١)$$

$س = ١$

أو $١٦س^2+١٦س+١=٠$

نحل بالقانون العام

$$= \frac{-١٦ \pm \sqrt{١٩٢}}{٣٢}$$

$$= -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣٢}}{٢٢}$$

$$= -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٢}}{٤}$$ مجال $\notin$

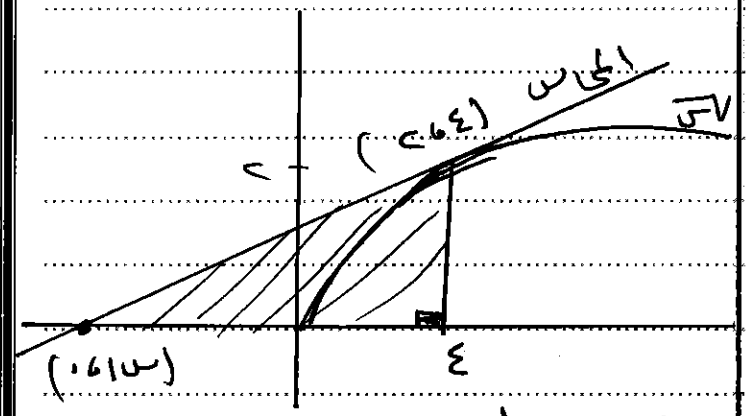
عند $س = ١$ $ص = \sqrt{١٧} = ١$

$(١، ١)$

الميل $= \frac{١}{\sqrt{١٧}} = \frac{١}{٢}$

المماس $ص - ١ = \frac{١}{٢}(س-١)$

(١٣) مساحة المثلث القائم الزاوية المكون من المماس لرسم المنحنى العلاقة $ص = \sqrt{س}$ $س \geq ٠$ عند النقطة $(٤، ٢)$ ومحور السينات والمستقيم $س = ٤$



$ص = \frac{١}{\sqrt{س}}$ عند $س = ٤$

$ص = \frac{١}{٤}$

ميل المماس $= \frac{٢-١}{١٣-٤} = \frac{١}{٤}$ بيادي

$٨ = ٤ - ١٣ \Leftarrow س = -٤$

مساحة المثلث

$\frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

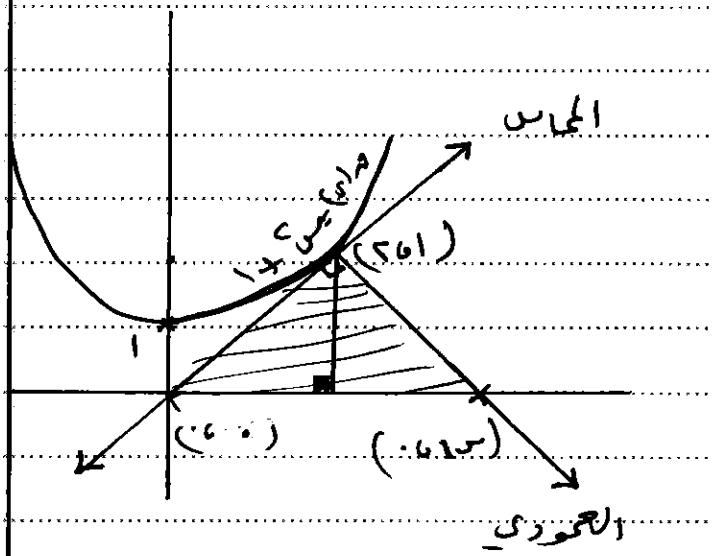
$= \frac{١}{٢} \times (-٤-٤) \times ٢$

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢ = ٨$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٤)

حدد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = س^2 + ١$ عند النقطة $(١، ٢)$



ميل المماس $= ق'$ عند $س = ١$

$\Leftarrow \quad = ٢ \times ١ = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ميل العمودي $= \frac{٢ - ٠}{١ - ١٣} = \frac{١}{-٢}$ بمبادئ

$٤ = -١ + ١٣ \Leftarrow ١٣ + ١ = ٥$

مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية
جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س^{٢} + ٣ ، اذا كان المودي
على هذا المماس يمر بالنقطة (٠، $\frac{٩}{٤}$)

الحل

نفرض نقطة التماس هي (س، ص)
ميل المماس = ق'(س) = ٢س
ميل المودي $\frac{ص - \frac{٩}{٤}}{س - ٠}$

$= \frac{س^{٢} + ٣ - \frac{٩}{٤}}{س - ٠} = \frac{س^{٢} - \frac{٣}{٤}}{س}$

ميل المودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$\frac{س^{٢} - \frac{٣}{٤}}{س} = \frac{-١}{٢س}$

$٢س^{٣} - ٣س = -س$

$٢س^{٣} - ٢س = ٠$

$٢س(س^{٢} - ١) = ٠$

س = ٠ ، ١ ، -١

عند س = ٠ ← ق(٠) = ٣ ∴ (٠، ٣)
ميل المماس = صفر
معادلة المماس ص = ٣
عند س = ١ ← ق(١) = ٤ ∴ (١، ٤)
ق(١) = ٢

معادلة المماس ص - ٤ = ٢(س - ١)
عند س = -١ ← ق(-١) = ٤ ∴ (-١، ٤)
ق'(-١) = -٢ = م
معادلة المماس ص - ٤ = -٢(س + ١)

---

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

① اذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ١٦) ، وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فاوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{٤ - ٢س}$

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{٤ - ٢س}$ = $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ١}{-(٢س - ٤)}$

$= -\frac{١}{٢} \times$ ق'(٢) $= -\frac{١}{٢} \times$ ظا٤٥°

$= -\frac{١}{٢} \times ١ = -\frac{١}{٢}$

---

② اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١، ق-٢) ، (٢، ٦ق) يمس منحنى الاقتران ق(س) = ل س^{٢} + ٢س - ١
فجد قيمة الثابت ل ؟

الحل

ميل المماس = ق'(س) = ٢ل س + ٢
ميل المستقيم = $\frac{٦ق - (ق-٢)}{٢ - ١} = \frac{٨}{١} = ٤$

← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ميل المماس = ميل المستقيم

$ص = س^{-1} + ج$

$\frac{ص}{س} = -1 \leftarrow س = 1 \leftarrow ص = 1 = \frac{1}{س}$

نجد معادلة المستقيم

$ص + 2 = 4(س - 0)$

$ص = 4س - 2$

$ص = ه$

$4س - 2 = ل س^2 + 2س - 1$

$4س - 2 = \frac{1}{س} \times س^2 + 2س - 1$

$4س - 2 = س + 2س - 1$

$4س - 3س = -1 + 2$

$س = 1 \quad \therefore ل = \frac{1}{1} = 1$

---

(٣) وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $ه(س) = 2س - جاس$

حيث $س \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فجد جميع قيم س التي يكون عندها المحور الصادي على المماس المنحنى ه موازيًا لمحور الصادات ثم جد معادلة احد هذه المماسات فقط

الحل

المحور الصادي يوازي الصادات ←

المماس يوازي السينات ←

$ه'(س) = 0$

$ه'(س) = 2 - 4 جتا 4س = 0$

$جتا 4س = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$4س = \frac{\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$

$س = \frac{\pi}{12}$ ، $\frac{5\pi}{12}$

نجد معادلة المماس عند $س = \frac{\pi}{12}$

$ه(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{6} - جا 4 \times \frac{\pi}{12}$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

المماس

$ص = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

---

(٤) وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اذا كان منحنيا الأقترانين

$ه(س) = س^2 + ب س + ل$

$هـ(س) = س^3 - س^2 - س + د$ مماسان عند النقطة $(-1, 0)$ فجد

① قيمة كل من الثوابت ب، ل، د

② معادلة المماس المشترك لمنحنيي الأقترانين ه، هـ عند النقطة $(-1, 0)$

الحل

ه يمر بالنقطة $(-1, 0)$

$ه(-1) = 0 \leftarrow 1 - ب + ل = 0$

$-ب + ل = -1 \quad ---①$

هـ يمر بالنقطة $(-1, 0)$ ←

$هـ(-1) = -1 - 1 + 1 + د = 0$

$د = 1$

← يتبع الحل

مكتبة الشام ALWEDAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$ق'(س) = ٢س + ب$
$ق'(-١) = -٢ + ب$
$هـ'(س) = ٣س^٢ - ٢س - ١$
$هـ'(-١) = ٣ + ٢ - ١ = ٤$
$ق'(-١) = هـ'(-١)$
$-٢ + ب = ٤ \leftarrow ب = ٦$
وبالتعويض $-٦ + ب = -١$
$ب = -١ + ٦ = ٥$
$\leftarrow ق(س) = س^٢ + ٦س + ٥$
$ق'(س) = ٢س + ٦$
$ق'(-١) = -٢ + ٦ = ٤$
المماس
$ص - ٠ = ٤(س + ١)$
$ص = ٤س + ٤$

---

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران $ق(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ حيث يكون المماس عند نقطة المماس عمودياً على المستقيم $٦ص - ٣س - ٥ = ٠$

الحل

$هـ'(س) = ٢س - ٤ =$ ميل المماس
ميل المستقيم (العمودي) $= \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$
ميل المماس × ميل العمودي $= -١$
$(٢س - ٤) \times \frac{-١}{٢} = -١$
$س - ٢ = -١$
$س = ١ +$
بالتعويض $س = ١ \Rightarrow ق(١) = ١ - ٤ + ٣ = ٠$
نقطة المماس $(١، ٠)$
ميل المماس $= ٢ \times ١ - ٤ = -٢$
معادلة المماس
$ص - ٠ = -٢(س - ١)$
$ص = -٢س + ٢$

---

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

جد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الأقتران $ق(س) = س^٢ + |س - ٤|$ عندما $س = ٣$

الحل

$س - ٤$	$٤ - س$
$-$	$+$

$س - ٤ = ٠$
$س = ٤$
③

$ق(س) = س^٢ - س + ٤$
$ق'(س) = ٢س - ١$
ميل المماس $= ٢ \times ٣ - ١ = ٥$
$ص_١ = ٣^٢ - ٣ + ٤ = ١٠$
معادلة المماس هي
$ص - ١٠ = ٥(س - ٣)$
العمودي
$ص - ١٠ = \frac{-١}{٥}(س - ٣)$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

جد نقطة تقاطع المنحنى الأقتران
ق(س) = √(٤-س) ، هـ(س) = س^٢
ثم جد معادلة المماس لمنحنى الأقتران
ق(س) عند تلك النقطة

الحل

هـ(س) = ١ / (٢√(٤-س)) ، هـ(س) = ٤س

ق(س) × هـ(س) = -١

١ / (٢√(٤-س)) × ٤س = -١

√(٤-س) = ٢س بالتربيع

س = ٤ - س^٢ ⇐

س^٢ + س - ٤ = ٠

(س+٢)(س-١) = ٠

س = ١ ، س = -٢

تهمل لأنها
ليست نقطة تقاطع

ق(١) = ١

∴ نقطة التقاطع (١،١)

ميل المماس للمنحنى هـ = ١ / (٢√(٤-س))

= ١/٤

معادلة المماس

ص - ١ = -١/٤ (س - ١)

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان المستقيم س + ٦ص + ٢ = ٠
يمس منحنى الأقتران
ق(س) = ٣س / (س-٢) ، س ≠ ٢
جد قيمة الثابت ب ؟

الحل

ميل المستقيم = -١/٦

ق'(س) = (٣(س-٢) - ٣س×١) / (س-٢)^٢

= -٦ / (س-٢)^٢

ص = ق ⇐ -١/٦ = -٦ / (س-٢)^٢

(س-٢)^٢ = ٣٦

س - ٢ = ±٦ ⇐

س = ٨ ، س = -٤

عند س = ٨ ← ق(٨) = ٤ = ٤/١

(٨، ٤)

بالتعويض في المستقيم

٨ + ٦ × ٤ + ب = ٠ ← ب = -٣٢

عند س = -٤ ← ق(-٤) = -١٢/-٦ = ٢

النقطة (-٤، ٢)

بالتعويض في معادلة المستقيم

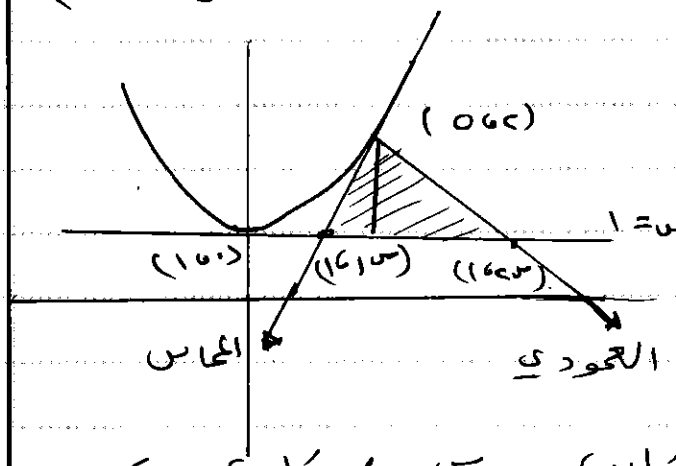
-٤ + ٦ × ٢ + ب = ٠

ب = -٨ ←

المعلم: ناجح الجمزاوي

(٩) وزارة (٢٠١٢) شتوية

مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ١$ عند النقطة $(٢، ٥)$، والمستقيم $ص = ١$ علماً بأن معادلة العمودي $ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٢}$



$ق'(س) = ٢س \Leftarrow ق'(٢) = ٤$

ميل المماس $= ٤$ ميل العمودي $= -\frac{١}{٤}$

ميل المماس $= \frac{٥ - ١}{٢ - س_{١}} = ٤$

$\Leftarrow ٨ - ٤س_{١} = ٤ \Leftarrow ٤س_{١} = ٤ \Leftarrow س_{١} = ١$

ميل العمودي $= \frac{٥ - ١}{٢ - س_{٢}} = -\frac{١}{٤}$

$\Leftarrow س_{٢} = ١٨$

طول القاعدة $= ١٨ - ١ = ١٧$

الارتفاع $= ٥ - ١ = ٤$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ١٧ \times ٤ = ٣٤$

(١٠) وزارة (٢٠١٢) صيفية

جد النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة $(ص - ٣)^{٢} = س + ٤$ موازياً المستقيم $٢س + ٤ص + ١ = ص$

الحل

ميل المستقيم $= \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

نشتق المعادلة

$٢(ص - ٣) \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{٢(ص - ٣)}$

المستقيم // المماس

$\frac{١}{٢(ص - ٣)} = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ص - ٣ = -١$

$\Leftarrow ص = ٢$

بالتعويض

$(٢ - ٣)^{٢} = س + ٤$

$١ = س + ٤$

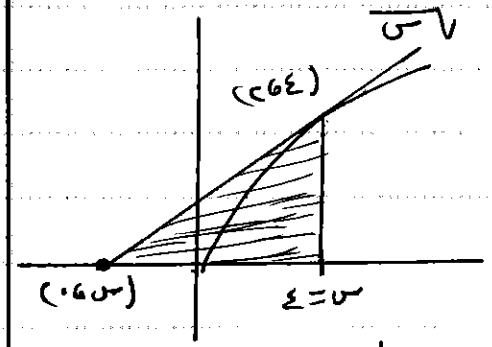
$\Leftarrow س = -٣$

النقطة $(-٣، ٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

جد مساحة المثلث القائم الزاوية المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $ص = ٨س - س^٢$ عند النقطة (٤، ٢٠) ومحور السينات والمستقيم $س = ٤$



ميل المماس $= \frac{١}{٨ - ٢س} = \frac{١}{٨ - ٤} = \frac{١}{٤}$

أيضاً ميل المماس $= \frac{٢٠ - ٠}{٤ - س}$

$\frac{٢٠}{٤ - س} = \frac{١}{٤} \Leftarrow ٨ = ٤ - س$

$\boxed{س = -٤}$

القاعدة $= ٤ + ٤ = ٨$

الارتفاع $= ٢٠$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢٠$

$= ٨٠$

(١٢) وزارة (٢٠١٣) صيفية

جد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة $(ص - ٤)^٢ = س + ٢$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $٣س + ٦ص + ٢ = ٠$

الكل

ميل المستقيم $= \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

ميل المماس (اشتقاق ضمنياً)

$٢(ص - ٤) \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{٢(ص - ٤)}$

المستقيم // المماس

$\frac{١}{٢(ص - ٤)} = -\frac{١}{٢}$

$-٢(ص - ٤) = ٢$

$ص - ٤ = -١ \Leftarrow ص = ٣$

نعوضها في العلاقة

$(٣ - ٤)^٢ = س + ٢$

$١ = س + ٢$

$\Leftarrow س = -١$

النقطة $(-١، ٣)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان المستقيم ٢س - ص + ٤ = صفر يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٤}{س}$ ، س ≠ ٠ عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة على منحناه جد قيم الثابت ٤

الحل

ميل المستقيم = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢

ق'(س) = $\frac{+٤}{س^{٢}}$

ص' = ق'(س)

$\frac{٤}{س^{٢}}$ = ٢ ⇐ س^٢ = ٢

س = ١ ، س = -١

عند س = ١ ⇐ ق(١) = -٤

النقطة (١ ، -٤)

بالتعويض في المستقيم

٢ × ١ - (-٤) + ط = ٠ ⇐ ط = -٦

عند س = -١ ، ق(-١) = ٤

النقطة (-١ ، ٤)

بالتعويض في المستقيم

٢ × -١ - ٤ + ط = ٠

⇐ ط = ٦

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

بين ان لمنحنى الاقتران
ق(س) = س^٢ + ٤ مماسين
مرسومين من النقطة (١ ، ١)

الحل

نفرض نقطة التماس (س ، ص)

ميل المماس = $\frac{ص - ١}{س - ١}$ =

= $\frac{س^{٢} + ٤ - ١}{س - ١}$ = $\frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$

ميل المنحنى ق'(س) = ٢س

ق'(س) = ميل المماس

$\frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$ = ٢س

س^٢ + ٣ = ٢س^٢ - ٢س

س^٢ - ٢س - ٣ = ٠

(س - ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣ ⇐ ق(٣) = ٩ + ٤ = ١٣

(٣ ، ١٣)

س = -١ ⇐ ق(-١) = ٥

(-١ ، ٥)

مماسين مرسومين .

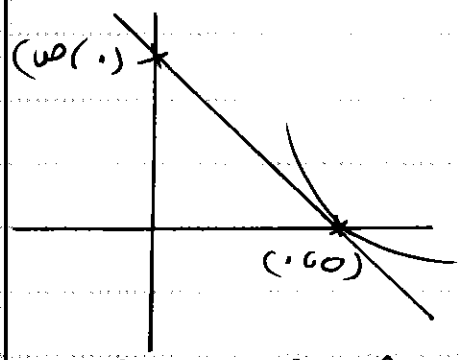
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

جد مساحة المثلث الواقع في الربع الأول والمحصور بين محوري الإحداثيات والمماس لمنحنى العلاقة $ص = \frac{٥}{س} - \frac{س}{٥}$ عند النقطة $(٥، ٠)$

الحل

النقطة $(٥، ٠)$ تقع على المنحنى



ميل المماس $= \frac{ص - ٠}{٠ - ٥} = -\frac{ص}{٥}$

$ص' = -\frac{٥}{س^٢} - \frac{١}{٥}$

$ص'|_{س=٥} = -\frac{٥}{٢٥} - \frac{١}{٥} = -\frac{٢}{٥}$

ميل المماس = ميل المنحنى

$-\frac{٢}{٥} = -\frac{ص}{٥}$ عندما $ص = ٢$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

اذا كان $ل(س)$، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $ل(س) + هـ^٢(س) = ف$ حيث $ف$ ثابت $ف \neq ٠$ وكان $هـ(ج) = ٣\sqrt{ف}$، $هـ(ج) = -٢\sqrt{ف}$ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ل(س)$ عند $س = ج$

الحل

$س = ج \Leftarrow ل(ج) \times هـ^٢(ج) = ف$

$ل(ج) \times (-٢\sqrt{ف})^٢ = ف$

$ل(ج) \times ٤ف = ف$

$ل(ج) = \frac{ف}{٤ف} = \frac{١}{٤}$

النقطة $(ج، \frac{١}{٤})$

$ل(س) \times ٢هـ(س) \times هـ'(س) + هـ^٢(س) \times ل'(س) = ٠$

$ل(ج) \times ٢هـ(ج) \times هـ'(ج) + هـ^٢(ج) \times ل'(ج) = ٠$

$\frac{١}{٤} \times ٢ \times ٣\sqrt{ف} \times -٢\sqrt{ف} + (٣\sqrt{ف})^٢ \times ل'(ج) = ٠$

$-٣ف + ٤ف \times ل'(ج) = ٠$

$٤ف \times ل'(ج) = ٣ف$

$ل'(ج) = \frac{٣ف}{٤ف} = \frac{٣}{٤}$

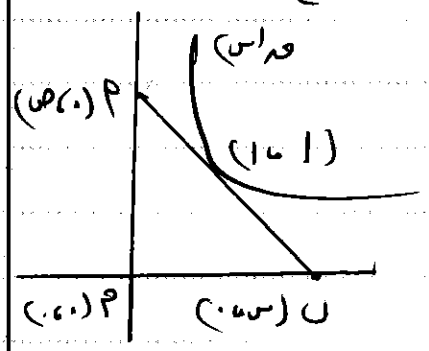
معادلة المماس

$ص - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}(س - ج)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل المثلث م م ن الذي ضلعه $\overline{م ن}$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{ح}{س+١}$ حيث $س \neq -١$ عند النقطة $(١، ١)$ جد قيمة الثابت $ح$ التي تجعل مساحته تساوي $(\frac{٩}{٤})$ وحدة مربعة



$(١، ١)$ تقع على المنحنى ⟵

$ق(١) = ١ \Leftarrow \frac{ح}{٢} = ١ \Leftarrow ح = ٢$

$ق'(س) = \frac{-ح}{(س+١)^{٢}} = \frac{-٢}{(س+١)^{٢}}$

$ق'(١) = \frac{-ح}{٤} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ميل المماس $= \frac{ص-١}{٠-١} = -\frac{١}{٢}$

$٢ص - ٢ = ١+$

$٢ص = ٣ \quad ص = \frac{٣}{٢}$

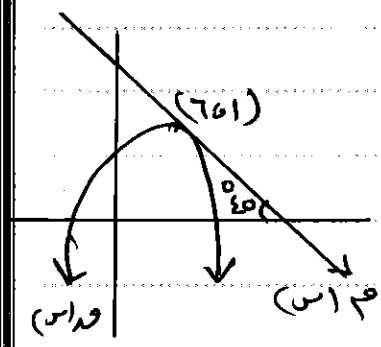
ميل المماس $= \frac{١-٠}{١-س} = \div \frac{١}{٢}$

$٢ = -١+س \quad س = ٣$

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤}$

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $ق(س)$ ، $ل(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق حيث ان $ق(س) = (س+٢) ل(٢س)$ وكان م $(س)$ مماساً للاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(١، ٦)$ كما هو موضح في الشكل المجاور جد $ل'(٢)$



الحل

$ق(س) = (س+٢) \times ل(٢س)$

$ق'(س) = (س+٢) \times ل'(٢س) \times ٢ + ل(٢س) \times ١$

المطلوب $ل'(٢) \Leftarrow ٢س = ٢$

$س = ١$

$ق'(١) = (١+٢) \times ل'(٢) \times ٢ + ل(٢)$

$= ٣ ل'(٢) \times ٢ + ل(٢)$

$= ٦ ل'(٢) + ل(٢)$

$ق'(١) = ظا ١٣٥° = -١$

لكن $ق'(١) = ٣ ل'(٢) = ٦$

لأن $ق'(١) = ٦$ من المعطيات

$ل'(٢) = \frac{٦}{٣} = ٢$

$ق'(١) = ٦ ل'(٢) + ل(٢)$

$-١ = ٦ ل'(٢) + ٢$

$٦ ل'(٢) = -٣ \quad ل'(٢) = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

مكتبة الإسكان ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

جد معادلة المماس للمنحنى الذي قاعدته $ق(س) = (س+٣)^٢$ المرسوم من النقطة (٠، ٠)

الحل

نفرض نقطة المماس $(س، ص)$

ميل المماس = ميل المنحنى

$$\frac{ص - ٠}{س - ٠} = ٢(س+٣)$$

لكن $ص = (س+٣)^٢$

$$\frac{(س+٣)^٢}{س} = ٢(س+٣)$$

$(س+٣)^٢ = ٢س(س+٣)$

$س^٢ + ٦س + ٩ = ٢س^٢ + ٦س$

$س^٢ = ٩ \quad س = \pm ٣$

عند $س = ٣ \leftarrow ص = (٣+٣)^٢$

$= ٣٦$

ميل المماس $= ٢(٣+٣) = ١٢$

معادلة المماس

$ص - ٣٦ = ١٢(س - ٣)$

عند $س = -٣$

$ص = (-٣+٣)^٢ = ٠$

النقطة $(-٣، ٠)$

ميل المماس $= ٢(-٣+٣) = ٠$

$= صفر$

$ص - ٠ = صفر(س+٣)$

$ص - ٠ = ٠$

$ص = ٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧ ع) صيفية

جد النقط التي يكون عندها المماس للمنحنى الاقتران د(س) = $\frac{س^2+ك+1}{س+ك}$

س ≠ ١ ، محمودياً على المستقيم

٣ص = -٤س + ٥

(٧ علامات)

الحل

$د'(س) = \frac{(س+1)(س+ك)-(س^2+ك+1)}{(س+1)^2}$

$د'(س) = \frac{س^2+ك س+س+ك-س^2-ك-1}{(س+1)^2}$

$= \frac{ك س+س-1}{(س+1)^2}$

$= \frac{س(ك+1)-1}{(س+1)^2}$

ميل المحودي ⟸ ٣ص' = -٤

⟸ ص' = $-\frac{٤}{٣}$

ميل المحودي × ميل المماس = -١

$\frac{س(ك+1)-1}{(س+1)^2} \times -\frac{٤}{٣} = -\frac{١}{١}$

⟸ ٤(س(ك+1)-1) = ٣(س+1)^2

٤س(ك+1)-٤ = ٣س^2+٦س+٣

٤س ك+٤س-٤ = ٣س^2+٦س+٣

س^2+٢س-٣ = ٠

(س+٣)(س-١) = ٠

س = -٣ ⟸ ص = $\frac{٩+٣+١}{-٣+١} = -\frac{٧}{٢}$

س = ١ ⟸ ص = $\frac{١+١+١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ورقة عمل التطبيقات الهندسية

السؤال الأول :
أكتب معادلة المماس والعمودي على المماس فيما يلي

١) $f(س) = س^٣ + س^٢$ عند $س = ١$
٢) $f(س) = \sqrt{س^٢ + ٥}$ عند $س = ٢$
٣) $س^٢ + ص^٣ = ١٧$ عند $س = ٢$
٤) $س = ن^٢ + ٢$ ، $ص = ن^٣ + ١$ عند $ن = ١$

السؤال الثاني

(أ) جد النقطة على منحنى $\sqrt{س + ٢ص} = ٦$ بحيث يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $٣س + ٦ص = ٧$
ج : (٦، ٤)

(ب) أكتب معادلة المماس لمنحنى $(س + ص)^٣ - ٥س + ص = ١$ عند نقاط التقاطع مع المستقيم $س + ص = ١$

(ج) جد معادلة المماس لمنحنى $f(س) = جا س - جتا س$ حيث $س \in [٠، \frac{\pi}{٢}]$ عند النقطة التي يقطع فيها المنحنى محور الصيات
ج : $ص - ٠ = ٢(س - \frac{\pi}{٤})$

(د) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(س) = ظا س$ حيث $س \in [٠، \frac{\pi}{٢})$ عندما يكون المماس موازيًا للمستقيم $ص = ٤س + ٢$

(هـ) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(س) = جا ٢س$ عند النقطة التي يصنع المماس عندها زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه السالب لمحور الصيات علمًا بأن $س \in (٠، \frac{\pi}{٢})$
ج : $ص - \frac{١}{٢} = -١(س - \frac{\pi}{١٢})$

موقع الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ) اذا كانت $\lim_{ع \to ١} \frac{هـ(ع) - هـ(١)}{ع - ١} = -١$

جد قياس زاوية ميل المماس لمنحنى هـ عند النقطة $(١، هـ(١))$

$ظا = \frac{٣\pi}{٤}$

(ب) جد احداثي نقطة ايما س التي يكون عندها المماس لمنحنى $ص^٢ - ٢ = ٨س^٢$ عموديًا على المستقيم $ص = \frac{س + ٥}{٢}$

(ج) اذا كان المستقيم $١٣س - ص - ٧ = ٠$ عمودي على منحنى $ص = ب س^٣ + ب س^٢$ عند النقطة $(١، ٦)$ فما قيمة $ب$ ، $ب$

$ب = ١$ ، $ب = ٥$

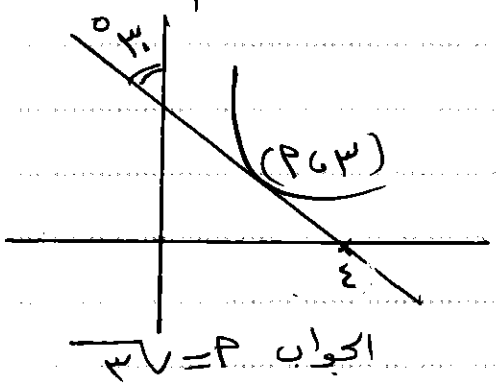
(د) اوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$ عند النقطة $(٤، ٢)$

السؤال الرابع

(أ) اوجد قيم $ب$ ، $ب$ ، $هـ$ حتى يكون لمنحنى الدالتين $ص = ب س^٣ + ب س$ ، $ص = هـ س^٢ - س$ مماسًا مشتركًا عند النقطة $(-١، ٢)$

$ب = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = \frac{٣}{٢}$ ، $هـ = ١$

(ب) الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ(س)$ حيث رسم مماس للاقتران عند النقطة $(٣، ب)$ فما قيمة الثابت $ب$



الجواب $ب = ٣\sqrt{٧}$

(ج) اذا كان المستقيم $٨س - ٤ص + هـ = ٠$ عمودي على منحنى الاقتران $هـ(س) = \frac{٣}{٢}س - \frac{٨}{س}$

جد قيمة الثابت $هـ$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(أ) جد مساحة المثلث المكون من المحاس والعمودي على المحاس للمنحنى الاقتران ص = $\frac{9-س^2}{2}$ عند س = -١ ومحور السينات

(ب) اذا كان
ق(س) = $س^2 - أس - (١-أ)$
جد قيمة الثابت أ التي تجعل محور السينات مماساً لمنحنى ق

أ = ٢

(ج) اذا كان المستقيم ص = ٦س - ٧ عمودي على منحنى ق(س) = $أس^2 + بس + جـ$ عند النقطة (٣، ١١) والمستقيم ص = ٢ يمس نفس المنحنى عند النقطة (٢، ٠) فجد قاعدة ق(س)

ق(س) = $س^2 + ٢$

(د) اذا كان ص = $س^2 + ٣س = ٧$ يمثل معادلة العمودي لمنحنى ق(س) عند س = ١ وكانت ل(س) = ٦س ق(س) فأوجد ل(١)

الجواب = ١٦

السؤال السادس

(أ) اذا كانت ق(س) = $\frac{س^2}{ل(س)}$ ل(س) ≠ ٠ وكانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢ هي ٣س + ص = ١١ فجد ل(٢)

الجواب $\frac{٣٢}{٢٥}$

(ب) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١، ٠) و (٣، ٤) يمس المنحنى ق(س) = $أس^2 - ٧س + ٥$ فجد قيمة أ

الجواب أ = ٤

(ج) اذا كان المستقيم ص = ٣س + ٤ يمس المنحنى ق(س) = $أ جا س + ب$ عند النقطة (٠، ٤) فجد أ، ب

أ = ٣، ب = ٤

(د) رسم من النقطة أ(٠، ٤) مماسان لمنحنى ق(س) = $س^2 - ٣س + ل$ فجد ل، ثم جد معادلة $\overleftrightarrow{أد}$ اذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هي ص + ٥س - ٤ = ٠

ص - ٣ = -(س - ١)

السؤال السابع

(أ) أكتب معادلة المماس للمنحنى $٤س^{٢}+ص^{٢}=٨$ والمرسوم من النقطة $(-٢،٠)$

$ص+٢=ق(س+١)$
$ص-٢=ق(س+١)$

(ب) اذا كانت معادلة المماس للمنحنى $ه(س)$ عند $س=٢$ هي $ص+٣س=١٠$ وكان

$ل(س)=س^{٢}ه(س)+\frac{١٦}{ه(س)}$

جد $ل'(٢)$

$ل'(٢)=٧$

(ج) اذا كان كل المنحنيين $ه(س)$ ، $و(س)$ مماس افقي عند $(٤،٢)$ وكان $ل(س)=\frac{١٦س+ه(س)}{و(س)}$

اوجد $ل'(٢)$

$ل'(٢)=٤$

(د) اذا كانت معادلة المحاس المنحنى $ه(س)$ هي $٣س+٣ص=٨$ فجد $ه'(١)$

$ه'(١)=-\frac{٣}{٤}$

السؤال الثامن

(أ) اذا كان المستقيم $٨س-٤ص-٤=٠$ مماساً للمنحنى $ه(س)$ عند $(٣،٥)$ وكان المستقيم $٣س-٦ص+١٥=٠$ عمودياً على منحنى $ل(س)$ عند $(٤،٢)$ فجد $(ه\cdot ل)'(٢)$

الجواب $=-٢$

(ب) اذا كانت معادلة المماس للمنحنى $ه(س)=أس^{٣}+بس^{٢}$ عند $س=١$ هي $٣س+ص=٨$ فجد $أ$ ، $ب$

$أ=-١٣$ $ب=١٨$

(ج) اذا كان $ه(س)=س\,ل'(٢س)$ وكانت $ص=\frac{٤٨-س}{٥}$ تمثل معادلة العمودي على المماس للمنحنى $ه$ عند $س=٣$ فجد $ل''(٦)$

(د) اذا كان المماس للمنحنى $ه(س)=\frac{أ}{س}$ $س>٠$ يمر بالنقطتين $(-١،٢)$ ، $(١٦،٠)$ فجد قيمة $أ$

$أ=\frac{١}{٤}$

مكتبة الوسام AL WESAM
الأستاذ : ناجح الجمزاوي

حلول ورقة عمل التطبيقات الهندسية

السؤال الأول

① $ق(س) = ٣س^{٢} + ٤س$

$ق(١) = ٥$

$ق'(١) = ٢$ (ميل)

$ص - ٢ = ٥(س - ١)$

② $ق(س) = \frac{٤س}{٤س^{٢} + ٥}$

$ق(٤) = \frac{٤}{٣}$

$ص = \sqrt{٤ + ٥} = ٣$ (٣، ٤)

$ص - ٣ = \frac{٤}{٣}(س - ٤)$

③ $٢س^{٢} + ٣ص^{٢} \times ص' = ٠$

عند $س = ٣ \Rightarrow ٤ + ص^{٣} = ١٧$

$\Leftarrow ص^{٢} = ٨ \quad ص = ٢$

$٢ \times ٤ + ٣ \times ٤ \times ص' = ٠$

$١٢ ص' = -٦ \Leftarrow ص' = \frac{-٦}{١٢} = \frac{-١}{٢}$

$ص - ٢ = \frac{-١}{٢}(س - ٣)$

④ $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ن} \times \frac{ن}{س}$

$= ٣ن^{٢} \times ٤ن$

$\left|\frac{ص}{س}\right| = ٣ \times ٤ = ١٢$

$ن = ١$

عندما $ن = ١ \Leftarrow س = ٢$

$ص = ٢$

$م = ١٢$ (٣، ٢)

$(ص - ٢) = ١٢(س - ٣)$

السؤال الثاني

① $\frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص} = ٠$

$\frac{ص'}{ص} = -\frac{١}{س}$

$ص' = -\frac{ص}{س}$

ميل المستقيم $= -\frac{٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

$ص' = ٠ \Leftarrow ٣ص^{٢} + ٢ص' = ٠$

$ص = -٣$

$س = ٤ص \Leftarrow \frac{س}{ص} = ٤$

ميل العمودي $= ٤$

$\leftarrow$ يتبع الحل

$٧س + ٢ص = ٦$

$\Leftarrow ١٤ص + ٧ص = ٦ \leftarrow ٧ص + ٧ص = ٦$

$\Leftarrow ٣ص = ٦$ بالجمع

$٩ص = ٣٦ \leftarrow ص = \frac{٣٦}{٩} = ٤$

$\leftarrow س = ٤ \times ٤ = ١٦$

النقطة $(١٦ ، ٤)$ $م = -\frac{١}{٢}$

$ص - ٤ = -\frac{١}{٢}(س - ١٦)$

---

(١) $(س + ص)^٣ - ٥س + ص = ١$ ... (١)

$س + ص = ١ \Leftarrow ص = ١ - س$

بتعويضها في (١)

$(س + ١ - س)^٣ - ٥س + ١ - س = ١$

$١ - ٥س + ١ - س = ١$

$-٦س + ٢ = ١ \Leftarrow س = \frac{١}{٦}$

بتعويضها $ص = ١ - س$

$ص = ١ - \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$

النقطة $(\frac{١}{٦} ، \frac{٥}{٦})$

---

(٢) المنحنى

$٣(س + ص)^٤ (١ + ص') - ٥ + ص' = ٠$

$٣(\frac{١}{٦} + \frac{٥}{٦})^٤ (١ + ص') - ٥ + ص' = ٠$

$٣(١ + ص') - ٥ + ص' = ٠$

$٣ + ٣ص' - ٥ + ص' = ٠$

$٤ص' - ٢ = ٠ \Leftarrow ص' = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس

$ص - \frac{٥}{٦} = \frac{١}{٢}(س - \frac{١}{٦})$

---

(٣) نقطع محور السينات عندما $ص = ٠$

$ق(س) = جا س - جتا س = ٠$

$جا س = جتا س$

$ظا س = ١ \quad س = \frac{\pi}{٤}$

$ص = جا \frac{\pi}{٤} - جتا \frac{\pi}{٤} = صفر$

النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٠)$

$ق'(س) = جتا س + جا س = جتا \frac{\pi}{٤} + جا \frac{\pi}{٤}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

معادلة المماس

$ص - ٠ = \frac{٢}{\sqrt{٢}}(س - \frac{\pi}{٤})$

---

(٤) $ق(س) = ظا س$ حيث $ص = ٤س + ٢$

$ق'(س) = قا^٢ س \quad ص' = ٤$

$قا^٢ س = ٤ \Leftarrow \frac{١}{جتا^٢ س} = ٤$

$\Leftarrow جتا^٢ س = \frac{١}{٤} \quad جتا س = \pm \frac{١}{٢}$

$جتا س = \frac{١}{٢}$ بربع أول $س = \frac{\pi}{٣}$

$ص = ظا \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ص = \sqrt{٣}$

النقطة $(\frac{\pi}{٣} ، \sqrt{٣})$

الميل $= ٤$

$ص - \sqrt{٣} = ٤(س - \frac{\pi}{٣})$

مجموعة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

ميل المماس = ظا ٦٠° ← لأن الخط يوازي
ق = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

$\frac{ص}{ع} = \frac{ق}{ع}$ ، $ق(س) = ع$ ضا ع س

$ع س = \frac{\pi}{٦} \Leftarrow س = \frac{\pi}{١٢}$

$ص = ٢$ جا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ جا $\frac{\pi}{٦} = \frac{١}{٢}$

النقطة $(\frac{\pi}{١٢}, \frac{١}{٢})$

معادلة المماس

$ص - \frac{١}{٢} = ٣\sqrt{٢}(س - \frac{\pi}{١٢})$

السؤال الثالث

(أ) ميل المماس = ظا هـ = ق(س) عند نقطة المماس

ظا هـ = ق(١) من التعريف

$= \frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$ ، $٤ \to ١$

ظا هـ = −١

$هـ = \frac{٣\pi}{٤}$

(ب) ميل المستقيم = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ميل المماس = −٢

$٢ ص ص' = ١٦ س$

$ص' = \frac{١٦ س}{٢ ص} = \frac{٨ س}{ص}$

ميل العمودي × ميل المماس = −١

$\frac{١}{٢} \times \frac{٨ س}{ص} = -١$

$٤ س = -ص \Leftarrow ص = -٤ س$

نعوض في

$ص^٢ - ٢ = ٨ س^٢$

$(-٤ س)^٢ - ٢ = ٨ س^٢$

$١٦ س^٢ - ٢ = ٨ س^٢$

$٨ س^٢ = ٢ \quad س^٢ = \frac{١}{٤}$

$س = + \frac{١}{٢}$ ، $ص = -٤ \times \frac{١}{٢}$

$(\frac{١}{٢}, -٢)$

$= -٢$

$س = -\frac{١}{٢}$ ، $ص = -٤ \times -\frac{١}{٢}$

$= ٢$

$(-\frac{١}{٢}, ٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(ج)

١٣ س - ص - ٧ = ٠

⇐ ص = ١٣ س - ٧ المستقيم

ص = ب س٢ + د س + ج

المقطع (١، ٦)

الميل = ظل الزاوية

١٣ = ٣ ب س + د

عند (١، ٦)

١٣ = ٣ ب + د ... (١)

الصورة ٥ = الصورة ٥

١٣ × ١ - ٧ = ب + د

٦ = ب + د ... (٢)

بحل (١) ، (٢)

٢ × ٦ = ب + د

١٣ = ب - ٣ د

- ٦ = ب + د

١٣ = ب - ٣ د

- ١٩ = ٤ د

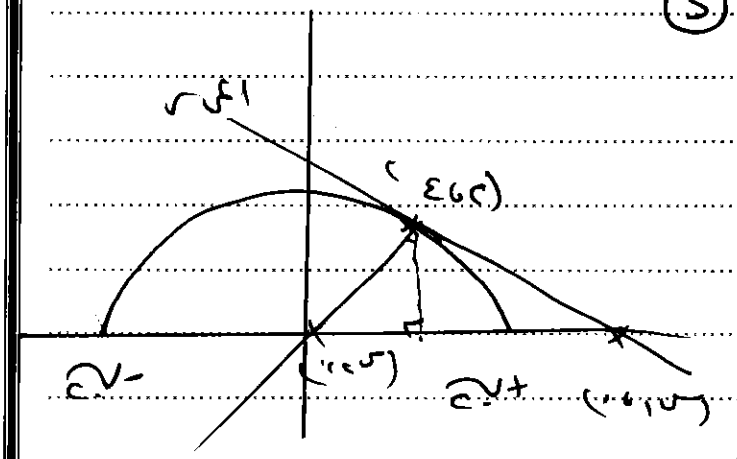
د = ١

بالتعويض في (٢)

٦ = ب + ١

ب = ٥

(S)



ص = ٣ ب س٢ + ٢ د س + هـ

عند (٤، ٦) ص = ٠

٠ = ٣ ب × ١٦ + ٢ د × ٤ + هـ

٠ = ٤٨ ب + ٨ د + هـ

ميل المماس = ميل المستقيم

$\frac{1}{4}$ = ٤٨ ب + ٨ د + هـ

$\frac{-13}{4}$ = ٤٨ ب + ٨ د + هـ

٤ × ٠ = ٤ × ٤٨ ب + ٤ × ٨ د + ٤ × هـ

٠ = ٤ × ٤٨ ب + ٤ × ٨ د + ٤ × هـ

- ١٣ = ٤ هـ

هـ = $\frac{-13}{4}$

بالتعويض في (٢)

٠ = ٤٨ ب + ٨ د - ١٣

٤ = ٨ د = $\frac{1}{2}$ د

١٣ = ٢ د - ٤ ب

---

٤ = ٠ - ٤ ب

ب = $\frac{-1}{2}$

ميل العمودي = $\frac{0 - 4}{0 - 10}$ = ٢

ص - ٤ = ٢ (س - ٠)

ص = ٢ س + ٤

عند ص = ٠

٠ = ٢ س + ٤

س = - ٢

(س، ص) = (- ٢، ٠)

مساحة المثلث

= $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ٤

= ٣٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

(أ) مماس عمودي

المشتقة = المشتقة

$3p س^2 + ب = 2 هـ^{2س} - 1$

عند $س = -1$

$3p(-1)^2 + ب = 2هـ^{-2} - 1$

$3p + ب + 2هـ^{-2} = -1$ ..... (١)

$ص_1 = p(-1)^3 + ب(-1) + 1 = 2$

$-p + ب = 1$ ..... (٢)

(ب) $ص_2 = د(-1)^2 + 1 = 2$

$د + 1 = 2$

$د = 1$ بتعويض في (٢)

$3p + ب + 2 = -1$

$3p + ب + 3 = 0$ ..... (١)

$-p + ب = 1$ ..... (٢) بالطرح

$4p + 2 = -2$

$4p = -4$

$p = -1$

بتعويض في (٢)

$ب = 1 - 1 = 0$

$ج = 1 - 0 = 1$

(ج) $ص_3 = ج(-1)^3 + 1 = 2$

$ج = 1$

$ص = س^3 + س + 1$

$ص' = 3س^2 + 1$

$ص'' = 6س$

$6س = 0$

$س = 0$

$ص = 1$

نقطة الانعطاف $(0, 1)$

(د) $ص = س^3 + س + 1$

$ص' = 3س^2 + 1$

$ص'' = 6س$

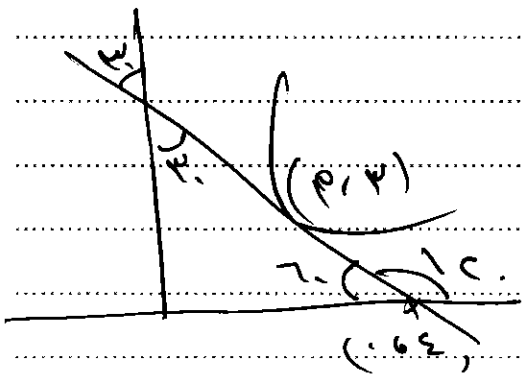
$6س = 0$

$س = 0$

$ص = 1$

نقطة الانعطاف $(0, 1)$

(أ) ①



ميل المماس $= \frac{9 - 1}{3 - 4} = \frac{8}{-1} = -8$

$ظا\theta = -8$

$\theta = 180 - 82.87 = 97.13°$

(ب) $ص = 4س^3 - 3س^4 + د$

$ص' = 12س^2 - 12س^3$

$ص'' = 24س - 36س^2$

$24س - 36س^2 = 0$

$12س(2 - 3س) = 0$

$س = 0$ أو $س = \frac{2}{3}$

$ص = د$ أو $ص = \frac{16}{27} + د$

$د = 0$ أو $د = -\frac{16}{27}$

(ج) $ص = س^3 + ب س^2 + ج س + د$

$ص' = 3س^2 + 2ب س + ج$

$ص'' = 6س + 2ب$

$6س + 2ب = 0$

$س = -\frac{ب}{3}$

$-\frac{ب}{3} = 1$

$ب = -3$

$ص = س^3 - 3س^2 + ج س + د$

$ص' = 3س^2 - 6س + ج$

$3 - 6 + ج = 0$

$ج = 3$

$ص = س^3 - 3س^2 + 3س + د$

$1 - 3 + 3 + د = 0$

$د = -1$

$ص = س^3 - 3س^2 + 3س - 1$

(د) $ص = س^3 + ب س^2 + ج س + د$

$ص' = 3س^2 + 2ب س + ج$

$ص'' = 6س + 2ب$

$6س + 2ب = 0$

$س = -\frac{ب}{3}$

$-\frac{ب}{3} = 1$

$ب = -3$

$ص = س^3 - 3س^2 + ج س + د$

$ص' = 3س^2 - 6س + ج$

$3 - 6 + ج = 0$

$ج = 3$

$ص = س^3 - 3س^2 + 3س + د$

$1 - 3 + 3 + د = 0$

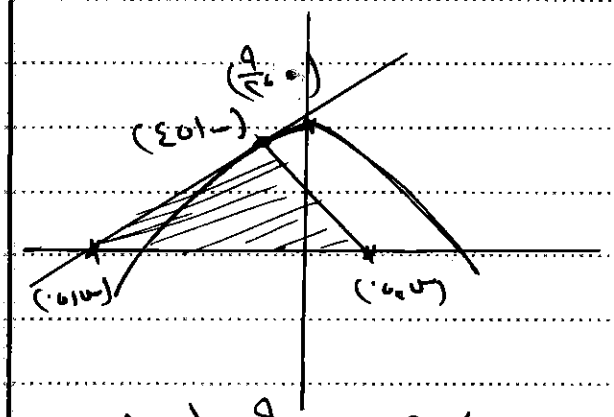
$د = -1$

$ص = س^3 - 3س^2 + 3س - 1$

مكتبة الوسام
ALWSAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

الوحدة الخامسة

(أ)



$س = -١ \Leftarrow ص = \frac{٩-١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

ميل المماس $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤-٠}{-١-٣} = \frac{٤}{-٤} = -١$

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٠ = -١(س - ٣)$

$ص = -س + ٣$

ميل العمودي $= \frac{-١}{م} = \frac{-١}{-١} = ١$

$ص - ٤ = ١(س + ١)$

$ص = س + ٥$

$٣ = ٠ + ٣ \Leftarrow ٣ = ٠ + ٣$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢}(٣ - (-٥)) \times ٤$

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٤ = ١٦$ وحدة مربعة

(ب)

$ص = ٢س^٣ - ٧$ عند $ص = ٩ س^٢ + ٢ب + ٥$

عند $(٣، ١١)$

$١١ = ٢٧ + ٣ب + ٥ \Leftarrow ١١ = ٩(٣) + ٣ب + ٥$ ... (١)

$م(٣) =$ ميل المماس $= ٦$

$١٨ + ب = ٦ \Leftarrow ب = -١٢$

$٦ + ب = ٦ \Leftarrow ٦ = ٦$ ... (٢)

$ص = ٢$ عند $ص = ٩ س^٢ + ٢ب + ٥$

$(٠، ٢)$

$٢ = ٠ + ٠ + ٥ \Leftarrow ٢ = ٩(٠)^٢ + ٢ب(٠) + ٥$

$ج = ٢$

(ج)

$م(س) = ٢ - ٢ج$

ميل المماس $= ٠$

$٢ - ٢ج = ٠ \quad س = \frac{٢}{٤}$

$م(\frac{٢}{ج}) = ٠$

$(\frac{٢}{ج})^٢ - ٢ \times \frac{٢}{ج} - (١ - ٢) = ٠$

$\frac{٤}{ج^٢} - \frac{٤}{ج} + ١ + ٢ = ٠$

$\frac{٤ - ٤ج + ج^٢}{ج^٢} = ٠$ بالضرب في $ج^٢$

$ج^٢ - ٤ج + ٤ = ٠$

$(ج - ٢)(ج - ٢) = ٠$

$ج = ٢$

بتعويض $س = ٢$ في (١)

$٩أ + ٣ب + ج = ١١$

$٩أ + ٣ب + ج = ١١$

$٩أ + ٣ب + ج = ٠$ ..... (١)

$٦أ + ب = ٠$ ..... (٢)

بضرب (٢) في -٣

$٩أ - ٣ب = ٠$

$-٩أ + ٣ب + ١٨ = ٠$

$٩ = ٩أ \Leftarrow ٩أ + ٩ = ٠$

$أ = ١$

فاذا $ص = ق(س) = س^٢ + ٢$

(S)

$ل'(س) = ٦س \times ق'(س) + ق(س) \times ٦$

معادلة العمودي $٢ص + ٣س = ٧$

$٢ص' + ٣ = ٠ \Leftarrow ص' = -\frac{٣}{٢}$ ميل العمودي

$\Leftarrow$ ميل المماس $= \frac{٢}{٣} = ق'(١)$

عند $س = ١$

$٢ص + ٣ = ٧$

$٢ص = ٤ \Leftarrow ص = ٢$

$ق(١) = ٢$

$ل'(١) = ٦ \times ١ \times ق'(١) + ق(١) \times ٦$

$= ٦ \times \frac{٢}{٣} + ٢ \times ٦$

$= ٤ + ١٢ = ١٦$

السؤال السادس

(أ)

$ق'(٢) = \frac{ل(٢) \times ع'(٢) - ع(٢) \times ل'(٢)}{(ل(٢))^٢}$

$ص = ١١ - ٣س \quad ص' = -٣$

$\Leftarrow ق'(٢) = -٣$

$ص_١ = ١١ - ٣ \times ٢ = ٥ = ق(٢)$

$س = ٢$

لكن $ق(٢) = \frac{ع}{ل}$ بالتعويض في العلاقة

$٥ = \frac{ع}{ل} \Leftarrow ل = \frac{ع}{٥}$

$\Leftarrow -٣ = \frac{ع \times ٤ - ٤ \times ل'(٢)}{\frac{١٦}{٥}}$

$-\frac{٤٨}{٥} = \frac{١٦}{٥} = -٤ ل'(٢)$

$-\frac{٤٨}{٥} - \frac{٤٠}{٥} = -٤ ل'(٢)$

$-\frac{١٢٨}{٥} = -٤ ل'(٢)$

$ل'(٢) = \frac{١٢٨}{٥ \times ٤ \times ٤}$

$ل'(٢) = \frac{٣٢}{٥}$

(ب) ميل المستقيم $= \frac{٤-١}{٠-(-٣)} = ١$

معادلة المستقيم

$ص - ١ = ١ \times (س - ٠)$

$ص = س + ١$

ميل المستقيم = ميل العمودي

$١ = -\frac{س}{٢ق}$

$س = -٨$

$\Leftarrow س = \frac{٨}{ق} = \frac{٤}{ق}$

الصورة = الصورة

$س + ١ = ق س^{٢} - ٧س + ٥$

بتعويض $س = \frac{٤}{ق}$

$\frac{٤}{ق} + ١ = ق \times \frac{١٦}{ق^{٢}} - ٧ \times \frac{٤}{ق} + ٥$

$\frac{٤}{ق} + ١ = \frac{١٦}{ق} - \frac{٢٨}{ق} + ٥$

$\frac{٤}{ق} - \frac{١٦}{ق} + \frac{٢٨}{ق} = ٥ - ١$

$\frac{١٦}{ق} = ٤ \Leftarrow ق = \frac{١٦}{٤}$

$ق = ٤$

(د) ميل المستقيم = ميل العمودي

$٣ = ق$ ضا $س$ عند $س = ٠$

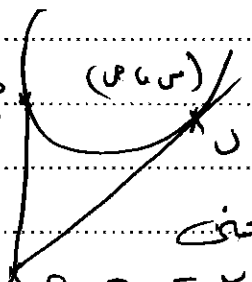
$٣ = ق$ ضا $٠ \Leftarrow ق = ٣$

الصورة ٥ = الصورة ٥

$٠,٦ ق + ٤ = ق + ٠,٤ ل$

$ل = ٤$

(ج)



ميل $أ ب = -٥$

= ميل المماس

$ق(س) = ٣س^{٢} - ٧ = -٥ \Leftarrow ٣س^{٢} = ٢$

$س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

$\boxed{س = -٢}$

$ص = ٣ - ٧ + ل = -٥ + ٤$

عند $س = -٢$

$-٨ + ١٤ + ل = -١ + ٤$

$ل = ٥$

$ق(س) = س^{٣} - ٧س + ٥$

نفرض $د = (س، ص)$

ميل $أ د = \frac{ص - ٤}{س - ٤} = ق'(س)$

$س^{٢} - ٧ = ٣س^{٢} - ٧$

$س^{٢} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$س = ١ \Leftarrow$ ميل $أ د = -١$ المقطع $(١، ٤)$

معادلة $أ د$ هي $ص - ٣ = -١(س - ١)$

السؤال السابع

(أ)

نفرض نقطة المماس $(س_1, ص_1)$

ميل المماس $= \frac{ص_1 - ٠}{س_1 + ٢} = \frac{ص}{س}$

$٨س + ٢ص \, ص' = ٠$

$ص' = \frac{-٨س}{٢ص} = -\frac{٤س}{ص}$

$\frac{ص_1 - ٠}{س_1 + ٢} = \frac{-٤س_1}{ص_1}$

$ص_1^٢ = -٤س_1^٢ - ٨س_1$

بما أن $ص_1^٢ = ٨ - ٤س_1^٢$

$٨ - ٤س_1^٢ = -٤س_1^٢ - ٨س_1$

$٨س_1 = -٨ \Rightarrow س_1 = -١$

عندما $س_1 = -١$ فإن

$٤(-١)^٢ + ص_1^٢ = ٨$

$ص_1^٢ = ٤ \Rightarrow ص_1 = \pm ٢$

النقطة $(-١، ٢)$

$ص - ٢ = ٢(س + ١)$

النقطة $(-١، -٢)$

$ص + ٢ = -٢(س + ١)$

(ب)

$ص = ١٠ - ٣س$

ميل المماس $= ص' = -٣$

$= هـ'(٢) = -٣$

$هـ(٢) = ١٠ - ٣ \times ٢$

$= ٤$

$ل'(س) = س^٢ \times هـ'(س) + \frac{١٦ \times هـ'(س)}{هـ^٢(س)}$

$ل'(٢) = ٤ \times هـ'(٢) + هـ(٢) \times ٤$

$= \frac{١٦ \times هـ'(٢)}{هـ^٢(٢)}$

$= ٤ \times -٣ + ٤ \times ٤ - \frac{١٦ \times -٣}{٤}$

$= -١٢ + ١٦ + ١٢$

$= ١٦$

(ج)

$هـ(٢) = صفر$

$هـ'(٢) = صفر$

$هـ(٢) = ٤$ ، $هـ'(٢) = ٤$

$ل'(س) = \frac{هـ(س)(١٦ + هـ'(س)) - (١٦ + ٢هـ(س)) هـ'(س)}{(هـ(س))^٢}$

$ل'(٢) = \frac{هـ(٢)(١٦ + ٠) - (١٦ + ٢هـ(٢)) \times صفر}{١٦}$

$ل'(٢) = \frac{٤ \times ١٦}{١٦} = ٤$

مكتبة الوسام WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(٥)

معادلة العمودي

$٣هـ - ٤ص = ٨$

ميل العمودي $= \frac{٤}{٣}$

ميل المماس $= -\frac{٣}{٤}$

$هـ'(١) = -\frac{٣}{٤}$

(أ)

ميل المماس $= -٣$

ميل المنحنى $= هـ'(١)$

$هـ'(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س$

$هـ'(١) = ٣أ + ٢ب$

$\Leftarrow ٣أ + ٢ب = -٣$ ---- (١)

$ص = ٨ - ٣س$

$هـ(١) = أ + ب = ٨ - ٣ \times ١$

$أ + ب = ٥$ ---- (٢)

$٣أ + ٢ب = -٣$

$٢أ + ٢ب = ١٠$

$أ = -١٣$ بالتعويض في (٢)

$-١٣ + ب = ٥$

$ب = ١٨$

السؤال الثاني

(ب)

ميل المستقيم $= -\frac{٦}{٤} = -\frac{٣}{٢}$

$هـ(٣) = ٢$ ، $هـ'(٣) = ٥$

ميل المستقيم $٣ل - ٢هـ + ١٥ = ٠$

$= \frac{٢}{٣} = \frac{١}{\text{ميل العمودي}}$

$ل'(٣) = -٢$ $ل(٣) = ٤$

$(هـ \cdot ل)'(٣) = هـ(٣) \times ل'(٣) + ل(٣) \times هـ'(٣)$

$= ٢ \times -٢ + ٤ \times ٥$

$= -١٠ + ٨$

$= -٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ب)

ميل العمودي $= -\frac{1}{5}$

ميل المماس $= 0 = ص'(3)$

$ص'(س) = ص \times ل'(5-س) \times -1 + ل'(5-س) \times 1$

$ص'(1) = \frac{48-3}{5} = \frac{45}{5} = 9$

$ص'(3) = 3 \times ل'(2) = 9$

$ل'(2) = 3$ بالتعويض

$ص'(3) = 3 \times ل'(2) \times -1 + ل'(2)$

$0 = 3 \times ل'(2) \times -2 + 3$

$0 = -6 ل'(2) + 3$

$6 ل'(2) = 3$

$ل'(2) = \frac{3}{6}$

ج)

ميل المماس = ميل المنظم

نفرض نقطة المماس $(س_1, ص_1)$

$\frac{ص-2}{1+س} = \frac{-4}{3} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

$-4 = \frac{-4}{3}$ $\quad$ $\boxed{3 = 3}$

$\frac{ص-2}{1+س} = -1$

$ص - 2 = -1 - س$

$ص + س = 1$

$\frac{4}{3} + س = 1 \Leftarrow 1 = س + \frac{س}{3} + 2$

$س + 2 = 1$

$3س = 1 \Leftarrow س = \frac{1}{3}$

$ص = \frac{4}{3}$

$ص = \frac{4}{3}(\frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني

تطبيقات فيزيائيه

اذا كان ف (ن) يمثل اقتران المسافه في الفتره [ن١ ، ن٢] فإن

① السرعة المتوسطة ع = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$

وعندما Δن ← صفر فانها تصبح سرعة لحظيه = مشتقة المسافه

ع (ن) = ف′(ن)

= $\frac{د ف}{د ن}$ = معدل تغير المسافه بالنسبه للزمن

② التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(ن_2) - ع(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$

وعندما Δن ← صفر فان التسارع يصبح لحظي

التسارع اللحظي = مشتقة السرعة

ت(ن) = ع′(ن) = ف″(ن)

= $\frac{د ع}{د ن} = \frac{د^2 ف}{د ن^2}$

= معدل تغير السرعه بالنسبة للزمن

بشكل عام

ف ← (اشتقاق) ع ← (اشتقاق) ت

(مشتقة ثانية)

ملاحظات هامة

① السرعة الابتدائية = ع (٠)

② ن = ٠ عندما

③ بداية الحركة ⓐ السرعة الابتدائية

ⓑ اللحظة التي تقذف الجسم منها

④ ع (ن) = صفر

ⓐ عندما يصل الجسم الى اقصى ارتفاع

ⓑ عندما تنعدم السرعة

ⓒ عندما يتوقف الجسم او يكون كفتاً

ⓓ عندما يعكس اتجاه حركته

⑤ ت(ن) = صفر

ⓐ تنعدم التسارع

ⓑ عند السرعة الثابتة

ⓒ الزمن دائماً موجب

⑥ يعود الجسم الى نقطة القذف ف (ن) = صفر

← تابع الملاحظات

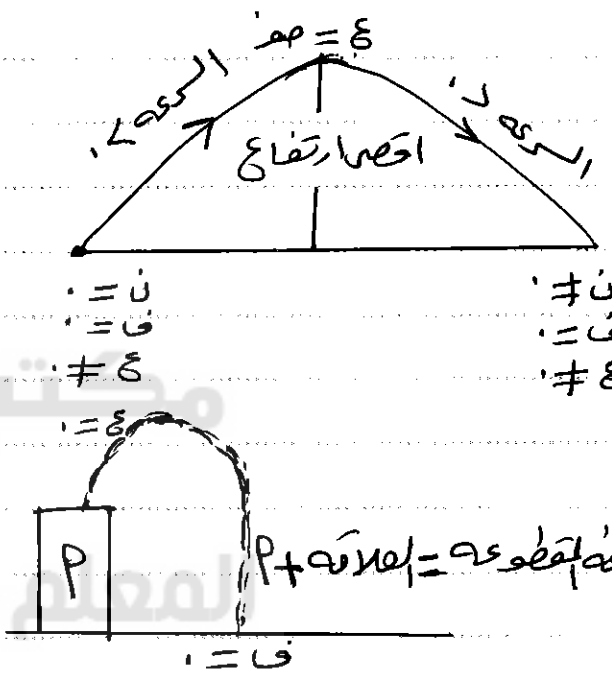
مكتبة الوسام AlwesAM المعلم : ناجح الجمزاوي

ملاحظات هامة

① السرعة عكس ان تكون موجبة أو تكون سالبة أو صفر حيث
السرعة موجبة ← الجسم يتحرك باتجاه الحركة
السرعة سالبة ← الجسم يتحرك عكس اتجاه الحركة
السرعة صفر ← الجسم ساكن أو متوقف

② التسارع يمكن ان يكون موجب أو سالب حيث
التسارع موجب ← السرعة تزداد (الجسم يتسارع)
التسارع سالب ← السرعة تناقص (يتباطأ)
التسارع صفر ← السرعة ثابتة

③ في المقذوفات



مثال ①

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن³ + ن²

① اجد سرعة وتسارع الجسم عندما ن = ٥

② اجد السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط في [١، ٣]

الحل

ف(ن) = ن³ + ن²
ع = ف' = ٣ن² + ٢ن
ت = ع' = ٦ن + ٢

① ع(٥) = ٣(٥)² + ٢×٥ = ٧٥ + ١٠ = ٨٥
ت(٥) = ٦×٥ + ٢ = ٣٢

② السرعة المتوسطة = $\frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١}$
$= \frac{(٣^٣ + ٣^٢) - (١^٣ + ١^٢)}{٢} = \frac{٣٤}{٢} = ١٧$

التسارع المتوسط = $\frac{ع(٣) - ع(١)}{٣ - ١}$
$= \frac{٣٣ - ٥}{٢} = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①
يتحرك جسم حسب العلاقة
$ف(ن) = \frac{ن^3}{3} - \frac{ن^2}{2} - 6ن$
اوجد مايلي

① المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٦ ثواني

الحل
$ف(6) = \frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} - 6\times6 = 18$

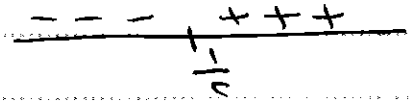
② سرعة الجسم بعد ٤ ثواني
$ع(ن) = ف'(ن) = ن^2 - ن - 6$
$ع(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6$ م/ث

③ تسارع الجسم بعد ثانيتين
$ت(ن) = ع'(ن) = 2ن - 1$
$ت(2) = 2\times2 - 1 = 3$ م/ث^2

④ التسارع عندما تنعدم السرعة

الحل
تنعدم السرعة $= ع(ن) = 0$
$ن^2 - ن - 6 = 0$
$(ن - 3)(ن + 2) = 0$
$ن = 3$ أو $ن = -2$ (مرفوض)
$ت(3) = 2\times3 - 1$
$= 6 - 1 = 5$

⑤ متى يكون التسارع سالبًا
$ت(ن) = 2ن - 1 < 0$
$ن < \frac{1}{2}$



التسارع سالب عندما $ن \in]0, \frac{1}{2}[$

⑥ اوجد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه $= 3$ م/ث^2

الحل
$ت(ن) = 3$
$2ن - 1 = 3 \Leftarrow ن = \frac{4}{2} = 2$
$ع(ن) = ن^2 - ن - 6$
$ع(2) = 2^2 - 2 - 6 = -4$ م/ث
عكس اتجاه الحركة

مثال ②
تحرك جسم في خط مستقيم حيث أن بعده س $= ف(ن) = جا\frac{ن}{2}$، $ن \in [0, 2\pi]$ اوجد تسارع الجسم عندما تكون السرعة $= \frac{1}{2}$ م/ث

الحل
$ع(ن) = ف'(ن) = 2جا\frac{ن}{2}$ جتا$\frac{ن}{2}$ $\times \frac{1}{2}$
يتبع الحل

مكتبة الوسام AL-WESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

ع(ن) = $\frac{1}{2}$ حان (متطابقة)

ع(ن) = $\frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{1}{2}$ حان = $\frac{1}{2}$

← حان = ١ ← ن = $\frac{\pi}{2}$

ت(ن) = $\frac{1}{2}$ حتان

ت($\frac{\pi}{2}$) = $\frac{1}{2}$ حتا$\frac{\pi}{2}$ = $\frac{1}{2}$ × صفر = صفر

مثال ③

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = حا^{٤}ن اوجد سرعة الجسم في اللحظة التي تنعدم تسارعه لأول مرة بعد تحركه.

الحل

ف(ن) = حا^{٤}ن

ع(ن) = ف'(ن) = ٤حا^{٣}ن حتان

ت(ن) = ٤حا^{٣}ن × -حان + حتان × ١٢حا^{٢}ن حتان

صفر = -٤حا^{٤}ن + ١٢حا^{٢}ن حتا^{٢}ن

٤حا^{٢}ن(-حا^{٢}ن + ٣حتا^{٢}ن) = صفر

٤حا^{٢}ن = ٠ ← حان = ٠

← ن = ٠ ، π ، ٢π ، ...

-حا^{٢}ن + ٣حتا^{٢}ن = ٠

حا^{٢}ن = ٣حتا^{٢}ن بالقسمة على حتا^{٢}ن

$\frac{\text{حا}^{٢}\text{ن}}{\text{حتا}^{٢}\text{ن}}$ = $\frac{٣\,\text{حتا}^{٢}\text{ن}}{\text{حتا}^{٢}\text{ن}}$ = ٣

ظا^{٢}ن = ٣ ⇐ ظان = ± $\sqrt{٣}$

⇐ ن = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، ...

اول مرة تنعدم فيها التسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٣}$

ع($\frac{\pi}{٣}$) = ٤حا$^{٣}\frac{\pi}{٣}$ حتا$\frac{\pi}{٣}$

= ٤($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)^{٣} × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ م/ث

مثال ④

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية

ف(ن) = ن^{٣} - ٦ن^{٢} - ٤ ، ن ≥ ٠

اوجد

① سرعة الجسم وتسارعه عندما ن = ٣

② الفترة الزمنية التي تكون سرعة الجسم سالبة

الحل

① ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^{٢} - ١٢ن

ع(٣) = ٣(٣)^{٢} - ١٢ × ٣ = -٩ م/ث

ت(ن) = ٦ن - ١٢

ت(٣) = ٦ × ٣ - ١٢ = ٦ م/ث^{٢}

② ع(ن) = ٣ن^{٢} - ١٢ن = ٠

٣ن(ن - ٤) = ٠ ن = ٠ ، ن = ٤

السرعة سالبة في الفترة (٠ ، ٤)

ملاحظة هامة

$ع = \frac{د ف}{د ن} = ف'$

$ن = \frac{د ع}{د ن} = ع'$

مثال

$ف = ٣ف^{٢} \times ف'$

$ع = ٣ف^{٢} \times ع$

$ع' = ٢ع \times ع'$

$= ٢ع \times ن$

مثال ⑧

يتحرك جسيم بحيث أن

$ع = ٤ف^{٢} - ٦ف$

حيث ف : المسافة بالامتار

ع : السرعة م/ث

اوجد التسارع عندما ف = ٢

الحل

اشتقاق ضمني بالنسبة للزمن

$ع' = ٨ف \times ف' - ٦ف'$

$ن = ٨ف \times ع - ٦ع$

عندما ف = ٢ فان

$ع = ٤(٢)^{٢} - ٦ \times ٢ = ٤$

$ن = ٨ \times ٢ \times ٤ - ٤ \times ٦ = ٤٠$

مثال ⑥

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته تعطى بالعلاقة

$ع(ن) = \frac{ن}{ف(ن)}$

اثبت تسارع الجسيم عندما ن = ٣ علما بان سرعته عندئذ $\frac{١}{٢}$ م/ث

الحل

$ع'(ن) = \frac{ف(ن) \times ١ - ن \times ف'(ن)}{(ف(ن))^{٢}}$

$ن(ن) = \frac{ف(ن) - ن \times ع(ن)}{(ف(ن))^{٢}}$

نجد ف(٣) ← $ع(٣) = \frac{٣}{ف(٣)}$

$\frac{١}{٢} = \frac{٣}{ف(٣)} \Leftarrow ف(٣) = ٦$

$ن(٣) = \frac{ف(٣) - ٣ \times ع(٣)}{(ف(٣))^{٢}}$

$= \frac{٦ - ٣ \times \frac{١}{٢}}{٣٦} = \frac{٦ - \frac{٣}{٢}}{٣٦} = \frac{١}{٨}$ م/ث^{٢}

مثال ⑦

اذا كانت $ع = ٧\sqrt{ف}$ ع : السرعه

ف : المسافه اوجد التسارع

الحل

$ع'(ن) = \frac{ف'}{٧\sqrt{ف}}$

$ن(ن) = \frac{ع}{٢ع} = \frac{١}{٢}$ م/ث^{٢}

مكتبة الوسام
Alwesam
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

اذا كانت ع = ٢ف حيث ٢ ثابت
ع : السرعة ، ف : المسافه اثبت
ان التسارع ثابت ؟

الحل

$ع' = ٢ \times \frac{ف'}{ن'ف} = \frac{ع}{ف} \times \frac{٢}{ن'}$

$ت(ن) = \frac{ع}{٢} \times \frac{٢}{ن'} = \frac{ع}{٢} \times ٢ = ٢$ ثابت

مثال ⑨

يتحرك جسم حسب العلاقه
ف(ن) = ٢ن^{٢} − ن^{٣} اوجد
سرعة هذا الجسم عندما تكون
واحده علما بان تسارع هذا
الجسم في تلك اللحظه ٨ م/ث^{٢}

الحل

ع(ن) = ٤ن − ٣ن^{٢}
ت(ن) = ٤ − ٦ن
ت(١) = ٨ ⇐ ٤ − ٦ × ١ = ٨
٤ − ٢ = ٢ ← ٢ = ٧
ع(ن) = ١٤ن − ٣ن^{٢}
ع(١) = ١٤ × ١ − ٣(١)^{٢}
= ١٤ − ٣ = ١١ م/ث

مثال ⑩

يتحرك جسم حسب العلاقه
ف(ن) = ن^{ح} حيث ح > ٠
اذا كانت سرعة الجسم عند الثواني
تساوي مثلي سرعته عند ٥
ثواني اوجد قيمة ح ؟

الحل

ع(ن) = ف'(ن) = ح ن$^{ح-١}$
ع(١٠) = ٢ ع(٥)
(١٠)$^{ح-١}$ = ٢ (٥)$^{ح-١}$
(٢ × ٥)$^{ح-١}$ = ٢ × ٥$^{ح-١}$ = ٢ × ٥$^{ح-١}$
٢$^{ح-١}$ = ٢^{١} ⇐ ح − ١ = ١
ح = ٢

مثال ⑪

يتحرك جسم حسب العلاقه
ف(ن) = جا٢ن + ٣ جتا٢ن اوجد
التسارع لهذا الجسم عندما يقطع
٣ أمتار ؟

الحل

ع(ن) = ٢ جتا٢ن − ٦ جا٢ن
ت(ن) = −٤ جا٢ن − ١٢ جتا٢ن
← يتبع الحل

مكتبة العلم ALWESAM

ت(ن) = -٤ جا٢ن - ١٢ جتا٢ن
= -٤ (جا٢ن + ٣ جتا٢ن)
= -٤ × ف
= -٤ × ٣ = -١٢ م/ث٢

مثال (١٢)
يتحرك جسم حسب العلاقة
ف١(ن) = ن٣ - ٣ن + ٦
ويتحرك جسم آخر حسب العلاقة
ف٢(ن) = ن٢ + ٤ن + ٢

(أ) متى يلتقي الجسمان
(ب) اين يلتقي الجسمان
(ج) ما سرعة الجسمين لحظة التقائهما

الحل
(أ) يلتقي الجسمان عندما
ف١(ن) = ف٢(ن)
ن٣ - ٣ن + ٦ = ن٢ + ٤ن + ٢
٤ن = ٤ ن = ١

(ب) يلتقي الجسمان عند تقطعان نفس المسافة
ف١(١) = ف٢(١) = ١ - ٣ + ٦
= ٤ م

(ج) ع١(ن) = ٣ن٢ - ٣
ع١(١) = ٣ - ٣ = صفر
ع٢(ن) = ٢ن + ٤ ← ع٢(١) = ٦ م/ث

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

تحرك جسمان مادّيان على نقطة واحدة الأول حسب العلاقة $ف_١(ن) = ن^٣ + ٢ن + ١$ والثاني حسب العلاقة $ف_٢(ن) = \frac{٤}{٣}ن^٣ + ٦ن^٢ + ٥ن$ اصطدما كل من الجسمين عندما يكون لهما نفس السرعة.

الحل

$ع_١ = ف_١' = ٣ن^٢ + ٢$

$ع_٢ = ف_٢' = ٤ن^٢ + ١٢ن + ٥$

$ع_١ = ع_٢ \leftarrow ٣ن^٢ + ٢ = ٤ن^٢ + ١٢ن + ٥$

$\leftarrow ن^٢ = ٤ \leftarrow ن = ٢$

$ت_١ = ٦ن \leftarrow ت_١(٢) = ٦ \times ٢ = ١٢$

$ت_٢ = ٤ن \leftarrow ت_٢(٢) = ٤ \times ٢ = ٨$

مثال (١٤)

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية

$ف(ن) = \frac{١}{٤}(ن+٢)^٤ - ٦ن^٢$

حيث ن الزمن بالثواني، ف بالأمتار

جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث

الحل

$ع(ن) = ف'(ن) = \frac{١}{٤} \times ٤(ن+٢)^٣ - ١٢ن$

$ع(ن) = (ن+٢)^٣ - ١٢ن$

$= (ن+٢)(ن+٢)^٢ - ١٢ن$

$= (ن+٢)(ن^٢ + ٤ن + ٤) - ١٢ن$

$= ن^٣ + ٤ن^٢ + ٤ن + ٢ن^٢ + ٨ن + ٨ - ١٢ن$

$= ن^٣ + ٦ن^٢ + ٨ = ٨٩$

$ن^٣ + ٦ن^٢ - ٨١ = ٠$

بالقسمة التركيبية بالتجربة

الجذر = ٣

	١	٦	٠	-٨١
٣		٣	٢٧	٨١
	١	٩	٢٧	٠

$(ن-٣)(ن^٢ + ٩ن + ٢٧) = ٠$ لا تحلل

$ن = ٣$

$ت(ن) = ع'(ن) = ٣ن^٢ + ١٢ن$

$ت(٣) = ٣(٣)^٢ + ١٢ \times ٣$

$= ٢٧ + ٣٦ = ٦٣$ م/ث^٢

مثال (١٥)

يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافة قدرها ف متراً في زمن قدره ن ثانية حيث

$ف(ن) = ٢ن^٣ - ١١ن^٢ + ٤٤ن + ١٠$

جد السرعة والتسارع عندما $ف(ن) = ٤٦$ م.

الحل

$ف(ن) = ٤٦$

$\leftarrow$ يتبع

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع الحل

$ن^3 - ١٧ن^2 + ٤٤ن + ١٠ = ٤٦$

$ن^3 - ١٧ن^2 + ٤٤ن - ٣٦ = ٠$

بالتجريب نجد ن = ٢ جذر المعادلة

	٢	-١٧	٤٤	-٣٦
٢		٤	-٢٦	٣٦
	٢	-١٣	١٨	٠

$(ن-٢)(ن^2 - ١٣ن + ١٨) = ٠$

$(ن-٢)(ن-٩)(ن-٢) = ٠$

$ن = \frac{٩}{٢}$ $ن = ٢$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن^2 - ٢٤ن + ٤٤$

$ع(٢) =$ صفر

$ع(\frac{٩}{٢}) = ٦ \times \frac{٨١}{٤} - ٢٤ \times \frac{٩}{٢} + ٤٤ = \frac{٢٥}{٢}$

$ت(ن) = ٣ن^2 - ٣٤ن$

$ت(٢) = ٣ \times ٢^2 - ٣٤ \times ٢ = -١٠$

$ت(\frac{٩}{٢}) = ٣ \times \frac{٨١}{٤} - ٣٤ \times \frac{٩}{٢} = -٢٤.٥$

مثال (١٦)

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن من الثواني يساوي

$ف(ن) = \frac{١}{٣}ن^3 - ٢ن^2 + ٣ن + ٥$

$ن \geq ٠$

جد بعد الجسم عن نقطة الاصل وسرعته عندما تنعدم تسارعه

الحل

المطلوب ف(ن) ، ع(ن) عندما ت(ن) = صفر

$ع(ن) = ف'(ن) = ن^2 - ٤ن + ٣$

$ت(ن) = ع'(ن) = ٢ن - ٤$

ت(ن) = صفر لتعدم التسارع

$٢ن = ٤ \leftarrow ن = ٢$

$ف(٢) = \frac{١}{٣}(٢)^3 - ٢(٢)^2 + ٣(٢) + ٥$

$= \frac{١٧}{٣}$

$ع(٢) = ٢^2 - ٤ \times ٢ + ٣ = -١$ م/ث

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

المقذوفات

مثال ①
قذف جسم لأعلى حسب العلاقة
ف(ن) = ١٦ن - ٢ن^٢ احسب
ما يلي
① اقصى ارتفاع يصله الجسم
② سرعة الجسم عند القذف
③ سرعة الجسم عند عودته وملامسته الارض
④ سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٤ ٢م اثناء الصعود

الحل
ع(ن) = ف'(ن) = ١٦ - ٤ن

① عند اقصى ارتفاع ، ع(ن) = ٠
١٦ - ٤ن = ٠ ← ٤ن = ١٦
ن = ٤
اقصى ارتفاع = ف(٤)
= ١٦ × ٤ - ٢(٤)^٢
= ٦٤ - ٣٢ = ٣٢م

② السرعة الابتدائية = سرعة الجسم عند القذف = ع(٠)
= ١٦ - ٤ × ٠ = ١٦م/ث

③ عندما يلامس الارض فان
ف(ن) = صفر
١٦ن - ٢ن^٢ = ٠
٢ن(٨ - ن) = ٠ ← ن = ٠ ، ن = ٨
ع(٨) = ١٦ - ٤ × ٨ = ١٦ - ٣٢
= -١٦م/ث عكس اتجاه الحركة

④ على ارتفاع ٤ ٢ ← ف(ن) = ٤ ٢
١٦ن - ٢ن^٢ = ٤ ٢
٢ن^٢ - ١٦ن + ٤ ٢ = ٠ بالقسمة على ٢
ن^٢ - ٨ن + ١٢ = ٠
(ن - ٢)(ن - ٦) = ٠
ن = ٢ صعود
ن = ٦ هبوط
ع(٢) = ١٦ - ٤ × ٢ = ٨م/ث

مثال ②
قذف جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ٢٤ن - ٦ن^٢ اوجد قيمة م اذا كان اقصى ارتفاع يصله الجسم ٤ ٢م ؟

الحل
يصل الجسم اقصى ارتفاع عندما
ع(ن) = صفر
ع(ن) = ٢٤ - ١٢ن = صفر
١٢ن = ٢٤ ← ن = ٢
ف(ن) = ٢٤ن - ٦ن^٢
٤ ٢ = ٢٤ × ٢ - ٦ × ٢^٢
٤ ٢ = ٤٨ - ٢٤ = ٢٤م

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

← يتبع

← يتبع

$١٢ن^{٢} - ٦ن^{٢} = ٢٤$

$٦ن^{٢} = ٢٤$

$ن^{٢} = ٤ \leftarrow ن = ٢ ، ن = -٢$ مرفوض

$م = ٦ \times ن$

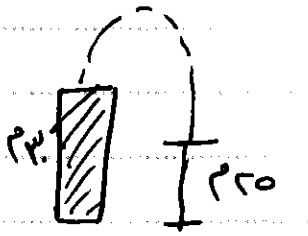
$= ٦ \times ٢ = ١٢$

مثال ③

قذف جسم حسب العلاقة

$ف(ن) = ٤ن - ن^{٢}$ فإذا بلغ ارتفاعه ٣٠ م احسب سرعة الجسم وصوله على ارتفاع ٢٥ م من سطح الارض

الحل



المسافه المقطوعة = العلاقة + ٣٠

$٢٥ = ف(ن) + ٣٠$

$ن - ن^{٢} + ٣٠ = ٢٥$

$ن^{٢} - ن - ٥ = ٠$

$(ن + ١)(ن - ٥) = ٠$

$ن = -١$ مرفوض $\quad ن = ٥$

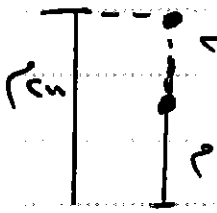
$ع(ن) = ف'(ن) = ٤ - ٢ن$

$ع(٥) = ٤ - ٢ \times ٥ = -٦ م/ث$

مثال ④

اسقط جسم من ارتفاع ٢٠٠ م عن سطح الارض بحيث كانت المسافه بالامتار التي يقطعها في ن ثانيه هي $ف = ٥ن^{٢}$ جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ١٢٠ متر من سطح الارض ؟

الحل



العلاقة + ١٢٠ = ٢٠٠ $٥ن^{٢}$

$٥ن^{٢} = ٨٠$

$ن^{٢} = ١٦$

$ن = ٤$ ، $ن = -٤$ مرفوض

$ع(ن) = ١٠ن$

$ع(٤) = ٤٠ م/ث$

مثال ⑤

قذف جسم عن سطح بناية حسب العلاقة $ف(ن) = ٢٠ن - ٢ن^{٢}$ فاذا علمت ان سرعة الجسم لحظة وصولة الارض ٤٠ م/ث فاحسب ارتفاع البناية.

الحل

نفرض ان ارتفاع البناية $= P$

المسافه المقطوعه $= ف(ن) + P$

$ف(ن) = ٢٠ن - ٢ن^{٢} + P$

← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM الموقع: ناجح الجمزاوي

ع(ن) = ف'(ن) = ٢٠ - ٤ن = -٢٤
(-٢٤) عكس اتجاه الحركة
٤ن = ٤٤ ← ن = ١١ ثانية
عند وصولة الارض ← ف(ن) = صفر
ف(١١) = ٢٠ × ١١ - ٢(١١)^٢ + م = ٠
٢٢٠ - ٢٤٢ + م = ٠ ← م = ٢٢م

مثال ٦
قذف جسم رأسيًا إلى اعلى حسب العلاقة ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^٢
ما الزمن اللازم الذي يحتاجه الجسم وصوصاعد حتى تبلغ سرعته نصف السرعة التي قذف بها

الحل
ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن
السرعة الابتدائية (عند القذف)
ع(ن) = ١٢٨
ع(ن) = ١/٢ × ١٢٨ = ٦٤
١٢٨ - ٣٢ن = ٦٤
٣٢ن = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤
ن = ٢

مثال ٧
من قمة برج ارتفاعة ٦٠ م قذف جسم رأسيًا لأعلى حسب العلاقة ف١(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢، ومن سطح الارض قذف جسم آخر رأسيًا لأعلى حسب العلاقة ف٢(ن) = Pن - ٥ن^٢ فاذا كان لهما نفس اقصى ارتفاع جد قيمة P ؟

الحل
ع١ = ٢٠ - ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٢
اقصى ارتفاع عن قمة البرج
= ف١(٢) = ٢٠ × ٢ - ٥(٢)^٢ = ٢٠
وعن سطح الارض يكون اقصى ارتفاع
= ٦٠ + ٢٠ = ٨٠
وللجسم الثاني
ع٢ = P - ١٠ن = ٠ ← P = ١٠ن
ف٢(ن) = Pن - ٥ن^٢ = ٨٠
١٠ن × ن - ٥ن^٢ = ٨٠
١٠ن^٢ - ٥ن^٢ = ٥ن^٢ = ٨٠
ن^٢ = ١٦ ← ن = ٤ ، ن = -٤ مرفوض
P = ١٠ن = ١٠ × ٤ = ٤٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٢ن + ن ن^{٢} بسرعة ابتدائية ٤٠ م/ث ، فإذا كان اقصى ارتفاع وصلة الجسم هو ٨٠ م فاوجد قيمة كل من ٢ ، ن ؟

الحل

ع = ٢ + ٢ن ن

ع(ن) = ٢ + ٠ ، = ٤٠ ← ٢ = ٤٠

∴ ف(ن) = ٤٠ ن + ن ن^{٢}

وعند اقصى ارتفاع تكون ع = ٠

← ع = ٤٠ + ٢ن ن = ٠

٢ن ن = −٤٠ ← ن = $\frac{-٤٠}{٢ن}$ = $\frac{-٢٠}{ن}$

ف = ٢ ن + ن ن^{٢}

٨٠ = ٤٠ ن + $(\frac{-٢٠}{ن})$ ن^{٢}

٨٠ = ٤٠ ن − ٢٠ ن = ٢٠ ن

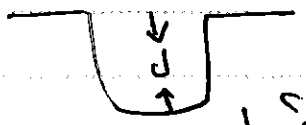
⇐ ن = $\frac{٨٠}{٢٠}$ = ٤

← ن = $\frac{-٢٠}{٤}$ = ٥

مثال ⑨

قذف جسم من محفر بئر للأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٣٠ ن − ٣ ن^{٢} فإذا كانت سرعته على ارتفاع ٣٠ م فوق سطح الارض تساوي ٤ م/ث فما عمق البئر الذي انطلق منه الجسم

الحل



ف(ن) = ٣٠ ن − ٣ن^{٢} − ل

العلاقة بالنسبة للأرض

ف = ٣٠

ع(ن) = ٣٠ − ٦ ن = −٤

٦ ن = ٣٤ ⇐ ن = ٦

٣٠ ن − ٣ ن^{٢} − ل = ٣٠

٣٠ × ٦ − ٣ × ٦^{٢} − ل = ٣٠

١٨٠ − ١٠٨ − ل = ٣٠

ل = ٤٨ − ٣٠ = ١٨

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٦٧

اذا كانت ف(ن) = ٤ جا٣ن − ٥ جتا٣ن
حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جاهبا كل من المسافة والسرعة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{6}$

الحل

ف($\frac{\pi}{6}$) = ٤ جا٣×$\frac{\pi}{6}$ − ٥ جتا٣×$\frac{\pi}{6}$
= ٤ جا$\frac{\pi}{2}$ − ٥ جتا$\frac{\pi}{2}$
= ٤ − ٠ = ٤

ع(ن) = ١٢ جتا٣ن + ١٥ جا٣ن
ع($\frac{\pi}{6}$) = ١٢ جتا$\frac{\pi}{2}$ + ١٥ جا$\frac{\pi}{2}$
= ١٥

ت(ن) = − ٣٦ جا٣ن + ٤٥ جتا٣ن
ت($\frac{\pi}{6}$) = − ٣٦ جا$\frac{\pi}{2}$ + ٤٥ جتا$\frac{\pi}{2}$
= − ٣٦

تدريب ② ص ١٦٧

اذا كانت ف(ن) = ن^{٣} − ٩ن^{٢} + ١٥ن
هي العلاقة الزمنية لحركة جسم على خط مستقيم ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالامتار
فجد تسارع الجسم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة .

الحل

ع(ن) = ٣ن^{٢} − ١٨ن + ١٥
تنعدم السرعة ع(ن) = ٠
٣ن^{٢} − ١٨ن + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٣
ن^{٢} − ٦ن + ٥ = ٠
(ن − ٥)(ن − ١) = ٠
ن = ٥ ، ن = ١
ت(ن) = ٦ن − ١٨
ت(٥) = ٦×٥ − ١٨ = ١٢
ت(١) = ٦×١ − ١٨ = − ١٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريب (٣) ص ١٦٨

قذف جسم من سطح برج رأسيًا إلى أعلى، حيث ارتفاعه بالأمتار عن سطح البرج بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة
ف(ن) = ٢٥ن − ٥ن٢ ، أوجد ارتفاع البرج إذا كانت سرعة الجسم لحظة وصوله لأرض تساوي (−٥٥ م/ث)

الحل

ف = ٢٥ن − ٥ن٢ + ج

ع = ٢٥ − ١٠ن = −٥٥

١٠ن = ٢٥ + ٥٥ = ٨٠

ن = ٨

ف(٨) = ٢٥ × ٨ − ٥(٨)٢ + ج = ٠

٢٠٠ − ٣٢٠ + ج = ٠

ج = ١٢٠

∴ ارتفاع البرج ١٢٠ م

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (١٦٩)

السؤال الأول

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن٣ − ٦ن٢ + ٩ن + ٣ حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة المقطوعة بالامتار، فجد كلاً مما يأتي

أ) السرعة الابتدائية للجسيم

ب) تسارع الجسيم لحظة سكونه

الحل

أ) ع(٠)

ع(ن) = ٣ن٢ − ١٢ن + ٩

ع(٠) = ٩

ب) سكون الجسيم ع(ن) = صفر

٣ن٢ − ١٢ن + ٩ = ٠ بالقسمة ٣

ن٢ − ٤ن + ٣ = ٠

(ن − ٣)(ن − ١) = ٠

ن = ٣ ، ن = ١

ت(ن) = ٦ن − ١٢

ت(٣) = ٦ × ٣ − ١٢ = ٦

ت(١) = ٦ × ١ − ١٢ = −٦

السؤال الثاني

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ٤ حا(ن/٤) + ٢ن

ن ∈ [٠ ، ٤π] حيث ف: المسافة بالامتار، ن: الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٢

الحل

ع(ن) = ف′(ن)

= ٤ جا(ن/٤) × (١/٤) + ٢

٢ جا(ن/٤) + ٢ = ٢

جا(ن/٤) = ٠ حيث تطابق

جا ن = ٠

ن = ٤π/٤ = π

ع(ن) = جا ن + ٢

ت(ن) = جتا ن

ت(π/٤) = جتا π/٤ = ١/√٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث ص ١٦٩

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الارض بحيث كان بعده عن سطح الارض بعد ن ثانية هو ف(ن) = ١٩٫٦ ن - ٤٫٩ ن²
حدد كلاً مما يأتي :

أ) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الارض

الحل

يصل الجسم لأقصى ارتفاع

ع(ن) = صفر

ع(ن) = ١٩٫٦ - ٩٫٨ ن = ٠

ن = ١٩٫٦ / ٩٫٨ = ٢

ف(٢) = ١٩٫٦ × ٢ - ٤٫٩ × ٢²

= ٣٩٫٢ - ١٩٫٦

= ١٩٫٦

ب) السرعة

ع(ن) = ١٩٫٦ - ٩٫٨ ن

ج) سرعة الجسم لحظة وصوله الارض

الحل

ف(ن) = ٠

← ١٩٫٦ ن - ٤٫٩ ن² = ٠

ن (١٩٫٦ - ٤٫٩ ن) = ٠

ن = ٠ ∨ ن = ١٩٫٦ / ٤٫٩ = ٤

ع(ن) = ١٩٫٦ - ٩٫٨ ن

= ١٩٫٦ - ٩٫٨ × ٤

= ١٩٫٦ - ٣٩٫٢

= - ١٩٫٦

السؤال الرابع ص ١٦٩

قذف جسم رأسياً إلى اعلى من نقطة على سطح الارض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الارض بعد زمن ن ثانية هو ف(ن) = ١٢٨ ن - ١٦ ن²
حدد كلاً مما يأتي :

أ) مجموعة قيم ن التي تكون عندها السرعة سالبة

الحل

ع(ن) = ١٢٨ - ٣٢ ن

١٢٨ - ٣٢ ن < ٠

١٢٨ < ٣٢ ن

ن > ٤

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ب) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الارض

الحل

ع'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن = ٠

ن = ٤

ف(٤) = ١٢٨ × ٤ - ١٦ × ٤^٢

= ٥١٢ - ٥٠٦

= ٥٠٦

ج) سرعة جسم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ قدماً

ف'(ن) = ع(ن)

= ١٢٨ - ٣٢ن

د) سرعة الجسم الابتدائية

ع(٠) = ١٢٨ - ٣٢ × ٠

= ١٢٨

السؤال الخامس

قذف جسم رأسياً إلى اعلى من نقطة على سطح الارض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الارض بالامتار بعد ن ثانية من قذفه يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢

جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ قدماً

الحل

يكون الجسم على ارتفاع ٨٠

ف(ن) = ٨٠

٩٦ن - ١٦ن^٢ = ٨٠

١٦ن^٢ - ٩٦ن + ٨٠ = ٠ بالقسمة على ١٦

ن^٢ - ٦ن + ٥ = ٠

(ن - ١)(ن - ٥) = ٠

ن = ١ مرفوض ن = ٥ مقبول

ع(ن) = ف'(ن) = ٩٦ - ٣٢ن

ع(١) = ٩٦ - ٣٢ = ٦٤

ع(٥) = ٩٦ - ٣٢ × ٥

= ٩٦ - ١٦٠ = -٦٤

السؤال السادس ص ١٧

قذف جسم رأسياً إلى اعلى من نقطة على سطح الارض بحيث ان بعده عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة ف(ن) = ٩ن - ٥ن^٢، جد قيمة ٩ علماً بان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ٨٠ متراً

يتبع الحل ←

الحل

اقصى ارتفاع عندما
ع (ن) = صفر
ع − ١٠ ن = ٠ ⇐ ن = ع/١٠

ف (ع/١٠) = ٨٠ اقصى ارتفاع

ع/١٠ × ع − ٥ (ع/١٠)^٢ = ٨٠

ع^٢/١٠ − ١٠ × ع^٢/١٠٠ = ٨٠

ع^٢/١٠ − ع^٢/٢٠ = ٨٠

ع^٢/٢٠ = ٨٠

⇐ ع^٢ = ١٦٠٠

ع = ± ٤٠

السؤال الرابع

قذف جسم رأسيًا إلى اعلى من نقطة على ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الارض وكانت العلاقة
ف (ن) = ٤٠ ن − ٥ ن^٢ حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالامتار ، جد كلا مما يأتي

أ) الزمن الذي تستغرقه الجسم حتى يعود الى نقطة القذف

الحل

ف (ن) = ٠

٤٠ ن − ٥ ن^٢ = ٠

٥ ن (٨ − ن) = ٠

ن = ٠ ، ن = ٨

ب) الزمن الذي تستغرقه الجسم حتى يعود الى سطح الارض

في عند سطح الارض
ف (ن) = ٤٠ ن − ٥ ن^٢ + ٦٠ = ٠

بالقسمة على ٥

٨ ن − ن^٢ + ١٢ = ٠

ن^٢ − ٨ ن − ١٢ = ٠

ن = (+٨ ± √١١٢)/٢

ج) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الارض

ع (ن) = ٤٠ − ١٠ ن = ٠

ن = ٤

اقصى ارتفاع عن سطح الارض

ف (٤) = ٤٠ × ٤ − ٥ (٤)^٢ + ٦٠

= ١٦٠ − ٨٠ + ٦٠

= ١٤٠

⇐ يتبع الحل

AlWesAM
الموسام : ناجح الجمزاوي

s) متى تصبح سرعة الجسم ٣م/ث

الحل

ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن = ٣٠

−١٠ن = −١٠

ن = ١

هـ) متى يصبح ارتفاع الجسم ٢٥ م عن سطح الارض

ف(ن) = ٢٥ م

٤٠ن − ٥ن٢ = ٢٥

٥ن٢ − ٤٠ن + ٢٥ = ٠

بالقسمة على ٥

ن٢ − ٨ن + ٥ = ٠

(ن − ٥)(ن − ١) = ٠

ن = ٥ أو ن = ١ ثانية

السؤال الثامن ص ١٧٠

اسقط شخص جسماً من سكون من سطح بناية وفق العلاقة ف١(ن) = ١٦ ن٢ وفي اللحظة نفسها قذف شخص ثان جسماً عمودياً إلى أسفل من بداية قمة البناية بسرعة ٢ قدم/ث من السطح نفسه وفق العلاقة

ف٢(ن) = ٢ن + ١٦ن٢

فاذا ارتطم جسم الأول بعد ١/٢ ثانية من ارتطام جسم الثاني بالارض فجد ارتفاع البناية

الحل

اذا اصطدم جسم الثاني ن ثانية فان جسم الأول يصطدم ن + ١/٢ ثانية

← ف١(ن + ١/٢) = ف٢(ن)

الجسمان قطعا نفس المسافة هو اختلاف الزمن

١٦(ن + ١/٢)٢ = ٢ن + ١٦ن٢

بالقسمة على ٤

٤(ن + ١/٢)٢ = ٥ن + ٤ن٢

٤(ن٢ + ن + ١/٤) = ٥ن + ٤ن٢

٤ن٢ + ٤ن + ١ = ٥ن + ٤ن٢

← ن = ١

زمن جسم الأول = ١ + ١/٢ = ٣/٢

زمن جسم الثاني = ١

ارتفاع البناية

ف١(٣/٢) = ١٦(٣/٢)٢

= ١٦ × ٩/٤ = ٣٦ م

أو

ف٢(١) = ٢٠ × ١ + ١٦ × ١

= ٣٦

السؤال التاسع من ١٧

يتحرك جسيم على خط مستقيم حيث ان سرعته ع = ٣√(ف) حيث ف > ٠ ، ف : المسافة بالامتار ، اذا علمت ان تسارعه ٨ م/ث² جد قيمة الثابت ٣

الحل

ع = ٣√ف

ت = ٣ × ف / (٢√ف)

لكن √ف = ع/٣

ت = ٣ × ف / (٢ع/٣) = ٣ × ع/(٢ع/٣) / ٣

ت = ٣²/٢ لكن ت = ٨

٨ = ٣²/٢ ⇐ ٣² = ١٦

٣ = ± ٤ ، ٣ > ٠

⇐ ٣ = ٤

السؤال العاشر من ١٧

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ع = ١ - ٢ف حيث ع السرعة ، ف المسافة حيث بدأ الجسيم عندما تنعدم سرعته

الحل

ع = ٠ تنعدم سرعته

٠ = ١ - ٢ف

٢ف = ١ ، ف = ١/٢

ف = ١/٢

بالاشتقاق

٢ع ع' = -٢ ف ف'

٢ع ت = -٢ ف ع

٢ت = -٢ف

ت = -ف = -١/٢ × ١/٢

= -١/٤

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

من نقطة على محمله (٥٥) مترًا عن سطح الارض قذف جسم رأسيًا الى اعلى بحيث ان المسافه المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانيه من قذف الجسم تعطى بالعلاقه
ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن² جد سرعة الجسم لحظة وصوله مستوى سطح الارض

الحل

عندما يصل الجسم الى سطح الارض تكون ف(ن) = ٥٥

ن ٦٠ن - ٥ن² = ٥٥

-٥ن² + ٦٠ن - ٥٥ = ٠ ÷ -٥

ن² - ١٢ن + ١١ = ٠

(ن - ١)(ن - ١١) = ٠

ن = ١ ، ن = ١١

ع(ن) = ف' = ٦٠ - ١٠ن

ع(١) = ٦٠ - ١٠ × ١ = ٥٠

ع(١١) = ٦٠ - ١٠ × ١١ = -٥٠

② وزارة (٢٠٠٨) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقًا للاقتران ف(ن) = ٢ن³ - ٣ن² + ١٢

① اجب تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته

② جد الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسم سالبة .

الحل

ع = ٦ن² - ٦ن = ٠

٦ن(ن - ١) = ٠

ن = ٠ ، ن = ١

① ت = ١٢ن - ٦

ت(٠) = ٠ - ٦ = -٦

ت(١) = ١٢ - ٦ = ٦

②

	+	-	+
	٠	١	

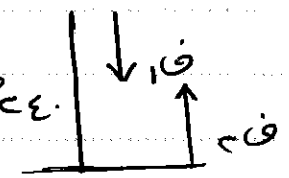
ع < ٠ في (٠، ١)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اسقط جسم من ارتفاع (٤٠) مترًا عن سطح الارض سقوطًا حرًا بحيث ان المسافة التي يقطعها بالامتار بعد ن ثانية هي ف١(ن) = ٥ن٢ وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الارض رأسيًا للأعلى بحيث ان المسافة التي يقطعها بالامتار بعد ن ثانية ف٢(ن) = ٦٠ن - ٥ن٢ حيث سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض.

الحل



لهما نفس الارتفاع

← ف١ + ف٢ = ٤٠

٥ن٢ + ٦٠ن - ٥ن٢ = ٤٠

٦٠ن = ٤٠ ⇐ ن = ٤

ع١ = ف١' = ١٠ن

ع١(٤) = ١٠ × ٤ = ٤٠

ع٢ = ف٢' = ٦٠ - ١٠ن

ع٢(٤) = ٦٠ - ٤٠ = ٢٠

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اسقط شخص جسمًا من نقطة على سطح بناية سقوطًا حرًا بحيث ان المسافة بالأقدام التي يقطعها بعد ن ثانية هي ف١(ن) = ١٦ن٢، وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثاني جسمًا عموديًا الى أعلى بحيث ان المسافة بالأقدام التي يقطعها بعد ن ثانية هي

ف٢(ن) = ٤٠ن + ١٦ن٢ فاذا ارتطم الجسم الأول بالارض بعد ثانية واحدة من ارتطام الجسم الثاني بالارض جد

① سرعة الجسم الثاني لحظة ارتطامه بالارض

② ارتفاع البناية

الحل

نفرض زمن الجسم الثاني هو ن فيكون زمن الجسم الأول ن+١

ف١(ن+١) = ف٢(ن)

١٦(ن+١)٢ = ٤٠ن + ١٦ن٢

١٦(ن٢+٢ن+١) = ٤٠ن + ١٦ن٢

١٦ن٢ + ٣٢ن + ١٦ = ٤٠ن + ١٦ن٢

٨ن = ١٦ ⇐ ن = ٢

زمن الجسم الأول = ٢ + ١ = ٣

زمن الجسم الثاني = ٢ ← يتبع الحل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

ع١ = ٣ع ن = ٣ × ٣ع = ٩٦
ع٢ = ٤٠ + ٢ع ن = ٤٠ + ٢ع × ٣
= ١٠٤
ف١(٣) = ١٦ (٣)٢ = ١٤٤
ف٢(٣) = ٤٠ × ٣ + ١٦ (٣)٢ = ١٤٤
ارتفاع البناية = ١٤٤

الارض تساوي ٦٠ م/ث
حيث ارتفاع البناية

ملاحظه
حل السؤال ص٦ الدوسيه
تدريب ③ الكتاب ص١٦٤

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

قذف جسم رأسيًا الى أعلى من نقطة على سطح الارض ، فاذا كانت المسافة بالامتار التي تقطعها الجسم بعد ن ثانية من بدء حركته تعطى بالقانون ف(ن) = ٦٤ ن - ١٦ ن٢ اثبت ان الجسم فقد نصف سرعته الابتدائية عند ارتفاع ٤٨ قدم

ملاحظه
حل السؤال في الدوسية ص٦٢
السؤال السابع (الكتاب)

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كانت ف = $\frac{1}{3}$ ن٣ - ٣ن٢ + ٥ ن
هي معادلة الزمنية لحركة جسم على خط مستقيم حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالامتار اثبت تسارع الجسم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

ملاحظه
حل السؤال ص٦ الدوسيه
تدريب ④ من الكتاب ص١٦٣

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

قذف جسم من سطح بناية رأسيًا الى اعلى بحيث ان ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالأمتار ف(ن) = ٣٠ن - ٥ ن٢
اذا كانت سرعته لحظة وصوله

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

قذف جسم رأسيًا الى اعلى من نقطة على سطح الارض بسرعة ابتدائية مقدارها ع. ، فاذا كان بعده بالامتار عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالأمتار ف(ن) = ع. ن - ٥ ن٢ اذا علمت ان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم (٤٥) متر ، فجد قيمة السرعة الابتدائية ع.

الحل

ع = ف' = ع. - ١٠ ن = ٠

⇐ ع. = ١٠ ن

ف(ن) = ع. ن - ٥ ن٢

= ١٠ ن × ن - ٥ ن٢

= ١٠ ن٢ - ٥ ن٢

= ٥ ن٢

ف(ن) = ٤٥

٥ ن٢ = ٤٥ ← ن٢ = ٩

ن = ٣ ، ن = -٣ (مرفوض) ن = ٣

∴ ع. = ١٠ ن = ١٠ × ٣ = ٣٠

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

قذف جسم رأسيًا الى أعلى من نقطة على سطح الارض ، فاذا كان (ف) بعده بالامتار عن نقطة القذف بعد ن ثانية من البدء بالحركة فعطى بالأمتار ف(ن) = ٣٠ ن - ٥ ن٢ فجد ارتفاع الجسم عن سطح الارض عندما يفقد نصف سرعته الابتدائية

الحل

ع = ف' = ٣٠ - ١٠ ن

السرعة الابتدائية = ع(١)

= ٣٠ - ١٠ × ٠

= ٣٠

½ السرعة الابتدائية = ½ × ٣٠ = ١٥

٣٠ - ١٠ ن = ١٥

١٠ ن = ١٥ ← ن = ٣/٢

ف(٣/٢) = ٣٠ × ٣/٢ - ٥ (٣/٢)٢

= ١٢٥/٤

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑩ وزارة (٢٠١٤) صيفية

قذف جسم رأسيًا للأعلى من قمة برج ارتفاعة ١٤٤ قدمًا عن سطح الارض فاذا كانت المسافه ف بالاقدام التي تقطعها الجسم بعد ن ثانيه من بدء الحركه محطاه بالعلاقه ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^{٢} جد كلاً مما يلي

① اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم عن سطح الارض

② سرعة الجسم لحظه اصطدامه بالارض

الحل

① ف = ١٢٨ ن - ١٦ ن^{٢} + ١٤٤

عند اقصى ارتفاع ع (ن) = ٠

ع = ف' = ١٢٨ - ٣٢ ن = ٠

ن = ٤

اقصى ارتفاع

ف (٤) = ١٢٨ (٤) - ١٦ (٤)^{٢} + ١٤٤

= ٤٠٠

② عند وصوله الارض ف = ٠

١٢٨ ن - ١٦ ن^{٢} + ١٤٤ = ٠ ÷ -١٦

ن^{٢} - ٨ ن - ٩ = ٠

(ن - ٩) (ن + ١) = ٠

ن = ٩ ، ن = -١ مرفوض

ع (٩) = ١٢٨ - ٣٢ × ٩ = -١٦٠

⑪ وزارة (٢٠١٣) شتوية

يتحرك جسيم على خط الاعداد وفق العلاقه ف (ن) = ١٧ ن - ٤ ن^{٢} حيث ف: بعد المسافه بالامتار ، ن الزمن بالثواني جد المسافه التي تقطعها الجسيم عندما تكون سرعته ١٠ م/ث

الحل

ع = ف' = ١٧ - ٨ ن = ٠

ع (ن) = ١

١٧ - ٨ ن = ١ ← ٨ ن = ١٦

← ن = ٢

ف (٢) = ١٧ × ٢ - ٤ (٢)^{٢}

= ٣٤ - ١٦ = ١٨

⑫ وزارة (٢٠١٣) صيفية

يقف شخصان على سطح بناية ، اطلق الشخص الأول كره من السكون وفق العلاقه ف (ن) = ٥ ن^{٢} وفي اللحظه نفسها رمى الشخص الثاني كره أخرى عموديًا الى اسفل بسرعة ابتدائية قدرها ١٥ م/ث وفق العلاقه ف (ن) = ١٥ ن + ٥ ن^{٢} حيث ف بعد المسافه بالامتار ، ن الزمن بالثواني ، اذا ارتطمت كره الشخص الأول بعد ثانيه من ارتطام كره الشخص الثاني بالارض جد سرعة كره الشخص الثاني لحظه ارتطامها بالأرض

← يتبع الحل

الحل

$ف_1(ن) = ٥ن^٢$ ، $ف_2(ن) = ١٥ن + ٥ن^٢$

الزمن الثاني = ن ، الزمن الأول = ن + ١

$ف_1(ن+١) = ف_2(ن)$

$٥(ن+١)^٢ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$٥(ن^٢ + ٢ن + ١) = ١٥ن + ٥ن^٢$

$٥ن^٢ + ١٠ن + ٥ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$٥ن = ٥ \Leftarrow ن = ١$

$ع_2 = ١٥ + ١٠ن$

$ع_2(١) = ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان المسافه ف بالامتار تعطى بالعلاقه $ف(ن) = \frac{ن}{ع(ن)}$ ، حيث ع السرعه

ن الزمن بالثواني ، فجد تسارع الجسم عندما ن = (٢) ثانيه ، علماً بان السرعة عندئذ تساوي (٣) م/ث

الحل

$ف' = \frac{ع \times ١ - ن \times ع'}{ع^٢}$

$ع' = \frac{ع - ن \times ن}{ع^٢}$

$ع'(٣) = \frac{ع(٣) - ن \times ن(٣)}{(ع(٣))^٢}$

$٣ = \frac{٣ - ٢ \times ن(٢)}{(٢)^٢}$

$٢٧ = ٣ - ٢ \times ن(٢)$

$ع(٢) = ٣ - ٢٧ = -٢٤$

$ن(٢) = -١٢$

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

يتحرك جسم على خط مستقيم وفقه العلاقه $ف(ن) = \frac{(ن+٢)^٣}{٤} - ٦ن^٢$

حيث ن الزمن بالثواني ف المسافه بالامتار ، جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث

الحل

$ع = ف' = \frac{٣(ن+٢)^٢ \times ١}{٤} - ١٢ن$

$(ن+٢)^٣ - ١٢ن = ٨٩$

$ن^٣ + ٦ن^٢ + ١٢ن + ٨ - ١٢ن - ٨٩ = ٠$

$ن^٣ + ٦ن^٢ - ٨١ = ٠$

بالتجريب ن = ٣ هي احد الجذور

	١	٦	٠	-٨١
٣		٣	٢٧	٨١
	١	٩	٢٧	٠

$\leftarrow (ن-٣)(ن^٢ + ٩ن + ٢٧) = ٠$ للحل

ن = ٣

$ت = ع' = ٣(ن+٢)^٢ - ١٢$

$ت(٣) = ٣ \times ٢٥ - ١٢ = ٦٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

قذف جسم رأسياً الى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (١١٢) متر/ث وفقه العلاقة ف(ن) = ١١٢ن - ١٦ن^{٢} حيث ف المسافه التي يقطعها الجسم بالامتار ، ن الزمن بالثواني جد ما يأتي

(١) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

(٢) الزمن اللازم ليكون الجسم على ارتفاع (٩٦) متراً من نقطة القذف

الحل

(١) ع = ف' = ٢ن - ١١٢ = ٠

٣٢ن = ١١٢ ← ن = $\frac{١١٢}{٣٢}$ = $\frac{٧}{٢}$

اقصى ارتفاع ف($\frac{٧}{٢}$)

= ١١٢ × $\frac{٧}{٢}$ - ١٦ ($\frac{٧}{٢}$)^{٢} = ١٩٦

(٢) ف = ١١٢ن - ١٦ن^{٢} = ٩٦

١٦ن^{٢} - ١١٢ن + ٩٦ = ٠ بالقسمة على ١٦

ن^{٢} - ٧ن + ٦ = ٠

(ن - ٦) (ن - ١) = ٠

ن = ٦ ن = ١

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٢} - ٣ن + ٢ حيث ف المسافه بالامتار ، ن الزمن بالثواني فاذا كانت سرعته المتوسطه في [٠ ، ٢] تساوي سرعته اللحظيه عندما ن = ٥ جد قيمة ٢ ؟

الحل

ع = ف' = ٢ن - ٣

ع(٥) = ٢ × ٥ - ٣ = ٧

السرعة المتوسطة = السرعة اللحظية

$\frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ٠}$ = ٧

$\frac{٢^{٢} - ٣٢ + ٢ - ٢}{٢}$ = ٧

$\frac{٢^{٢} - ٣٢}{٢}$ = ٧

٢^{٢} - ٣٢ = ٧٢

٢^{٢} - ١٠٢ = ٠

٢(٢ - ١٠) = ٠

٢ = ٠ مرفوضة

٢ = ١٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

يتحرك جسيم وفق العلاقة
ع(ن) = ٦ − $\frac{م}{ف(ن)}$ ، حيث ف
المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني
اذا علمت ان تسارع الجسيم في اللحظة
التي تنعدم فيها سرعته يساوي ٩ م/ث^{٢}
جد قيمة الثابت م

الحل

بالاشتقاق

$ع' = \frac{-م \times ف'}{ف^{٢}}$

$ع \times ن = \frac{م \times ع}{ف^{٢}}$

$ن = \frac{م}{ف^{٢}}$ --- ①

عندما ع = ٠ ⇐

$٠ = ٦ - \frac{م}{ف}$ ⇐ $\frac{م}{ف} = ٦$

⇐ $ف = \frac{م}{٦}$ نعوض في

في المعادلة ①

$ن = ع \times \frac{م}{(\frac{م}{٦})^{٢}} = \frac{٣٦م}{م^{٢}}$

$ن = ٩ \times \frac{٣٦م}{م^{٢}}$ ⇐

$٩م^{٢} = ٣٦م$ ⇐ $٩م(م-٤) = ٠$

م = ٠ مرفوضة م = ٤

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق
العلاقة ف(ن) = ٢ جا$\frac{ن}{٢}$ + $\frac{٣ن}{٢}$
ن ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ حيث ف المسافة بالامتار
ن الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم
عندما تكون سرعته ٣٧ م/ث

الحل

ع = ف' = ع جا$\frac{ن}{٢}$ × جتا$\frac{ن}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$

= ٢ جا$\frac{ن}{٢}$ جتا$\frac{ن}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$

= جا ن + $\frac{٣}{٢}$ = ٣٧

جا ن = ٣٧ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣٧}{٢}$

ن = $\frac{\pi}{٣}$

ت = ع' = جتا ن

ت ($\frac{\pi}{٣}$) = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

من قمة برج ارتفاعه (٤٨) قدم قذف جسيم رأسيًا لأعلى وكان بعده الأفقي عن البرج بالقدم بعد ن ثوانٍ من لحظة القذف يعطى بالقانون $ف_1(ن) = -١٦ن^٢ + ٣٢ن$ وفي اللحظة نفسها قذف جسيم ثانٍ من سطح الأرض للأعلى وكان بعده الأفقي عن البرج بالقدم بعد ن ثوانٍ من لحظة القذف يعطى بالقانون $ف_2(ن) = -١٦ن^٢ + ع_٠ ن$ حيث $ف_1$، $ف_2$ بالأقدام، ن بالثواني، $ع_٠$ السرعة الابتدائية (ع٠) للجسم الثاني عندما تتساوى أقصى ارتفاع للجسمين عن سطح الأرض.

الحل

نصل لجسم الأول لأقصى ارتفاع

$ف_1'(ن) = ع_1(ن) = -٣٢ن + ٣٢$

$-٣٢ن + ٣٢ = ٠ \Leftarrow ن = ١$

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض البرج

$ف_1(١) = -١٦ + ٣٢ = ١٦ + ٤٨$

$= ٦٤$

لجسم الثاني

$ف_2'(ن) = -٣٢ن + ع_٠ = ٠$

$ن = \frac{ع_٠}{٣٢}$ زمن أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع

$ف_2(\frac{ع_٠}{٣٢}) = -١٦(\frac{ع_٠}{٣٢})^٢ + ع_٠(\frac{ع_٠}{٣٢})$

$= -\frac{١٦ ع_٠^٢}{٣٢ \times ٣٢} + \frac{ع_٠^٢}{٣٢}$

$ف_2(\frac{ع_٠}{٣٢}) = -\frac{ع_٠^٢}{٦٤} + \frac{ع_٠^٢}{٣٢ \times ٢}$

$= -\frac{ع_٠^٢}{٦٤} + \frac{٢ع_٠^٢}{٦٤}$

$= \frac{ع_٠^٢}{٦٤}$

أقصى ارتفاع الأول = أقصى ارتفاع الثاني

$\frac{ع_٠^٢}{٦٤} = ٦٤$

$ع_٠^٢ = ٦٤ \times ٦٤$

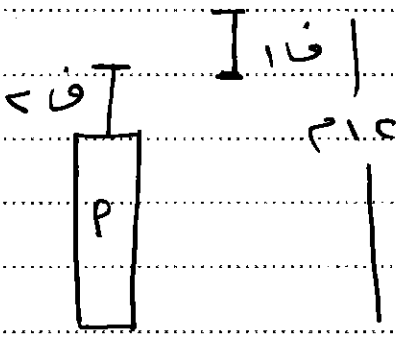
$ع_٠ = \sqrt{٦٤ \times ٦٤}$

$= ٨ \times ٨ = ٦٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

اسقط جسم من ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الارض سقوطاً حراً وفقه الدقتان ف١(ن) = ٥ن٢ وفي اللحظه نفسها قذف جسم آخر من سطح بناية للأعلى وفقه الدقتان ف٢(ن) = ٤٠ن - ٥ن٢ حيث ف١، ف٢ بالامتار ن الزمن بالثواني، جد ارتفاع البناية اذا علمت ان سرعة الجسم الأول تساوي (٢٠) م/ث في اللحظه التي يكون للجسمين الارتفاع نفسه عن سطح الارض



ف١ + ف٢ + P = ١٢٠

٥ن٢ + ٤٠ن - ٥ن٢ + P = ١٢٠

٤٠ن + P = ١٢٠

سرعة الجسم الاول = ٢٠

ن = ٢٠ ÷ ١٠ = ٢ ثانية

بالتعويض

٤٠ × ٢ + P = ١٢٠ ⇐ P = ١٢٠ - ٨٠

= ٤٠ م

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

ورقة عمل تطبيقات فيزيائية

السؤال الأول

(أ) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان سرعته معطاه بالعلاقه
ع (ن) = $\sqrt{ن^٢ - ٦ن + ١٣}$ احسب
سرعة الجسم عندما تنعدم تسارعه

(ب) يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافه ف مترا في زمن
ن ثانيه حيث
ف(ن) = $ن^٣ - ٧ن^٢ + ٩ن + ١$
اوجد تسارع الجسم عندما تكون
سرعته ١م/ث

ت = ٦ن - ١٠

(ج) يتحرك جسم في خط مستقيم
فيقطع مسافة ف مترا في زمن
قدره ن ثانية حيث
ف(ن) = $٢ن^٣ - ١٧ن^٢ + ٤٠ن + ١٠$
جد السرعة والتسارع عندما
ف(ن) = ٤٦

السؤال الثاني

(أ) يتحرك جسم على خط مستقيم
فيقطع مسافة ف مترا، في زمن
قدره ن ثانيه حيث
ف(ن) = $٢ن^٣ - ٣٦ن^٢ + ١٥٠ن$
جد مجموعة قيم (ن) التي تكون
فيها سرعة الجسم موجبه
(٧٫٥ ، ٣)

(ب) يتحرك جسم على خط مستقيم
بحيث ان مسافه المعطاه بالعلاقه
ف(ن) = $ب جتا\frac{\pi ن}{٤} + ن جا\frac{\pi ن}{٤}$
اذا كانت السرعة المتوسطه في
[٠ ، ٢] تساوي ٣م/ث وسرعة
الجسم لبدء توانى هي $\frac{\pi}{٢}$م/ث
جد الثابتين ب ، ن

(ج) يسير جسم بحيث ان بعده عن
نقطة الاصل يعطى بالعلاقه ف(ن) = ب جا٤ن
اوجد تسارع الجسم في اللحظة
التي يقطع فيها مسافة ٤م

جمعية الوسام AL WISAM

السؤال الثالث

(م) يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) وكانت
$= \frac{ف(ن+\Delta ن)-ف(ن)}{\Delta ن}$ ، $\Delta ن \leftarrow 0$
$= ٣ن^{٢} - ٤ن + ٢$
فاوجد سرعة الجسم عندما ن = ٣

(ن) يتحرك جسم حسب العلاقة
ع(ن) = ف(٢ن^{٢} - ن) جد
التسارع لهذا ثانيتين علما بان
السرعة عندما ن = ٦ تساوي
٣ م/ث

ج = ٢١

(هـ) يتحرك جسم حسب العلاقة
ع = $٢\sqrt{ف+١}$ جد التسارع
لهذا الجسم

ت = ٢ م/ث^{٢}

(س) اذا كانت السرعة = $\frac{١}{ف}$ حيث
ف المسافة بالامتار بعد ن
ثانية فاوجد التسارع

الجواب $\frac{-١}{٢ف}$

السؤال الرابع

(م) قذف جسم رأسيًا لأعلى
حسب العلاقة
ف(ن) = ٨ن - ن^{٢} + م وكان
اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم
هو ٣٥ فما جد الثابت م ؟

م = ١٩

(ن) قذفت كرة رأسيًا للأعلى من
محلة ع ارتفاعة ١٤٠ م حسب
العلاقة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}
حيث ف المسافة بالامتار ن
الزمن بالثواني جد سرعة الكرة
لحظة اصطدامها بالارض

ع = -٨٠

(س) قذف جسم رأسيًا الى أعلى
حسب العلاقة ف(ن) = ٦٤ن - ١٦ن^{٢}
من سطح بناية ارتفاعها
٢٠٠ قدم ما سرعة الجسم وهو
على ارتفاع ١٢٠ قدم من
سطح الأرض

ع = -٩٦

مكتبة الأوائل
ALWAEL.COM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(م) اسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ م عن سطح الارض سقوطاً حراً حيث ان المسافة المقطوعة بالامتار بعد ن ثانية هي ف(ن) = ٥ن٢ وفي نفس الوقت قذف جسم من سطح الارض للأعلى حيث ان المسافة التي يقطعها ف٢(ن) = ٥٠ن - ٥ن٢ جد سرعة كلاً من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض.

١٤ = ٢٠ ، ٤٠ = ٣٠

(ن) قذف جسم رأسياً الى اعلى من سطح بناية ارتفاعها ٤٠ م عن سطح الارض فكان ارتفاعه في اي لحظة ف(ن) = ٢٠ن - ٨ن٢ ماذا كان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ٧٠ م جد

(١) قيمة الثابت ٢

(٢) سرعة الجسم لحظة وصوله الارض

(٣) المسافة التي يكون قد قطعها بعد ٤ ثوان من انطلاقه

السؤال السادس

(م) قذف جسم من سطح بناية رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن٢ حيث ف بالامتار ، ن بالثواني جد ارتفاع البناية اذا علمت ان اقصى ارتفاع وصلة الجسم من سطح الارض ٥٠ م.

ع = ٣٠

(ن) قذف جسم من سطح عمارة ارتفاعها ١٢٠ م حسب العلاقة ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن٢ وكان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ١٦٥ م اوجد

(١) سرعته الابتدائية

(٢) الزمن الذي يمضي ليعود الجسم الى الارض

(٣) يتحرك جسم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة ف(ن) = ن٣ - ٣ن٢ + ٣ حيث ف بالامتار ، ن الزمن بالثواني اثبت ان الجسم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته

الجواب ع(ن) = ٣(ن - ١)

اشارة ع + + + | - - -
١

مكتبة الوسيلة ALWASEELA
الاستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال السابع

(أ) قذف جسم رأسيًا للأعلى من سطح بناية ارتفاعها (ل) متر فصار على مستوى سطح البناية بعد ٤ ثواني ثم اصطدم بالارض بعد ٦ ثانية وكان ارتفاع الجسم عن سطح البناية يعطى بالعلاقة
ف(ن) = ٢ن − ٥ن² اوجد
قيمة ٢، ل

٢ = ٢٠ ، ل = ٢٠ م

(ب) يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = ن³ − ٤٢ن + ٢٠ حتى تكون سرعة الجسم معاوية لتسارعة

ن = ٤

(ج) يتحرك جسم بحيث ان ع = ف³
احسب التسارع عندما تكون السرعة = ٢٨ م/ث

ن = ٤٢

مكتبة الهسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

حلول ورقة عمل تطبيقات فيزيائيه

السؤال الأول

(أ) $ت(ن) = \frac{ع(ن)}{ز(ن)} = \frac{٢ن - ٦}{\sqrt{ن^٢ - ٦ن + ١٣}}$

$ت(ن) = ٠ \leftarrow ٢ن - ٦ = ٠ \leftarrow ن = ٣$

$ع(٣) = \sqrt{٩ - ١٨ + ١٣} = \sqrt{٤} = ٢$

(ب) $ف(ن) = ن^٣ - ٧ن^٢ + ٩ن + ١$

$ع(ن) = ٣ن^٢ - ١٤ن + ٩ = ١$

$٣ن^٢ - ١٤ن + ٨ = ٠$

$(٣ن - ٢)(ن - ٤) = ٠$

$ن = \frac{٢}{٣}$ ، $ن = ٤$

$ت(ن) = ٦ن - ١٤$

$ت(\frac{٢}{٣}) = ٦ \times \frac{٢}{٣} - ١٤ = -١٠$

$ت(٤) = ٦ \times ٤ - ١٤ = ١٠$

(ج) $ف(ن) = ٤٦$

$٢ن^٣ - ١٧ن^٢ + ٤٤ن + ١٠ = ٤٦$

$٢ن^٣ - ١٧ن^٢ + ٤٤ن - ٣٦ = ٠$

	٢	-١٧	٤٤	-٣٦
٢		٤	-٢٦	٣٦
	٢	-١٣	١٨	٠

$(ن - ٢)(٢ن^٢ - ١٣ن + ١٨)$

$(ن - ٢)(٢ن - ٩)(ن - ٢) = ٠$

$ن = ٢$

$ن = \frac{٩}{٢}$

(د) $ع(ن) = ٦ن^٢ - ٣٤ن + ٤٤$

$ت(ن) = ١٢ن - ٣٤$

$ع(٢) = ٢٤ - ٦٨ + ٤٤ = ٠$

$ت(٢) = ٢٤ - ٢ \times ١٢ = -١٠$

$ع(\frac{٩}{٢}) = ٦ \times \frac{٨١}{٤} - ٣٤ \times \frac{٩}{٢} + ٤٤ = ١٢,٥$

$ت(\frac{٩}{٢}) = ٢٤ - ١٢ \times \frac{٩}{٢} = ٢٠$

السؤال الثاني

(أ) $ع(ن) = ٦٣ + ٣٠ن - ٣ن^٢$

بالقسمة على ٣

$٣ن^٢ - ٣٠ن + ٦٣ = ٠$

$ن^٢ - ١٠ن + ٢١ = ٠$

$(ن - ٣)(ن - ٧) = ٠$

+	+	−	+
	٣		٧

الدالة متزايدة $(٣, ٧)$

(ب) $\frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠} = ٣$

$\frac{ط ب^٢ \times \frac{١}{٤} + ب ح \frac{ط}{٤} - (ط ب ٠ + ب ح ٠)}{٢} = ٣$

$\frac{ب - ط}{٢} = ٢ \leftarrow ب - ط = ٦$

$ع(ن) = -ط ب^٢ \times \frac{ن}{٤} + ط \times ب ح \frac{ن}{٤}$

$ع(٤) = -ط ب^٢ + ب ح ط = ٢٥ط$

$ب ح = ٢٥ \leftarrow ب = \frac{٢٠٠}{ح}$

$ب - ط = ٦ \leftarrow \frac{٢٠٠}{ح} - ط = ٦$

$ط = -٦ح + ٢٠٠$

السؤال الثاني

ج) ف(ن) = ٤

م جا٤ن = ٤

ع(ن) = ٤م جتا٤ن

ت(ن) = -١٦م جا٤ن بعطيان

ت(ن) = -١٦ × ٤ = -٦٤

د) ع(ن) = $\frac{1}{ف(ن)}$

ع'(ن) = ت(ن) = $\frac{-ف'(ن)}{ف^2(ن)}$

= $\frac{-ع \times ع^2}{}$

= -ع^٣

أو ع'(ن) = ت(ن) = $\frac{-1}{ف^3}$

السؤال الثالث

ب) بما $\lim_{ن \to 0} \frac{ف(ن+٥ن)-ف(ن)}{٥ن}$ = ف'(ن)

ع(ن) = ٣ن^٢ - ٤ن + ٤

ع(٣) = ٢٧ - ١٢ + ٤ = ١٧

السؤال الرابع

ب) ع(ن) = ٨ - ٨ن = ٠

ن = ٤

ف(٤) = ٨ × ٤ - ١٦ + م = ٣٥

١٦ + م = ٣٥ ← م = ١٩

ا) ع(ن) = ف(٢ن^٢ - ن)

ع'(ن) = ف'(٢ن^٢ - ن) × (٤ن - ١)

ت(٢) = ف'(٦) × ٧

= ع(٦) × ٧

ت(٢) = ٣ × ٧ = ٢١ ، ع(٦) = -٣

ا) ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^٢ + ١٤٠ = ٠

٥ن^٢ - ٦٠ن - ١٤٠ = ٠ بالقسمة على ٥

ن^٢ - ١٢ن - ٢٨ = ٠

(ن - ١٤)(ن + ٢) = ٠

ن = ١٤ ن = -٢ ×

ع(ن) = ٦٠ - ١٠ن

ع(١٤) = ٦٠ - ١٤٠ = -٨٠

ج) ٦٤ن - ١٦ن^٢ - ١٢٠ = ٢٠٠

١٦ن^٢ - ٦٤ن + ٨٠ = ٠ بالقسمة على ١٦

ن^٢ - ٤ن + ٥ = ٠

(ن - ٥)(ن - ١) = ٠

ن = ٥ ن = ١

ع(ن) = ٦٤ن - ٣٢ن^٢ ع(١) = ٣٢

ع(٥) = ٣٢٠ - ٦٤٠

= -٣٢٠

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(أ) $ف_1 + ف_2 = 100$

$50n^2 + 50n - 4n^2 = 100$

$46n^2 + 50n - 100 = 0$

$50n = 100 \quad n = 2$

$ع_1 = 10n \quad ع_1(2) = 20$

$ع_2(n) = 50 - 10n \quad ع_2(2) = 30$

(ب)

(1) $ف(n) = 4n - 8n^2 + 64 = 64$

$4n - 8n^2 = 0$

$ع(n) = 4 - 16n = 0$

$n = \frac{4}{16}$ بعوضها

$4 \times \frac{4}{16} - 8(\frac{4}{16})^2 - 2c = 0$

$\frac{4c}{16} - 8 \times \frac{4c^2}{16 \times 16} - 2c = 0$

$\frac{4c}{16} - \frac{4c^2}{32} - 2c = 0$

$\frac{4c^2}{32} - \frac{4c}{32} - 2c = 0$

$\frac{4c}{32} = 2c \Leftarrow 4c^2 = (32c)^2$

$32c = 4$

(ج) $ف(n) = 0$

$32n - 8n^2 + 64 = 0$

$8n^2 - 32n - 64 = 0$

$n^2 - 4n - 8 = 0$

$(n - 8)(n + 1) = 0$

$n = 8$

$ع(8) = 32$

$ف(n) = 32n - 8n^2 + 64$

$ع(n) = 32 - 16n$

$ع(8) = 32 - 16 \times 8 = 32 - 128 = -96$

(د) $ف(4) = 32 \times 4 - 8 \times 16$

$= 128 - 128 + 64$

$= 64$

السؤال السادس

(أ) $ع(n) = 10 - 2c = 0$

$n = 2$

$ف(2) = 4c + 50$

$50 = 4(2) - 2c \times 2c$

$50 = 4c - 40$

$50 = 4c + 10$

$40 = 4c$

$10 = c$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(ب)

ع(ن) = ٢ - ١٠ن = ٠

ن = ٢/١٠

اقصى ارتفاع

ف(٢/١٠) + ١٢٠ = ١٦٥

٢٠/١٠ - ٥(٤/١٠٠) + ١٢٠ = ١٦٥

٢/١٠ - ٥/٢٥ = ٤٥

٤/٢٥ = ٤٥

ع٢ = ٤٥ × ٢٠

= ٩٠٠

ع = ٣٠

ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن٢

ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن

ع(١٠) = ٣٠

ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن٢ + ١٢٠

= ٠ بالضرب × ٥

ن٢ - ٦ن - ٢٤ = ٠

القاعدة العامة

(ج)

ع(ن) = ٣ن٢ - ٦ن + ٣ = ٠

ن٢ - ٢ن + ١ = ٠

(ن - ١)٢ = ٠

ن = ١

+	+	٠	+	+
		١		

توقف عند ن = ١

ع(١) = صفر

السؤال الرابع

(أ)

ف(ن) = ٢ن - ٥ن٢

ف(٤) = ٢٤ - ٥ × ١٦ = ٠

٢٤ = ٨٠ ← ٢ = ٢٠

بعد سطح الأرض

ف(ن) + ل = ٠ ن = ٢ + ٤ = ٦

٢٠ن - ٥ن٢ + ل = ٠

٢٠ × ٦ - ٥ × ٣٦ + ل = ٠

١٢٠ - ١٨٠ + ل = ٠

- ٦٠ + ل = ٠

ل = ٦٠

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

(ب)

$ع(ن) = ٣ن^٢ - ٤$

$ت(ن) = ٦ن$

$ع(ن) = ت(ن)$

$٣ن^٢ - ٤ = ٦ن$

$٣ن^٢ - ٦ن - ٤ = ٠$

بالقسمة على ٣

$ن^٢ - ٢ن - ٨ = ٠$

$(ن - ٤)(ن + ٢) = ٠$

$ن = ٤$

(ج)

$ع = ٨$

$٨ = ف^٣ \Rightarrow ف^٣ = ٦٤$

$ف = ٤$

$ع' = ٣ف^٢ \times ف'$

$٨ \times ٨ \times ٣ = ٣ \times ٤ \times ف'$

$ف' = \frac{٣ \times ٨ \times ٨}{٣ \times ٤} = ١٦$ سم/ث

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

المعدلات المرتبطة بالزمن

قوانين هامة جداً

① مساحة المربع = الضلع × الضلع
محيط المربع = ٤ × طول الضلع

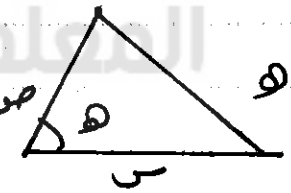
② مساحة المستطيل = الطول × العرض
محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

③ مساحة المثلث =
$\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

الارتفاع : العمود النازل من رأس الزاوية على القاعدة

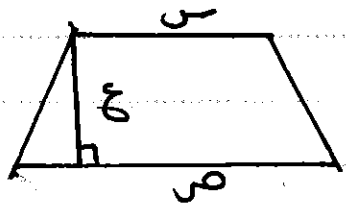
④ مساحة المثلث اذا علم ضلعين وزاوية محصورة بينهما
مساحة المثلث
= $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب الضلعين × جا الزاوية

م = $\frac{1}{2}$ × س × ص × جا هـ



⑤ مساحة الدائرة = π نق^2
محيط الدائرة = π ٢ نق

⑥ مساحة سطح المنحرف
= $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع
= $\frac{1}{2}$ (س + ص) × ع



⑦ مساحة متوازي الاضلاع
= القاعدة × الارتفاع
= س × ع

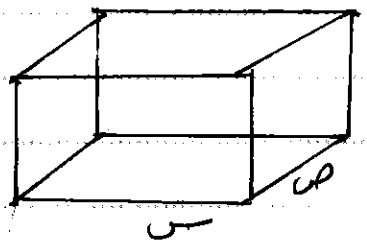
⑧ مساحة المعين
= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑨ حجم متوازي المستطيلات

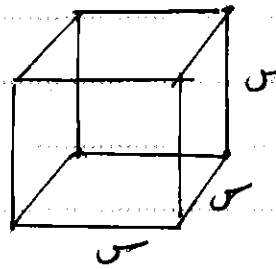
ح = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س × ص × ع



المساحة الكلية =
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
= محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدتين
= (ص + س) ٢ × ع + ٢ س ص

⑩ حجم المكعب



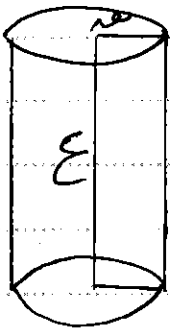
ح = (الضلع)^{٣}

مساحة المكعب
= ٦ × مساحة احد الاوجه
= ٦ × س^{٢}
= ٦ س^{٢}

⑪ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

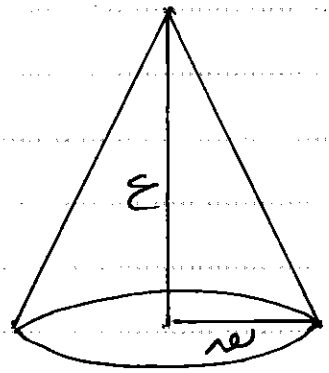
⑫ حجم الاسطوانة



= مساحة القاعدة × الارتفاع
= π نق^{٢} × ع

مساحة الاسطوانة =
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

⑬



حجم المخروط
= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع
= $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

قوانين هامة

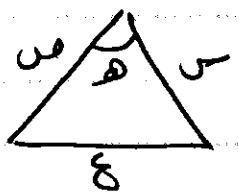
① المسافة بين نقطتين
م(س١، ص١) ، ن(س٢، ص٢)

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

② نظرية فيثاغورس
مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين

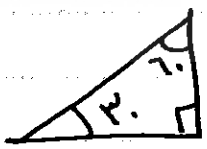
$ف^2 = س^2 + ص^2$

③ قانون جيب التمام



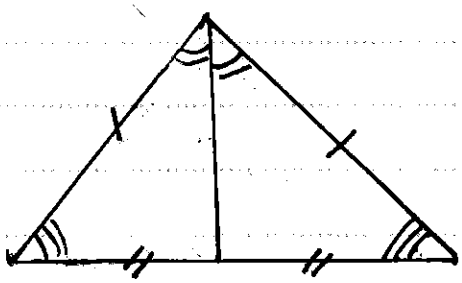
$ع^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص$ جتا هـ

④ في مثلث قائم الزاوية
الذي يقيس
يكون الضلع المقابل للزاوية
$(٣٠^\circ) = \frac{1}{2}$ طول الوتر

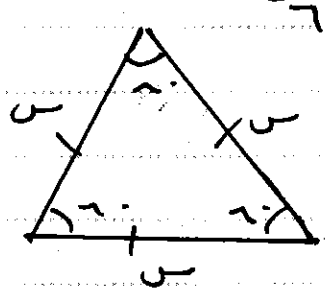


خواص المثلثات

① في مثلث متساوي الساقين
العمود النازل من رأس الزاوية على القاعدة ينصفها ويكون عمودي عليها وأيضاً ينصف زاوية الرأس وزاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين متساويتين



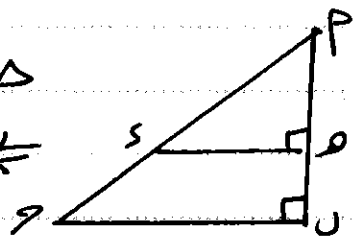
② زوايا مثلث متساوي الاضلاع متساوية $= ٦٠^\circ$



③ تطبيقات المثلثات باربع حالات
① ثلاثة اضلاع
② ضلعين وزاوية محصورة بينهما
③ ضلعين وزاوية قاعدة
④ زاويتين وضلع

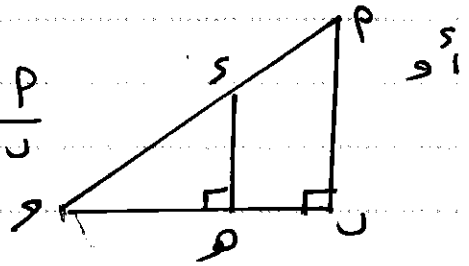
مكتبة الإسكندرية ALEXSCHOOL
المعلم : ناجح الجمزاوي

④ تتشابه المثلثان اذا وجدنا زاويتان قياسهما وينتج من التشابه نسب وتناسب



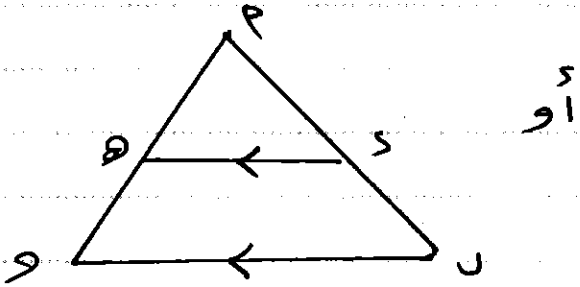
△م ك هـ ~ △م حـ ن

$\frac{م ن}{م حـ} = \frac{ك هـ}{حـ ن}$ ⟸ $\frac{م ن}{ك هـ} = \frac{م حـ}{حـ ن}$



أو

$\frac{م ن}{ك هـ} = \frac{م حـ}{حـ ن}$

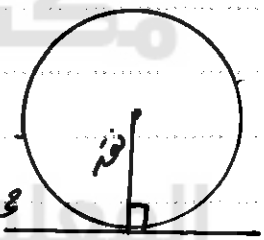


أو

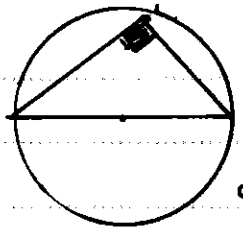
$\frac{م ك}{ك هـ} = \frac{م ن}{حـ ن}$

الدائرة

① نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس

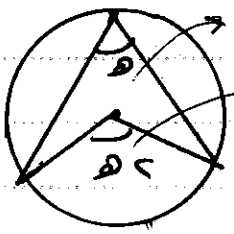


⑤ الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة = ٩٠°



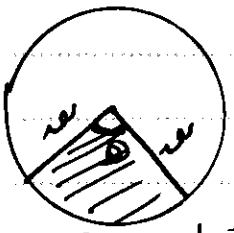
---

③ الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس



---

④ القطاع الدائري : هو جزء من الدائرة محصور بين نصفي قطرين وقوس



قطاع دائري

مساحة القطاع الدائري

$= \frac{1}{2} \times$ نق^2 هـ

هـ : زاوية مركزية بالتقدير الدائري

• القطعة الدائرية : هي جزء من الدائرة محصورة بين وتر وقوس

قطعة دائرية

مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{1}{2}$ نق^2 (هـ − جا هـ)

• طول قوس الدائرة (ل)

= نق هـ

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مفهوم المعدلات المرتبطة بالزمن

هي اقترانات لها علاقة مع الزمن وتسمى هذه الأقترانات اقترانات زمنية ، مثل السرعة ، المسافه المساحه ، زيادة أو نقصان حجم الحجم ؟ - - - - - -

لذلك عندما نشتقه هذه الأقترانات فاننا نشتقها ضمنيًا بالنسبة للزمن .

مشتقة ع هي $\frac{د ع}{د ن}$ معدل تغير ع بالنسبه للزمن

مشتقة ف٢ هي ٢ف × $\frac{د ف}{د ن}$

س ص ← س × $\frac{د ص}{د ن}$ + ص × $\frac{د س}{د ن}$

مشتقة حاهـ ← حتاهـ × $\frac{د هـ}{د ن}$

$\frac{د ص}{د ن}$ = معدل تغير ص بالنسبه للزمن

$\frac{د هـ}{د ن}$ = معدل تغير هـ بالنسبه للزمن

خطوات حل المسألة

١- قراءة المسألة جيدًا والرسم التوضيحي للسؤال .

٢. تحديد الثوابت والمتغيرات وفرض الرموز للمتغيرات
س ، ص ، ف ، ع - - - -

٣. تحويل السؤال من نص كلامي إلى رموز حيث ان معدل أو السرعة تعني المشتقة بالنسبة للزمن .

٤. اذا كان المعدل الزمني يزداد بازدياد الزمن فان قيمته موجبه

واذا كان المعدل الزمني يقل بازدياد الزمن فان قيمته سالبه

٥. تكوين علاقة تحتوي على المطلوب وترتبط هذه العلاقة بالمعطيات وعند الحاجة نستبدل متغير بدلالة آخر من خلال علاقة جانبيه

٦. نشتق متغيرات العلاقه ضمنيًا بالنسبة للزمن

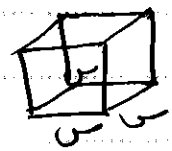
٧. نعوض معطيات السؤال في المشتقة ونجد المطلوب

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ①

مكعب من الثلج تتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠١ سم/ث، جد معدل تناقص كل من حجمه ومساحته الكلية عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

الحل



نفرض طول ضلع المكعب = س

$\frac{د س}{د ن}$ = معدل تغير ضلعه تناقص = −٠,٠٠١

ح : حجم المكعب

$\frac{د ح}{د ن}$ = ؟؟ المطلوب إيجادها عندما س = ١٠

ح = $س^{٣}$ ← $\frac{د ح}{د ن} = ٣س^{٢} \times \frac{د س}{د ن}$

استعنا فيه ضمني بالنسبة للزمن

$\left.\frac{د ح}{د ن}\right|_{س=١٠} = ٣ \times ١٠^{٢} \times \frac{-١}{١٠٠٠} = -٠,٣$

- مساحة الكلية = $٦س^{٢}$

م = $٦س^{٢}$

$\frac{د م}{د ن} = ١٢س \frac{د س}{د ن}$

$\left.\frac{د م}{د ن}\right|_{س=١٠} = ١٢ \times ١٠ \times \frac{-١}{١٠٠٠} = -٠,١٢$

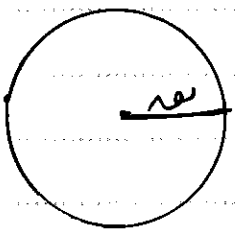
مثال ②

بالون كروي يسرب منه الهواء بمعدل ٣ سم٣/دقيقة أوجد

① معدل تقصان نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر ١٠ سم.

② معدل التغير في مساحة سطح البالون في تلك اللحظة

الحل



ح : حجم البالون

$\frac{د ح}{د ن} = -٣$

نق : نصف قطر البالون

① المطلوب $\left.\frac{د نق}{د ن}\right|$

نق = ١٠

ح = $\frac{٤}{٣} \pi نق^{٣}$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ نق^{٢} \times \frac{د نق}{د ن}$

$-٣ = ٤ \pi \times (١٠)^{٢} \times \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د نق}{د ن} = \frac{-٣}{٤٠٠ \pi}$

② م : مساحة سطح البالون

م = $٤ \pi نق^{٢}$

$\frac{د م}{د ن} = ٨ \pi نق \times \frac{د نق}{د ن}$

$\left.\frac{د م}{د ن}\right|_{نق=١٠} = ٨ \pi \times ١٠ \times \frac{-٣}{٤٠٠ \pi} = \frac{-٣}{٥}$ سم٢/ث

مكتبة الوسام AL WESAM
تعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٣)

كرة ماء كده ألقي فيها حجر فاحدث موجات دائرية ، وفي لحظة ما كانت مساحة المدى الموجات تزداد بمعدل ١٢π م^{٢}/د ، أوجد معدل التغير في محيط الموجة اذا كان نصف القطر عندئذ هو ٧ م

الحل

م : مساحة الموجة

$$\frac{د م}{د ن} = ١٢\pi$$

ل : محيط الموجة

المطلوب $\frac{د ل}{د ن}$ عندما نق = ٧

محيط الموجة ل = ٢π نق

$$\frac{د ل}{د ن} = ٢\pi \times \frac{د نق}{د ن}$$

نجد $\frac{د نق}{د ن}$ من معرفة $\frac{د م}{د ن}$

م = π نق^{٢}

$$\frac{د م}{د ن} = ٢\pi \text{ نق} \times \frac{د نق}{د ن}$$

$$١٢\pi = ٢\pi \times ٧ \times \frac{د نق}{د ن}$$

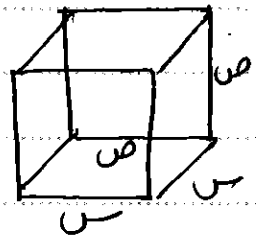
$$\frac{د نق}{د ن} = \frac{١٢\pi}{١٤\pi} = \frac{٣}{٧}$$

بالتعويض

$$\frac{د ل}{د ن} = ٢\pi \times \frac{٣}{٧} = ٣\pi ٦/م$$

مثال (٤)

صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعة يساوي ثلاثة أمثال طول ضلع القاعدة فاذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم/ن ، احسب معدل التغير في الحجم ومعدل التغير في مساحة السطح الكلية للصندوق عندما يكون طول الضلع ٨ سم .



الحل

ص = ٣ س

$$\frac{د س}{د ن} = \frac{١}{٤}$$

س = ٨ المطلوب $\frac{د م}{د ن}$ ، م : مساحة السطح الكلية : $\frac{د ح}{د ن}$

ح = الطول × العرض × الارتفاع

= س × س × ص = س^{٢} × ص

= س × س × ٣ س = ٣ س^{٣}

$$\frac{د ح}{د ن} = ٩ س^{٢} \times \frac{د س}{د ن}$$

$$= ٩ \times ٨^{٢} \times \frac{١}{٤} = ٩ \times ٨ \times ١٦ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ١٤٤$$

م = مساحة الكلية = ٢ س^{٢} + ٤ س ص

= ٢ س^{٢} + ٤ س × ٣ س

= ٢ س^{٢} + ١٢ س^{٢} = ١٤ س^{٢}

$$\frac{د م}{د ن} = ٢٨ \text{ س} \times \frac{د س}{د ن}$$

$$= ٢٨ \times ٨ \times \frac{١}{٤} = ٥٦$$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

صفيحة حديد مستطيلة الشكل سُخنت بحيث تتمدد فكان طولها يزداد بمعدل ٣ سم/ساعة وعرضها يزداد بمعدل ٤ سم/ساعة وفي لحظة ما كان طولها ١٦ سم وعرضها ١٢ سم

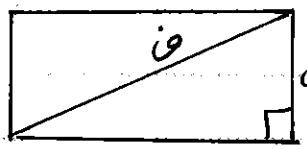
جد

① معدل التغير في محيطها

② معدل التغير في مساحتها

③ معدل التغير في قطرها في تلك اللحظة

الحل



$\frac{د ص}{د ن} = ٣$ سم/ث

$\frac{د س}{د ن} = ٤$ سم/ث

① محيطها $م = ٢ س + ٢ ص$

$\frac{د م}{د ن} = ٢ \frac{د س}{د ن} + ٢ \frac{د ص}{د ن}$

$= ٢ \times ٤ + ٢ \times ٣$

$= ١٤$ سم/ث

② المساحة $م = س \times ص$

$\frac{د م}{د ن} = س \frac{د ص}{د ن} + ص \frac{د س}{د ن}$

$= ١٢ \times ٣ + ١٦ \times ٤$

$= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$ سم^٢/ث

③ ف: القطر $\frac{د ف}{د ن} = ؟؟$

نستخدم نظرية فيثاغورس

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢$ نشتقة

$٢ ف \frac{د ف}{د ن} = ٢ س \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \frac{د ص}{د ن}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{س \frac{د س}{د ن} + ص \frac{د ص}{د ن}}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

$\left. \frac{د ف}{د ن} \right|_{س = ١٦ ، ص = ١٢} = \frac{١٦ \times ٣ + ١٢ \times ٤}{\sqrt{(١٦)^٢ + (١٢)^٢}}$

$= \frac{٤٨ + ٤٨}{\sqrt{٤٠٠}} = \frac{٩٦}{٢٠} = \frac{٤٨}{١٠} = ٩٫٦$ سم/ث

مثال ⑥

تسير نقطة على منحنى $ص = ٢ س^٣$ بحيث أن $\frac{د ص}{د ن} = س$ أوجد $\frac{د س}{د ن}$ عند النقطة $(٢ ، ٤)$

الحل

$ص = ٢ س^٣$

$\frac{د ص}{د ن} = ٦ س^٢ \frac{د س}{د ن}$

$س \times \frac{د ص}{د ن} = ٦ س^٢ \times \frac{د س}{د ن}$

$٢ \times ٤ \times \frac{د س}{د ن} = ٦ \times ٢ \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

تتحرك نقطة على $س^٢ + ص^٢ = ١١٧$ جد احداثيات النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل التغير في الاحداثي السيني ٣ سم/ث، ومعدل التغير في الاحداثي الصادي ٢ سم/ث

الحل

$\frac{د س}{د ن} = ٣$ ، $\frac{د ص}{د ن} = ٢$

$٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$

$٢ س \times ٣ + ٢ ص \times ٢ = ٠$

$٦ س + ٤ ص = ٠ \Leftarrow ٤ ص = -٦ س$

$\leftarrow ص = -\frac{٣}{٢} س$ بالتعويض في

$س^٢ + ص^٢ = ١١٧$

$س^٢ + (-\frac{٣}{٢} س)^٢ = ١١٧$

$س^٢ + \frac{٩}{٤} س^٢ = ١١٧ \rightarrow \times ٤$

$٤ س^٢ + ٩ س^٢ = ٤٦٨$

$١٣ س^٢ = ٤٦٨ \leftarrow س^٢ = \frac{٤٦٨}{١٣} = ٣٦$

$س = \pm ٦$

$س = ٦ \leftarrow ص = -\frac{٣}{٢} \times ٦ = -٩$

النقطة $(٦ ، -٩)$

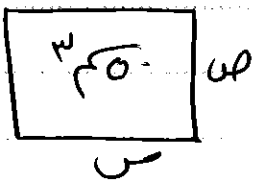
$س = -٦ \leftarrow ص = -\frac{٣}{٢} \times -٦ = ٩$

$(-٦ ، ٩)$

مثال ⑧

مستطيل مساحته ٥٠ سم^٢ اذا زاد طول ضلعين متوازيان فيه بمعدل ٢ سم/ث، وتناقص طولا الضلعين الآخرين بحيث تظل مساحته ثابتة، فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها المحيط عن التناقص.

الحل



$\frac{د س}{د ن} = ٢$

محيط المستطيل $= ل = ٢ س + ٢ ص$

$م = س \times ص = ٥٠$

$\leftarrow ص = \frac{٥٠}{س}$ نعوضها في ل

$ل = ٢ س + ٢ \times \frac{٥٠}{س} = ٢ س + \frac{١٠٠}{س}$

$\frac{د ل}{د ن} = ٢ \times \frac{د س}{د ن} - \frac{١٠٠}{س^٢} \times \frac{د س}{د ن}$

عندما يتوقف المحيط عن التناقص فان المحيط ل يصبح ثابت $\leftarrow \frac{د ل}{د ن} =$ صفر

صفر $= ٢ \times ٢ \times \frac{د س}{د ن} - \frac{١٠٠}{س^٢} \times \frac{د س}{د ن}$

$= ٤ - \frac{١٠٠}{س^٢} = ٠$

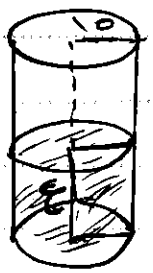
$\frac{١٠٠}{س^٢} = ٤ \leftarrow ٤ س^٢ = ١٠٠$

$\leftarrow س^٢ = ٢٥ \quad س = ٥$

$ص = \frac{٥٠}{س} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$

مثال ⑨

خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٣٠ م يخرج منه الماء بمعدل ٢ م٣/د فجد سرعة انخفاض سطح الماء فيه



الحل

حجم الماء = ح

$\frac{د ح}{د ن} = -٢$

القطر = ٣٠ ⇐ نق = ١٥

ح = π نق^{٢} ع = π(١٥)^{٢} ع

= ٢٢٥ π ع

(نصف القطر للاسطوانة ثابت)

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{د ع}{د ن} \times$ ٢٢٥ π

$-٢ =$ ٢٢٥ π $\frac{د ع}{د ن}$

$\Leftarrow \frac{د ع}{د ن} = \frac{-٢}{٢٢٥ \pi}$

مثال ⑩

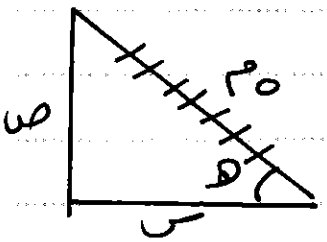
يرتكز سلم طوله ٥ م على حائط عمودي واسفله على ارض افقية بدأ السلم الانزلاق بسرعة ٣ م/د وفي لحظة معينة كان بعد أسفل السلم ٣ م عن الحائط اوجد

① سرعة صعود اعلى السلم في تلك اللحظة

② معدل تغير الزاوية المحصورة بين أسفل السلم والارض في تلك اللحظة

③ معدل تغير مساحة المثلث المحصور بين السلم والارض والجدار.

الحل



①

$\frac{د س}{د ن} = ٣$

$\frac{د ص}{د ن} = ؟؟$

س = ٣

حسب نظرية فيثاغورس س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

$٢ س \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \frac{د ص}{د ن} = ٠$

$٢ \times ٣ \times ٣ + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$

عندما س = ٣ فان ٣^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

٩ + ص^{٢} = ٢٥ ⇐ ص^{٢} = ١٦ ص = ٤

$٢ \times ٣ \times ٣ + ٢ \times ٤ \frac{د ص}{د ن} = ٠$

$\frac{د ص}{د ن} = \frac{-١٨}{٨} = \frac{-٩}{٤}$

② $\frac{د هـ}{د ن} = ؟؟$

جتا هـ = $\frac{س}{٥}$ ⇐ −جا هـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٥} \frac{د س}{د ن}$

عندما س = ٣ ⇐ ص = ٤

جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ⇐ جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

$-\frac{٤}{٥} \times \frac{د هـ}{د ن} = ٣ \times \frac{١}{٥} \Leftarrow \frac{د هـ}{د ن} = \frac{-٣}{٤}$

③ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

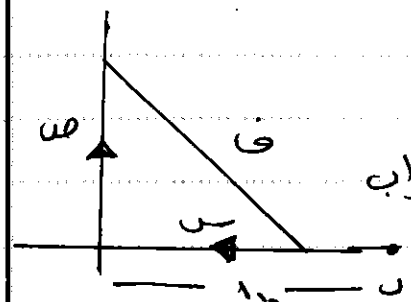
م = $\frac{١}{٢}$ س ص

$\frac{د م}{د ن} = \frac{١}{٢} (س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{د س}{د ن})$

$= \frac{١}{٢} (٣ \times \frac{-٩}{٤} + ٤ \times ٣) = \frac{٢١}{٨}$

مثال (١١)

سفينتان البعد بينهما ١٠٠ ميل
P تقع غربي ن ، وتسير شمالاً
بسرعة ٣٠ ميل/س ، وب تسير
غرباً بسرعة ٤٠ ميل/س ، جد معدل
تغير البعد بين السفينتين بعد مرور
ساعتين .



الحل

$\frac{د س}{د ن} = -٤٠$ اقتراب

$\frac{د ص}{د ن} = ٣٠$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢$

$٢ ف \times \frac{د ف}{د ن} = ٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \times \frac{د ص}{د ن}$ (١)

بعد ساعتين ⇐ المسافة = السرعة × الزمن

$ص = ٣٠ \times ٢ = ٦٠$

$س = ١٠٠ - ٤٠ \times ٢ = ٦٠$

$ف^٢ = (٦٠)^٢ + (٦٠)^٢ = ٣٦٠٠ + ٣٦٠٠$

$= ٧٢٠٠$

$ف = \sqrt{٧٢٠٠} = ٦٠\sqrt{٢}$ (١) بالتعويض

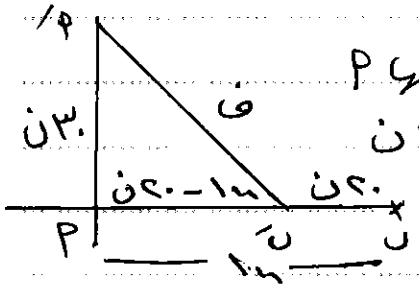
$٢ \times ٦٠\sqrt{٢} \times \frac{د ف}{د ن} = ٢ \times ٦٠ \times (-٤٠) + ٢ \times ٦٠ \times ٣٠$

$٢ \times ١٢٠\sqrt{٢} \times \frac{د ف}{د ن} = -٤٨٠٠ + ٣٦٠٠$

$١٢٠\sqrt{٢} \times \frac{د ف}{د ن} = -١٢٠٠$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{-١٢٠٠}{١٢٠\sqrt{٢}} = \frac{-١٠}{\sqrt{٢}}$

حل آخر بدلالة الزمن (ن)



المسافة التي تقطعها P $= ٣٠ \times ن = ٣٠ن$

المسافة التي تقطعها ب $= ٤٠ \times ن = ٤٠ن$

$ف = \sqrt{(١٠٠ - ٤٠ن)^٢ + (٣٠ن)^٢}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(١٠٠ - ٤٠ن) \times -٤٠ + ٢ \times ٣٠ن \times ٣٠}{٢\sqrt{(١٠٠ - ٤٠ن)^٢ + (٣٠ن)^٢}}$

$\frac{د ف}{د ن}\Big|_{ن=٢} = \frac{٢ \times ١٨٠٠ + ٢ \times -٤٠ \times (٤٠ - ١٠٠)}{٢\sqrt{(٤٠ - ١٠٠)^٢ + ٤ \times ٩٠٠}}$

$= \frac{٣٦٠٠ - ٤٨٠٠}{٣٦٠٠ + ٣٦٠٠\sqrt{٢}}$

$= \frac{-١٢٠٠}{٧٢٠٠\sqrt{٢}}$

$= \frac{-١٠}{٦\sqrt{٢}}$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

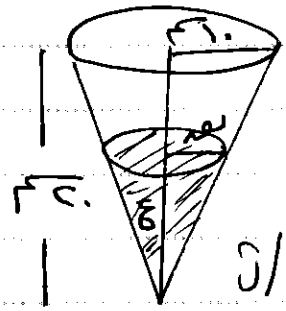
مخروط دائري قائم رأسه للأسفل ارتفاعه ٤٠ سم، ونصف قطره ١٠ سم يسكب فيه الماء من الأعلى بمعدل ٨ سم٣/ث، ويخرج منه الماء بمعدل ٥ سم٣/ث، وفي لحظة ما كان ارتفاع الماء فيه ٦ سم، اوجد ما يلي

① سرعة ارتفاع الماء في المخروط في تلك اللحظة

② معدل التغير في نصف قطر سطح الماء في تلك اللحظة

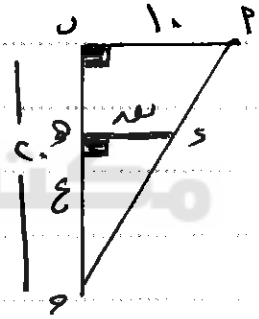
③ معدل التغير في مساحة سطح الماء في تلك اللحظة.

الحل



ح : حجم الماء في المخروط

$\frac{د ح}{د ن} = ٨ - ٥ = ٣$ سم٣/ث



① ع : ارتفاع الماء

$\frac{د ع}{د ن} \Big| _{ع = ٦} = ٦$

من تشابه $\triangle$ أ ب ء ، $\triangle$ ء د هـ

$\frac{١٠}{٤٠} = \frac{نق}{ع} \leftarrow ٤ نق = ع$

$\leftarrow \boxed{نق = \frac{١}{٤} ع}$

$ح = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

$ح = \frac{١}{٣} \pi (\frac{١}{٤} ع)^٢ ع = \frac{١}{١٦} \pi ع^٣$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{٣}{١٦} \pi ع^٢ \times \frac{د ع}{د ن}$

$٣ = \frac{١}{٤} \times \pi \times ٦^٢ \times \frac{د ع}{د ن}$

$٣ = \pi ٩ \times \frac{د ع}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{٣}{\pi ٩} = \frac{١}{\pi ٣}$

② $\frac{د نق}{د ن} \Big| _{ع = ٦} \quad نق = \frac{١}{٤} ع$

$\leftarrow \frac{د نق}{د ن} = \frac{١}{٤} \times \frac{د ع}{د ن}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\pi ٣} = \frac{١}{\pi ١٢}$

③ م : مساحة سطح الماء

$م = \pi نق^٢$

$\frac{د م}{د ن} = \pi ٢ نق \times \frac{د نق}{د ن}$

عندما ع = ٦ فإن $نق = \frac{١}{٤} \times ٦ = ٣$

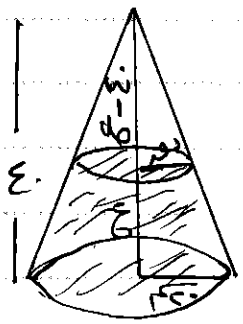
$\frac{د م}{د ن} = \frac{١}{\pi ٦} \times ٣ \times \pi ٢ = ١$ سم٢/ث

ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

مخروط دائري قائم قاعدته لاسفل ونصف قطر قاعدته ٤٠ سم، وارتفاعه ٤٠ سم، ينسكب فيه الماء بمعدل ٣٠ سم٣/د اوجد معدل التغير في ارتفاع الماء داخل المخروط عندما يكون ارتفاع الماء يساوي ١٦ سم.

الحل



ح : حجم الماء

$\frac{دح}{دن} = ٣٠$ سم٣/د

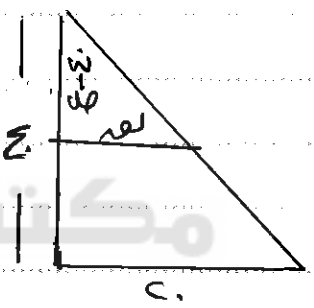
ع : ارتفاع الماء

$\frac{دع}{دن} = ؟؟$

ع = ١٦

حجم الماء = حجم المخروط الكبير − حجم المخروط الصغير

$ح = \frac{1}{3}\pi(٤٠)^2 \times ٤٠ - \frac{1}{3}\pi$ نق^2 (٤٠ − ع)



من تشابه المثلثات

$\frac{٤٠ - ع}{نق} = \frac{٤٠}{٤٠}$

$نق = ٤٠ - ع$

$نق = ٤٠ - \frac{1}{2}ع$

$ح = \frac{1}{3}\pi(٤٠)^2(٤٠) - \frac{1}{3}\pi(٤٠ - \frac{1}{2}ع)^2(٤٠ - ع)$

$ح = \frac{١٦٠٠٠}{٣}\pi - \frac{1}{12}\pi(٨٠ - ع)^3$

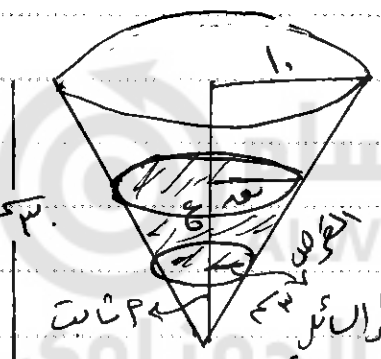
$\frac{دح}{دن} = صفر - \frac{1}{4\pi}(٨٠ - ع)^3 \times \frac{-دع}{دن}$

$٣٠ = \frac{1}{4\pi}(٨٠ - ١٦)^2 \times \frac{دع}{دن}$

$٣٠ = \frac{١٤٤}{\pi}\frac{دع}{دن} \leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{\pi ٥}{٤٤}$

مثال (١٤)

يمثل الشكل المجاور إناء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطره ١٠ سم، وارتفاعه ٣٠ سم، اغلقه جزء منه بقرص معدني دائري رقيق طول نصف قطره ٣ سم يوازي قاعدة المخروط يمنع وصول اي مادة للجزء السفلي من الاناء، فاذا صُب سائل في هذا الاناء بمعدل ثابت قدره $(\pi ٥)$ سم٣/ث، جد سرعة ارتفاع السائل في الاناء عندما يكون حجم السائل في الاناء $(\pi ٢٧٠)$ سم٣



الحل

نق : نصف قطر السائل

ع : ارتفاع السائل

ح : حجم السائل

← يتبع الحل

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

$\frac{ك ع}{ك ن} = ٥ \pi$ سم^٣/ث

المطلوب $\frac{ك ع}{ك ن}$ | $ن = ٢٢$

$ع = ٣٧ \pi$

نفرض ان ارتفاع المخروط الصغير $= ف$ ، ولايجاد حجمة $ف$ من تشابه المثلثان نجد ان

$\frac{ف}{٣} = \frac{٣٠}{١٠} \Leftarrow ف = ٩$

ح ب ك = حجم المخروط الكبير - حجم المخروط الصغير

$ح = \frac{\pi}{٣}$ نق^٢ $(٤+٩) - \frac{\pi}{٣}$ $(٣)^٢ \times ٩$

$ح = \frac{\pi}{٣}$ نق^٢ $(٤+٩) - ٣٧ \pi$

ومن تشابه المثلثان

$\frac{نق}{٤+٩} = \frac{٣}{٩} \Leftarrow \frac{نق}{٤+٩} = \frac{١}{٣}$

$\Leftarrow ٣$ نق $= ٤+٩ \leftarrow$ نق $= \frac{٤+٩}{٣}$

$\Leftarrow ح = \frac{\pi}{٣} (\frac{٤+٩}{٣})^٢ \times (٤+٩) - ٣٧ \pi$

$ح = \frac{\pi}{٢٧} (٤+٩)^٣ - ٣٧ \pi$ العلاقة

$\frac{ك ع}{ك ن} = \frac{\pi}{٢٧} \times ٣ (٤+٩)^٢ \times \frac{ك ع}{ك ن}$ + ص

نجد حجم ع عندما $ع = ٣٧ \pi$

$٣٧ \pi = \frac{\pi}{٢٧} (٤+٩)^٣ - ٣٧ \pi$

$\frac{\pi}{٢٧} (٤+٩)^٣ = ٣٧ \pi + ٣٧ \pi$

$(٤+٩)^٣ = ٢٧ \times ٦٤$

$٤+٩ = \sqrt[٣]{٢٧ \times ٦٤}$ $\Leftarrow$

$٤+٩ = ٣ \times ٤ = ١٢$

$٤ = ١٢ - ٩ = ٣$

$\frac{ك ع}{ك ن} = \frac{\pi}{٩} (٤+٩)^٢ \times \frac{ك ع}{ك ن} \Leftarrow$

$\pi ٥ = \frac{\pi}{٩} (٣+٩)^٢ \times \frac{ك ع}{ك ن}$

$\frac{ك ع}{ك ن} \times ١٤٤ = ٤٥$

$\frac{ك ع}{ك ن} = \frac{٤٥}{١٤٤} = \frac{٥}{١٦} \Leftarrow$

ملاحظة هامة

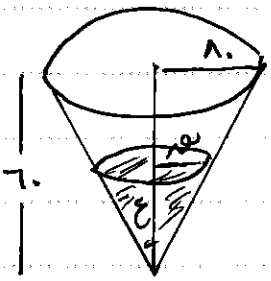
في اسئلة المخروط نجعل علاقة الحجم $(ح)$ بدلالة متغير واحد دائماً ، ولذلك نحتاج دائماً علاقة تربط بين نق ، ع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

مخروط دائري قائم راسه لأسفل نصف قطر قاعدته ٨٠ سم وارتفاعه ١٦٠ سم يسرب منه الماء ويتجمع في وعاء اسطواني الشكل نصف قطره ٥٠ سم، أوجد ارتفاع الماء في المخروط في اللحظة التي يكون فيها معدل هبوط الماء في المخروط ضعف معدل ارتفاع الماء في الاسطوانه.

الحل



نبدأ بالمخروط اولاً

$ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$

من تشابه المثلثات

$\frac{نق}{ع} = \frac{٨٠}{١٦٠}$

$\Leftarrow ٢ نق = ع$

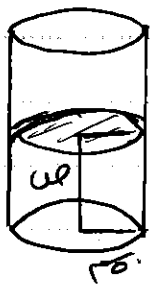
$\Leftarrow نق = \frac{1}{2} ع$

$\therefore ح = \frac{1}{3} \pi \times (\frac{1}{2} ع)^2 \times ع$

$= \frac{\pi}{12} ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{12} \times ٣ ع^2 \times \frac{دع}{دن}$

$= \frac{\pi}{4} ع^2 \times \frac{دع}{دن}$



الاسطوانه

$ح = \pi نق^2 ع$ حيث: ثابت $= ٥٠$

$ع = ص$

$ح = \pi \times ٥٠^2 \times ص$

$\frac{دح}{دن} = \pi \times ٥٠^2 \times \frac{دص}{دن}$

لكن $\frac{دح}{دن}$ للمخروط $= \frac{دح}{دن}$ للاسطوانه

$\frac{\pi}{4} ع^2 \times \frac{دع}{دن} = \pi \times (٥٠)^2 \times \frac{دص}{دن}$

لأن المطلوب ع عندما $\frac{دع}{دن} = \frac{دص}{دن}$

$\Leftarrow \frac{\pi}{4} ع^2 = \pi \times ٥٠^2$

$ع^2 = ٥٠^2 \Rightarrow ع^2 = ٤ \times ٥٠^2$

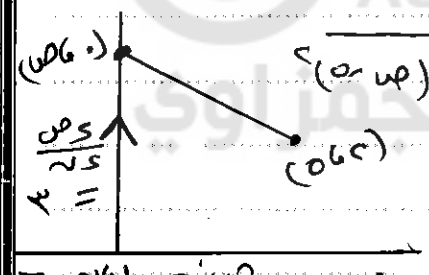
$ع = \sqrt{٤ \times ٥٠^2} = ٢ \times ٥٠ = ١٠٠$

مثال (١٦)

بدأت نقطة الحركة من نقطة الاصل وفي الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٣ سم/ث، أوجد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٥، ٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة.

الحل

$ف = \sqrt{(ص - ٥)^2 + (٥ - ٠)^2}$



يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$ف = \sqrt{(-٢)^{٢} + (ص-٥)^{٢}}$

$ف = \sqrt{٤ + ص^{٢} - ١٠ص + ٢٥}$

$ف = \sqrt{ص^{٢} - ١٠ص + ٢٩}$

$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ص - ١٠}{٢\sqrt{ص^{٢} - ١٠ص + ٢٩}} \times \frac{د ص}{د ن}$$

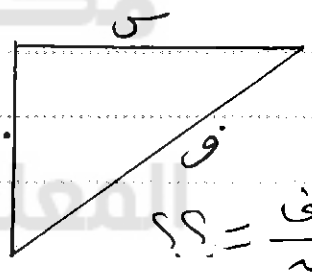
$$= ٢ \times \frac{٦ \times ٢ - ١٠}{٢\sqrt{٣٦ - ٦ \times ١٠ + ٢٩}}$$

$$= ٢ \times \frac{٢}{٢\sqrt{٥٧}} = \frac{٣}{\sqrt{٥٧}}$$

مثال (١٧)

يمسك ولد بيده خيط طائرة ورقية مرتفعه ١٢٠م والرياح تأخذ الطائرة عن الولد افقيا بمعدل ٨م/ث ، كم السرعة التي يعطي بها الولد الخيط عندما يبعد الطائرة عنه ٢٠٠م

الحل



$\frac{د س}{د ن} = ٨$

$ف = ٢٠٠$ ، $\frac{د ف}{د ن} = ؟؟$

$ف^{٢} = (١٢٠)^{٢} + س^{٢}$

$(٢٠٠)^{٢} = (١٢٠)^{٢} + س^{٢}$

$٤٠٠٠٠ - ١٤٤٠٠ = س^{٢}$

$س^{٢} = ٢٥٦٠٠ \Leftarrow س = ١٦٠$

بالتعويض

$$ف \times \frac{د ف}{د ن} = س \times \frac{د س}{د ن}$$

$$٢٠٠ \times \frac{د ف}{د ن} = ١٦٠ \times ٨$$

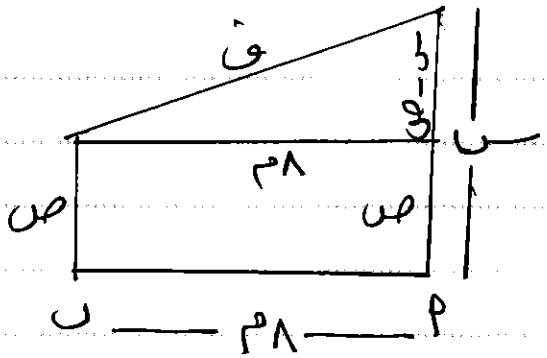
$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{١٦٠ \times ٨}{٢٠٠} = \frac{٣٢}{٥}$$

مثال (١٨)

صعدان كهربائيان P ، Q يستقران في اطار قاعدة الارض فوق عمارة والمسافة الافقية بينهما ٨م ، بدأ الصعد P يرتفع للأعلى بسرعة ٣م/ث ، وبعد ثانيتين بدأ الصعد Q في الارتفاع للأعلى بسرعة ١م/ث ، احسب معدل تغير المسافة بين الصعدين بعد ٢ ثانية من بدء حركة الصعد Q ؟

الحل ⇐

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي



س : المسافة التي قطعها الصقر أ

$\frac{د س}{د ن} = ٢$

ص : المسافة التي قطعها الصقر ب

$\frac{د ص}{د ن} = ١$

$ف^{٢} = (س - ص)^{٢} + ٨^{٢}$

المسافة = السرعة × الزمن

$س = ٢ \times ٤ = ٨$

$ص = ١ \times ٢ = ٢$

$ف = \sqrt{(س - ص)^{٢} + ٦٤}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(س - ص)(\frac{د س}{د ن} - \frac{د ص}{د ن})}{٢\sqrt{(س - ص)^{٢} + ٦٤}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{(٨ - ٢)(٢ - ١)}{\sqrt{(٨ - ٢)^{٢} + ٦٤}}$

$= \frac{٦}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = \frac{٦}{\sqrt{١٠٠}}$

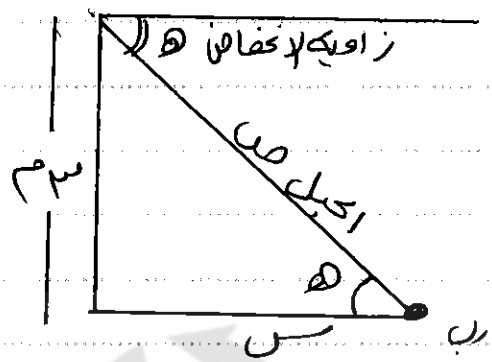
$= \frac{٦}{١٠} = ٠٫٦$ م/ث

مثال (١٩)

يقف شخص على حافة رصيف شاطئ بحر، ويسحب حبلاً متصلاً لقارب بمعدل ٠٫٥ م/ث، فإذا كان ارتفاع يدي الشخص مع ارتفاع الرصيف عن مستوى نقطة اتصال الحبل بالقارب هو ٣ م فجد:

① سرعة تغير زاوية انخفاض الحبل في اللحظة التي يكون فيها القارب على بعد ٤ م من الرصيف

② ثم معدل تغير اقتراب القارب من قاعدة الرصيف في تلك اللحظة



① $\frac{د ص}{د ن} = -\frac{١}{٢}$، هـ : زاوية الانخفاض

زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع

$ظا هـ = \frac{٣}{ص}$

عندما س = ٤ م فإنه حسب نظرية فيثاغورس ← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

← ص = ٥م ← ضباهـ = $\frac{٤}{٥}$

ضباهـ = $\frac{٣}{ص}$ نشتقه

ضباهـ × $\frac{د هـ}{د ن}$ = $\frac{-٣}{ص^{٢}}$ × $\frac{د ص}{د ن}$

$\frac{٤}{٥}$ × $\frac{د هـ}{د ن}$ = $\frac{-٣}{٢٥}$ × $\frac{-١}{٢}$

← $\frac{د هـ}{د ن}$ = $\frac{٣}{٥٠}$ × $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{٣}{٤٠}$ راديان

ⓒ $\frac{د س}{د ن}$ | $_{س=٤}$ ؟؟

ص^{٢} = س^{٢} + ٩

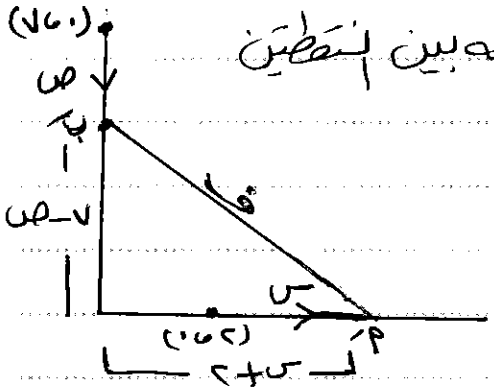
ص × $\frac{د ص}{د ن}$ = س × $\frac{د س}{د ن}$

٥ × $\frac{-١}{٢}$ = ٤ × $\frac{د س}{د ن}$

$\frac{د س}{د ن}$ = $\frac{-٥}{٨}$ م/ث

مثال ⓒ

بدأت النقطة أ الحركة من النقطة (٠،٧) باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٣ سم/د وفي نفس اللحظة بدأت النقطة (ب) الحركة من النقطة (٧،٠) باتجاه نقطة الاصل بسرعة ٤ سم/د جد معدل تغير البعد بين النقطتين بعد مرور ٢ دقيقة من الحركة



ف : المسافة بين النقطتين

$\frac{د س}{د ن}$ = ٣

$\frac{د ص}{د ن}$ = ٢

س : المسافة التي قطعتها النقطة الأولى

س = السرعة × الزمن = ٣ × ٢ = ٦

ص : المسافة التي قطعتها النقطة الثانية

ص = ٢ × ٢ = ٤

ف^{٢} = (س+٢)^{٢} + (٧-ص)^{٢}

ف = $\sqrt{(س+٢)^{٢} + (٧-ص)^{٢}}$

$\frac{د ف}{د ن}$ = $\frac{٢(س+٢) \times \frac{د س}{د ن} + ٢(٧-ص) \times \frac{-د ص}{د ن}}{٢\sqrt{(س+٢)^{٢} + (٧-ص)^{٢}}}$

$\frac{د ف}{د ن}$ = $\frac{٢(٦+٢) \times ٣ + ٢(٧-٤) \times -٢}{٢\sqrt{(٦+٢)^{٢} + (٧-٤)^{٢}}}$

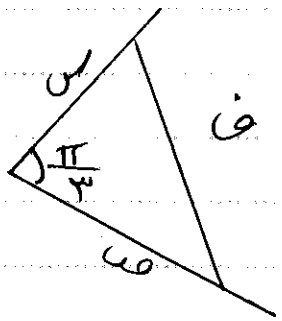
= $\frac{٢٤ - ٦}{\sqrt{٦٤+٩}}$ = $\frac{١٨}{\sqrt{٧٣}}$ سم/د

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال (٢١)

خطان مستقيمان يلتقيان في النقطة م بزاوية $\frac{\pi}{3}$ تحركت النقطة ب من النقطة م على أحد الخطين بسرعة ٣ م/ث وبعد مرور ثانية واحدة تحركت النقطة ن من النقطة م بسرعة ٢ م/ث على الخط الآخر، احسب معدل تغير البعد بينهما بعد ٤ ثواني من حركة النقطة ن .

الحل



حسب قانون جيب التمام

$ف^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص \text{ جتا } \frac{\pi}{3}$

$ف^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص \times \frac{1}{2}$

$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 - س ص}$

$س$ = السرعة × الزمن $= 3 \times 5 = 15$

$ص = 2 \times 4 = 8$

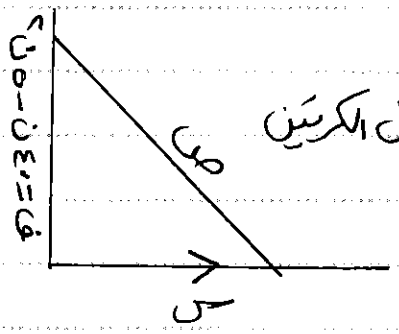
$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{2 س \frac{د س}{د ن} + 2 ص \frac{د ص}{د ن} - (س \frac{د ص}{د ن} + ص \frac{د س}{د ن})}{2 \sqrt{س^2 + ص^2 - س ص}}$$

$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{2 \times 15 \times 2 + 2 \times 8 \times 2 - (15 \times 2 + 8 \times 3)}{2 \sqrt{(15)^2 + (8)^2 - 15 \times 8}} = \frac{34}{13}$$

مثال (٢٢)

تقع النقطة م على شارع مستقيم افقي تحركت كرتان P ، ن من النقطة م في لحظة حيث تحركت الكرة P على الشارع في خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م/ث في حين قذفت الكرة (ن) رأسيًا للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وكان ارتفاعها يعطى بالعلاقة $ف(ن) = 40 ن - 5 ن^2$ اوجد معدل تغير المسافة بين الكرتين P ، ن عندما تصل ن الى اقصى ارتفاع

الحل



$ص$ = المسافة بين الكرتين

$\frac{د س}{د ن} = 15$

المطلوب $\frac{د ص}{د ن}$ عند اقصى ارتفاع

عند اقصى ارتفاع $ع = \frac{د ف}{د ن} = 0$

$ع = ف'(ن) = 40 - 10 ن = 0$

$\leftarrow ن = 4$

$س = 15 \times 4 = 60$

$ف(4) = 40 \times 4 - 5 (4)^2 = 80$ م

حسب فيثاغورس

$ص^2 = س^2 + ف^2$

$ص = \sqrt{س^2 + ف^2}$

يتبع الحل

تابع الحل

$$\frac{ص}{ن} = \frac{س \frac{س}{ن} + ف \frac{ف}{ن}}{\sqrt{س^2 + ف^2}}$$

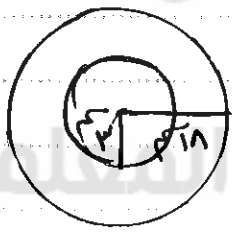
$$\left|\frac{ص}{ن}\right|_{ن=٤} = \frac{٦٠ \times ١٥ + ٨٠ \times ٨٠}{\sqrt{(٦٠)^2 + ٨٠^2}}$$

$$= \frac{٩٠٠}{\sqrt{١٠٠ \times ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠}} = \frac{٩٠٠}{١٠٠} = ٩ \text{ م/ث}$$

مثال (٣)

دائرتان متحدتان في المركز نصفا قطريهما ٣سم ، ١٨سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٣سم/د ، وفي نفس اللحظة اخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدل ٣سم/د ، اوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين عندما تصبح هذه المساحة صفر

الحل



في اللحظة ن

نصف قطر الدائرة الصغرى = ٣ + ٣ × ن

نصف قطر الكبرى = ١٨ − ٣ن

المساحة المحصورة

= مساحة الكبرى − مساحة الصغرى

$م = \pi (١٨ - ٣ن)^2 - \pi (٣ + ٣ن)^2$

$$\frac{دم}{دن} = \pi ٢ (١٨ - ٣ن)(-٣) \times ٢ - \pi ٢ (٣ + ٣ن)(٣)$$

عندما م = ن

نصف قطر الصغرى = نصف قطر الكبرى

$٣ + ٣ن = ١٨ - ٣ن$

$٦ن = ١٥ \leftarrow ن = ٣$

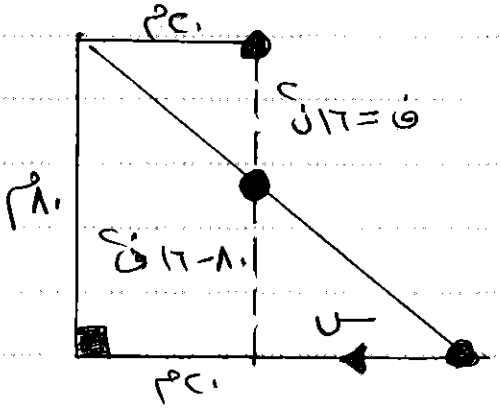
$$\frac{دم}{دن} = \pi ٢ (١٨ - ٣ \times ٣)(-٣) \times ٢ - \pi ٢ (٣ + ٣ \times ٣)(٣)$$

$= -\pi ٣٦ - \pi ٥٤ = -\pi ٩٠$

مثال (٤)

يقع مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٨٠م ، اسقطت كرة من نفس الارتفاع من نقطة تبعد ٦٠م من المصباح ، اذا كانت الكرة تسقط حسب العلاقة $ف = ١٦ن^2$ فما سرعة تحرك ظل الكرة على الارض بعد ثانية واحدة من سقوطها .

← يتبع الحل



س: بعد ظل الكرة عن مكان السقوط المطلوب $\left|\frac{ك س}{ك ن}\right|_{ن=١}$

$$\frac{٨٠}{٢٠+س} = \frac{٨٠-١٦ن^{٢}}{س}$$ ضرب تبادلي

$$٨٠س = (٨٠-١٦ن^{٢})(٢٠+س)$$

$$٨٠س = ١٦٠ + ٢٠س - ١٦ن^{٢}س - ٣٢٠ن^{٢}$$

$$\frac{١٦ن^{٢}س}{١٦ن^{٢}} = \frac{١٦٠}{١٦ن^{٢}} - \frac{٣٢٠ن^{٢}}{١٦ن^{٢}}$$

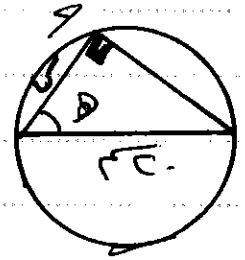
$$س = \frac{١٠}{ن^{٢}} - ٢٠$$ (العلاقة)

$$\frac{ك س}{ك ن} = \frac{-٢٠ن \times ١٠}{ن^{٤}} = \frac{-٢٠٠}{ن^{٣}}$$

$$\left|\frac{ك س}{ك ن}\right|_{ن=١} = \frac{-٢٠٠}{١} = -٢٠٠ م/ث$$

مثال (٢٥)

في الشكل المجاور $\overline{UP}$ وتر في دائرة طوله ٢٠ سم تتحرك النقطة جـ على قوس $\overset{\frown}{UP}$، بحيث يزيد قياس الزاوية جـ بـ P بمعدل ٣° / د، احسب معدل تغير مساحة المثلث UPجـ عندما يكون قياس الزاوية جـ بـ P يساوي $\frac{\pi}{٣}$ ؟



الحل

نفرض ان $ق(\angle جـ بـ P) = هـ$

$ب جـ = س$

م: مساحة المثلث UPجـ

$$\frac{ك هـ}{ك ن} = ٣° = \frac{٣ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦٠}$$ راديان

$$م = \frac{١}{٢} \times ب P \times ب جـ \times \text{جا} هـ$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٢٠ \times س \times \text{جا} هـ$$

$$= ١٠ س \text{ جا} هـ$$

$ق(\angle P جـ ب) = ٩٠°$ محيطية ومرسومة على قطر

$$\text{جا} هـ = \frac{س}{٢٠} \leftarrow س = ٢٠ \text{ جا} هـ$$

$$م = ٢٠ \text{ جا} هـ \times ١٠ \text{ جا} هـ$$

$$= ٢٠٠ \text{ جا}^{٢} هـ$$

$$\frac{ك م}{ك ن} = ٢٠٠ \times ٢ \text{ جا} هـ \times \frac{ك هـ}{ك ن}$$

$$= ٤٠٠ \text{ جا} هـ \text{ جتا} هـ \times \frac{\pi}{٦٠}$$

$$= ٢٠ \times ٢ \text{ جا} هـ \text{ جتا} هـ \times \frac{\pi}{٦٠}$$

$$= ٢٠ \times \frac{١}{٢} \times \text{جا} ٢هـ \times \frac{\pi}{٦٠}$$

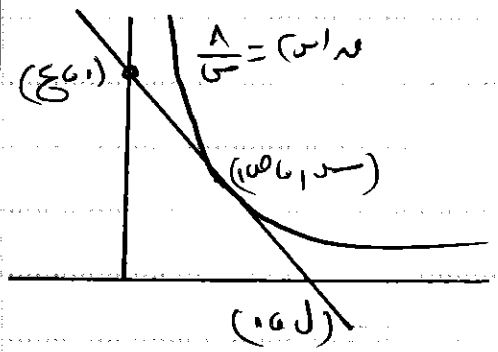
$$= \frac{\pi}{٦} \times \text{جا} ٢هـ$$

$$\left|\frac{ك م}{ك ن}\right|_{هـ=\frac{\pi}{٣}} = \frac{\pi}{٦} \times \text{جا} \frac{٢\pi}{٣} = \frac{\pi}{٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}\pi}{٤}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٦)

رسم محاس لمنحنى الأعمدة ان
ق(س) = $\frac{٨}{س}$ في الربع الأول
كما في الشكل المجاور، فكان
مقطعة السيني والصادي ل مع
على الترتيب، فاذا كان المقطع
السيني يزيد بمعدل ٢ وحدة/ث
جد معدل تغير المقطع الصادي
عندما يكون المقطع السيني ١٠ وحدات



اولاً

ميل المحاس = ميل المنحنى = ق'(س١)
المحاس يمر بالنقطتين (ل، ٠)، (٠، ع)

ميل المحاس = $\frac{٠ - ع}{ل - ٠} = \frac{-ع}{ل}$

ق'(س) = $\frac{-٨}{س^٢}$ ← $\frac{-ع}{ل} = \frac{-٨}{س_١^٢}$

← ٨ ل = ع $س_١^٢$ ---- ①

ثانياً

المحاس يمر بالنقطتين (س١، ص١)
(ل، ٠)

ميل المحاس = $\frac{٠ - ص_١}{ل - س_١} = \frac{-ص_١}{ل - س_١}$

ولكن ص١ = $\frac{٨}{س_١}$

← ميل المحاس = $\frac{-\frac{٨}{س_١}}{ل - س_١}$

ميل المحاس = ميل المنحنى

$\frac{-\frac{٨}{س_١}}{ل - س_١} = \frac{-٨}{س_١^٢}$ (بالتبادلي)

← $-٨ س_١ = -٨ ل + ٨ س_١$

٨ ل = ١٦ $س_١$ ---- ②

نعوض معادلة ② في معادلة ①

٨ ل = ع $٧(\frac{١}{٢} ل)^٢$

٨ ل = ع $\times \frac{١}{٤} ل^٢$

ع = $\frac{٣٢}{ل}$ العلاقة

$\frac{دع}{دن} = \frac{-٣٢}{ل^٢} \times \frac{دل}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{-٣٢}{(١٠)^٢} \times ٢$

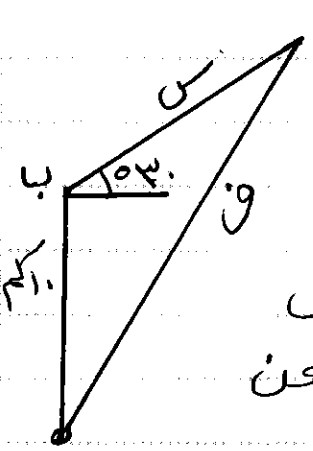
$= \frac{-٦٤}{١٦} = -٤$ وحدة/ث

مؤسسة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

صاروخ يرتفع عمودياً عن سطح الارض إلى أعلى عجيل ٢ كم/ث٢ وعندما وصل إلى ارتفاع ١٠ كم عن الارض انحرف مسار حركته بزاوية مقدارها ٣٠° مع الافق (شمال شرق) محافظاً على نفس السرعة السابقة، ما معدل تغير المسافة بين الصاروخ ونقطة انطلاقه عندما يكون الصاروخ على بعد $10\sqrt{3}$ كم من نقطة الانطلاق

الحل



نفرض ان
ف: بعد الصاروخ عن نقطة الانطلاق
س: بعد الصاروخ عن النقطة ب.

$\overline{PP'} = 90 + 30 = 120$ ≠

$\frac{ds}{dt} = 2$ كم/ث المطلوب $\frac{df}{dt}$

$f = 10\sqrt{3}$

حسب قانون جيب التمام

$f^2 = s^2 + 10^2 - 2 \times s \times 10 \times \cos 120°$

$= s^2 + 100 - 20s \times (-\frac{1}{2})$

$= s^2 + 10s + 100$

العلاقة $f = \sqrt{s^2 + 10s + 100}$

$\frac{df}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt} \times s + \frac{ds}{dt} \times 10}{\sqrt{s^2 + 10s + 100}}$

لكن $f = 10\sqrt{3}$

$10\sqrt{3} = \sqrt{s^2 + 10s + 100}$

بالتربيع

$s^2 + 10s + 100 = 300$

$s^2 + 10s - 200 = 0$

$(s + 20)(s - 10) = 0$

$s = 10$ تهمل $s = -20$

$\frac{df}{dt} = \frac{2 \times 10 + 2 \times 10 \times 2}{2\sqrt{10^2 + 10 \times 10 + 100}}$

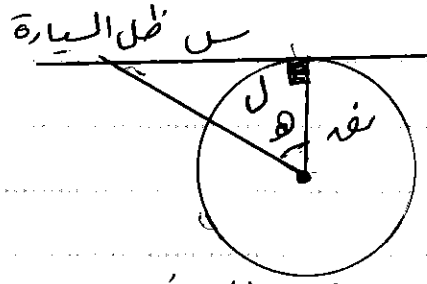
$= \frac{60}{2\sqrt{300}} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٨)

تسير سيارة بسرعة ٨م/ث على طريق سريع دائري، ويوجد في مركزه مصدر ضوء، ويوجد سياج مستقيم مماس للدائرة، فإذا بدأت السيارة بالحركة من نقطة التماس فجد سرعة ظل السيارة على السياج عندما تقطع السيارة $\frac{1}{8}$ دورة؟



ل: طول قوس الدائرة التي تسير عليه السيارة

س: ظل السيارة على السياج

هـ: الزاوية المركزية المقابلة للقوس (ل)

نق: نصف قطر الدائرة (ثابت)

$\frac{دل}{دن} = ٨$ م/ث ، $\frac{1}{8}$ دورة $= \frac{1}{8} \times ٣٦٠ = ٤٥°$

المطلوب $\frac{دس}{دن}$ | $هـ = ٤٥°$

$ظا هـ = \frac{س}{نق}$ (العلاقة)

$\frac{دهـ}{دن} \cdot قا^٢ هـ = \frac{1}{نق} \times \frac{دس}{دن}$

لأن نق ثابت

نريد إيجاد $\frac{دهـ}{دن}$ ؟

$ل = نق \times هـ$ طول القوس

$\frac{دل}{دن} = نق \times \frac{دهـ}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{٨}{نق}$ ← بالتعويض

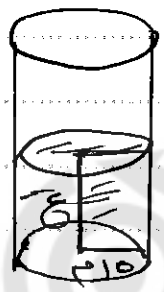
$\frac{٨}{نق} \times قا^٢ ٤٥° = \frac{1}{نق} \times \frac{دس}{دن}$

$٨ \times ٢ = \frac{دس}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = ١٦$

مثال (٢٩)

خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٣٠م يخرج منه الماء بمعدل ٢م٣/د جد سرعة انخفاض الماء في الخزان؟



ح = حجم الماء

$\frac{دح}{دن} = -٢$

الطلوب $\frac{دع}{دن}$

$ح = \pi نق^٢ ع$

$= \pi (١٥)^٢ ع = ٢٢٥ \pi ع$

$\frac{دح}{دن} = ٢٢٥ \pi \times \frac{دع}{دن}$

$-٢ = ٢٢٥ \pi \times \frac{دع}{دن}$

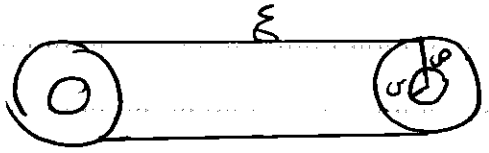
$\frac{دع}{دن} = \frac{-٢}{٢٢٥ \pi}$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٣٠)

ماسورة من الحديد مجوفة طولها ثابت ونصفا قطريها الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى حجم الحديد ثابت، فإذا كان نصف القطر الداخلي يزداد بمعدل $\frac{1}{2}$ سم/ن، أوجد معدل التغير في نصف القطر الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٦ سم والخارجي ٨ سم.

الحل



ع، ع ثوابت

$\frac{د س}{د ن} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{د ص}{د ن} = ؟$ $\quad س = ٦$ $\quad ص = ٨$

حجم الحديد ح = الخارجي − الداخلي

$ح = \pi ص^{٢} ع - \pi س^{٢} ع$

$= \pi ع (ص^{٢} - س^{٢})$

$\frac{ح}{\pi ع} = ص^{٢} - س^{٢}$

$صفر = ٢ ص \frac{د ص}{د ن} - ٢ س \frac{د س}{د ن}$

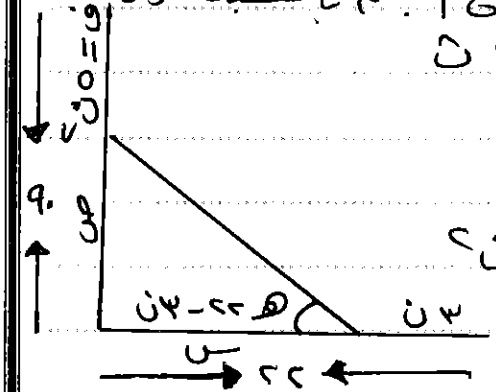
$= ٢ \times ٨ \times \frac{د ص}{د ن} - ٢ \times ٦ \times \frac{1}{2}$

$٦ = ١٦ \times \frac{د ص}{د ن}$ ← $\frac{د ص}{د ن} = \frac{٦}{١٦} = \frac{٣}{٨}$

مثال (٣١)

سقط جسم عند لحظة ما رأسياً من أعلى برج ارتفاعه ٩٠ م، بحيث كانت المسافة التي يقطعها ف = ٥ ن^{٢} وفي نفس اللحظة يتحرك رجل يبعد ٢٢ م عن قاعدة البرج نحوه بسرعة منتظمة ٣ م/ن، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع الجسم بالنسبة للرجل عند ن = ٤ ث

الحل



ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

$ص = ٩٠ - ٥ ن^{٢}$

$س = ٢٢ - ٣ ن$

ظا هـ = $\frac{٩٠ - ٥ ن^{٢}}{٢٢ - ٣ ن}$

قا^{٢} هـ $\times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{-١٠ ن (٢٢ - ٣ ن) - ٣ \times (٩٠ - ٥ ن^{٢})}{(٢٢ - ٣ ن)^{٢}}$

لإيجاد قا هـ عندما ن = ٤

ظا هـ = $\frac{٩٠ - ٥ (٤)^{٢}}{٢٢ - ٣ \times ٤} = \frac{١٠}{١٠} = ١$

قا^{٢} هـ = ١ + ظا^{٢} هـ = ١ + ١ = ٢

بالتعويض

← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام - ناجح الجمزاوي

$$\frac{ده}{دن} \times ج = \frac{(٤ب-٩٠)^{٢} - ٤٧١٠-٧(٤×٣-ج ج)}{(٤×٣-ج ج)^{٢}} \times (٣-ج)$$

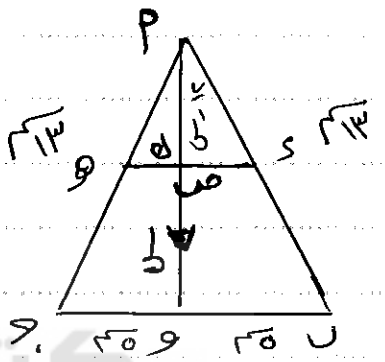
$$\frac{ده}{دن} \times ج = \frac{٤٠-٧١٠ - ٣-×١٠}{١٠}$$

$$= \frac{٣٧٠-}{١٠}$$

$$\frac{ده}{دن} = -\frac{٣٧٠}{ج ج} = -\frac{٢٧}{ج٠}$$

مثال (٣٤)

الشكل المجاور $أ ب ج$ مثلث فيه $أ ب = أ ج = ١٣$ سم ، $ب ج = ١٠$ سم والمستقيم $ده$ يوازي $ب ج$ ، فإذا تحرك المستقيم $ده$ رأسياً لأسفل موازياً لنفسه بسرعة $\frac{١}{٢}$ سم/ث فجد معدل تناقص مساحة المنطقة $دب ج ه$ عندما $د$ هو منتصف $أ ب$



ملاحظة: القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها = نصف طوله

$ده = ٥$ عندما يكون $ده$ منتصف $أ ب$

$س$: بعد $ده$ عن $ب ج$

$ص$: طول $ده$

$م$: مساحة المنطقة $دب ج ه د$

$$\frac{دس}{دن} = -\frac{١}{٢} \text{ سم/ث}$$

المطلوب $\left| \frac{دم}{دن} \right|_{ص=٥}$

مساحة شبه المنحرف =

$\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$$م = \frac{١}{٢}(ده + ب ج) \times ل و$$

$$= \frac{١}{٢}(ص + ١٠) \times س$$

ونجعل العلاقة بدلالة متغير واحد

المثلث $أ ب و$ ← فيثاغورس

$$(أ ب)^{٢} = (ب و)^{٢} + (أ و)^{٢}$$

$$(١٣)^{٢} = (٥)^{٢} + (أ و)^{٢}$$

$$١٦٩ = ٢٥ + (أ و)^{٢}$$

$$أ و = \sqrt{١٤٤} = ١٢ \text{ سم}$$

المثلثان $أ ب و$ ، $أ ده$ متشابهان

$$\frac{أ و}{ب و} = \frac{أ ل}{ده}$$

$$\frac{١٢}{٦} = \frac{١٢-س}{ص}$$

$$\frac{٦}{٥} = \frac{١٢-س}{ص} \Leftarrow ٦ ص = ٥(١٢-س)$$

$$\Leftarrow ص = \frac{٦٠}{٦} - \frac{٥س}{٦} \Leftarrow \text{بتفاضل}$$

$\Leftarrow ص = ١٠ - \frac{٥}{٦}س$ بالتعويض في م

$م = \frac{١}{٢}(ص + ١٠) \times س$

$= \frac{١}{٢}(١٠ - \frac{٥}{٦}س + ١٠) \times س$

$م = ١٠س - \frac{٥}{١٢}س^{٢}$

$\frac{دم}{دن} = ١٠ \times \frac{دس}{دس} - \frac{٥}{١٢} \times ٢س \times \frac{دس}{دن}$

عندما $ص = ٥ \Leftarrow ٥ = ١٠ - \frac{٥}{٦}س$

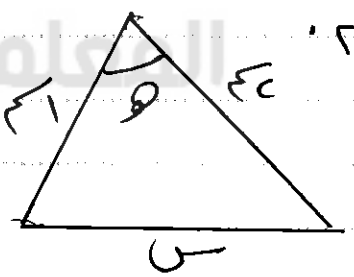
$\Leftarrow \frac{٥}{٦}س = ٥ \Leftarrow س = ٦$

$\frac{دم}{دن} = ١٠ \times \frac{١}{٢} - \frac{٥}{٦} \times ٢ \times ٦ \times \frac{١}{٢}$

$= -٥ + ٥ = ٠$ م/ث

مثال ٣٣

مثلث فيه ضلعين اطوالهما ٤ سم، ٥ سم، يتغير طول الضلع الثالث بحيث ان معدل تزايد الزاوية بين الضلعين الباقيين $\frac{\pi}{٦}$ راديان/د، فما معدل تغير طول الضلع الثالث عندما يكون طوله $\sqrt{٣٧}$ سم.



الحل

س: طول الضلع الثالث

θ: الزاوية المحصورة بين الضلعين

$\frac{دθ}{دن} = ؟$ المطلوب $\frac{دس}{دن}$ | $س = \sqrt{٣٧}$

بحل قانون جيب التمام

$س^{٢} = (١)^{٢} + (٤)^{٢} - ٢ \times ١ \times ٤ \times$ جتا θ

$س = \sqrt{٥ - ٤}$ جتا θ

$\frac{دس}{دن} = \frac{-٢ \times ٤ \times$ جا θ $\times \frac{دθ}{دن}}{٢\sqrt{٥ - ٤}$ جتا θ$}$

$= \frac{٤$ جا θ $\times \frac{دθ}{دن}}{\sqrt{٥ - ٤}$ جتا θ$}$

نستخدم الملاحظة لايجاد جا θ، جتا θ عندما $س = \sqrt{٣}$

$\Leftarrow \sqrt{٣} = \sqrt{٥ - ٤}$ جتا θ بالتربيع

$٣ = ٥ - ٤$ جتا θ $\Leftarrow$ جتا θ $= \frac{١}{٢}$

$θ = ٦٠°$

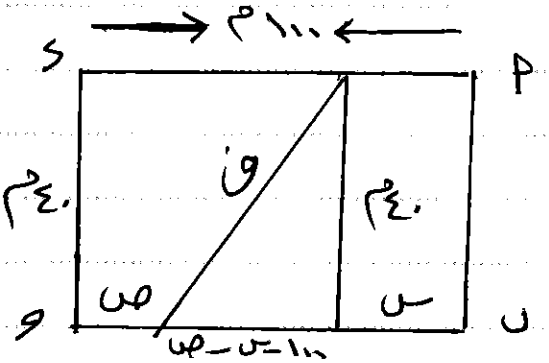
$\frac{دس}{دن} = \frac{٢\sqrt{٢} \times ٠,٥ \times ٤}{\sqrt{٥ - ٤ \times \frac{١}{٢}}}$

$= \frac{٣\sqrt{٢} \times ٠,٥}{\sqrt{٣}} = ٠,٥\sqrt{٦}$ سم/د

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٤)

ملعب كرة قدم طولة ١١٠ م وعرضه ٤٠ م بدأ لاعبان بالحركة معًا احدهما على خط التماس وفي النقطة م وباتجاه (ق) بسرعة ٦ م/ث، وبدأ الآخر الحركة على خط التماس من النقطة ج باتجاه (ب) بسرعة ٥ م/ث (انظر الشكل) أوجد معدل التغير في المسافة بين اللاعبين بعد مرور ٣ ثواني على حركتهما



الحل

$\frac{د س}{د ن} = ٦$ ، $\frac{د ص}{د ن} = ٥$ ، $ن = ٣$

حسب فيثاغورس ⇐

$ف^٢ = (١١٠ - س - ص)^٢ + (٤٠)^٢$

$س = ٦ \times ٣ = ١٨$ م

$ص = ٥ \times ٣ = ١٥$ م

$ف = \sqrt{(١١٠ - س - ص)^٢ + ٤^٢}$

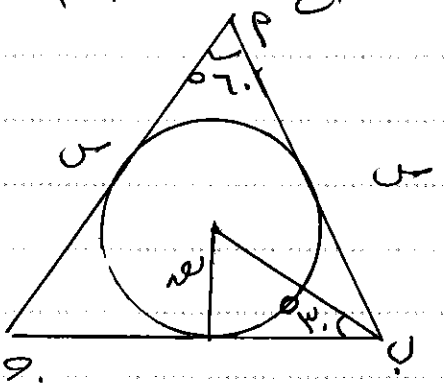
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{(١١٠ - س - ص)(-\frac{د س}{د ن} - \frac{د ص}{د ن})}{\sqrt{(١١٠ - س - ص)^٢ + ١٦٠٠}}$

$= \frac{(١١٠ - ١٨ - ١٥)(-٦ - ٥)}{\sqrt{(١١٠ - ١٨ - ١٥)^٢ + ١٦٠٠}}$

$= \frac{-٦٧ \times ١١}{\sqrt{٦٠٨٩}} = \frac{-٧٣٧}{\sqrt{٦٠٨٩}}$

مثال (٣٥)

تتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٤ سم/د، رسمت دائرة داخل المثلث تمس اضلاعه وأخذت تتمدد مع المثلث، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢ سم



$\frac{د س}{د ن} = ٢$

$\frac{د م}{د ن} \Big|_{س = ٢}$

م = مساحة المثلث - مساحة الدائرة

$= \frac{١}{٢} \times س \times ٢ \times \sin ٦٠ - \pi نق^٢$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢ - \pi نق^٢$

$\tan ٣٠ = \frac{نق}{ب و} = \frac{نق}{\frac{١}{٢} س}$ ⇐ $نق = \frac{س}{٢\sqrt{٣}}$

$\Leftarrow نق^٢ = \frac{س^٢}{١٢}$

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢ - \pi \times \frac{س^٢}{١٢}$

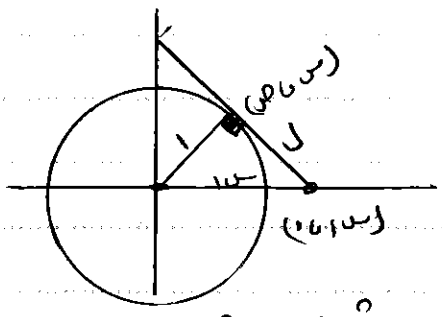
$\frac{د م}{د ن} = (\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ٢ س - \pi \times \frac{٢ س}{١٢}) \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} = \frac{\sqrt{٣} ١٢ - \pi ٢٤}{٤} = \pi ٢٤ - \sqrt{٣} ١٢$

مكتبة الوسام ALWSAM المعلم / ناجح الجمزاوي

مثال (٣٦)

جسيم يتحرك في المستوى بحيث يبقى ملامساً للدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 = 1$ في نقطة في الربع الأول، فإذا كان معدل ازدياد الاحداثي السيني لنقطة التماس المتحركة يساوي ٢ وحدات/ث جد معدل التغير في الاحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات عندما يكون الاحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس مع السينات وحدتين



الحل

نتشاءم س، ص، ل تشكل مثلث قائم الزاوية

$س^2 = ل^2 + 1 \Leftarrow ل^2 = س^2 - 1$

ل = المسافة بين نقطتين

$ل^2 = (ص - 0)^2 + (س - س_1)^2$

$= ص^2 + (س - س_1)^2$

$ك^2 - 1 = ص^2 + س^2 - 2س_1 س + ك^2$

$-1 = ص^2 + س^2 - 2س_1 س$

$-1 = 1 - 2س_1 س$

$-2 = -2س_1 س$

$س_1 = \frac{-2}{-س} = \frac{1}{س}$

نشتقه

$\frac{د س_1}{د ن} = -\frac{1}{س^2} \times \frac{د س}{د ن}$

عندما $س_1 = 2$ فإن $س = \frac{1}{2}$

$\frac{د س_1}{د ن} = -4$

ص آخر

ميل المماس = ميل المحتى

$\frac{ص - 0}{س - س_1} = -\frac{س}{ص}$ (المشتقة)

$\Leftarrow ص^2 = -س^2 + س_1 س$

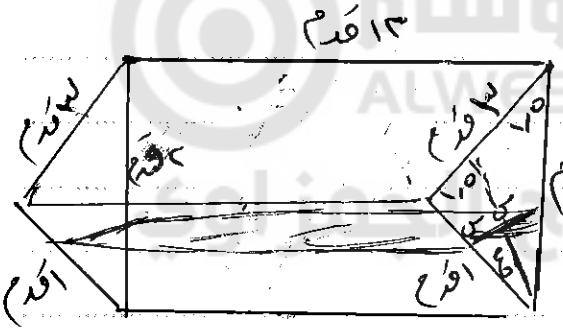
$\Leftarrow ص^2 + س^2 = س_1 س$

$\Leftarrow 1 = س_1 س$

$\Leftarrow س_1 = \frac{1}{س}$

مثال (٣٧)

في الشكل المجاور شكل حوض ماء اذا كان الماء ينزل في الحوض بمعدل ٢ قدم^3/د اوجد سرعة ارتفاع سطح الماء في الحوض عندما يكون عمق الماء ١ قدم



يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

حجم الماء = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times ع \times س \times 12$

$= 12 س ع$

من التشابه $\frac{س}{ع} = \frac{1.5}{3}$

$\Leftarrow 1.5 ع = 3 س \Leftarrow س = \frac{1.5}{3} ع$

$\Leftarrow س = \frac{1}{2} ع$

$\therefore ح = 12 \times \frac{1}{2} ع^2 = 6 ع^2$

$\frac{د ح}{د ن} = 12 ع \times \frac{د ع}{د ن}$

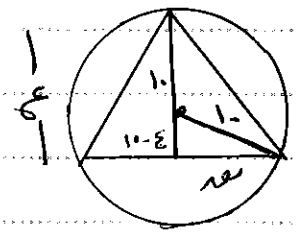
$12 = 12 ع \times \frac{د ع}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{12}{12} = \frac{1}{1}$

مثال (٣٨)

كرة نصف قطرها ثابت = ١٠ سم وضع داخلها مخروط قائم تتغير ابعاده وارتفاعه ع بحيث ان رأسه ومحيط قاعدته يلامس سطح الكرة اذا كان ارتفاع المخروط يزايد بمعدل $\frac{1}{3}$ سم/د ، اوجد معدل تغير حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه ٨ سم

الحل



$ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$

$\because (ع-10)^2 + نق^2 = (10)^2$

$ع^2 - 20ع + نق^2 = 100$

$نق^2 = 20ع - ع^2$

$\Leftarrow ح = \frac{1}{3} \pi (20ع - ع^2) \times ع$

$= \frac{1}{3} \pi (20ع^2 - ع^3)$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{1}{3} \pi (40ع - 3ع^2) \times \frac{د ع}{د ن}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{3} (40 \times 8 - 3 \times 8^2)$

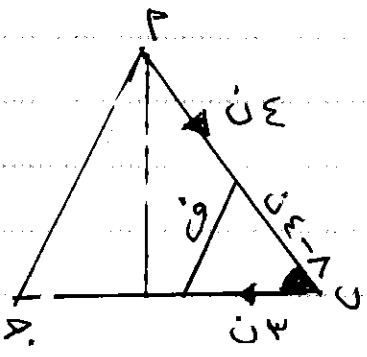
$= \frac{1}{27} \times 128 \times \pi = \frac{128\pi}{81}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال (٣٩)

ب ا ج مثلث متساوي الساقين فيه ب ا = ب ج = ٨ سم ، ق(∠ ب) = ٦٠° تحركت نقطة ا باتجاه ب بسرعة ٤ سم/ث وفي نفس الوقت تحركت نقطة ثانية من ب باتجاه ج بسرعة ٣ سم/ث اوجد معدل التغير في المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة.

الحل



قانون جيب التمام

ف² = (٨-٤ن)² + (٣ن)² - ٢(٨-٤ن)(٣ن) جتا ٦٠°

ف² = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن² + ٩ن² - ٣٦ن + ١٨ن²

ف² = ٤٢ن² - ١٠٠ن + ٦٤

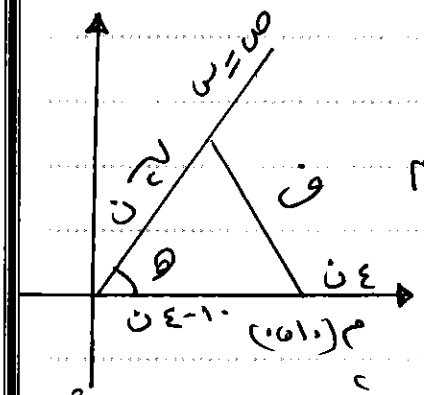
$\frac{ف\,د}{ن\,د} = \frac{٨٤ن - ١٠٠}{٢\sqrt{٤٢ن^٢ - ١٠٠ن + ٦٤}}$

عند ن = ١ ⇐ $\frac{ف\,د}{ن\,د} = \frac{-١٦}{٢\sqrt{٨٦}} = \frac{-٨}{\sqrt{٨٦}}$

مثال (٤٠)

اذا كانت م (١٠ ، ٠) بدأت نقطة الحركة من م على محور السينات بسرعة ٤ وحدات في الثانية باتجاه نقطة الاصل وفي نفس الوقت تحركت نقطة أخرى من نقطة الاصل على المنحنى ص = س، في الربع الأول بسرعة √٧ وحدة في الثانية اوجد معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانيتين

الحل



زاوية ميل المستقيم = ٤٥° ⇐ ب = ٤٥°

ظا ب = جتا ب = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ف² = (١٠-٤ن)² + (√٧ ن)² - ٢(١٠-٤ن)(√٧ ن) جتا ب

ف² = (١٠-٤ن)² + (√٧ ن)² - ٢(١٠-٤ن)(√٧ ن) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ف² = ١٠٠ - ٨٠ن + ١٦ن² + ٧ن² - ١٠√٧ ن + ٤√٧ ن

ف² = ٢٣ن² - ١٨٠ن - ١٠√٧ ن + ٤√٧ ن + ١٠٠

$ف = \sqrt{٢٣ن^٢ - ١٨٠ن - ١٠\sqrt{٧}ن + ٤\sqrt{٧}ن + ١٠٠}$

$\frac{ف\,د}{ن\,د} = \frac{٤٦ن - ١٨٠ - ١٠\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٢٣ن^٢ - ١٨٠ن - ١٠\sqrt{٧}ن + ٤\sqrt{٧}ن + ١٠٠}}$

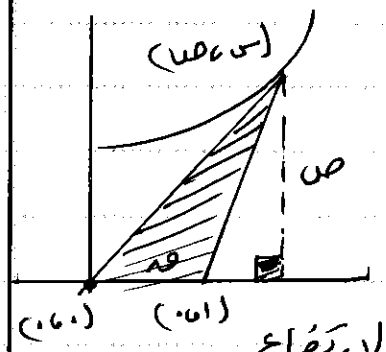
$= \frac{٤٦ \times ٢ - ١٨٠ - ١٠\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٢٣ \times ٤ - ١٨٠ \times ٢ - ١٠\sqrt{٧} \times ٢ + ٤\sqrt{٧} \times ٢ + ١٠٠}}$

$= \frac{٤}{٢ \times ٢} = ١$ وحدة في الثانية

ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٤١)

يتحرك نقطة على منحنى $ص = \sqrt{س^2 + 9}$ بحيث ان الاحداثي السيني لها يزداد بمعدل ٥ وحدات في الثانية فما معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه (٠،٠)، (٠،١) والنقطة المتحركة عندما يكون الاحداثي السيني للنقطة المتحركة ٤ وحدات.



الحل

القاعدة ق

$= ١ - ٠ = ١$

$م = \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ١ \times ص = \frac{١}{٢} ص$

بما ان $ص = \sqrt{س^2 + 9}$

$م = \frac{١}{٢} (\sqrt{س^2 + 9})$

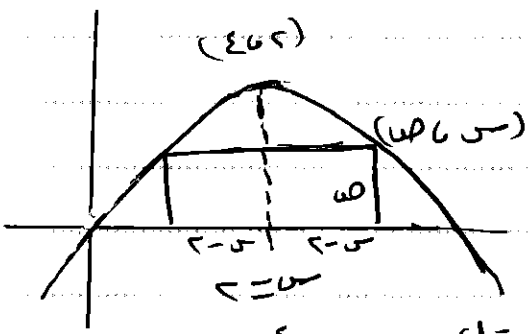
$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^2 + 9}} \times \frac{دس}{دن}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٤}{\sqrt{9 + ١٦}} \times ٥$

$= \frac{١٠}{٥} = ٢$

مثال (٤٢)

رسم مستطيل تحت منحنى $ص = ٤ - س^2$ بحيث يقع رأسان من رؤوسه على منحنى ص ويقع رأساه الآخران على محور السينات، اذا كان ضلعه الذي على محور السينات يتناقص بمعدل ٢ سم/ث فما معدل تغير مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه الموجود على محور السينات يساوي ٤ سم



نجد ايجاد $س = \frac{ل}{٢ق} = \frac{٤}{٤} = ٢$

طول الضلع الذي على محور السينات

$ل = ٢(س - ٢) = ٤س - ٤$

$\frac{دل}{دن} = ٤ \times \frac{دس}{دن} \leftarrow -٢ = ٤ \times \frac{دس}{دن}$

$\leftarrow \frac{دس}{دن} = -\frac{١}{٢}$ وعندما $ق = ٢$ فان $٢ = ٤س - ٤ \leftarrow س = ٣$

$م = ٢(س - ٢)(ص) = ٢(س - ٢)(٤ - س^2)$

$م = ٨س^2 - ٢س^3 - ١٦س + ٤س^2$

$= ١٢س^2 - ٢س^3 - ١٦س$

$\frac{دم}{دن} = (٤٨ - ٦س - ١٦) \times \frac{دس}{دن}$

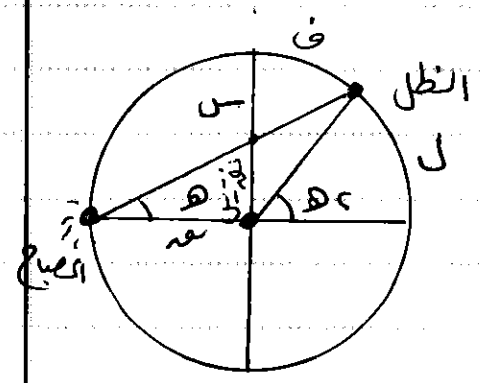
$= (٤٨ - ٢٤ - ١٦) \times -\frac{١}{٢}$

$= ٨ \times -\frac{١}{٢} = -٤$

مكتبة الهسام
ALHSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٣)

مضمار سباق دائري يوجد على طرف قطره صود ، انطلق حصان من نهاية قطر آخر عمودي على القطر الأول مقتربًا من المركز بسرعة ٤ كم/د ، بسرعة تغير ظل الحصان على المضمار عندما يقطع الحصان نصف المسافة عن المركز



س : المسافة التي قطعها الحصان باتجاه المركز

ف : الظل على المضمار

$\frac{د س}{د ن} = ٤$ كم/س

المطلوب ايجاد $\frac{د ف}{د ن}$ عندما $س = \frac{١}{٢} نق$

$\frac{١}{٤}$ المحيط $= ل + ف$

$= ف + ٢ نق هـ$

$صفر = \frac{د ف}{د ن} + ٢ نق \times \frac{د هـ}{د ن}$ ①

لكن $ظا هـ = \frac{نق - س}{نق}$

$ظا هـ = ١ - \frac{١}{نق} س$

بالاشتقاق

$قا^٢ هـ \times \frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{نق} \times \frac{د س}{د ن}$

عندما $س = \frac{١}{٢} نق$

$\leftarrow ظا هـ = ١ - \frac{١}{نق} \times \frac{نق}{٢} = \frac{١}{٢}$

$ظا^٢ هـ + ١ = قا^٢ هـ$

$\frac{١}{٤} + ١ = قا^٢ هـ \leftarrow قا^٢ هـ = \frac{٥}{٤}$

$\frac{٥}{٤} \times \frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{نق} \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د هـ}{د ن} = -\frac{١}{نق} \times \frac{٤}{٥} \times ٤ = -\frac{١٦}{٥ نق}$

نعوض في ①

$صفر = \frac{د ف}{د ن} + ٢ نق \times \frac{د هـ}{د ن}$

$\frac{د ف}{د ن} = -٢ نق \times \frac{د هـ}{د ن}$

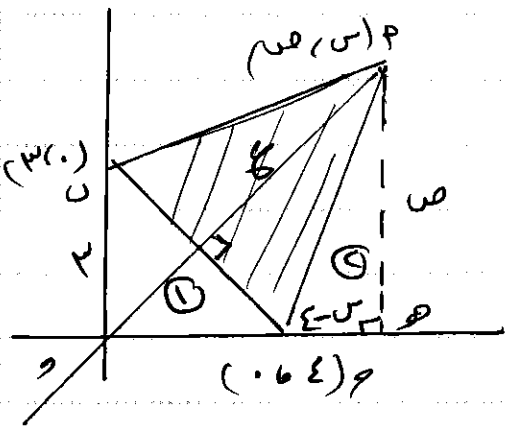
$= -٢ نق \times -\frac{١٦}{٥ نق}$

$= \frac{٣٢}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال (٤٤)

تتحرك نقطة على المستقيم ص = س من نقطة الاصل في الربع الأول بسرعة ٦ سم/ث ، ما معدل تغير مساحة المثلث المكون من النقطة المتحركة م(س، ص) والنقطتين الثابتتين ل(٠، ٣) ، هـ(٤، ٠) لحظة ما تكون ص لحظة البدء بالحركة.



الحل

مساحة المثلث = مساحة شبه المنحرف م د و هـ − مساحة المثلثين ① و ③

$$م = \frac{1}{2}(ص + 3) \times س - (\frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2}(س-4) \times ص)$$

$$= \frac{1}{2}(س + 3) \times س - (6 + \frac{1}{2}(س-4) \times ص)$$

$$= \frac{1}{2}(س + 3) \times س - (6 + \frac{1}{2}(س-4) \times س)$$

$$= \frac{1}{2}(س^2 + 3س) - (6 + \frac{1}{2}(س^2 - 4س))$$

$$= \frac{1}{2}س^2 + \frac{3}{2}س - 6 - \frac{1}{2}س^2 + 2س$$

$$م = \frac{7}{2}س - 6$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{7}{2}\frac{دس}{دن}$$

نطبقه حيثما نريد س م و

$ع^2 = س^2 + ص^2 = س^2 + س^2 = 2س^2$

$ع = \sqrt{2}\, س$

$\frac{دع}{دن} = \sqrt{2} \times \frac{دس}{دن}$

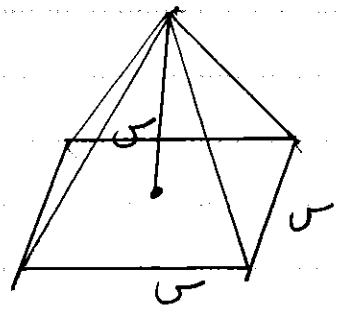
$6 = \sqrt{2} \times \frac{دس}{دن} \Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{6}{\sqrt{2}}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{7}{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{21}{\sqrt{2}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
للعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٤٥)

يتحدد هرم رباعي منتظم قاعدته مربعة ارتفاعه يساوي طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١٠ سم^3/ث فإذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوي ٠,٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته



حجم الهرم $= \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times س^2 \times س$

$ح = \frac{1}{3} س^3$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{1}{3} \times 3 س^2 \times \frac{د س}{د ن}$

$١٠ = س^2 \times ٠,٠١$

$س^2 = ١٠٠ \Leftarrow س = ١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٧٣

كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة بحيث تبقى محافظة على شكلها، إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠,١ سم/ث فجد كل مما يأتي

① معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠ سم.

② معدل تناقص مساحة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم

الحل

① $\frac{دحـ}{دن} = ؟؟$ | $\frac{دنـ}{دن} = -٠,١$ | نـ = ١٠

$حـ = \frac{٤}{٣}\pi نـ^{٣}$

$\frac{دحـ}{دن} = ٤\pi نـ^{٢} \times \frac{دنـ}{دن}$

$= ٤\pi \times (١٠)^{٢} \times -٠,١$

$= ٤\pi \times ١٠٠ \times \frac{-١}{١٠٠} = -٤\pi$

② $م = ٤\pi نـ^{٢}$

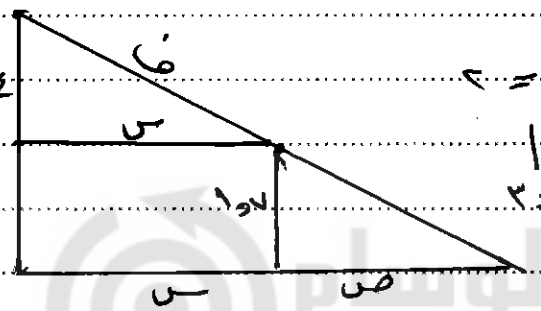
$\frac{دم}{دن} = ٨\pi نـ \times \frac{دنـ}{دن}$

$= ٨\pi \times ٥ \times \frac{-١}{١٠٠} = \frac{-٤٠\pi}{١٠٠}$

$= \frac{-٤\pi}{١٠} = \frac{-٢\pi}{٥}$

تدريب ② ص ١٧٤

رجل طوله ١,٧ م يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعداً عن عمود كهرباء في قمته مصباح يرتفع ٥,١ أمتار عن سطح الأرض. جد معدل تغير نقطة رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار من عمود الكهرباء.



$\frac{دس}{دن} = ٢$ | $\frac{دص}{دن} = ؟$ | س = ٣

$ف^{٢} = س^{٢} + ٣,٤$

$ف = \sqrt{س^{٢} + ٣,٤} \Leftarrow$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ٣ \times \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{س^{٢} + ٣,٤}}$

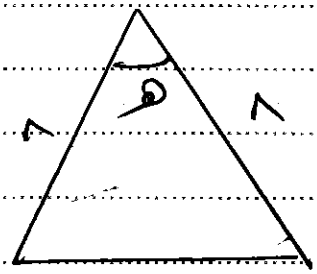
$= \frac{٦}{\sqrt{١٢,٤}}$

تدريب (٣) ص ١٧٥

مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين ٨ سم، يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{\pi}{90}$ راد/ث، جد معدل التغير في مساحة المثلث في كل من الحالات الآتية

(١) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة $60°$

(٢) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة $120°$



$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{90}$

$\theta = 60$

$م = \frac{1}{2} \times ٨ \times ٨ \times جا\theta$

$= ٣٢ جا\theta$

$\frac{dم}{dt} = ٣٢ جتا\theta \times \frac{d\theta}{dt}$

(١) $\theta = 60$

$\frac{dم}{dt} = ٣٢ جتا 60° \times \frac{\pi}{90}$

$= ٣٢ \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{90}$

$= \frac{١٦\pi}{90}$ تعل

(٢) $\frac{dم}{dt} = ٣٢ جتا 120° \times \frac{\pi}{90}$

$= ٣٢ \times -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{90} = \frac{١٦\pi}{90}$

$\frac{dم}{dt}$ تزيد

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (١٢٧)

السؤال الأول

صفيحة من الثلج تتناقص طول ضلعها بمعدل ١٠٠ سم/ن ، جد معدل التغير في كل من محيطها ومساحتها الكلية عندما يكون ضلعها ٢٠ سم

الحل

طول الضلع = س

$\frac{ds}{dt} = -100$

$ح = 3س^2$ $\quad \frac{dح}{dt} = 3س^2 \times \frac{ds}{dt}$

$\frac{dح}{dt} = 3 \times 20^2 \times \frac{-1}{100} = \frac{-3}{100}$

$= -0.3$

مساحة الكلية = ٦ مساحة الوجه

$= 6س^2$

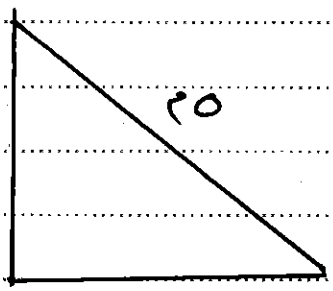
$\frac{dم}{dt} = 12س \frac{ds}{dt}$

$= 12 \times 20 \times \frac{-1}{100}$

$= \frac{-12}{100} = -0.12$

السؤال الثاني

يتكئ سلم طوله ٥ أمتار بطرف العلوي على حائط عمودي وطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{1}{4}$ م/ن ، جد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م من الحائط



$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{4}$

$\frac{dص}{dt} = ؟؟$

عندما س = ٣

عندما س = ٣ فإن

$س^2 + ص^2 = 25 \Leftarrow 9 + ص^2 = 25$

$ص^2 = 16 \quad ص = 4$

$\frac{dص}{dt} \times 8 + \frac{ds}{dt} \times 6 = 0$

$\frac{dص}{dt} \times 8 + \frac{1}{4} \times 3 \times 6 = 0$

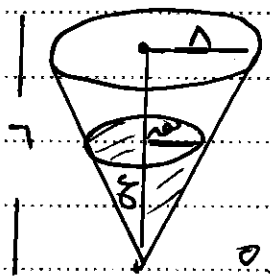
$\frac{dص}{dt} \times 8 + 3 = 0$

$\frac{dص}{dt} = \frac{-3}{8}$

مكتبة الوسام AL WESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

مجمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للاعلى، فاذا كان ارتفاع المجمع ١٦ سم، وطول نصف قطر قاعدته ٨ سم، صُبّ فيه سائل بمعدل ١٢ سم^3/ث، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في المجمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨ سم



$\frac{د ح}{د ن} = ١٢$

مساحة السطح = مساحة الدائرة

$= \pi$ نق^2

$\frac{د م}{د ن}$ عندما ع $= ٨$

من التشابه $\frac{٨}{١٦} = \frac{نق}{ع}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{نق}{ع} \Leftarrow ع = ٢$ نق

عندما ع $= ٨ \leftarrow$ نق $= ٤$

ح $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^2 ع

$= \frac{١}{٣} \pi$ نق^2 $\times ٢$ نق

$= \frac{٢}{٣} \pi$ نق^3

$\frac{د ح}{د ن} = ٢ \pi$ نق^2 $\times \frac{د نق}{د ن}$

$١٢ = \pi ٢ \times ١٦ \times \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د نق}{د ن} = \frac{١٢}{\pi ٣٢} = \frac{٣}{\pi ٨}$

م $= \pi$ نق^2

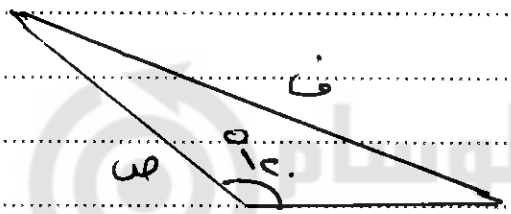
$\frac{د م}{د ن} = ٢ \pi$ نق $\times \frac{د نق}{د ن}$

$= \frac{٣}{\pi ٨} \times ٤ \times \pi ٢$

$= ٣$

السؤال الرابع

انطلقت سيارتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين متعامدين الزاوية بينهما (١٢٠°)، فاذا كانت سرعة الأولى ٣٠ كم/س، وسرعة الثانية ٤٠ كم/س، جد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعدهما عن نقطة الانطلاق ٦ كم، ٨ كم على الترتيب



$\frac{د س}{د ن} = ٣٠$

$\frac{د ف}{د ن}$ عندما س $= ٦$

ص $= ٨$

$\frac{د ص}{د ن} = ٤٠$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص جتا ٦٠°

= س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص × ١/٢

= س^{٢} + ص^{٢} − س ص

ف = √(س^{٢} + ص^{٢} − س ص)

$\frac{ف}{ن} = \frac{(٢س \times \frac{س}{ن} + ٢ص \times \frac{ص}{ن}) - (س \times \frac{ص}{ن} + ص \times \frac{س}{ن})}{٢\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} - س ص}}$

$= \frac{٤٠ \times ٨ \times ٢ + ٣٠ \times ٦ \times ٢}{(٣٠ \times ٢ \times ٨ + ٤٠ \times ٦ \times ٢) + ٨ \times ٦ \times ٢ + ٦ \times ٤ + ٣٦ \times ٢}$

$= \frac{٣٦٠ + ٤٨٠ + ٦٤٠}{٩٦ + ١١٠ \sqrt{٢}}$

$= \frac{٩٦٠ + ١١١٠}{١٩٦ \sqrt{٢}}$

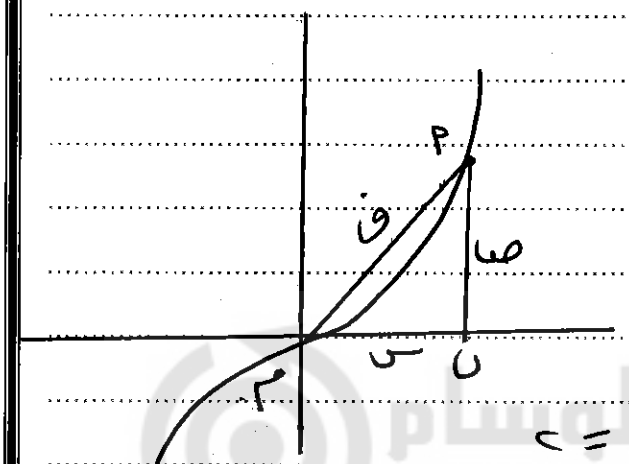
$= \frac{١٩٦٠}{١٩٦ \sqrt{٢}} = \frac{٩٨٠}{١٤} = ٧٠ \sqrt{٢}$

السؤال الخامس من (٧٧)

بدأت النقطتان P ، ب الحركة معاً من نقطة الاصل (م) ، بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الاصل بسرعة ٢ سم/ث وتتحرك النقطة P في الربع الأول على منحنى الدالة التي قاعدتها (س) = س^{٣} ، بحيث تبقى P ب دائماً عمودية على محور السينات الموجب حيث

أ) معدل التغير في مساحة المثلث P ب م بعد ثانيتين واحدة من بدء الحركة

ب) معدل التغير في طول وتر المثلث P ب م بعد ثانيتين واحدة من بدء الحركة



$\frac{دس}{دن} = ٢$

المسافة = السرعة × الزمن

س = ٢ × ٢ = ٤

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ × س × ص ص = س^{٣}

= $\frac{١}{٢}$ س^{٤}

يتبع ←

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

$\frac{دم}{دن} = \frac{ع}{ث} س^{٣} \times \frac{دس}{دن}$

$= ث \times ٣(ث)^{٢} \times ث$

$= ٣ث^{٣} = ٣ \times ٨ \times ث = ٢٤ث$

(ب) $ف = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن}}{٢\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}}$

لكن $ص = س^{٣}$

$\frac{دص}{دن} = ٣س^{٢} \times \frac{دس}{دن}$

$= ٣ \times ٤^{٢} \times ٣ = ٤ث$

عندما $س = ث$ فإن $ص = ٨$

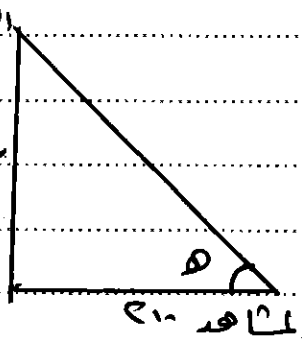
$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ث \times ث + ٨ \times ٤ث}{٢\sqrt{ث^{٢} + ٤^{٢}ث^{٢}}}$

$= \frac{٣٢ث^{٢}}{٦٨\sqrt{ث}}$

$= \frac{٢٩ث}{٦٨\sqrt{ث}}$

السؤال السادس

أطلقت صاروخ عموديًا لأعلى بسرعة ١١٠ م/ث وعلى بعد ٤٠٠ متر من نقطة انطلاق الصاروخ كان مشاهد جالسًا على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الأرض.



$\frac{دس}{دن} = ١١٠$

$\frac{دهـ}{دن} = ؟؟$

$س = ٤٠٠$

$ظا هـ = \frac{س}{٤٠٠}$

$ق'هـ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٤٠٠}$

لكن عندما $س = ٤٠٠$ فإن

$ظا هـ = \frac{٤٠٠}{٤٠٠} = ث$

$١ + ظا^{٢}هـ = ق'^{٢}هـ$

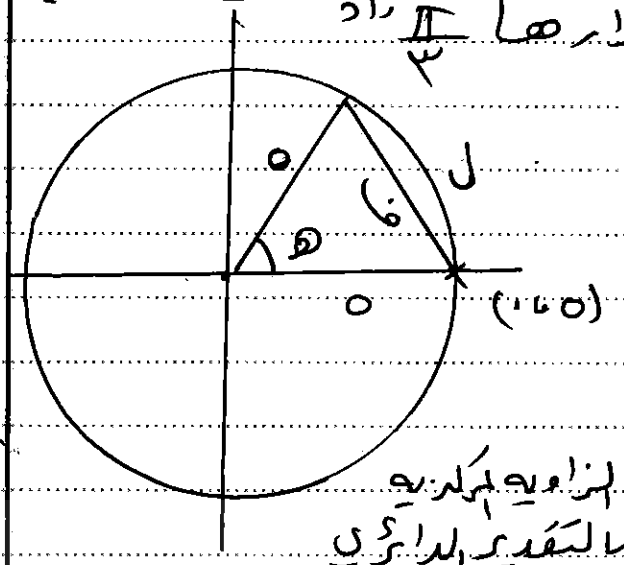
$١ + ث^{٢} = ق'^{٢}هـ \Leftarrow ق'^{٢}هـ = ٣$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٤٠٠ \div ٣} = \frac{١}{٦٠٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

بدأت نقطة تحركه على دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها ٥ سم والنقطة (٥، ٠) باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في اثناء حركتها بمعدل ١٠ سم/ث، فجد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥، ٠) عندما تكمل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ راد



هـ : الزاوية المركزية بالتقدير الدائري

ف : بعد النقطة المتحركة عن (٥، ٠)

ل : طول قوس الدائرة

$\frac{دل}{دن} = ١٠$ المطلوب $\frac{دف}{دن}$ | $هـ = \frac{\pi}{3}$

حسب قانون جيب التمام

$ف^٢ = ٥^٢ + ٥^٢ - ٢ \times ٥ \times ٥ \times جتا هـ$

$= ٥٠ - ٥٠ جتا هـ$

$ف = \sqrt{٥٠ - ٥٠ جتا هـ}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-٥ \times -جا هـ \times \frac{دهـ}{دن}}{٢\sqrt{٥٠ - ٥٠ جتا هـ}}$

لكن $ل = نق هـ$

$ل = ٥ هـ$

$\frac{دل}{دن} = ٥ \frac{دهـ}{دن}$

$١٠ = ٥ \frac{دهـ}{دن} \leftarrow \frac{دهـ}{دن} = \frac{١٠}{٥}$

$\frac{دهـ}{دن} = ٢ \rightarrow$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ٥ \times جا \frac{\pi}{3} \times ٢}{٢\sqrt{٥٠ - ٥٠ جتا \frac{\pi}{3}}}$

$= \frac{٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢}{\sqrt{٥٠ - ٥٠ \times \frac{١}{٢}}}$

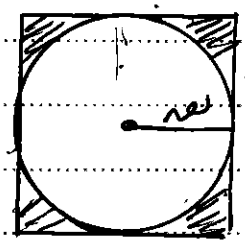
$= \frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٥} = \sqrt{٣}$

مكتبة الوسام ALWSAM
للمعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن ص ١٧٨

تتمدد اضلاع مربع بمعدل ٤ سم/ث رسمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه ثم اخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها وموضعها احسب معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع عندما يكون طول ضلع المربع ١٠ سم

الحل



س: طول ضلع المربع

$\frac{دس}{دن} = ٤$

م = مساحة المنطقة المحصورة (المظللة)

م = مساحة المربع − مساحة الدائرة

$= س^٢ - \pi نق^٢$

لكن $نق = \frac{١}{٢} س$

$م = س^٢ - \pi (\frac{١}{٢} س)^٢$

$= س^٢ - \frac{\pi}{٤} س^٢$

$\frac{دم}{دن} = (٢س - \frac{\pi}{٤} \times ٢س) \times \frac{دس}{دن}$

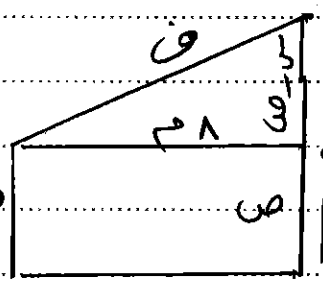
$= (٢ \times ١٠ - \frac{\pi}{٤} \times ٢ \times ١٠) \times ٤$

$٤ \times (٢٠ - ٥\pi)$

السؤال التاسع ص ١٧٨

حصدان كهربائيان هتقران في الطابق الارضي بمسافة افقية بينهما ٨ امتار بدأ الحصد الاول حركته من السكون وارتفع الى الاعلى بسرعة ٣ سم/ث وبعد ثانيتين بدأ الحصد الثاني حركته في الارتفاع بسرعة ١ سم/ث احسب معدل تغير المسافة بين الحصدين بعد ثانيتين من بدء حركة الحصد الثاني

الحل



س: بعد الحصد الاول عن قطعها

ص: بعد الحصد الثاني عن قطعها

$\frac{دس}{دن} = ٢ ، \frac{دص}{دن} = ١$

بعد ثانيتين: $س = ٢ \times ٢ = ٤$ ، $ص = ١ \times ٢ = ٢$

$ف^٢ = (س - ص)^٢ + ٦٤$

$ف = \sqrt{(س - ص)^٢ + ٦٤}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(س - ص)(\frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن})}{٢\sqrt{(س - ص)^٢ + ٦٤}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{(٤ - ٢)(٣ - ١)}{\sqrt{(٤ - ٢)^٢ + ٦٤}} = \frac{٦}{\sqrt{١١٠}}$

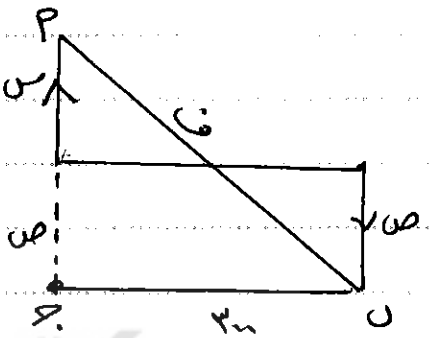
$= \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

انطلق شخص من النقطة (P) متجهًا شمالاً رأسيًا دراجة هوائية في بركة ٦ م/ث، وبعد ٣٠ ثانية ومن النقطة (أ) الواقعة على بعد (٣٠٠) متر شرق النقطة P انطلق شخص ثان يتجه جنوبًا راكبًا دراجه هوائيه في بركة ٥ م/ث

جد معدل تغير المسافة بين الدراجتين بعد (٤٠) ثانية من انطلاق الدراجة الثانية



الحل

$\frac{د ص}{د ن} = ٥$

$\frac{د س}{د ن} = ٦$

س: المسافة التي يقطعها P

= السرعة × الزمن = ٦ × ٤٠ = ٢٤٠

ص: المسافة التي يقطعها أ

= ٥ × ٤٠ = ١٦٠

في المثلث P أ ب

$ف^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (س + ص)^{٢}$

$ف = \sqrt{(٣٠٠)^{٢} + (س + ص)^{٢}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ (س + ص) \times (\frac{د س}{د ن} + \frac{د ص}{د ن})}{٢ \sqrt{٣٠٠^{٢} + (س + ص)^{٢}}}$

$= \frac{(٢٤٠ + ١٦٠) (٦ + ٥)}{\sqrt{(٣٠٠)^{٢} + (٢٤٠ + ١٦٠)^{٢}}}$

$= \frac{٤٠٠ \times ١١}{\sqrt{٩٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠٠}} = \frac{٤٤}{٥}$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

اسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يساوي $\frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها داخلاً، فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ٠,١ سم/ث فجد معدل التغير في حجم هذه الاسطوانة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم.

الحل

$ع = \frac{٧}{٦} \times ٢ \times$ نصف

$= \frac{٧}{٣}$ نصف

$\frac{د ع}{د ن} = ٠,١$

$ح = \frac{٣}{٧} ع$ نصف$^{٢} = \frac{٩}{٤٩} ع^{٣}$

وعند نصف = ٦ فإن $ع = \frac{٧}{٣} \times ٦ = ١٤$

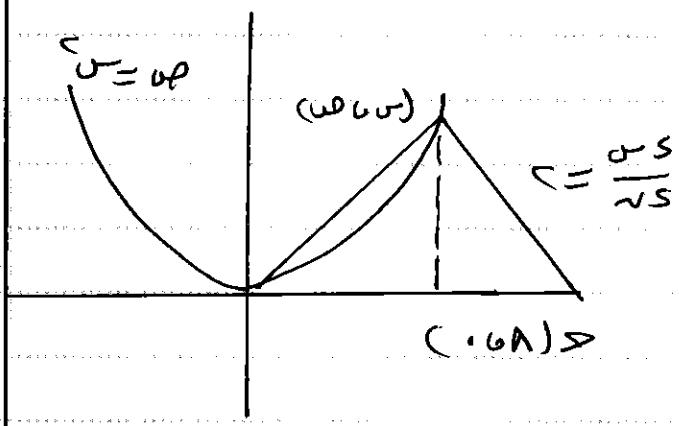
$ح = \pi$ نصف$^{٢} ع = \pi \times \frac{٩}{٤٩} ع^{٢} \times ع$

$= \frac{٩ \pi}{٤٩} ع^{٢}$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{٩ \pi}{٤٩} \times ٣ ع^{٢} \times \frac{د ع}{د ن} = \frac{٢٧ \pi}{٤٩} \times ١٤^{٢} \times ٠,١ = ١٨ \pi$ سم^{٣}/ث

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

تتحرك نقطة ماديه ب على منحنى الاقتران ص = س^{2} في الربع الأول بادئة من نقطة الاصل م ، فاذا كان الاحداثي السيني للنقطة ب يتزايد بمعدل ٢ وحدة/ث ، وكانت جـ نقطة ثابته احداثياتها (٨ ، ٠) ، جد معدل تغير مساحة المثلث م ب جـ بعد ٢ ثانيه من بدء حركه النقطة ب



$م = \frac{1}{2} \times ٨ \times ص = ٤ ص$

$= ٤ \times س^{2} = ٤ س^{2}$

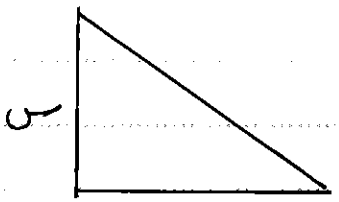
$\frac{دم}{دن} = ٨ س \times \frac{دس}{دن}$

س بعد ٢ ثانيه = ٢ × ٢ = ٤

$\frac{دم}{دن} = ٨ \times ٤ \times ٢ = ٦٤$

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

في لحظة ما كان طولاً ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاويه ١٢ سم ، ١٦ سم فاذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل ٢ سم/ث ، وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل ١ سم/ث بحيث ان المثلث يبقى محافظاً على شكله ، جد معدل التغير في مساحة المثلث بعد ٢ ثانيه من تلك اللحظة .



الحل

$\frac{دس}{دن} = ٢$

$\frac{دص}{دن} = -١$

$م = \frac{1}{2} س ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2} (س \times \frac{دص}{دس} + ص \times \frac{دس}{دن})$

بعد ٢ ثانية

س = ١٢ + ٢ × ٢ = ١٦

ص = ١٦ − ٢ × ١ = ١٤

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2} (١٦ \times -١ + ١٤ \times ٢)$

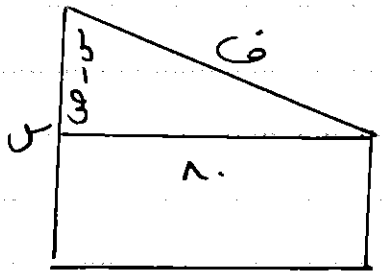
$= \frac{1}{2} (-١٦ + ٢٨)$

$= \frac{١٢}{٢} = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

◎ وزارة (٢٠١٠) صيفية

جاريان أ، ب المسافة الأفقية بينهما ٨٠م، بدأ الجارب (أ) بالحركة بسرعة ٤٠م/ث، وبعد ثانيتين بدأ الجارب (ب) بالحركة في خط مواز للجارب (أ) وبنفس الاتجاه بسرعة ١٠م/ث. جد معدل التغير في المسافة بين الجاريين بعد ٤ ثواني من انطلاق الجارب (أ)



الحل

س بعد ٤ ثواني = ٤٠ × ٤ = ١٦٠

ص بعد ٤ ثانية = ١٠ × ٤ = ٤٠

$ف^2 = (س - ص)^2 + ٨٠^2$

$ف = \sqrt{(س - ص)^2 + (٨٠)^2}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{(س - ص)(\frac{د س}{د ن} - \frac{د ص}{د ن})}{\sqrt{(٨٠)^2 + (٤٠ - ٨٠)^2}}$

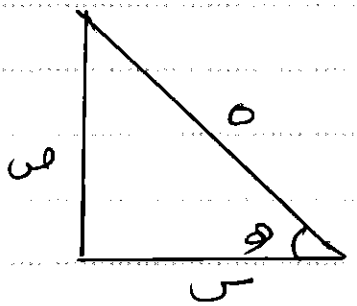
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{(١٦٠ - ٤٠)(٤٠ - ٨٠)}{\sqrt{٨٠^2 + ٦٠^2}}$

$= \frac{١٠ \times ٦٠}{١٠٠} = ٦$

وزارة (٢٠١١) شتوية

سلم طوله ٥م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا انزلق الطرف السفلي للسلم مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣م/د، فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م من الحائط

الحل



عندما س = ٣

تكون

$س^2 + ص^2 = ٥^2$

$٩ + ص^2 = ٢٥$

$ص^2 = ١٦ \Leftarrow$

$ص = ٤$

$جا هـ = \frac{س}{٥}$

$-جا هـ \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٥} \times \frac{د س}{د ن}$

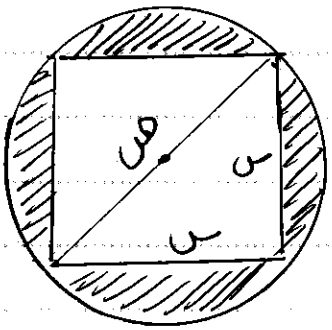
$-\frac{٤}{٥} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{٥} \times ٣$

$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{-٤} = -\frac{١}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) صيفية

تتمدد دائرة بحيث يزداد طول قطرها بمعدل (٦) سم/د ، رسم مربع داخل الدائرة وأخذ يتمدد معها بحيث تبقى رؤوسه ملامسة لها ، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول قطر الدائرة ١٠ سم .



الحل

نفرض طول قطر الدائرة = ص
وطول ضلع المربع = س

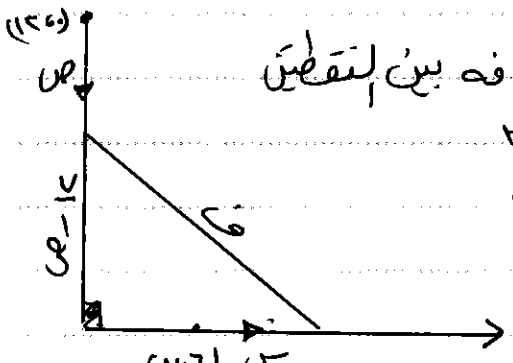
$\frac{د ص}{د ن} = ٦$ ص = ١٠

مساحة المنطقة المحصورة
= مساحة الدائرة - مساحة المربع
$= \pi (\frac{ص}{٢})^{٢} - س^{٢}$
$= \frac{\pi}{٤} ص^{٢} - س^{٢}$
لكن $س^{٢} + س^{٢} = ص^{٢}$
$٢ س^{٢} = ص^{٢} \leftarrow س^{٢} = \frac{ص^{٢}}{٢}$
$م = \frac{\pi}{٤} ص^{٢} - \frac{ص^{٢}}{٢}$
$\frac{د م}{د ن} = (\frac{\pi}{٤} \times ٢ ص - \frac{٢ ص}{٢}) \times \frac{د ص}{د ن}$
$= ٣٠ \pi - ٦٠$

⑧ وزارة (٢٠١٢) شتوية

بدأت نقطة ماديه الحركة من النقطة (٠٦، ١٢) على محور الصادات بسرعة ٣ سم/ث وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة ب (٠، ١٢) على محور الصادات مقتربة من نقطة الاصل بسرعة ٤ سم/ث ، جد معدل تغير المسافة بين النقطتين المتحركتين عندما تكون النقطة المتحركة على محور الصادات على بعد ٨ سم من نقطة الاصل .

الحل



ف : المسافة بين النقطتين
$\frac{د س}{د ن} = ٣$
$\frac{د ص}{د ن} = ٤$

المسافة بين قطعتها النقطة الأولى
س = ٣ن ، ص = ١٢ - ٤ن

$ف^{٢} = (٦ + ٣ن)^{٢} + (١٢ - ٤ن)^{٢}$
$= ٣٦ + ٣٦ن + ٩ن^{٢} + ١٤٤ - ٩٦ن + ١٦ن^{٢}$
$ف^{٢} = ٢٥ن^{٢} - ١٤٤ن + ١٨٠$
$٢ف \times \frac{د ف}{د ن} = ٥٠ن - ١٤٤$

← يتبع

$\frac{ف}{ن} = \frac{١٣ن - ٦}{ف}$ ←

تكون النقطة إثباتية على بعد ٨ سم من نقطة الأصل $|ن - ٠| = ٨$

$\Leftarrow ن = ٨$

نجد ف عندما ن = ٨

$ف^{٢} = ١٣ \times ٤ - ٨ \times ١٢ + ١٨٠$

$= ١٠٨ = ٤ \times ٢٧$

$\left|\frac{ف}{ن}\right|_{ن=٨} = \frac{١٣ \times ٨ - ٦}{٤\sqrt{٢٧}} = \frac{٥}{\sqrt{٢٧}}$

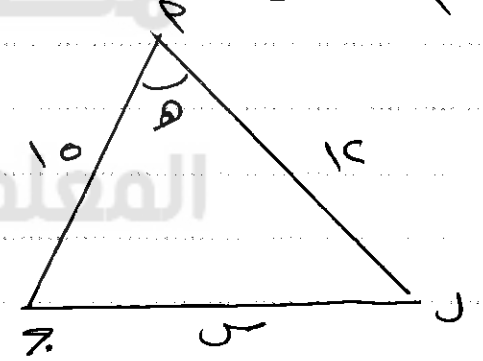
---

⑨ وزارة (٢٠١٢) صيفية

$\triangle أبجـ$ مثلث فيه $أب = ١٢$ سم

$ب جـ = ١٥$ سم يزداد قياس الزاوية $أبجـ$ بمعدل $\frac{\pi}{٩٠}$ راديان/ث

جد معدل تغير طول الضلع $أجـ$ عندما يكون قياس الزاوية $أبجـ$ يساوي $\frac{\pi}{٣}$ راديان



$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{\pi}{٩٠}$ $\quad هـ = \frac{\pi}{٣}$

$س^{٢} = (١٢)^{٢} + (١٥)^{٢} - ٢ \times ١٢ \times ١٥ \times$ جتا هـ

$س^{٢} = ٣٦٩ - ٣٦٠$ جتا هـ

$س = \sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠}$ جتا هـ

$\frac{د س}{د ن} = \frac{-٣٦٠ \times$ جا هـ $\times \frac{د هـ}{د ن}}{٢\sqrt{٣٦٩ - ٣٦٠}$ جتا هـ$}$

$= \frac{\frac{\pi}{٩٠} \times \frac{٢\sqrt{٧}}{٢} \times ٣٦٠}{\frac{١}{٢} \times ٣٦٠ - ٣٦٩\sqrt{٢}}$

$= \frac{\pi ٣\sqrt{٧}}{\sqrt{١٨٩}} = \frac{\pi ٣\sqrt{٧}}{٣\sqrt{٢١}} = \frac{\pi\sqrt{٧}}{\sqrt{٢١}}$

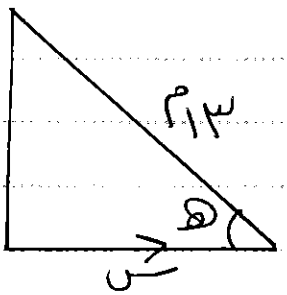
---

⑩ وزارة (٢٠١٣) شتوية

سلم طوله (١٣) م يرتكز طرفه العلوي على حائط عمودي وطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل (١٠) م/ث فجد معدل التغير في قياس الزاوية المحصورة بين الطرف السفلي للسلم وسطح الأرض في اللحظة التي يكون فيها طرفه العلوي على ارتفاع ١٢ م عن سطح الأرض

← يتبع الحل

الحل



$\frac{د س}{د ن} = ١$ او.

ص = ١٢

جا هـ = $\frac{س}{١٣}$

$-$ جا هـ × $\frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{١٣} \times \frac{د س}{د ن}$

$\frac{-١٢}{١٣} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{١}{١٣} \times ١$ او.

$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{١ او.}{-١٢} = \frac{-١}{١٢٠}$

$ف^{٢} = س^{٢} + هـ^{٢} + س ص$

$ف = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + س ص}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ هـ \times \frac{د هـ}{د ن} + (س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{د س}{د ن})}{٢\sqrt{س^{٢} + هـ^{٢} + س ص}}$

بعد نصف ساعة

س = ٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٤ ، ص = ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٣

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٨ \times ٣ + ٦ \times ٤ + ٢ \times ٣ \times ٤ + ٨ \times ٤ \times ٢}{١٢ + ٩ + ١٦\sqrt{٢}}$

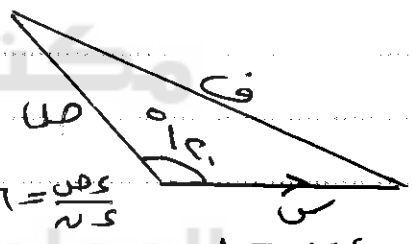
$= \frac{١٤٨}{٣٧\sqrt{٢}}$

---

(١١) وزارة (٢٠١٣) صيفية

انطلق قاربان من نفس النقطة في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما ١٢٠°، اذا كانت سرعة الأول ٨ كم/س، وسرعة الثاني (٦) كم/س، فجد معدل تغير المسافة بينهما بعد مرور نصف ساعة من انطلاقهما.

الحل



قانون جيب التمام

$ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س ص$ جتا ١٢٠

$= س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س ص \times -\frac{١}{٢}$

---

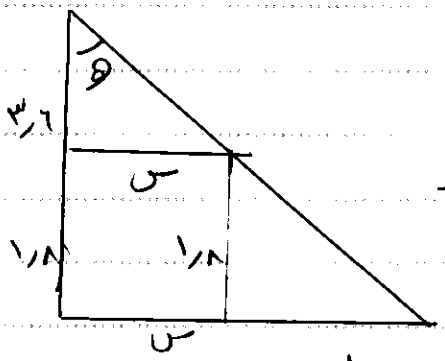
(١٢) وزارة (٢٠١٤) شتوية

يقف رجل طوله (١٫٨) متراً امام مصباح كهربائي مثبت على عمود ارتفاعه عن سطح الارض (٤٫٥) متراً، اذا اخذ الرجل بالاقتراب من قاعدة العمود بمعدل ٢ م/ث، فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد (١٫٨) متراً من قاعدة العمود

← يتبع الحل

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل



$\frac{ds}{dt} = -2$

$\tan\theta = \frac{س}{3,6}$

$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3,6} \times \frac{ds}{dt}$

لايجاد $\sec^2\theta$ $\quad \tan\theta = \frac{س}{3,6} = \frac{1,8}{3,6} = \frac{1}{2}$

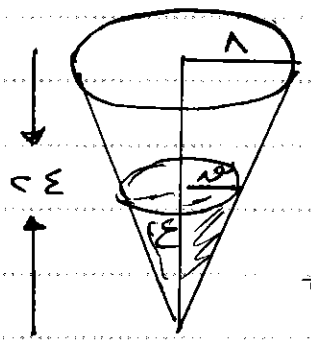
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

بالتعويض

$\frac{5}{4} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3,6} \times -2$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-2}{3,6} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{18} = \frac{-4}{9}$

الحل



$\frac{dح}{dt} = 12$

$ح = \frac{1}{3}\pi نق^2 ع$

$\frac{8}{نصف} = \frac{ع٤}{ع} \leftarrow نصف = \frac{ع}{2}$

$ح = \frac{1}{3}\pi \times (\frac{ع}{2})^2 \times ع$

$= \frac{\pi}{12} \times ع^3$

$\frac{dح}{dt} = \frac{\pi}{12} \times 3ع^2 \times \frac{dع}{dt}$

$12 = \frac{\pi}{4} \times (10)^2 \times \frac{dع}{dt}$

$\frac{dع}{dt} = \frac{12}{\pi 16} = \frac{3}{\pi 4}$

---

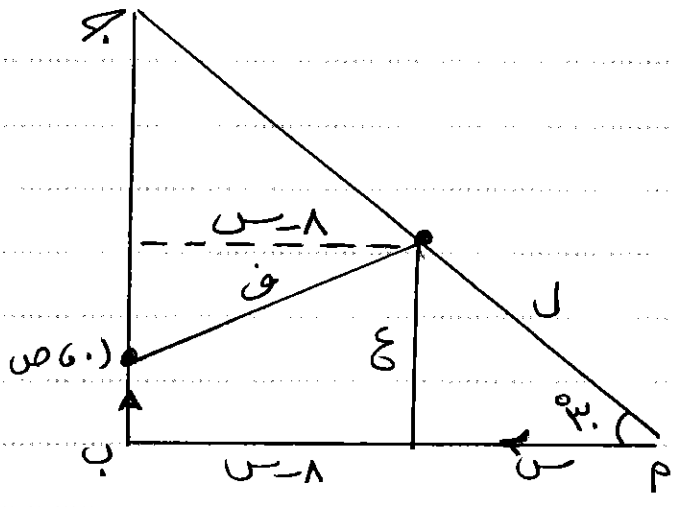
(١٣) وزارة صيفية (٢٠١٤)

إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل وقاعدته افقية، يكبب فيه الماء بمعدل (١٢) سم٣/ث، فاذا كان قطر قاعدته (١٦) سم وارتفاعه (٢٤) سم، جد معدل تغير ارتفاع الماء في الاناء عندما يصبح ارتفاع الماء فيه (١٢) سم

(١٤) وزارة (٢٠١٥) شتوية

الشكل المجاور يمثل المثلث PQR المرسوم في الربع الاول حيث P(٠,٨)، Q(٠,٦)، R(١,٠) قياس الزاوية $PQR = 30°$ بدأت نقطة الحركة من P على الضلع PQ باتجاه Q وبسرعة مقدارها (٤) سم/ث، وبنفس اللحظة بدأت نقطة اخرى بالحركة من R على الضلع RQ باتجاه Q وبسرعة مقدارها (٣) سم/ث جد معدل تغير البعد بين النقطتين المتحركتين عند تعامدهما بعد ثانية واحدة من بدء حركتهما

← يتبع الحل



$\frac{د ل}{د ن} = ٢$ ، $\frac{د ص}{د ن} = ٣$ ،

طب $\frac{د ف}{د ن}$

ظا ٣٠° $= \frac{ع}{ل} = \frac{١}{٢} \leftarrow ل = ٢ع$

$\frac{د ل}{د ن} = ٢ \times \frac{د ع}{د ن}$

$٢ = ٢ \times \frac{د ع}{د ن} \leftarrow \frac{د ع}{د ن} = ١$

ضا ٣٠° $= \frac{س}{ل} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \leftarrow س = \frac{\sqrt{٣}}{٢} ل$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{د ل}{د ن} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ = \sqrt{٣}$

$ف^٢ = (٨-س)^٢ + (ع-ص)^٢$

$٢ ف \times \frac{د ف}{د ن} = ٢(٨-س) \times -\frac{د س}{د ن} + ٢(ع-ص)(\frac{د ع}{د ن} - \frac{د ص}{د ن})$

$ل = ١ \times ٢ = ٢$ $س = \sqrt{٣} \times ١ = \sqrt{٣}$

$ع = ١ \times ١$

$ف = \sqrt{(٨-\sqrt{٣})^٢ + (١-٣)^٢}$

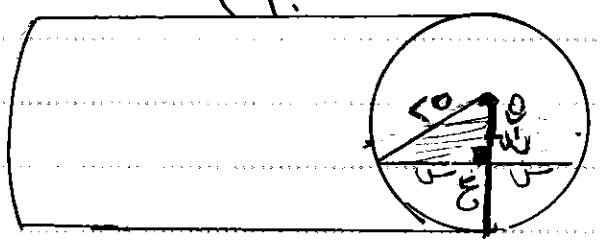
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{-٢(٨-\sqrt{٣}) \times \sqrt{٣} + ٢(١-٣)(١-٣)}{٢\sqrt{(٨-\sqrt{٣})^٢ + ٤}}$

$= \frac{٨\sqrt{٣} - ٧}{\sqrt{(٨-\sqrt{٣})^٢ + ٤}}$

---

(١٥) وزاره (٢٠١٥) صيفيه

يجري الماء في انبوب افقي اسطواني الشكل طوله (١٠) م ، وطول نصف قطره الداخلي (٢٥) سم ، فاذا كان عمق الماء في الانبوب يتناقص بمعدل ٣ سم/د ، فجد معدل التغير في مساحة سطح الماء الظاهر في الانبوب عندما يكون عمق الماء ١٨ سم



مساحة السطح مستطيل

م = الطول × العرض

$= ١٠٠ \times س = ١٠٠ \times ٢ س$

$\frac{د م}{د ن} = ١٠٠ \times ٢ \times \frac{د س}{د ن}$

$س^٢ + (٢٥-ع)^٢ = (٢٥)^٢$ من الشكل

$٢ س \times \frac{د س}{د ن} + ٢(٢٥-ع) \times -\frac{د ع}{د ن} = صفر$

← يتبع الحل

نجد س حيث ع = ١٨

$س^2 + (٢٥ - ١٨)^2 = (٢٥)^2$

$س^2 = ٦٢٥ - ٤٩ = ٥٧٦$

$س = ٢٤$

$\frac{د ن}{د ن} = ٣ \times (١٨ - ٢٥)^2 + \frac{د س}{د ن} \times ٢ \times ٢٤ \times ٢$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{٣ \times ٧ \times -٢}{٤٨} = \frac{-٧}{٨}$

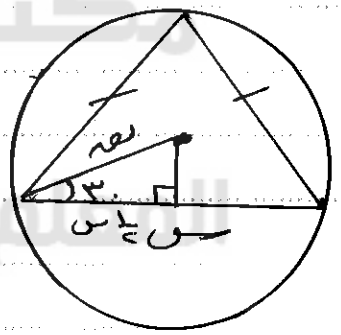
$\frac{د م}{د ن} = ٢٠ \times \frac{٧}{٨} = \frac{٣٥}{٢} -$

---

(١٦) وزارة (٢٠١٦) شتوية

رسم مثلث متساوي الاضلاع داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة ، بدأ كل من الدائرة والمثلث بالتمدد محافظتين على شكلهما ووضعهما بحيث تتمدد نصف قطر الدائرة بمعدل (٣) سم/د ، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمثلث عندما يكون نصف قطر الدائرة (٩) سم

الحل



$\frac{د نق}{د ن} = ٣$

$\frac{د م}{د ن} \Big|_{نق = ٩}$

م = مساحة الدائرة - مساحة المثلث

$= \pi نق^2 - \frac{1}{2} \times س \times س \times جا ٦٠^\circ$

$= \pi نق^2 - \frac{1}{2} س^2 \times \frac{\sqrt{٣}}{2}$

$= \pi نق^2 - \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^2$ ---- (١)

لكن من المثلث

$\frac{١/٢ س}{نق} = جا ٦٠^\circ$

$\frac{١/٢ س}{نق} = \frac{\sqrt{٣}}{2}$

$س = \sqrt{٣} نق$

$س^2 = ٣ نق^2$ بخصوصها في (١)

$م = \pi نق^2 - \frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ٣ نق^2$

$= \pi نق^2 - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} نق^2$

$\frac{د م}{د ن} = (٢ \pi نق - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \times ٢ نق) \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} \Big|_{نق = ٩} = ٣ \times (٩ \times ٢ \pi - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \times ٩ \times ٢)$

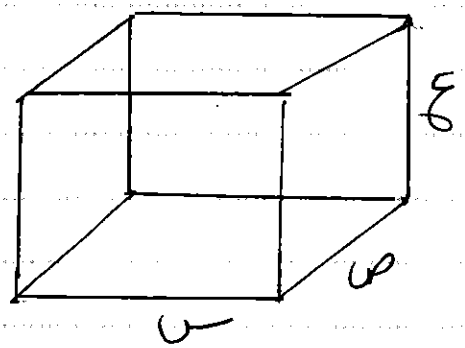
$= \frac{٣\sqrt{٨١}}{٢} - ٥٤ \pi$

مكتبة الوسام
ACADEMY
الاستاذ ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) صيفية

صندوق مفتوح على شكل متوازي مستطيلات طوله مثلي عرضه وارتفاعه (٣) امثال عرضه لمقدار الحرارة محافظاً على شكله بحيث يزداد حجمه بمعدل $(٧٢)\ سم^٣$ فما معدل التغير في مساحة سطحه الكلي عندما يكون طوله (٣٦) سم .

الحل



$س = ٢ص$ عندما $س = ٣٦$ فان $ص = ١٨$

$ع = ٣ص$

$\frac{دع}{دن} = ٧٢$

المطلوب $\frac{دم}{دن}$

$س = ٣٦$

مساحة الكلية $= م$

$م = ٢ س ص + ٢ ع ص + ٢ ع س$

$= ص ٢ \times ص ٣ \times ٢ + ص ٢ \times ص ٢ \times ٢ +$
$ص ٢ \times ص ٣ \times ٢$
$= ٤ ص^٢ + ٦ ص^٢ + ١٢ ص^٢$

$م = ٢٢ ص^٢$

$\frac{دم}{دن} = ٤٤ ص \times \frac{دص}{دن}$ ... (١)

لكن

$ح = س \times ص \times ع$
$= ٢ ص \times ص ٣ \times ص ٢$
$= ٦ ص^٣$

$\frac{دح}{دن} = ١٨ ص^٢ \times \frac{دص}{دن}$

$٧٢ = ١٨ (١٨)^٢ \times \frac{دص}{دن}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٤}{(١٨)^٢}$ بتعويضها في (١)

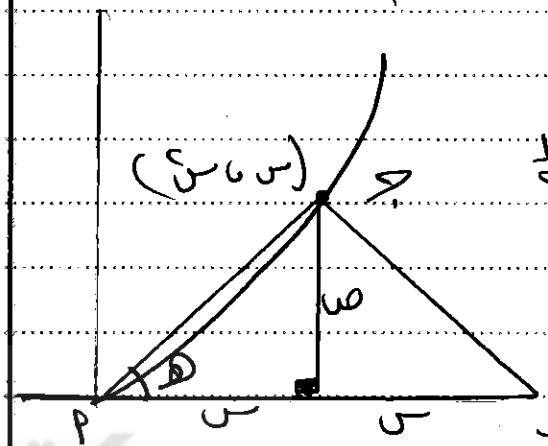
$\frac{دم}{دن} = ٤٤ \times ١٨ \times \frac{٤}{(١٨)^٢}$

$= \frac{٨٨}{١٨} = \frac{٤٤}{٩}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوية

بدأت النقطتان ب، جـ بالحركة معاً من نقطة الاصل (م) بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب بسرعة ٢ سم/ث عن نقطة الاصل وتتحرك النقطة جـ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س² بحيث يبقى طول م جـ يساوي ب جـ دائماً وكان معدل تغير الزاوية هـ بالنسبة للزمن = ٣ راديان/ث عندما س = ٣ سم، احسب معدل التغير في مساحة المثلث م ب جـ عندما هـ = $\frac{\pi}{3}$



$\frac{dهـ}{dن} = \frac{1}{2}$

ص = س²

م = $\frac{1}{2}$ × ب جـ × ص = $\frac{1}{2}$ × س × س² = $\frac{س^3}{2}$

ظا هـ = $\frac{ص}{ب}$ = $\frac{س^2}{س}$ = س

عندما هـ = $\frac{\pi}{3}$ ⟸ ظا $\frac{\pi}{3}$ = س

⟸ س = √٣

ظا هـ = س

$\frac{dهـ}{dن} \times$ أ هـ = $\frac{dس}{dن}$

$\frac{dس}{dن} = \frac{dهـ}{dن} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$ ٢٤

$\frac{dس}{dن} = \frac{1}{2}$ ٢٤

$\frac{dس}{dن}$ = ٢ ⟸

م = $\frac{س^3}{2}$

$\frac{dم}{dن} = \frac{3س^2}{2} \times \frac{dس}{dن}$

= $\frac{3}{2} \times (٣)^2 \times ٢$

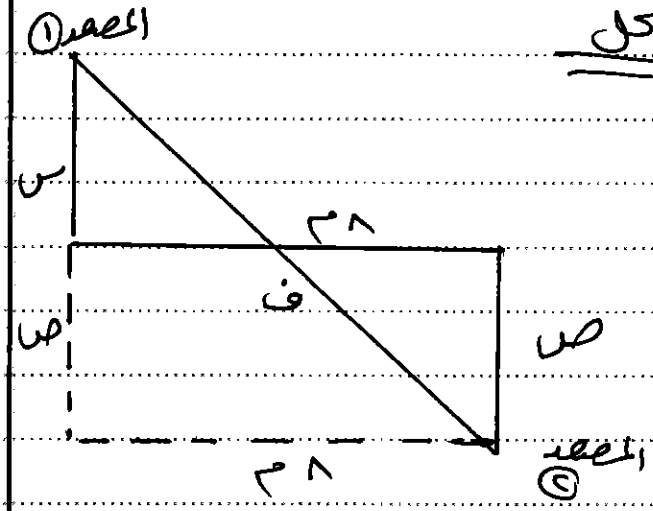
= ٣ × ٣ × ٢ = ١٨

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

جسمان كرويان متقربان في إطار جوي أفقي بسرعتين (٨) م/ث و (٦) م/ث والجسم الأول في ارتفاع (٣) م/ث والجسم الثاني في انخفاض للأسفل بسرعة (٤) م/ث أوجد معدل تغير البعد بين الجسمين بعد ثانيتين من بدء حركة الجسم الثاني

الحل



زمن الجسم الثاني = ٢

زمن الجسم الأول = ١+٢ = ٣

$\frac{ك س}{ك ن} = ٣$ ، $\frac{ك ص}{ك ن} = ٢$

س = ٣×٣ = ٩

ص = ٢×٢ = ٤

$ف^{٢} = (س+ص)^{٢} + ٨^{٢}$

$ف = \sqrt{(س+ص)^{٢} + ٦٤}$

$\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{٢(س+ص)(\frac{ك س}{ك ن} + \frac{ك ص}{ك ن})}{٢\sqrt{(س+ص)^{٢} + ٦٤}}$

$= \frac{٢(٩+٤)(٣+٢)}{٢\sqrt{(٩+٤)^{٢} + ٦٤}}$

$= \frac{٦ \times ١٣ \times ٥}{\sqrt{٦٤ + ١٣^{٢}}}$

$= \frac{٦٥}{\sqrt{٦٤ + ١٦٩}}$

$= \frac{٦٥}{\sqrt{٢٣٣}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

المعدلات المرتبطة بالزمن

السؤال الأول

(P) انطلقت سيارتان في نفس الوقت من الميناء P ، فسارت الأولى نحو الميناء ب بسرعة ٦٠ كم/س وسارت الثانية نحو الميناء جـ بسرعة ٨٠ كم/س اوجد معدل تغير المسافة بين السيارتين بعد ساعتين من الابحار علماً بان الزاوية بPجـ قائمة

الجواب = (١٠٠ كم/س)

(أ) مخروط دائري قائم رأسه إلى اسفل يخرج منه الماء بمعدل ٢ سم٣/ث ، وكانت حنفية تصب في المخروط بمعدل ٦ سم٣/ث وفي لحظة معينة كان ارتفاع الماء في المخروط = ٨ سم اجب

(P) معدل التغير في ارتفاع الماء.

(ب) معدل التغير في نصف قطر الماء العلوي

(جـ) معدل التغير في مساحة سطح الماء

علماً بان ارتفاع المخروط ٤٠ سم ونصف قطره ٢٠ سم

(أ) تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س^2+5}$ ، بحيث يزداد احداثيها السيني بمعدل ٠.٧٣ اوجد معدل تغير بعدها عن النقطة (١، ٠) عندما س = ٢

الجواب = ٠.٩ سم/ث

(ب) PبجـΔ مثلث قائم الزاوية في ب اذا علمت ان هذا المثلث يتغير في المستوى بحيث

اولاً : يبقى الرأس P في نقطة الاصل

ثانياً : يتحرك الرأس جـ بحيث يقع دائماً على منحنى ق(س) = $\frac{س^2+1}{36}$

ثالثاً الرأس ب بدأ الحركة من (١، ٠) بسرعة ٢ سم/ث

اوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٣ ثواني من حركة ب

الجواب = $\frac{61}{12}$

السؤال الثاني

(أ) قضيب طوله ١٠ م يتحرك بحيث يبقى طرفاه أ، ب على محوري السينات والصادات، إذا كان الطرف أ يتحرك مبتعداً عن نقطة الأصل بسرعة ٢ م/ن، أوجد سرعة الطرف ب على محور الصادات وكذلك معدل التغير في مساحة المثلث المكون من القضيب والمحورين عندما يكون الطرف أ على بعد ٨ م من نقطة الأصل

الجواب = $\frac{-١٤}{٣}$

(ب) تتحرك نقطة على منحنى $ص = س^{٣} + ٥س^{٢}$، فإذا كان الإحداثي السيني يزداد بمعدل ٢ سم/ن أوجد

(أ) معدل التغير في الإحداثي الصادي

الجواب = ٦٤ سم/ن

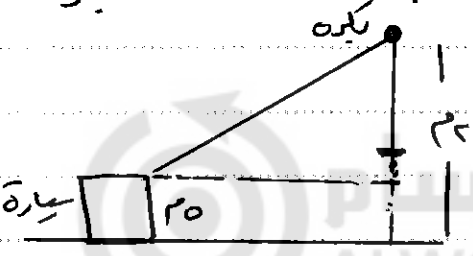
(ب) معدل التغير في ميل المماس عندما س = ٢

الجواب = ٤٤

(ج) يقع مصباح كهربائي في قمة عمود ارتفاعه ٣٠ م، قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من نقطة على الأرض تبعد ٢٠ م من قاعدة العمود حسب العلاقة ف = ٢٠ن − ٥ن^{٢} أوجد سرعة ظل الكرة على الأرض في اللحظة التي تكون فيها الكرة قد قطعت مسافة ١٥ م وهي صاعدة للأعلى

الجواب = $\frac{٨٠}{٣}$

(د) حبل طوله ٤٥ م يمر حول بكرة ترتفع عن الأرض ٢٥ م مربوط بطرفه الأول والطرف الآخر مربوط في سيارة على ارتفاع ٥ م، إذا كانت السيارة تسير بسرعة ٦ م/ن أوجد معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي تبعد فيها السيارة مسافة ١٥ م من أسفل البكرة

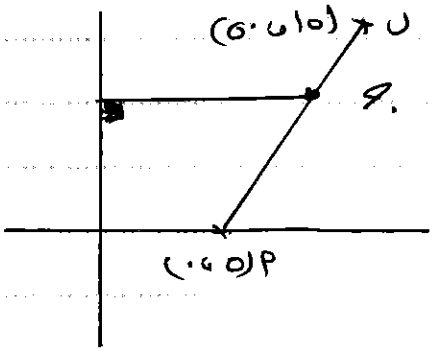


الجواب = $\frac{١٨}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

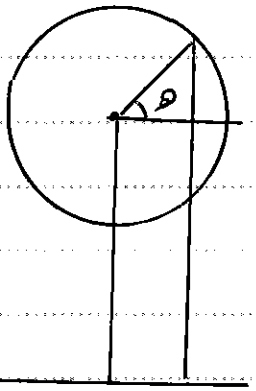
(أ) $\overline{AB}$ قطعة مستقيمة فيها $A(0,0)$ ، $B(15,10)$ تتحرك جـ على القطعة المستقيمة بحيث يزداد الاحداثي السيني لها بمعدل ٢,٣ ث/ث فما هو معدل تغير مساحة شبه المنحرف المكون من $\overline{AP}$ ومحور السينات ومحور الصادات والعمود النازل من جـ على محور الصادات وذلك عندما يكون الاحداثي الصادي للنقطة جـ يساوي ٣٠.



الجواب = ١١٠

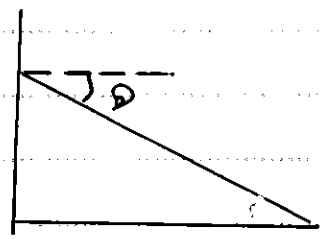
(ب) دولاب في مدينة الملاهي نصف قطره ٦٠ قدم ، وارتفاع مركزه عن الارض ٦٤ قدم ، يدور دورة كل دقيقتين ، أوجد السرعة التي يتحرك بها راكب وهو على ارتفاع ٩٤ قدم وما سرعة ارتفاع الراكب عندئذ

تابع ←



الجواب = ٣٠ π

(ج) طائرة عمودية على ارتفاع ٣٠٠ م فوقه طريقي افقي مستقيم شاهد الطيار سيارة تبعد عن مسقط الطائرة على الشارع مسافة ١٥٠ م وتسير مبتعدة عنه مسقط الطائرة بسرعة ٢٢٥ م/د ، فاذا بدأت الطائرة بالهبوط بمعدل ٥٠ م/د ، أوجد معدل تغير زاوية الانخفاض بين الطائرة والسيارة بعد مرور دقيقتين



الجواب = $\frac{-٣}{١٦}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

(أ) مئذنة ارتفاعها ٢٠م تتحرك كرة في خط مستقيم مبتعده عن قاعدة المئذنة بسرعة ٤ م/ث اوجد

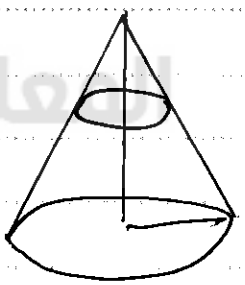
(ب) سرعة تغير زاوية انخفاض خط نظر شخص في قمة المئذنة وينظر الى الكرة عندما تكون الكرة على بعد ١٥م من قاعدة المئذنة

الجواب = $\frac{١٦}{١٢٥}$

(ج) معدل تغير المسافه بين الكره والمئذنه

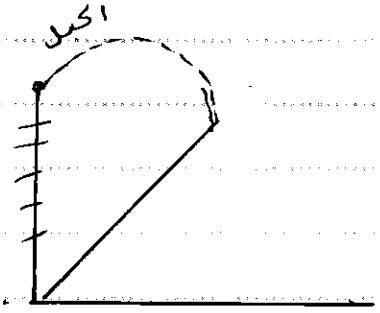
الجواب = $\frac{١٢}{٥}$

(أ) مصباح معلق فوق مركز قرص دائري افقيه ارتفاعها عن الارض يساوي ٩٠ سم ونصف قطرها ٣٠ سم تحرك المصباح رأسيا لأسفل فوق القرص بسرعة ٦ سم/ث اوجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل القرص على الارض عندما يكون ارتفاع المصباح عن القرص ٦٠ سم



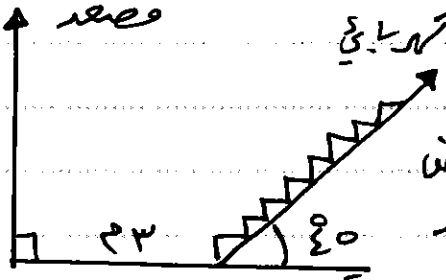
الجواب = ٣

(ب) الشكل يمثل بناية ارتفاعها ١٢م، P، Q سلم طوله ١٢م، والطرف P ثابت وتسحب الطرف Q بسرعة ٢م/ث يقبل من قمة البناية اوجد معدل التغير في ارتفاع الطرف Q عن الارض عندما يكون الطرف Q على ارتفاع ٦م عن الارض



الجواب = $٢\sqrt{٣}$

(ج) درج كهربائي

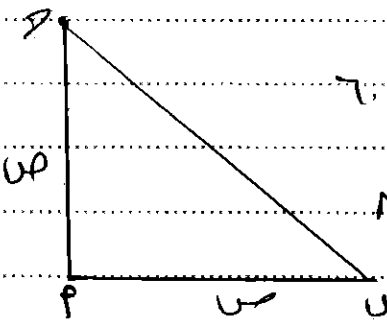


في احد المطارات استخدم حاجب صعداً كهربائياً يرتفع بمعدل ٢م/ث وفي نفس اللحظة استخدم صديقه راشد درجاً كهربائياً يبعد افقياً ٣م عن نقطة انطلاق المصعد حيث يتحرك الدرج الكهربائي بمعدل ٢م/ث ويميل بزاوية ٤٥° كما في الشكل اوجد معدل تغير المسافه بين حاجد وراشد بعد ثانيتين من بدء الحركه

حلول ورقة عمل المعدلات المرتبطة بالزمن

السؤال الأول

(أ)



$\frac{د س}{د ن} = ٦٠$

$\frac{د ص}{د ن} = ٨٠$

بعد ساعتين

$س = ٦٠ \times ٢ = ١٢٠$

$ص = ٨٠ \times ٢ = ١٦٠$

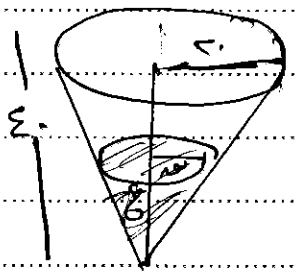
$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢س \frac{د س}{د ن} + ٢ص \frac{د ص}{د ن}}{٢\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

$= \frac{٢ \times ١٢٠ \times ٦٠ + ٢ \times ١٦٠ \times ٨٠}{٢\sqrt{(١٢٠)^٢ + (١٦٠)^٢}}$

أعمل

(ب)



$\frac{د ع}{د ن} = ٦ - ٢ = ٤$

$ع = ٨$

١) $ح = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$،

من التشابه $\frac{نق}{٤٠} = \frac{نه}{ع}$

$٢٠ع = ٤٠ نه \leftarrow نه = \frac{٢٠}{٤٠} ع = \frac{١}{٢} ع$

$\therefore ح = \frac{١}{٣} \pi \times ع \times (\frac{ع}{٢})^٢$

$= \frac{١}{٣} \pi \times \frac{ع^٣}{٤} \times ع = \frac{\pi}{١٢} ع^٣$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{\pi}{١٢} \times ٣ ع^٢ \times \frac{د ع}{د ن}$

$\Leftarrow ٤ = \frac{\pi}{١٢} \times ٣ \times ٨ \times ٨ \times \frac{د ع}{د ن}$

$٤ = \frac{١٦ \pi}{د ن} \times د ع$

$\leftarrow \frac{د ع}{د ن} = \frac{٤}{١٦ \pi} = \frac{١}{٤ \pi}$

٢) $نه = \frac{١}{٢} ع$

$\frac{د نه}{د ن} = \frac{١}{٢} \times \frac{د ع}{د ن}$

$\leftarrow$ نفس

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow \frac{ك نصف}{ك ن} = \frac{1}{4\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8\pi}$

(٥) $م = \pi$ نصف^2

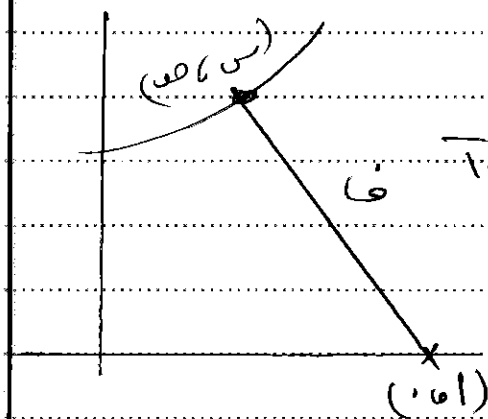
$\frac{ك م}{ك ن} = 2\pi \times$ نصف $\times \frac{ك نصف}{ك ن}$

$= 2\pi \times 4 \times \frac{1}{8\pi} = \frac{1}{2}$ سم^2/ث

صنع نصف $= \frac{1}{2} \times 8 = 4$

السؤال الأول

(٥)



$\frac{ك س}{ك ن} = 1.73$

$س = 2$

ف $= \sqrt{(س-1)^2 + (ص-0)^2}$

$ص = \sqrt{س^2 + 5}$ $\quad ص^2 = س^2 + 5$

ف $= \sqrt{س^2 - 2س + 1 + س^2 + 5}$

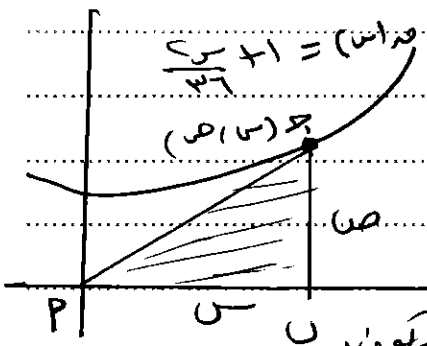
$= \sqrt{2س^2 - 2س + 6}$

$\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{(4س - 2)\frac{ك س}{ك ن}}{2\sqrt{2س^2 - 2س + 6}}$

$= \frac{(4 \times 2 - 2) \times 1.73}{2\sqrt{2 \times 4 - 2 \times 2 + 6}}$

$= \frac{6}{1.72} \times 1.73 = 9$

(٥)



$\frac{ك س}{ك ن} = 2$ سم/ث

س تغير بمعدل ثابت

$= 1 + 3 \times 2$

$= 7$ وحدة مساحة (الحركة فقط)

م $= \frac{1}{2}$ س $\times$ ص

$= \frac{1}{2} س \times (1 + \frac{س^2}{36})$

$= \frac{1}{2} س + \frac{س^3}{72}$

$\frac{ك م}{ك ن} = \frac{1}{2} \frac{ك س}{ك ن} + \frac{3س^2}{72} \times \frac{ك س}{ك ن}$

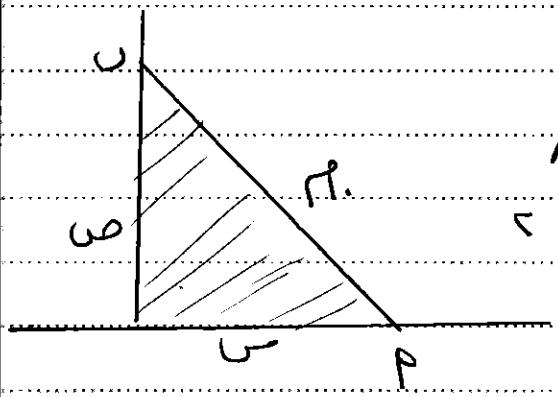
$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{4 \times 9}{72} \times 2$

$= 1 + \frac{36}{12} = \frac{61}{12}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

(أ)



$س = ٨$

$\frac{د س}{د ن} = ٢$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

$٢س \frac{د س}{د ن} + ٢ص \frac{د ص}{د ن} = ٠$ *

عندما $س = ٨$ نجد أن $ص$

$٦٤ + ص^{٢} = ١٠٠$

$ص^{٢} = ٣٦$ $\Leftarrow$ بالتعويض $ص = ٦$

$٢ \times ٨ \times ٢ + ٢ \times ٦ \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$

$٣٢ + ١٢ \frac{د ص}{د ن} = ٠$

$\frac{د ص}{د ن} = \frac{-٣٢}{١٢} = \frac{-٨}{٣}$ $\Leftarrow$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$م = \frac{١}{٢} \times س \times ص$

$\frac{د م}{د ن} = \frac{١}{٢} س \times \frac{د ص}{د ن} + ص \times \frac{١}{٢} \frac{د س}{د ن}$

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times \frac{-٨}{٣} + ٦ \times \frac{١}{٢} \times ٢$

$= \frac{-٣٢}{٣} + ٦$

$= \frac{-١٤}{٣}$

(ب)

① $ص = س^{٣} + ٥س^{٢}$

$\frac{د ص}{د ن} = (٣س^{٢} + ١٠س) \frac{د س}{د ن}$

$= ٢ \times (٤ \times ٣ + ١٠ \times ٤)$

$= ٤ \times (٢٠ + ١٢) = ٤ \times ٣٢ = ١٢٨$

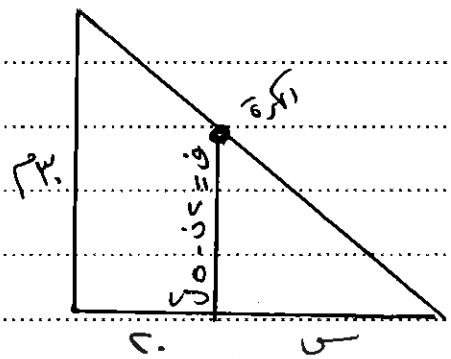
② ميل المماس $= \frac{د ص}{د ن} = ٣س^{٢} + ١٠س$

$\frac{د م}{د ن} = (٢س + ١٠) \frac{د س}{د ن}$

$= ٢ \times (١٠ + ٢ \times ٦)$

$= ٤٤$

(ج)



من تشابه المثلثات

$\frac{٣٠}{س + ٢٠} = \frac{ف}{س}$

$٣٠س = ف س + ٢٠ ف$

$٣٠س - ف س = ٢٠ ف$

$س (٣٠ - ف) = ٢٠ ف$

$س = \frac{٢٠ ف}{٣٠ - ف}$ $\Leftarrow$ المطلوب

مركز التميز للعلوم
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(5) $\frac{ك ن}{ك ف} = \frac{(٣٠ - ف) \times ٢٠ \times \frac{ع ف}{ك ن} - ف^{٢٠} \times ١ - \times \frac{ع ف}{ك ن}}{(٣٠ - ف)^{٢}}$

نجد ن = الزمن

قطعت ١٥ متر ⇐ ف = ١٥

$٢٠ ن - ٥ ن^{٢} = ١٥$

$٥ ن^{٢} - ٢٠ ن + ١٥ = ٠$ بالقسمة ع ٥

$ن^{٢} - ٤ ن + ٣ = ٠$

$(ن - ٣)(ن - ١) = ٠$

$ن = ٣$ مرفوض $ن = ١$ صالح

أي حتى $ن = ١$ صالح

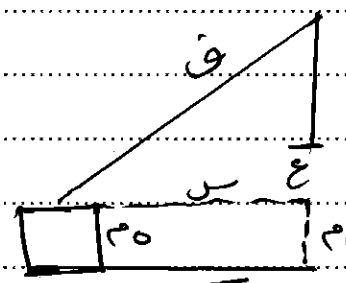
$ف = ٢٠ ن - ٥ ن^{٢}$

$\frac{ك ف}{ك ن} = ٢٠ - ١٠ ن = ٢٠ - ١٠ \times ١ = ١٠$

$\frac{ك س}{ك ن} = \frac{(٣٠ - ١٥) \times ٢٠ \times ٢٠ - ١٠ \times ٢ \times (١٥ - ٣٠) \times ١٠ \times ١ - \times ١٥ \times ٢٠}{(١٠ - ٣٠)^{٢}}$

$= \frac{٣٠٠ ن + ٢٠ ن \times ١٥}{(١٥)^{٢}}$

$= \frac{٦٠٠ + ٣٠٠}{٢٢٥} = \frac{٤٠٠}{١٥} = \frac{٨٠}{٣}$



المطلوب $\frac{ع ع}{ك ن}$

$ف^{٢} = س^{٢} + (ل + ع)^{٢}$

لكن $ف + ل = ٤٥$ بالطرح

$ع + ل = ٢٠$

$ف - ع = ٢٥$

$\Leftarrow ف = ٢٥ + ع$ بتعويض أي ف

$(٢٥ + ع)^{٢} = س^{٢} + ٢٠^{٢}$ بالاشتقاد

$٢ (٢٥ + ع) \frac{ع ع}{ك ن} = ٢ \times ٢٠ \times \frac{ك س}{ك ن}$ ← (1)

لكن $(٢٥ + ع)^{٢} = (١٥)^{٢} + ٢٠^{٢}$

$= ٢٠ \times ٢٠ + ١٥ \times ١٥$

$= ٤٠٠ + ٢٢٥$

$(٢٥ + ع)^{٢} = ٦٢٥ = (٢٥)^{٢}$

$\Leftarrow (٢٥ + ع) = ٢٥$ بالتعويض (1)

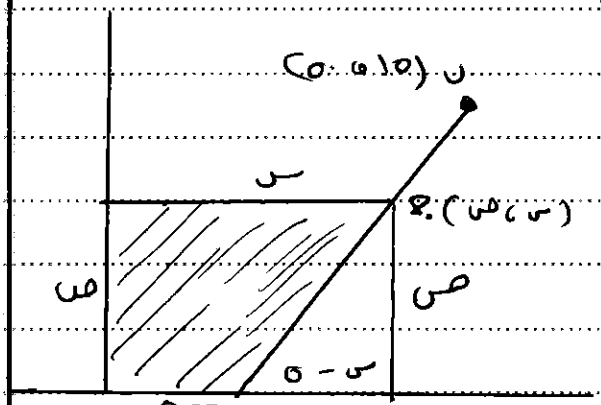
$٦ \times ١٥ \times ٢٠ = ٢ \times (٢٥) \times \frac{ع ع}{ك ن}$

$\frac{ع ع}{ك ن} = \frac{١٨٠}{٥٠} = \frac{١٨}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ)



$\frac{ص}{س} = ٢$

مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$م = \frac{1}{2}(٥ + س) \times ص$ ---- (١)

ميل المستقيم $ب ء = \frac{١٥ - ص}{١٥ - س} = \frac{٥٠ - ٢ص}{١٠} = ٥ - \frac{ص}{٥}$

معادلته هي $ص - ١٠ = ٥ - \frac{ص}{٥}(س - ١٥)$

$\Leftarrow ص = ٥(٥ - س)$

بتعويضها في (١)

$م = \frac{1}{2}(٥ + س) \times ٥(٥ - س)$

$= \frac{٥}{2}(٢٥ - س^٢)$

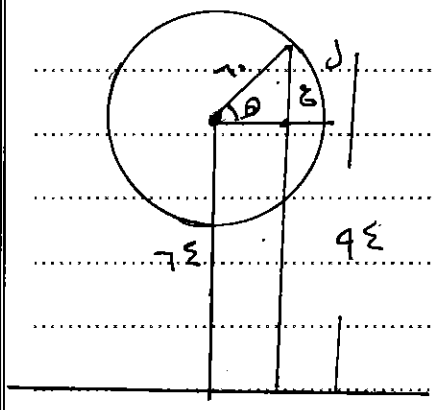
$\frac{دم}{دس} = \frac{٥}{2} \times ٢س \times -١ = -٥س$

عندما $ص = ٣٠$ فإن $س = ٥$

$\Leftarrow ٣٠ = ٥(٥ - س) \Leftarrow س = ١١$

$= -٥ \times ١١ = -٥٥$

(ب)



$\frac{دهـ}{دن} = ٢\pi$

دورة كل دقيقة $\Leftarrow \pi$ في الدقيقة

المطلوب $\frac{دل}{دن}$ ، $\frac{دع}{دن}$

$ل = نق \times هـ$

$\frac{دل}{دن} = ٦٠ \frac{دهـ}{دن} \Leftarrow$

$= ٦٠ \times هـ$

$\frac{دل}{دن} = ٦٠ \times \pi = ٦٠\pi$

$جا هـ = \frac{ع}{٦٠} \Leftarrow$ ضا $هـ = \frac{ع}{٩٤}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{1}{٦٠} \frac{دهـ}{دن} \times$ ضتا هـ

عندما ع $= ٢$

فإن $٩٤ - ٦٤ = ٣٠$

$ل^٢ = ع^٢ + (٣٠)^٢$ فيثاغورث

$ع^٢ = ٩٠٠ - ٢٦٠٠ = -١٧٠٠$

$ع = \pm \sqrt{-١٧٠٠}$

$= \pm ١٠ \sqrt{-١٧}$

$= \pm ١٠ \sqrt{-١ \times ١٧}$

$= \pm ١٠ \times ت \sqrt{١٧}$

$= \pm ١٠ت \sqrt{١٧}$

ضتا $هـ = \frac{٣٠}{ع} = \frac{٣٠}{١٠ت \sqrt{١٧}}$

$= \frac{٣}{ت \sqrt{١٧}} = \frac{-ت \sqrt{١٧}}{١٧}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{1}{٦٠} \frac{دهـ}{دن} \times$ ضتا هـ

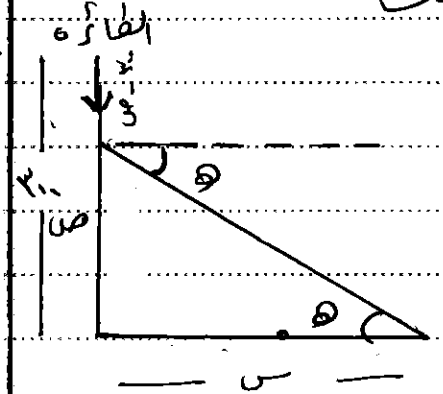
$\frac{دع}{دن} = \frac{1}{٦٠} \times \frac{٢\pi}{١} \times \frac{-ت \sqrt{١٧}}{١٧}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{-\pi ت \sqrt{١٧}}{٥١٠} = \frac{-\pi ت \sqrt{١٧}}{٥١٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(ب)



$\frac{ص}{س} = ظاهـ$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص \times \frac{ص}{ن} - \frac{س}{ن} \times \frac{س}{ن}}{س^2}$ ①

بعد دمجهما

$س = ١٥٠ + ٢٥ \times ٢ = ٢١٠$

$ص = ٣٠٠ - ٥٠ \times ٢ = ٢٠٠$

$ظاهـ = \frac{٢٠٠}{٢١٠} = ١$

$\because ١ + ظا^٢هـ = قا^٢هـ$

$قا^٢هـ = ٢$

بالتعويض في ①

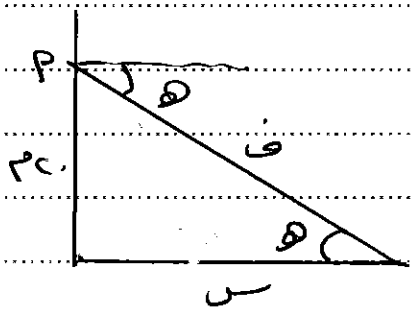
$\frac{ص}{ن} \times ٢ = \frac{٢٠٠ \times ٢٥ - ٥٠ \times ٢١٠}{٤١٠٠}$

$= \frac{-١٥٠}{٤١٠} = \frac{-٣}{٨}$

$\frac{ص}{ن} = \frac{-٣}{٢ \times ٨} = \frac{-٣}{١٦}$

السؤال الرابع

(أ)



$\frac{ص}{ن} = ٤$

عندما س = ١٥

(ب)

$ظاهـ = \frac{٢٠}{س}$

$قاهـ \times \frac{هـ}{ن} = \frac{-٢٠}{س^2} \times \frac{س}{ن}$ ①

عندما س = ١٥ $ظاهـ = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{٤}{٣}$

$قا^٢هـ = ١ + ظا^٢هـ$

$= ١ + \frac{١٦}{٩} = \frac{٢٥}{٩}$ بالتعويض

في ①

$\frac{٥}{٣} \times \frac{هـ}{ن} = \frac{-٢٠}{٢٥} \times ٤$

$\frac{هـ}{ن} = \frac{-٤ \times ٢٠}{٢٥ \times ٥} = \frac{-٩}{١٢٥} \times \frac{١٦}{٥}$

(ج) $ف^٢ = س^٢ + ٢٠^٢$

$٢ف \frac{ف}{ن} = ٢س \frac{س}{ن}$ ②

عندما س = ١٥

$ف^٢ = (١٥)^٢ + ٤٠٠ = ٦٢٥$

$ف = ٢٥$

بالتعويض في ②

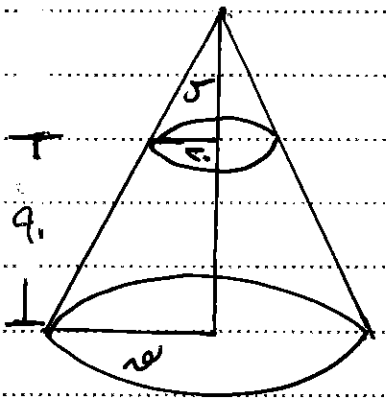
$٢ \times ٢٥ \times \frac{ف}{ن} = ٢ \times ١٥ \times ٤$

$\frac{ف}{ن} = \frac{١٢٠}{٥٠} = \frac{١٢}{٥}$

مكتبة العلم ALWESAM
العلم ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

(أ)



$\frac{ds}{dt} = -٦$

$\frac{d\,نق}{dt} = ؟؟$

عندما س = ٦٠

من التشابه

$\frac{نق}{ع} = \frac{٢٠}{س}$

$نق = \frac{ع + ٩٠}{س}$

$\Leftarrow نق = \frac{(س + ٩٠)٢٠}{س}$

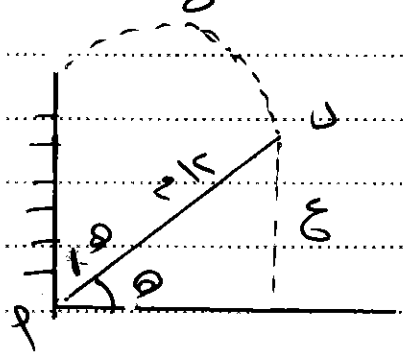
$نق = \frac{٢٠س + ١٨٠٠}{س} = ٢٠ + \frac{١٨٠٠}{س}$

$\frac{d\,نق}{dt} = -\frac{١٨٠٠}{س^{٢}} \times \frac{ds}{dt}$

$= -\frac{١٨٠٠}{٦٠^{٢}} \times -٦$

$= ٣$

(ب)



$حا هـ = \frac{ع}{١٢}$

$حا هـ = \frac{ع}{١٢}$

(١) $ضا هـ \times \frac{d\,هـ}{dt} = \frac{١}{١٢} \times \frac{dع}{dt}$

$ل = ١٢ هـ \leftarrow \frac{dل}{dt} = ١٢ \times \frac{d\,هـ}{dt}$

$-٢ = ١٢ \times \frac{d\,هـ}{dt}$

$\frac{d\,هـ}{dt} = \frac{-٢}{١٢} = \frac{-١}{٦}$

$\frac{d\,هـ}{dt} = \frac{-١}{٦}$ ، $هـ + ١ هـ = ٩٠$ $\Leftarrow$ $\frac{d\,هـ}{dt} = -\frac{d\,١ هـ}{dt}$

$حا هـ = \frac{ع}{١٢}$ عندما ع = ٦

$ضا هـ = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ $هـ = ٣٠$

$\Leftarrow ضا هـ = \frac{٣}{٢}$ بالتعويض في (١)

$\frac{dع}{dt} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{٦} \times \frac{٣}{٢}$

$\frac{dع}{dt} = ١٢ \times \frac{٣}{١٢}$

$\frac{dع}{dt} = ٣$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

النقطة الحرجة

تعريف

اذا كانت النقطة ح في مجال الاقتران هـ فان النقطة (ح ، هـ(ح)) تسمى نقطة حرجة للاقتران هـ اذا كانت هـ'(ح) = صفر او هـ'(ح) غير موجودة

ملاحظة

يجب ان تقع النقطة الحرجة في المجال ، ودائماً اطراف الفترات المغلقة [م ، ن] نقط حرجة لأن هـ'(م) ، هـ'(ن) غير موجودة

ملاحظة

في الاقترانات الكسرية عندما تكون هـ(س) اقتران كسري فاننا

① نضع البسط = صفر ← المقام = صفر

② نضع المقام = صفر ← المشتقة غير موجودة

مثال ①

اوجد النقط الحرجة للاقتران هـ(س) = س^{٣} - ٤س + ٣

الحل

هـ'(س) = ٣س^{٢} - ٤ = ٠

س = ٢ ∈ المجال

(٢ ، هـ(٢)) = (٢ ، -١)

نقطة حرجة

مثال ②

هـ(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ٣

س ∈ [-٣ ، ١] اوجد قيم س الحرجة

الحل

هـ'(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ٥ = صفر

(٣س + ٥)(س - ١) = صفر

س = $\frac{-٥}{٣}$ ، س = ١

قيم س الحرجة = {-٣ ، $\frac{-٥}{٣}$ ، ١}

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ③

$f(س) = س^{\frac{2}{3}}$ $س \in [-٨، ٦٨]$

الحل

$f'(س) = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

اصفار المقام $س = ٠ \notin$ المجال

النقط الحرجة

$(٠، ٠)$ $(-٨، ٤)$ ، $(٦٨، ٤)$

مثال ④

اوجد مجموعة النقاط الحرجة للاقترانات

$f(س) = \sqrt{س^٢ - ١٦س}$

الحل

اولاً نجد المجال

$س^٢ - ١٦س = ٠$

$س(س - ١٦) = ٠$

$س = ٠$ $س = ١٦$

$+++++$ $----$ $+++++$

٠ ١٦

$f'(س) = \frac{٢س - ١٦}{٢\sqrt{س^٢ - ١٦س}}$

البسط = صفر

$٢س - ١٦ = ٠ \Leftarrow س = ٨ \notin$ المجال

نهمل

المقام = ٠

$س^٢ - ١٦س = ٠$

$س(س - ١٦) = ٠$ $س = ٠$ ، $س = ١٦ \in$ المجال

قيم س الحرجة هي $\{٠، ١٦\}$

مثال ⑤

$f(س) = \frac{س^٢ + ٧}{س - ٣}$ اوجد قيم س الحرجة

الحل

مجال $f = ح - \{٣\}$

$f'(س) = \frac{(س-٣)(٢س) - (س^٢+٧)(١)}{(س-٣)^٢}$

$= \frac{٢س^٢ - ٦س - س^٢ - ٧}{(س-٣)^٢}$

$= \frac{س^٢ - ٦س - ٧}{(س-٣)^٢}$

البسط = صفر، $س^٢ - ٦س - ٧ = ٠$

$(س - ٧)(س + ١) = ٠$

$س = ٧ ، -١ \in$ المجال

المقام = صفر $س - ٣ = ٠$ $س = ٣ \notin$ المجال

النقط الحرجة $(-١، -٢)$ ، $(٧، ٤)$

مكتبة السمسم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

① مجموعة قيم س الحرجة للاقتران الثابت هي كامل الفترة المعطاة

② مجموعة قيم س الحرجة للاقتران أكبر عدد صحيح (لوحدة) هي كامل الفترة المعطاة.

مثال ⑥
ق(س) = ٣ ، س ∈ [١، ٥]
جد قيم س الحرجة

الحل
ق(س) = صفر ∈ (١، ٥)
ق(١) غير موجودة ، ق(٥) غير موجودة
قيم س الحرجة هي س ∈ [١، ٥]

مثال ⑦
ق(س) = [-١/٣ س + ١] معرفاً على الفترة [-٣، ٣] فاوجد قيم س الحرجة.

الحل
قيم س الحرجة جميع الفترة
[-٣، ٣]

مثال ⑧
اذا كان ق(س) = م س^٣ - ٩ س^٢ حيث م عدد ثابت وكان لهذا الاقتران نقطة حرجة عند س = ٢ فما قيمة م ؟

الحل
ق'(س) = ٣ م س^٢ - ١٨ س
ق'(٢) = ١٢ م - ٣٦ = ٠
⇐ م = ٣

مثال ⑨
ق(س) = { ٣س^٢ ، -١ ≤ س < ٠ ; ٣س^٣ + ٤س ، ٠ ≤ س < ٣ ; ٥ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }
اوجد قيم س الحرجة

الحل
عند س = -١ ، ٦ نقط حرجة اطراف فترة
① عند س = ٠ نبحث الاتصال
نهاية ق(س) = ٠ = صفر ، نهاية ق(س) = ٠
س ← ٠+ ، س ← ٠-
ق(٠) = ٠
متصل عند س = ٠
ق'(٠) = ٠ ، ق'(٠) = ٤
ق'(٠) غير موجودة ⇐ س = ٠ حرجة
② عند س = ٣
نهاية ق(س) = ٥ ، نهاية ق(س) = ٦٦
س ← ٣+ ، س ← ٣-
⇐ لا تتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

ق(س) غير متصل عند س = ٣
← ق(٣) غير موجود
س = ٣ حرجة

$$ق(س) = \begin{cases} ٦س & -١ < س < ٠ \\ ٦س^{٢} + ٤ & ٠ < س < ٣ \\ صفر & ٢ < س < ٦ \end{cases}$$

٦س = ٠ ⇒ س = ٠ ∈ مجال حرجة
٦س^٢ + ٤ لا تكون

ق(س) = صفر ⇒ (٦، ٢)
ليس من الحرجة هي

{-١، ٠، ٦، ٣٦} ⊂ (٦، ٣)
أو [٦، ٣] ⊂ {-١، ٠، ٦}

مثال (١٠)
جد قيم كل من الثابتين أ، ب
التي تجعل للاقتران
ق(س) = س^٣ + أس^٢ + بس نقطتان
حرجتان عند س = -١، س = ٢

الحل
ق(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ب
ق(-١) = ٣(-١)^٢ + ٢أ(-١) + ب = ٠
٣ - ٢أ + ب = ٠ ---- (١)
ق(٢) = ٣(٢)^٢ + ٢أ(٢) + ب = ٠

ق(٢) = ١٢ + ٤أ + ب = ٠ ---- (٢)
معادلة (١) - (٢)
-٩ - ٦أ = ٠ ← -٦أ = ٩
أ = ٩/-٦ = -٣/٢

بالتعويض ← ب = -٦

مثال (١١)
اذا كان للاقترانين
ق(س) = أس^٢ - بس + ٥
نقطة حرجة هي (١، ٤)
فجد أ، ب؟

الحل
ق(١) = ٤
← أ(١)^٢ - ب(١) + ٥ = ٤
أ - ب = -١ ---- (١)
ق(س) = ٢أس - ب
ق(١) = صفر لنقطة حرجة
٢أ(١) - ب = ٠
٢أ - ب = ٠ ---- (٢)
معادلة (١) - معادلة (٢)
-أ = -١ ← أ = ١
١ - ب = -١ ⇐ ب = ٢

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام | ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

اذا كان هـ، و قابلين للاشتقاق على ح ماذا كان كل منهما نقطة حرجة عند س = أ فاثبت ان للاقتران (هـ × و) نقطة حرجة عند س = أ

الحل

هـ'(أ) = صفر و'(أ) = صفر

لأن أ نقطة حرجة لكل من هـ، و

(هـ × و)'(أ) = هـ(أ) × و'(أ) + و(أ) × هـ'(أ)

= هـ(أ) × ٠ + و(أ) × ٠

= صفر

∴ أ نقطة حرجة للاقتران هـ × و

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٨٠

جد النقط الحرجة للاقتران

$ق(س) = س^3 - ١٢س + ١$

$س \in [-٣ ، ٣]$

الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢ = ٠$

$٣س^2 = ١٢ \Rightarrow س^2 = ٤$

$س = \pm ٢$

النقط الحرجة

$(-٢ ، ق(-٢))(٢ ، ق(٢))$

$(-٣ ، ق(-٣))(٣ ، ق(٣))$

$= (-٢ ، ١٧)، (٢ ، -١٥)$

$(-٣ ، ١٠)(٣ ، -٨)$

تدريب ② ص ١٨٠

جد النقط الحرجة للاقتران

$ق(س) = جتاس - ٢جاس$ حيث $س \in [٠ ، ٢\pi]$

الحل

$ق'(س) = -جاس - ٢جتاس = ٠$

$جاس + ٢جتاس = ٠$

$جاس = -٢جتاس$

$ظاس = -٢$

$س = \pi - ظا^{-1}(٢)$ ، $٢\pi - ظا^{-1}(٢)$

$س = ١.١٠٧$ ، ٥.١٧٥

$(١.١٠٧ ، ق(١.١٠٧))$ ، $(٥.١٧٥ ، ق(٥.١٧٥))$

$(٠ ، ق(٠))$ ، $(\pi ، ق(\pi))$

$(٢\pi ، ق(٢\pi))$

تدريب ③ ص ١٨١

جد النقط الحرجة للاقتران

$ق(س) = ٣\sqrt[٣]{س^2}$ $س \in [-٢ ، ٢]$

الحل

$ق(س) = ٣س^{\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = ٣ \times \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{س}}$

عندما $س = ٠$ ق غير موجود $\Rightarrow$ $٠ \in [-٢ ، ٢]$

$(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)$

$(-٢ ، ق(-٢)) = (-٢ ، ٣\sqrt[٣]{٤})$

$(٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣\sqrt[٣]{٤})$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريب ④ ص ١٨١

جد النقط الحرجة للاقتران

$ق(س) = |س^٢ - ٤س|$

$س \in [-١، ٣]$

الحل

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$س^٢ - ٤س = ٠$

$س(س-٤) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٤$

	$س^٢ - ٤س$	$٤س - س^٢$	$س - ٤$
	+ +	− −	+ + +
		٠	٤

$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤س & \text{عندما } س \leq ٠ \text{ أو } س \geq ٤ \\ ٤س - س^٢ & \text{عندما } ٠ < س < ٤ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & \text{عندما } س < ٠ \text{ أو } س > ٤ \\ ٤ - ٢س & \text{عندما } ٠ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & \text{عندما } س = ٠ ، ٤ \end{cases}$

$٤ - ٢س = ٠$

$٢س = ٤$

$س = ٢$

النقط الحرجة

(٠، ٠) (٤، ٠)

(١، ١) (٣، ٣)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

(صفحة ١٨٤)

السؤال الأول

جد النقط الحرجة لكل من الأقترانات الآتية

(أ) $ق(س) = س^٤ - ٤س + ١$
$س \in [-٢ ، ٢]$

الحل
$ق'(س) = ٤س^٣ - ٤ = ٠$
$٤(س^٣ - ١) = ٠$
$٤(س - ١)(س^٢ + س + ١) = ٠$
$س = ١$

النقط الحرجة
$(١ ، ق(١)) = (١ ، -٢)$
$(-٢ ، ق(-٢)) = (-٢ ، ٢٥)$
$(٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٩)$

(ب) $ق(س) = حاس + حتاس$
$س \in [٠ ، ٢\pi]$

الحل
$ق'(س) = حتاس - حاس = ٠$
$\Leftarrow$ حاس = حتاس

$س = \frac{\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤}$

النقط الحرجة
$(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢})$
$(\frac{٥\pi}{٤} ، -\sqrt{٢})$ ، $(٠ ، ١)$
$(٢\pi ، ١)$

(ج) $ق(س) = س^٢ |س - ١|$ $س \in [-٢ ، ٢]$

الحل
$\begin{cases} س^٢(س-١) & س \geq ١ \\ س^٢(١-س) & س < ١ \end{cases}$
$= \begin{cases} س^٣ - س^٢ & س \geq ١ \\ س^٢ - س^٣ & س < ١ \end{cases}$
$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٤س & ك \le ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ٤ك - ٣س^٢ & ك > ١ \end{cases}$$

$٣س^٢ - ٤ك = ٠$

$س(٣س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \quad س = \frac{٤}{٣}$

النقط الحرجة

$(٠ ، \text{هـ}(٠)) \quad (\frac{٤}{٣} ، \text{هـ}(\frac{٤}{٣}))$

$(١ ، \text{هـ}(١)) \quad ، \quad (-٣ ، \text{هـ}(-٣))$

$(٢ ، \text{هـ}(٢))$

---

(٤) $\text{هـ}(س) = \sqrt{\text{جتا}^٢ س} \quad س \in [٢\pi ، ٠]$

الحل

$\text{هـ}(س) = |\text{جتا} س|$

$\text{جتا} س = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

هـ١

	$\frac{\pi}{٤}$	π
$-\text{جا} س$	$\text{جتا} س$	
١	١	١
	٠	

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \text{جتا} س & ٠ \le س \le \frac{\pi}{٤} \\ -\text{جتا} س & \frac{\pi}{٤} < س \le \pi \end{cases}$$

$$\text{هـ}'(س) = \begin{cases} -\text{جا} س & ٠ < س < \frac{\pi}{٤} \\ \text{غير موجودة} & س = \frac{\pi}{٤} \\ \text{جا} س & \frac{\pi}{٤} < س < \pi \end{cases}$$

النقط الحرجة

$(٠ ، \text{هـ}(٠)) \quad (\frac{\pi}{٤} ، \text{هـ}(\frac{\pi}{٤}))$

$(\pi ، \text{هـ}(\pi))$

---

(٥)

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & -٣ \le س \le ١ \\ ٢س & ١ < س \le ٢ \end{cases}$$

متصل عند $س = ١$

$$\text{هـ}'(س) = \begin{cases} ٢س & -٣ < س < ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ٢ & ١ < س < ٢ \end{cases}$$

مكتبة الوسام AWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

النقط الحرجة هي
ق = ٠ ⇒ س = ٠
(٠ ، هـ(٠)) ، (-٢ ، هـ(-٢))
(٢ ، هـ(٢))

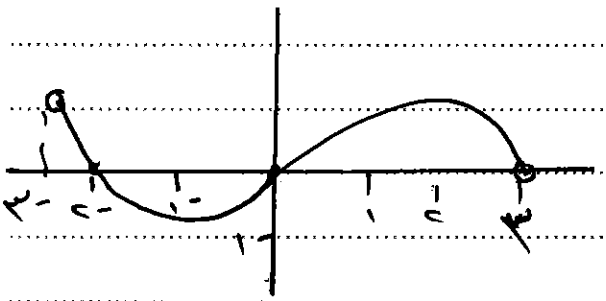
السؤال الثاني ص١٨٤

جد قيم ا ، ب التي تجعل للاقتران
هـ(س) = س^٣ + ا س^٢ + ب س
نقطتين حرجتين عند
س = -١ ، س = ٣

هـ'(س) = ٣س^٢ + ٢ا س + ب
هـ'(-١) = صفر نقطة حرجة
٣ - ٢ا + ب = ٠ ... (١)
هـ'(٣) = صفر نقطة حرجة
٢٧ + ٦ا + ب = ٠ ... (٢)
نطرح (١) - (٢)
-٢٤ = -٤ا
ا = ٦ ⇒ ب = -٣
بتعويض ا في (١)
٣ - ١٢ + ب = ٠
ب - ٩ = ٠
ب = ٩

السؤال الثالث ص١٨٤

يمثل الشكل مخطط إشارة
المشتقة الأولى للاقتران ك على المجال
هـ المعرف على [-٣ ، ٤] عدد
عم دل حي تعين النقط الحرجة
للاقتران هـ



النقط الحرجة (-٣ ، هـ(-٣))
(-٢ ، هـ(-٢)) ، (١ ، هـ(١))
(٣ ، هـ(٣))
نقط تقاطع إشارة
مع محور السينات

---

④ السؤال الرابع

جد النقط الحرجة
هـ(س) = (س^٢ - ١) / (س^٣ + ١)

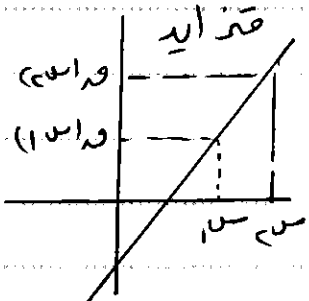
الحل
هـ'(س) = [(س^٣ + ١) × ٢س - (س^٢ - ١) × ٣س^٢] / (س^٣ + ١)^٢
= [٢س^٤ + ٢س - ٣س^٤ + ٣س^٢] / (س^٣ + ١)^٢
= [-س^٤ + ٣س^٢ + ٢س] / (س^٣ + ١)^٢
البسط = ٠ ⇒ -س(س^٣ - ٣س - ٢) = ٠
-س(س + ١)^٢ (س - ٢) = ٠
س = ٠ ، -١ ، ٢
المقام = ٠ ⇒ س^٣ + ١ = ٠
س = -١
النقط الحرجة (٠ ، -١) ، (-١ ، غير معرف) ، (٢ ، ٣/٩)

التزايد والتناقص

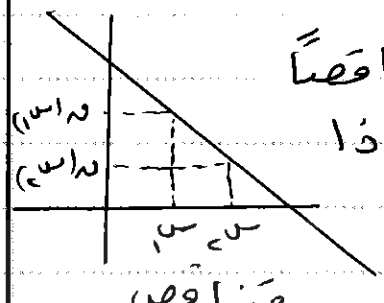
أولاً
تعريف التزايد والتناقص

اذا كان $ق(س)$ معرف على $[م ، ن]$
وكان $س_1 ، س_2 \in [م ، ن]$ فإنه

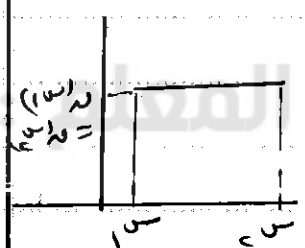
① $ق$ يكون متزايد على $[م ، ن]$ اذا كان
$س_2 > س_1 \Leftarrow ق(س_2) > ق(س_1)$



② $ق$ يكون متناقصاً في $[م ، ن]$ اذا كان
$س_2 > س_1 \Leftarrow ق(س_2) < ق(س_1)$

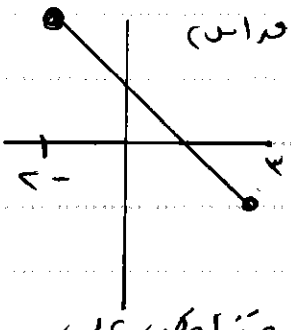


③ يكون $ق(س)$ ثابتاً في $[م ، ن]$ اذا كان
$س_2 > س_1$
$\Leftarrow ق(س_2) = ق(س_1)$

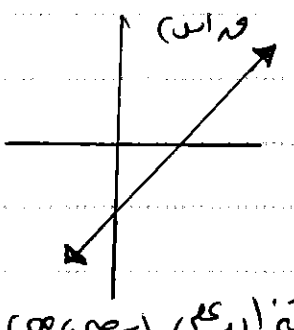


ثانياً :- التزايد والتناقص عن رسمة $ق(س)$

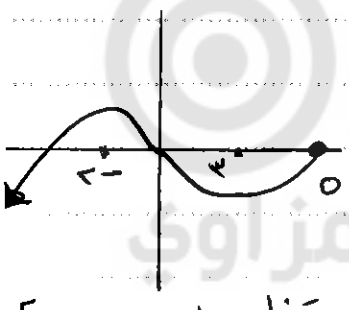
اذا كانت الرسمة تمثل منحنى $ق(س)$ واردنا ايجاد فترات (مجالات) التزايد والتناقص للأقتران $ق(س)$ فاننا ننظر للأقتران من جهة اليسار الى جهة اليمين فاذا كان صاعد للأعلى يكون متزايد واذا كان هابط للأسفل يكون متناقص.



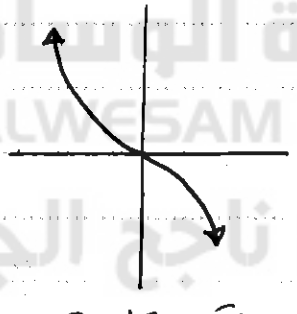
متناقص على $[-٢ ، ٣]$



متزايد على $(-\infty ، ٣]$



متزايد $(-\infty ، -٢]$
متناقص $[-٣ ، ٣]$
متزايد $[٣ ، ٥]$

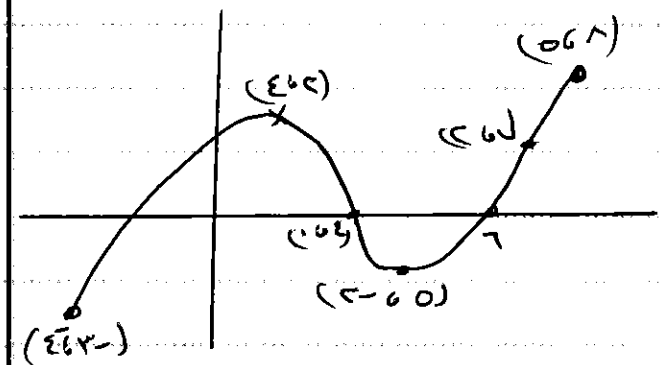


متناقص على ح

مكتبة الوسام ALWESAM للأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ①

الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص



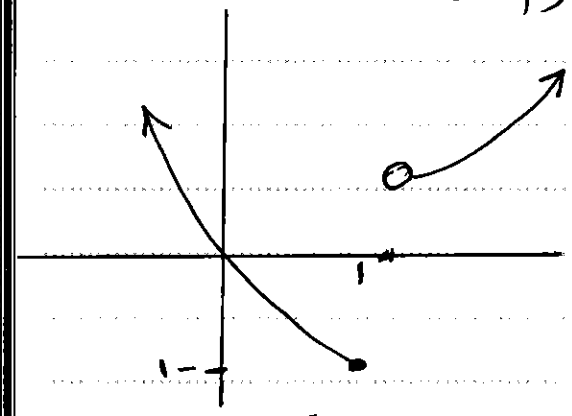
الحل

متزايد $[-٣،٢] \cup [٥،٨]$

متناقص $[٢،٥]$

مثال ②

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص.

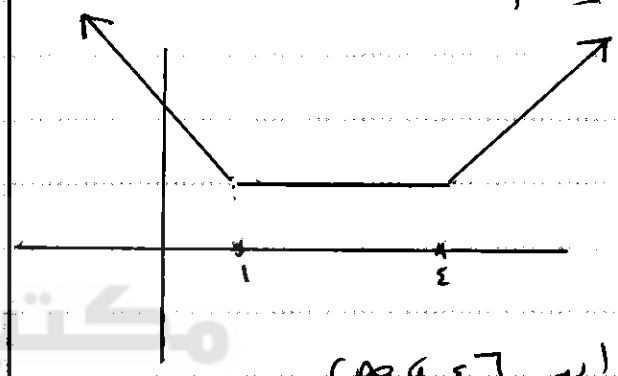


متناقص $(-\infty، ١-] \cup [١، ٢]$

متزايد $[-١، \infty)$

مثال ③

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص.



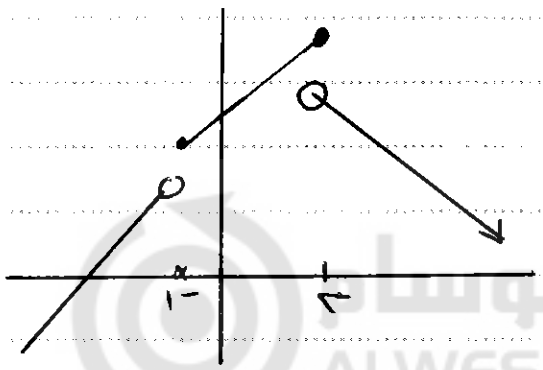
متزايد $[٤، \infty)$

متناقص $(-\infty، ١]$

ثابت $[١، ٤]$

مثال ④

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) أوجد مجالات التزايد والتناقص.



متزايد $(-\infty، ١-] \cup [٣، ٢]$

متناقص $(٢، \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

التزايد والتناقص
اختبار المحقبة الأولى

نظرية

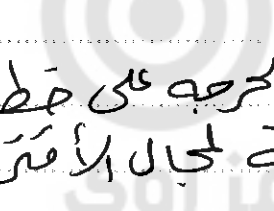
اذا كان ق(س) متصل على [أ ، ب]
وقابل للاشتقاق على (أ ، ب)

① اذا كانت ق'(س) > صفر (موجبة)
لكل س ∈ (أ ، ب) فان ق
متزايد على [أ ، ب]

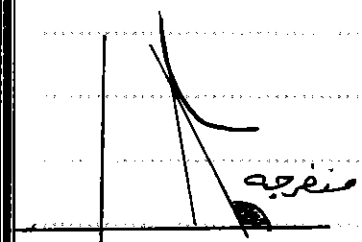
② اذا كانت ق'(س) < صفر (سالبة)
لكل س ∈ (أ ، ب) فان ق
متناقص على [أ ، ب]

③ اذا كانت ق'(س) = صفر
لكل س ∈ (أ ، ب) فان ق
ثابت على [أ ، ب]

ملاحظة



① اذا رسمت مماسات لمنحنى ق(س) نجد جميع المماسات تصنع زاوية حادة
ظا هـ > ٠ ، هـ = ق'(س) > ٠ ق متزايد



② اذا رسمت مماسات لمنحنى ق(س) نجد جميع المماسات تصنع زاوية منفرجة
ظا هـ < ٠ ، هـ = ق'(س) < ٠ ق متناقص

ملاحظة

خطوات ايجاد اشارة ق'(س)
(مجالات التزايد والتناقص)

① نحدد مجال الاقتران ق(س)

② نجد ق'(س)

③ نجد قيم س الحرجة للاقتران ق

④ نضيف قيم س الحرجة على خط الاعداد بالاضافة لمجال الاقتران

⑤ نختبر اشارة ق'(س)

⑥ نطبق النظرية السابقة

مكتبة الهندسة
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كان $ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ١$
$س \in [-٢ ، ٢]$ اوجد مجالات
التزايد والتناقص

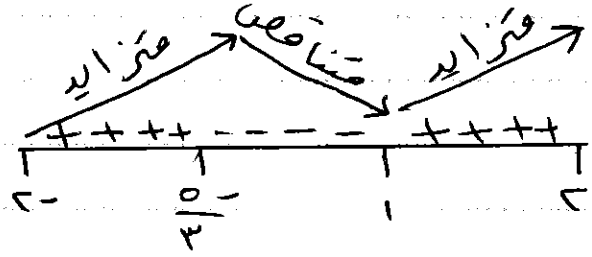
الحل

$ق(س)$ متصل على $[-٢ ، ٢]$ وقابل
للاشتقاق على $(-٢ ، ٢)$ لأنه
كثير حدود

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ٥ = ٠$

$(٣س + ٥)(س - ١) = ٠$

$س = -\frac{٥}{٣}$ $\quad$ $س = ١$



$ق(س)$ متزايد $[-٢ ، -\frac{٥}{٣}]$ ، $[١ ، ٢]$

$ق(س)$ متناقص $[-\frac{٥}{٣} ، ١]$

مثال ②

اذا كان $ق(س) =$
$-٢س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢٤س + ٥$
اوجد مجالات التزايد والتناقص

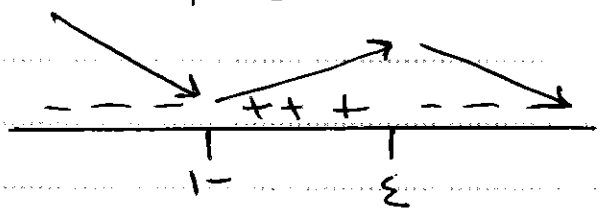
الحل

$ق(س) = -٦س^{٢} + ١٨س + ٢٤ = ٠$
بالقسمة على -٦

$س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$

$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

$س = ٤$ $\quad$ $س = -١$



$ق(س)$ متزايد $[-١ ، ٤]$

$ق(س)$ متناقص $(-\infty ، -١]$ ، $[٤ ، \infty)$

ملاحظة هامة

اشارة $ق'(س)$ على خط الاعداد
هي اشارة $ق'(س)$ بعد
الاشتقاق مباشرة (بدون
تعديل) ($ق$ الاصلية)

مثال ③

اوجد مجالات التزايد والتناقص
للاقتران

$ق(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦$

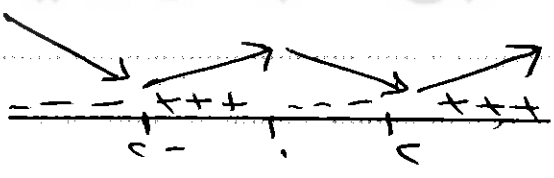
الحل

$ق'(س) = ٤س^{٣} - ١٦س = ٠$

$٤س(س^{٢} - ٤) = ٠$

$٤س(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = ٠$ $\quad$ $س = ٢$ $\quad$ $س = -٢$



مكتبة وسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

اوجد مجالات التزايد والتناقص

$ق(س) = س + \frac{1}{س}$

الحل

المجال $= ح - \{0\}$

$ق'(س) = 1 - \frac{1}{س^2} = \frac{س^2 - 1}{س^2}$

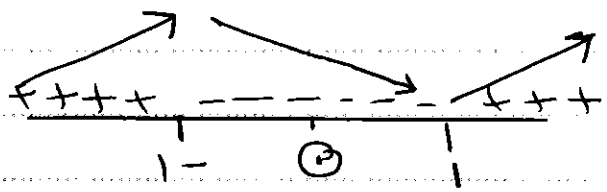
البسط = صفر $\leftarrow س^2 - 1 = 0$

$(س-1)(س+1) = 0$

$س = 1 \quad س = -1 \in$ المجال

المقام $= 0 \leftarrow س^2 = 0 \leftarrow س = 0$

$س = 0 \notin$ المجال



متزايد $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

متناقص $[-1, 1] - \{0\}$

مثال ⑤

$ق(س) = \frac{س - 1}{س^2 + 3}$ اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

المجال $= ح$ لانه لا يوجد اصفار للمقام

$ق'(س) = \frac{(س^2+3)(1) - (س-1)(2س)}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{س^2 + 3 - 2س^2 + 2س}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{-س^2 + 2س + 3}{(س^2+3)^2}$

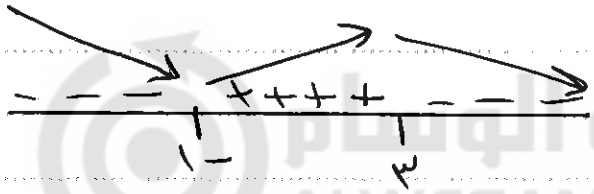
البسط = صفر

$-س^2 + 2س + 3 = 0$

$س^2 - 2س - 3 = 0$

$(س-3)(س+1) = 0$

$س = 3 \quad ، \quad س = -1$



متزايد $[-1, 3]$

متناقص $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

مكتبة الوسام ALWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

د(س) = جتا٢س ، س ∈ [٠ ، ٢π]
جد قيم س الحرجة ومجالات التزايد والتناقص

الحل

د(س) متصل (اقتران جيب التمام)
على [٠ ، ٢π]

د'(س) = -٢ جا٢س

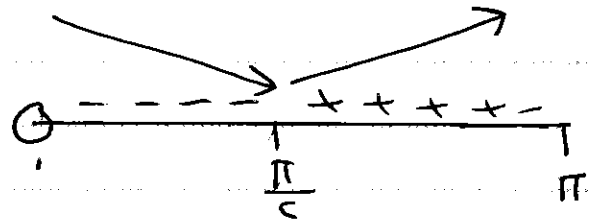
جا٢س = ٠ ← ٢س = ٠

س = ٠ ∉ (٠ ، ٢π)

٢س = π ← س = π/٢ ∈ المجال

٢س = ٢π ← س = π ∈ المجال

قيم س الحرجة هي {٠ ، π/٢ ، π}



متناقص على [٠ ، π/٢]

متزايد على [π/٢ ، π]

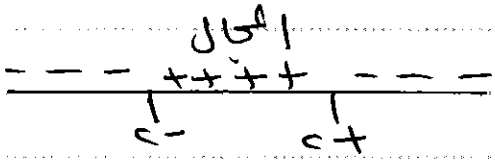
مثال ⑦

د(س) = √(٤ - س٢) أوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

المجال ٤ - س٢ = ٠

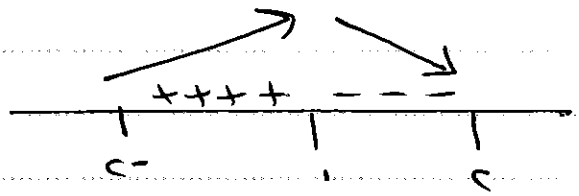
س = ± ٢



د'(س) = -٢س / (٢√(٤ - س٢)) = -س / √(٤ - س٢)

البسط = صفر ← س = ٠ ∈ المجال

المقام = ٠ ← س = ± ٢ ∈ المجال



متزايد [-٢ ، ٠]

متناقص [٠ ، ٢]

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

$ق(س) = ٣س^{\frac{1}{3}} - س$

جد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق'(س) = ٣ \times \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}} - ١$

$ق'(س) = \frac{١}{\sqrt[3]{س^٢}} - ١$

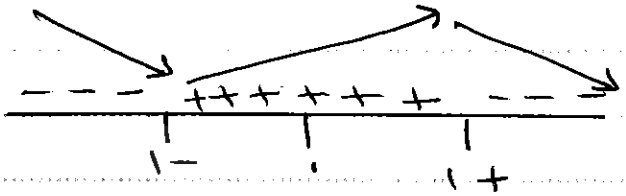
$= \frac{١ - \sqrt[3]{س^٢}}{\sqrt[3]{س^٢}}$

البسط = صفر ← $١ - \sqrt[3]{س^٢} = ٠$

$\sqrt[3]{س^٢} = ١$ ← $س^٢ = ١$

$س = \pm ١ \in$ المجال

المقام = صفر ← $س = ٠ \in$ المجال



متزايد $[-١، ٠] ، [١، ∞)$

متناقص $(-∞، -١] ، [٠، ١]$

مثال (٩)

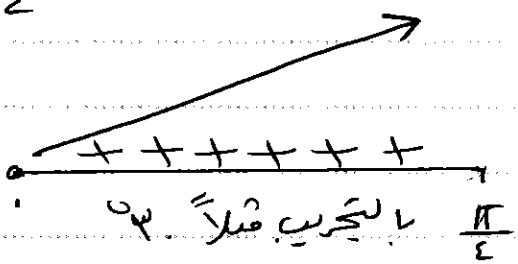
اثبت ان $ق(س) = جتاس + جاس$ متزايدة في الفترة $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

الحل

$ق(س)$ متصل على $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

$ق'(س) = -جاس + جتاس = ٠$

$جتاس = جاس$ ← $س = \frac{\pi}{٤}$



$ق'$ متزايد $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

مثال (١٠)

اذا كان $ق، هـ$ كثيري حدود موجبان في الفترة $[١، ٤]$ وكان $ق$ متزايد في $[١، ٤]$ و $هـ$ متناقص في $[١، ٤]$

اثبت ان $ل(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متزايد على الفترة $[١، ٤]$

الحل

$ق(س)$ متزايد على $[١، ٤]$ ← يتبع

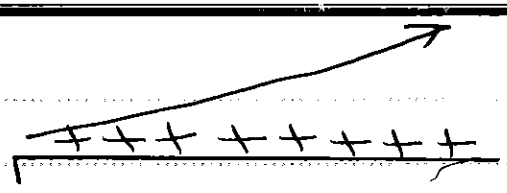
مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ه متزايد في $[٠، \frac{\pi}{٢}]$

$\Leftarrow$ ه'(س) > صفر في $(٠، \frac{\pi}{٢})$

هـ متناقص في $[٠، \frac{\pi}{٢}]$

$\Leftarrow$ هـ'(س) < صفر في $(٠، \frac{\pi}{٢})$



$\frac{\pi}{٢}$

ه(س) متزايد على $[٠، \frac{\pi}{٢}]$

أيضاً ه(س)، هـ(س) موجبان

$\Leftarrow$ ه(س) > ٠ ، هـ(س) > ٠

$ل'(س) = \frac{هـ(س) ه'(س) - ه(س) هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$= \frac{\text{موجب} \times \text{موجب} - \text{موجب} \times \text{سالب}}{(\text{موجب})^{٢}}$

$= \frac{\text{موجب} + \text{موجب}}{\text{موجب}} > ٠$

$\Leftarrow$ ل'(س) موجب على $(٠، \frac{\pi}{٢})$

$\Leftarrow$ ل(س) متزايد على $[٠، \frac{\pi}{٢}]$

مثال (١١)

جد فترات التزايد والتناقص

ه(س) = س + جاس حيث

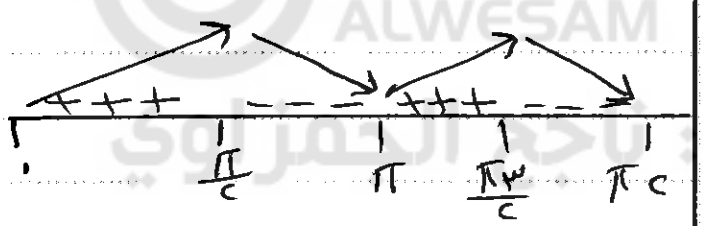
س $\in [٠، \frac{\pi}{٢}]$

الحل

ه(س) متصل وقابل للاشتقاق

ه'(س) = ١ + جتاس

$\leftarrow$ س = π $\in$ أحال



$\frac{\pi}{٢}$ π $\frac{\pi ٣}{٢}$ ٢π

الاشارة بالتجريب

مثال (١٢)

ه(س) = جاس ، س $\in [٠، ٢\pi]$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

ه(س) متصل على $[٠، ٢\pi]$

ه(س) قابل للاشتقاق على $(٠، ٢\pi)$

ه'(س) = ٠ $\Leftarrow$ جاس جتاس = جا٢س

جا٢س = ٠

$\leftarrow$ ٢س = ٠ + نπ ، ٢س = π + نπ

$\leftarrow$ س = ن$\frac{\pi}{٢}$ أو س = $\frac{\pi}{٢}$ + نπ

ن = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠ ، $\in$ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٢}$

ن = ١ $\Leftarrow$ س = π $\in$ $\Leftarrow$ س = $\frac{٣\pi}{٢}$

ن = ٢ $\Leftarrow$ س = ٢π $\notin$ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٢} + \pi$

$\frac{\pi}{٢}$ π $\frac{٣\pi}{٢}$ ٢π

الاشارة بالتجريب

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

$ق(س) = س - |٣-س|$ حيث $س \in [-٢، ٦]$ اوجد فترات التزايد والتناقص ؟

الحل

$|٣-س|$

$٣-س$	$س-٣$
+ + + +	- - -
-٢	٣	٦

$$ق(س) = \begin{cases} س-٣ & -٢ \le س < ٣ \\ ٣ & ٣ \le س < ٦ \end{cases}$$

$ق(٣) = ٣$ و $ق(٦) = ٦-٣ = ٣$

$ق(س) = ٣$ متصل عند $س = ٣$

$$ق'(س) = \begin{cases} ١ & -٢ < س < ٣ \\ \text{صفر} & ٣ < س < ٦ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣ \end{cases}$$

القيم الحرجة $\{-٢\} \cup [٣، ٦]$

+ + + +		- - -
-٢	٣	٦

$ق(س)$ متزايد على $[-٢، ٣]$

$ق(س)$ ثابت على $[٣، ٦]$

مثال (١٤)

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & س < ١ \\ ٢س - ١ & ١ \le س \le ٣ \\ ٥ & س > ٣ \end{cases}$$

اوجد فترات التزايد والتناقص

الحل

$ق(١) = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} (س^٢ + ١) = ٢$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^+} (٢س - ١) = ١$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) \neq \lim_{س \to ١^+} ق(س)$

$\therefore ق(س)$ غير موجودة عند $س = ١$

$\therefore ق(س)$ غير متصل عند $س = ١$

$ق(٣) = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٥ = \lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٥$

$\therefore ق(س)$ متصل عند $س = ٣$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < ١ \\ ٢ & ١ < س < ٣ \\ ٠ & س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ٠ & س = ٣ \end{cases}$$

القيم الحرجة $\{١، ٣\}$

- - -		+ + + +		+ + +
-١	٠	١	٢	٣

$ق(س)$ متزايد $[٠، ١) \cup [١، ٣]$

$ق(س)$ متناقص $[-١، ٠]$

$ق(س)$ ثابت $[٣، ٥]$

مكتبة الهدام ALWSSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

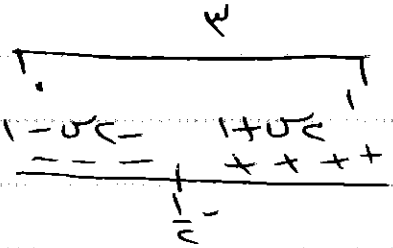
$$ق(س) = \begin{cases} (س+٢)^{٢} - ٢ & س \leq ٠ \\ [س+٣] & ٠ < س < ١ \\ |س+١| & س \geq ١ \end{cases}$$

اوجد مجالات التزايد والتناقص في الفترة $[-٣، ٢]$

الحل

نعيد تعريف الاقتران

$[س+٣]$



$|س+١|$

$$ق(س) = \begin{cases} (س+٢)^{٢} - ٢ & س \leq ٠ \\ ٣ & ٠ < س < ١ \\ س+١ & س \geq ١ \end{cases}$$

ق متصل عند $س = ١$

ق غير متصل عند $س = ٠$

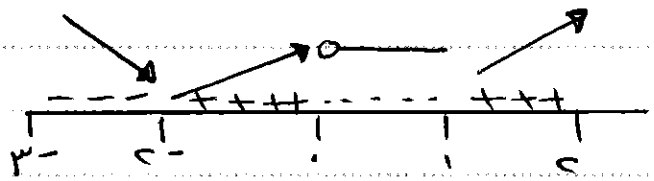
$$ق'(س) = \begin{cases} ٢(س+٢) & س < ٠ \\ \text{صفر} & ٠ < س < ١ \\ ٢ & س > ١ \end{cases}$$

اصفار المشتقة $٢(س+٢) = ٠$

$\leftarrow س = -٢$

ومنه س الحرجة هي

$\{٠، ١، ٠، ٣-، ٢-\} \cap (١، ٠)$



متناقص $[-٢، -٢]$

متزايد $[-٢، ٠] \cup [١، ٢]$

ثابت $(٠، ١)$

مثال (١٦)

$$ق(س) = \begin{cases} س^{\frac{٤}{٥}} & س < ١ \\ س + \frac{٤}{س} & س \geq ١ \end{cases}$$

الحل

$ق(١) = ٥$ ، $\lim_{س \to ١^{+}} (س + \frac{٤}{س}) = ٥$

$\lim_{س \to ١^{-}} س^{\frac{٤}{٥}} = ١$ إذاً متصل عند $س = ١$

$$ق'(س) = \begin{cases} \frac{٤}{٥} س^{-\frac{١}{٥}} & س < ١ \\ ١ - \frac{٤}{س^{٢}} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١، ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{٤}{٥ \sqrt[٥]{س^{٣}}} & س < ١ \\ \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢}} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١، ٠ \end{cases}$$

$\leftarrow$ تابع الحل

مكتبة الوسام AWSAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

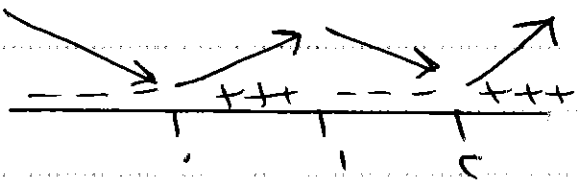
$\sqrt[5]{س^3} = 0$ ⇒ $س = 0 \in$ المجال

$س^2 - 4 = 0$ ⇒ $س = \pm 2 \in$

$س \neq -2 \notin$

$س^2 = 0$ ⇒ $س = 0$ نستبعدها من $س \geq 1$

حيم س الحرجة هي $\{0, 1, 2\}$



$ق$ متناقص $[-\infty, 0]$ ، $[1, 2]$

متزايد $[0, 1]$ ، $[2, \infty)$

مثال (١٧)

$ق(س) = 9س - جتاس$

اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

$ق$ متصل على ح ⇐ $ق'(س) = 9 + جاس$

$9 + جاس = 0$ ⇐ $جاس \neq -9$

مستحيل

لأن $-1 \leq جاس \leq 1$

$-1 + 9 \leq 9 + جاس \leq 1 + 9$

$8 \leq 9 + جاس \leq 10$

$ق'(س) > 0$

$ق$ متزايد على ح

مثال (١٨)

$ق(س) = -4س + جاس$

اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل

$ق$ متصل وقابل للاشتقاق على ح

$ق'(س) = -4 + جتاس = 0$

$جتاس = 4$ مستحيل

$-1 \leq جتاس \leq 1$

$-4 \quad -4 \quad -4$

$-5 \leq -4 + جتاس \leq -3$ سالبة

متناقص على ح

مثال (١٩)

اذا كان $ق(س) = س^4 - 6س^2$ حيث $س \in [-2, 2]$ اوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$

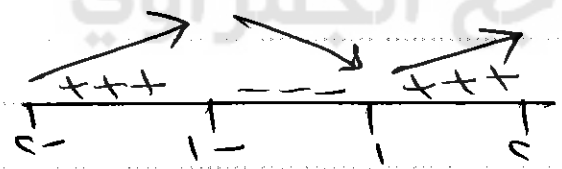
الحل

$ق'(س) = 4س^3 - 12س$

$ق'(س) = 12س^2 - 12 = 0$

$12(س^2 - 1) = 0$

$س = \pm 1$



مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٢٠)

اذا كان هـ(س) = هـ(س) لكل س ∈ ح فاثبت ان
هـ(س) - هـ(س) = ثابت

البرهان

نفرض ل(س) = هـ(س) - هـ(س)
بالاشتقاق
ل'(س) = هـ'(س) - هـ'(س)
وبما أن هـ'(س) = هـ'(س)
⇐ ل'(س) = صفر
⇐ هـ(س) - هـ(س) = ثابت

مثال (٢١)

اذا كان هـ، هـ اقترانين متصلين على [م، ن] وقابلين للاشتقاق على (م، ن) وكان كل من هـ، هـ متزايد على [م، ن] وكان
ل(س) = هـ(س) + هـ(س)
فاثبت ان ل(س) متزايد على [م، ن]

البرهان

ل(س) = هـ(س) + هـ(س)
ل'(س) = هـ'(س) + هـ'(س)
بما ان هـ متزايد ⇐ هـ'(س) > ٠

هـ متزايد ⇐ هـ'(س) > ٠
ل'(س) = هـ'(س) + هـ'(س)
⇐ ل'(س) > صفر على (م، ن)
⇐ ل(س) متزايد على [م، ن]

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٨٥

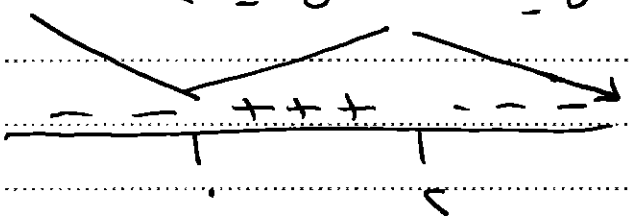
جد فترات التزايد والتناقص للاقترانات $هـ(س) = ٣س^٢ - س^٣ - ٣$

الحل

$هـ'(س) = ٦س - ٣س^٢ = ٠$

$٣س(٢ - س) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٢$



متناقص $(-\infty, ٠] \cup [٢, \infty)$

متزايد $[٠, ٢]$

تدريب ② ص ١٨٥

جد فترات التزايد وفترات التناقص للاقترانات $هـ(س) = جا س$ ، $س \in [٠, ٢\pi]$

الحل

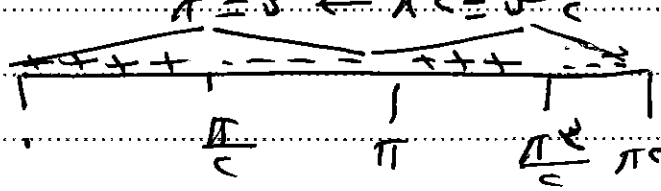
$هـ'(س) = ٢ جاس جتاس = ٠$

$جاس = ٠$

$س = ٠ \quad س = \pi \quad س = \frac{٢\pi}{٢}$

$جتاس = ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \pi = س \leftarrow ٢س = \pi$



متزايد $[٠, \frac{\pi}{٢}] \cup [\pi, \frac{٣\pi}{٢}]$

متناقص $[\frac{\pi}{٢}, \pi]$ ، $[\frac{٣\pi}{٢}, ٢\pi]$

تدريب ③ ص ١٨٦

جد فترات التزايد وفترات التناقص للاقترانات

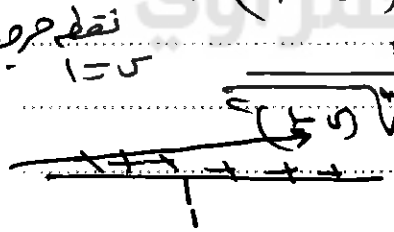
$هـ(س) = \sqrt[٣]{س - ١}$ ، $س \in ح$

الحل $هـ(س) = (س - ١)^{\frac{١}{٣}}$

$هـ'(س) = \frac{١}{٣}(س - ١)^{-\frac{٢}{٣}}$

$= \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س - ١)^٢}}$

نقطة حرجة $س = ١$



متزايد على $ح$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (١٨٨)

السؤال الأول

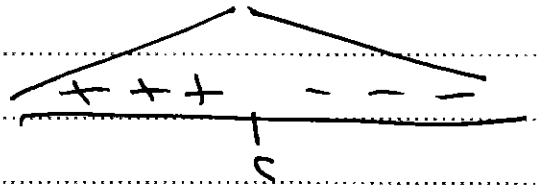
حدد فترات التزايد وفترات التناقص لكل من الاقترانات الآتية

(أ) $هـ(س) = ٤س - س^٣$ ، $س \in ح$

الحل

$هـ'(س) = ٤ - ٣س^٢ = ٠$

$س = \pm ٢$



فترات التزايد $(-\infty ، ٢]$

فترات التناقص $[٢ ، \infty)$

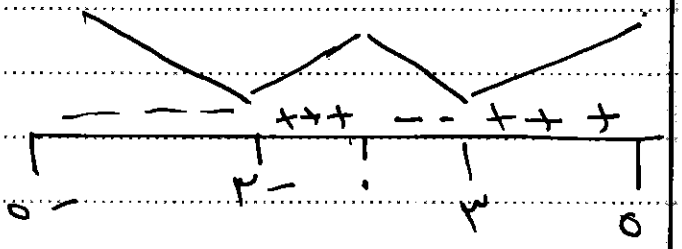
(ب) $هـ(س) = |س^٢ - ١٩|$

$س \in [-٥ ، ٥]$

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ - ٩ & س \in [-٥ ، -٣] \cup [٣ ، ٥] \\ ٩ - س^٢ & س \in (-٣ ، ٣) \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س & س \in [-٥ ، -٣) \cup (٣ ، ٥] \\ -٢س & س \in (-٣ ، ٣) \end{cases}$

$س = ٠$ نقطة حرجة $\Leftarrow ٠ = ٢س$



فترات التزايد $[-٣ ، ٠] \cup [٣ ، ٥]$

فترات التناقص $[-٥ ، -٣] \cup [٠ ، ٣]$

(ج) $هـ(س) = ظا س$ $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

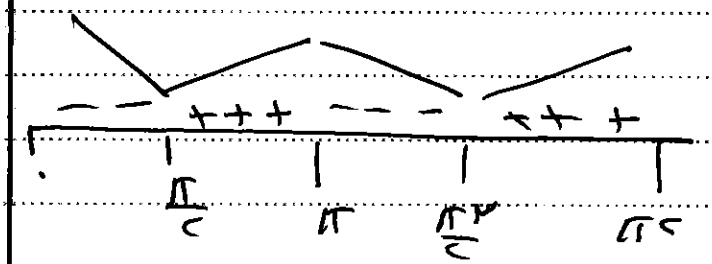
$هـ'(س) = ٠ \Leftarrow ظا س \times ظا س - ٢ = ٠$

$ظا^٢ س = ٢$

$ظا س = \pm \sqrt{٢}$

$س = \frac{\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤} ، \frac{٧\pi}{٤}$

يتبع ←



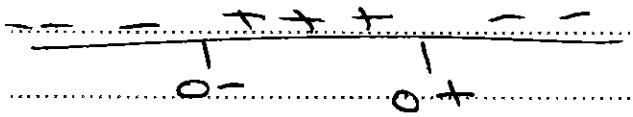
ه متناقص $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

ه متزايد $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

(ز) $ه(س) = \sqrt{25 - س^2}$

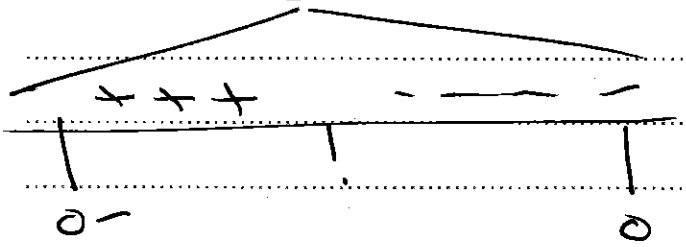
مجال ه

$س = \pm 5$



$ه'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{25 - س^2}}$

$-2س = 0$ ، $س = 0$



متزايد $[-5, 0]$

متناقص $[0, 5]$

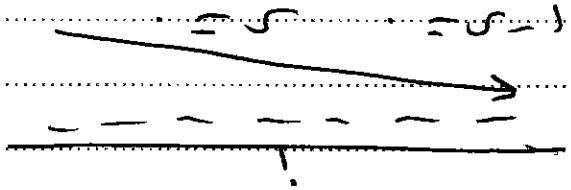
(ح) $ه(س) = (1 - س)^3$ ، $س \in ح$

الحل

$ه'(س) = 3(1 - س)^2 \times -1$

$= -3(1 - س)^2$

$1 - س = 0$ ، $س = 1$



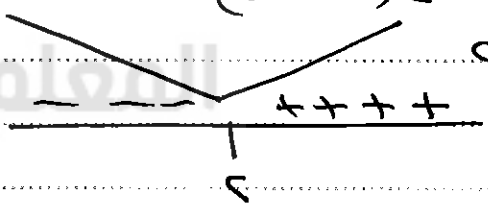
متناقص على ح

(ط) $ه'(س) = (4 - س)^4$ ، $س \in ح$

$ه'(س) = 4(4 - س)^3 \times -1$

$= -4(4 - س)^3$

$س = 4$



متناقص $(-\infty, 4]$ متزايد $[4, \infty)$

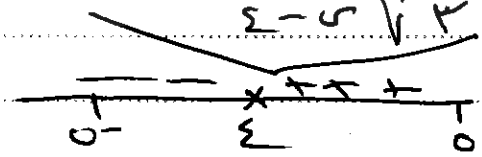
(ك) $ه(س) = \sqrt[3]{(س - 4)^2}$ ، $[-5, 5]$

$ه'(س) = \frac{1}{3}(س - 4)^{-\frac{2}{3}}$

$ه'(س) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(س - 4)}}$

$س - 4 = 0$

$س = 4$



مكتبة الهوسام
ALHOSAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑨ $ق(س) = ضا س - \frac{1}{2} ضا ٢س$

$[0 ، \pi ٢]$

$ق'(س) = -جا س + \frac{1}{2} \times ٢ جا ٢س$

$= -جا س + جا ٢س = 0$

$٢ جا س ضا س - جا س = 0$

$جا س (٢ ضا س - ١) = 0$

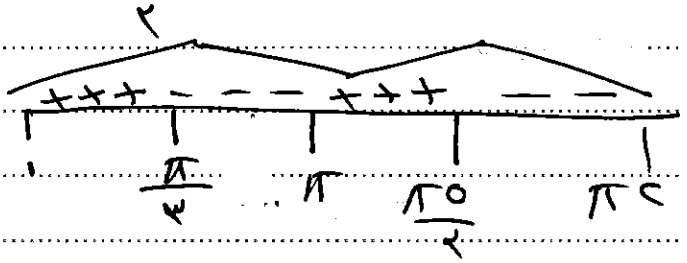
$جا س = 0$

$س = 0 ، س = \pi$

$٢ ضا س - ١ = 0$

$ضا س = \frac{1}{2}$

$س = \frac{\pi}{3} ، \frac{5\pi}{3}$



⑩

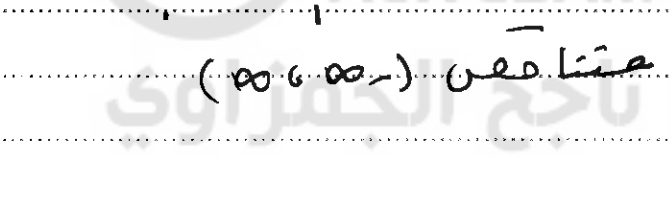
$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ & ك \le 1 \\ \frac{2}{ك} & ك > 1 \end{cases}$

متصل عند $س = 1$

$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & ك < 1 \\ -\frac{2}{ك^٢} & ك > 1 \end{cases}$

$-٢ = -\frac{2}{ك^٢} \Rightarrow ك^٢ = 1$

$ك = 1$



متناقص $(-\infty ، 1]$

متزايد $[1 ، \infty)$

⑪ $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٣ & ك \le 1 \\ \frac{3}{ك} & ك > 1 \end{cases}$

متصل عند $س = 1$

$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^٢ & ك < 1 \\ -\frac{3}{ك^٢} & ك > 1 \end{cases}$

$-٣ = -\frac{3}{ك^٢} \Rightarrow ك^٢ = 1$

$ك = 1$

$-٣ك^٢ = 0 \Rightarrow س = 0$

متناقص $(-\infty ، \infty)$

⑫

$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ & ك \le 1 \\ \frac{2}{ك} & ك > 1 \end{cases}$

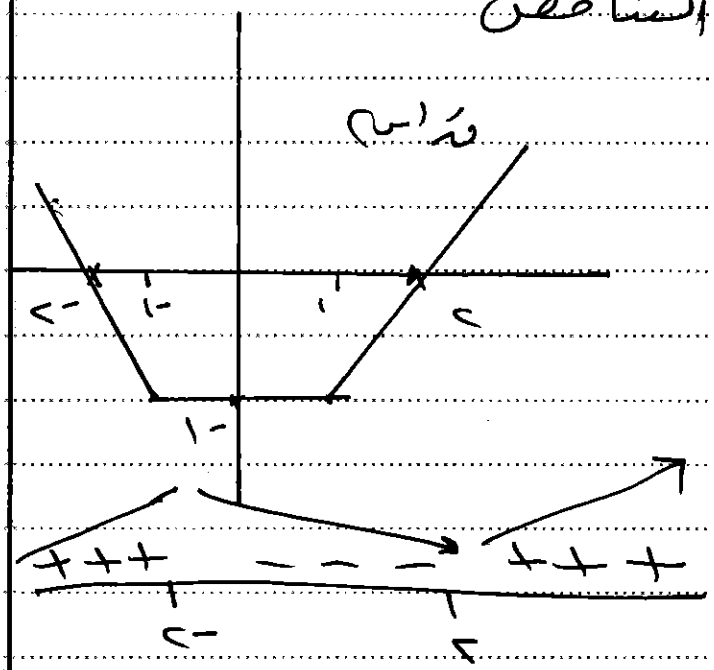
متصل عند $س = 1$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص ١٨٨

عين الشكل مجنى اقترانه

المشتقة الأولى للاقتران هـ
حدد فترات التزايد وفترات
التناقص



فترات تزايد $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

فترات تناقص $[-2, 2]$

السؤال الثالث ص ١٨٨

اذا كان هـ(س) اقترانا متصلا على الفترة $[أ، ب]$ وقابلا للاشتقاق على الفترة $(أ، ب)$ وكان هـ'(س) > ٠ لكل س ∈ $(أ، ب)$ وكان ه(س) = هـ(س) + س^3 فاثبت ان ه(س) متزايد على الفترة $[أ، ب]$

الحل

ه'(س) = هـ'(س) + ٣س^2

هـ'(س) > ٠ لكل س ∈ $(أ، ب)$

٣س^2 ≥ ٠ لكل س ∈ ح

متزايد

⇐ هـ'(س) + ٣س^2 > ٠ لكل س ∈ $(أ، ب)$

⇐ ه'(س) > ٠ لكل س ∈ $(أ، ب)$

⇐ ه(س) متزايد على $(أ، ب)$

مكتبة المعلم ALMOALLEM
المعلم : ناجح الجمزاوي

القيم القصوى

يقصد بالقيم القصوى هي القيم الصغرى أو العظمى للأقتران

القيم القصوى ← عظمى ← محليه ← مطلقه
القيم القصوى ← صغرى ← محليه ← مطلقه

تعريف

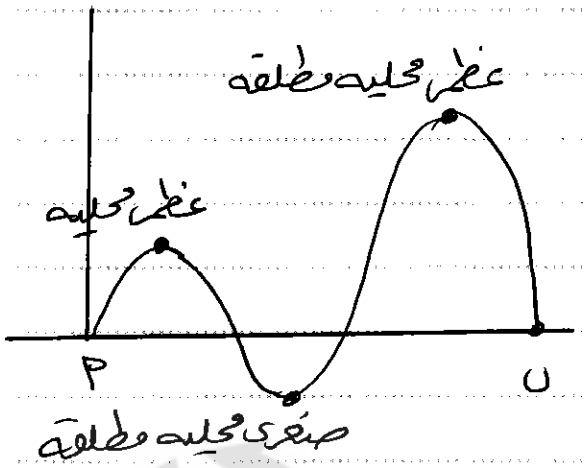
اذا كان f معرفاً على $[أ، ب]$ وكانت $س_1 \in [أ، ب]$

(١) تسمى $(س_1، f(س_1))$ نقطة عظمى محليه للأقتران $f(س)$، اذا امكن ايجاد فترة مفتوحة مثل $ف$ تحوي العدد $س_1$ بحيث ان $f(س_1) \geq f(س)$ لكل $س \in ف$

(٢) تسمى $(س_1، f(س_1))$ نقطة صغرى محليه للأقتران $f(س)$ اذا امكن ايجاد فترة مفتوحة مثل $ف$ تحوي العدد $س_1$ بحيث ان $f(س_1) \leq f(س)$ لكل $س \in ف$

(٣) تسمى $(س_1، f(س_1))$ نقطة عظمى مطلقه للأقتران $f(س)$ اذا كانت $f(س_1) \geq f(س)$ لكل $س \in [أ، ب]$

(٤) تسمى $(س_1، f(س_1))$ نقطة صغرى مطلقه للأقتران $f(س)$ اذا كانت $f(س_1) \leq f(س)$ لكل $س \in [أ، ب]$



القيمة العظمى المحليه المطلقه هي أكبر القيم العظميات المحليه

القيمة الصغرى المحليه المطلقه هي اصغر القيم الصغريات المحليه

ALWESAM

ملاحظات هامة

① عظمى محليه : هي اعلى نقطه لما حولها (قمة)

② صغرى محليه : هي اصغر نقطه لما حولها (قاع)

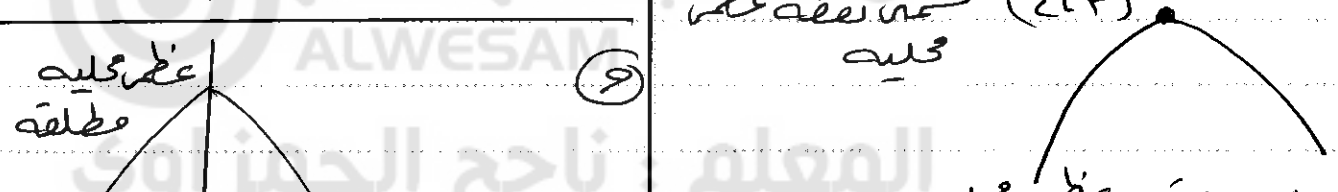
③ عظمى مطلقه : هي اعلى نقطه على الاقتران في الفتره $[a, b]$

④ صغرى مطلقه : هي اقل نقطه على الاقتران $[a, b]$

⑤ الاطراف ممكن ان تكون محليه ولكن احتمال ان تكون مطلقه

⑥ كل قصوى مطلقه هي محليه وليس كل قصوى محليه مطلقه باستثناء الاطراف

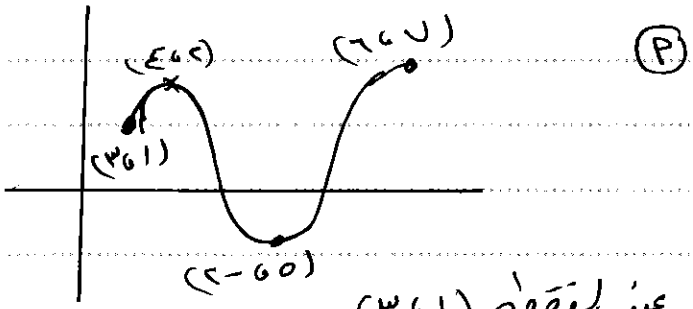
(٤،٣) تسمى نقطه عظمى محليه



٤ : قيمه عظمى محليه
٣ : الاحداث التي للنقطه العظمى المحليه

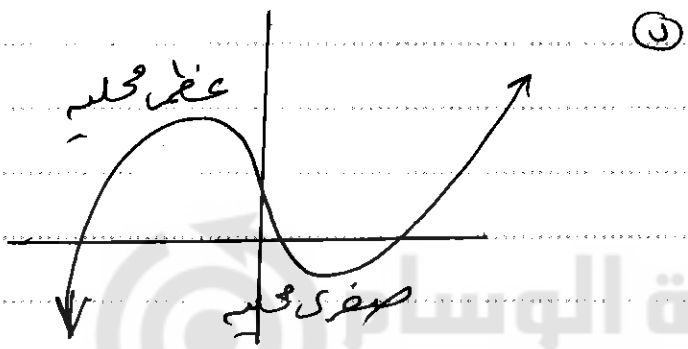
مثال ①
بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ حدد القيم القصوى وبين نوعها :

(أ)

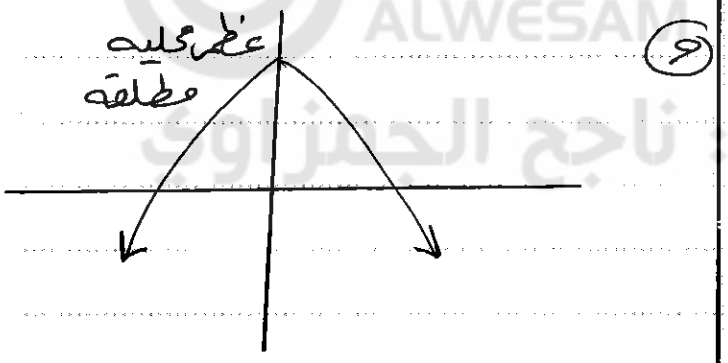


عند النقطه (٣،١)
قيمه صغرى محليه وقيمتها = ٣
عند النقطه (٤،٥) عظمى محليه = ٤
عند النقطه (٢-،٥-) صغرى محليه ومطلقه
وتساوي = ٢-
عند النقطه (٦،٧) عظمى مطلقه
وقيمتها = ٦

(ب)

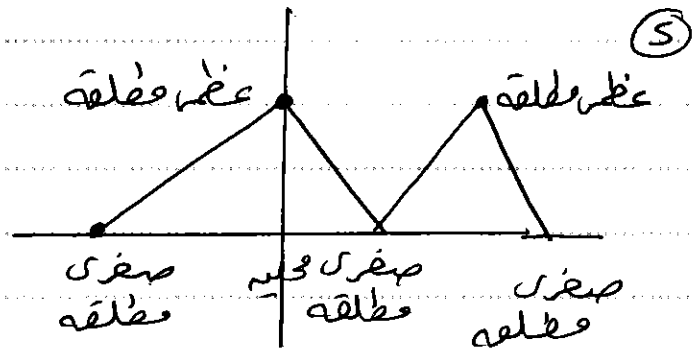


(ج)

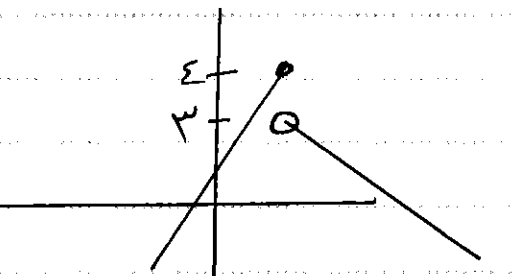


مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(ه)

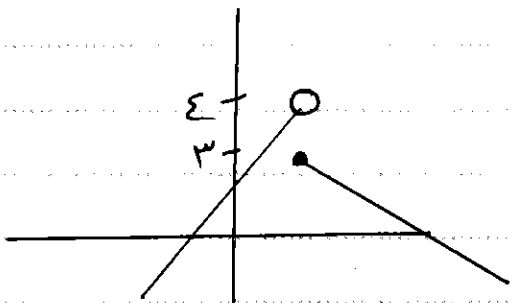


(و)



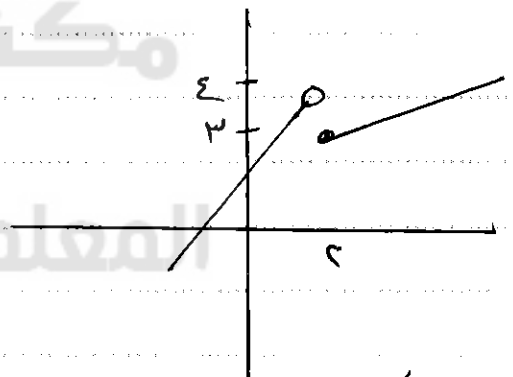
(٤،٠) نقطة عظمى محلية مطلقة

(ز)



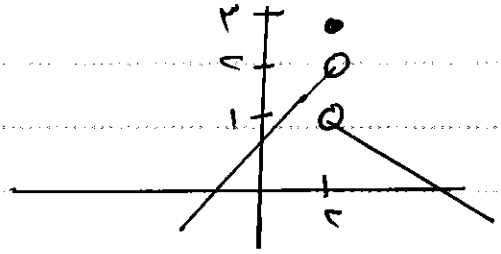
لا يوجد قيم قصوى

(ح)



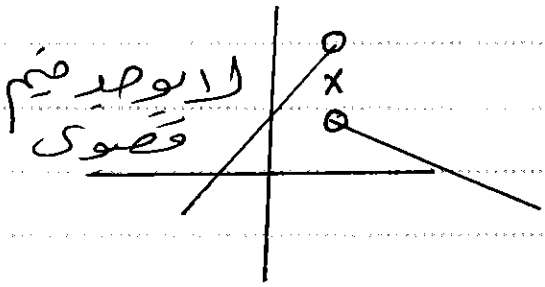
(٣،٢) صغرى محلية

(ع)



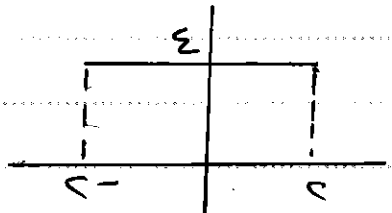
(٣،٠) عظمى محلية مطلقة

(ل)



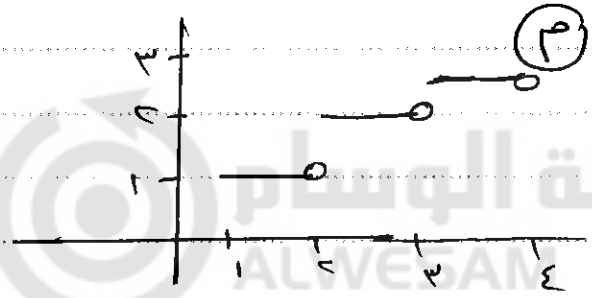
لا يوجد قيم قصوى

(ط)



٤ قيمة قصوى محلية مطلقة
ق(س١) = ق(س٢) لكل س ∈ ف

(م)



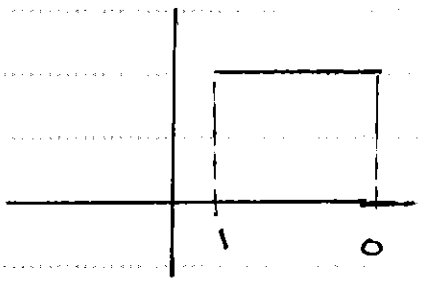
٣ : قيمة عظمى مطلقة
١ : قيمة صغرى مطلقة
١، ٣، ٢، ٦ قيم صغرى محلية

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ①

الرسم في كل مما يلي يمثل د(س) ضد الاحداثي السيني للقيم القصوى

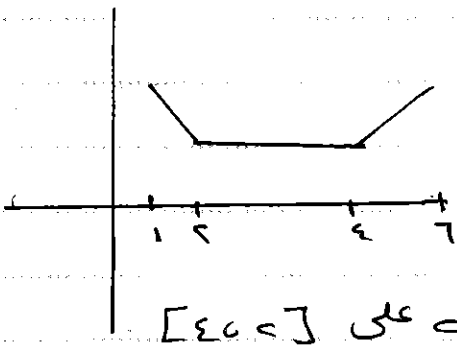
①



عظمى محليه وصغرى محليه لكل س ∈ (١، ٥)

عظمى مطلقه وصغرى مطلقه لكل س ∈ [٥، ١]

②

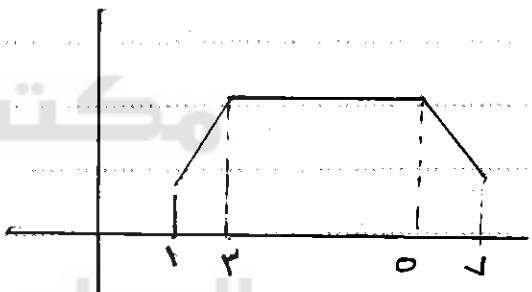


صغرى محليه على [٢، ٤]

وعظمى مطلقه عند س = ١، ٦

صغرى مطلقه على [٢، ٤]

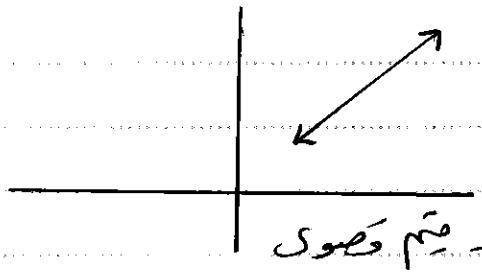
③



عظمى محليه ومطلقه على [٥، ٣]

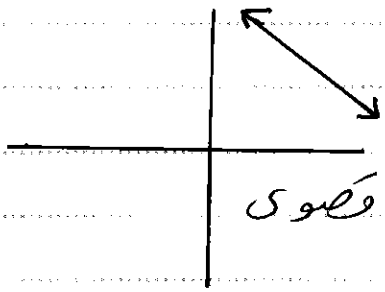
صغرى مطلقه عند س = ١، ٧

④



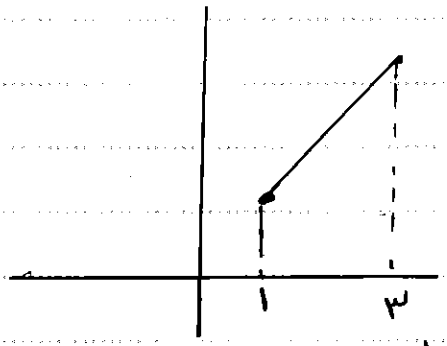
لا يوجد قيم قصوى

⑤



لا يوجد قيم قصوى

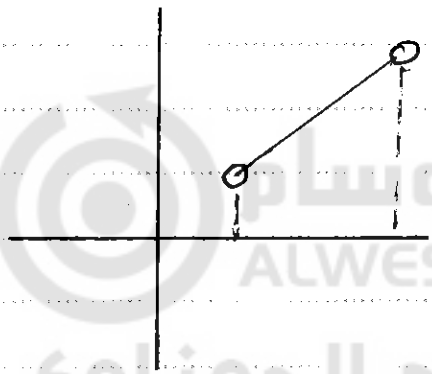
⑥



صغرى مطلقه عند س = ١

عظمى مطلقه عند س = ٣

⑦



لا يوجد قيم قصوى

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام : ناجح الجمزاوي

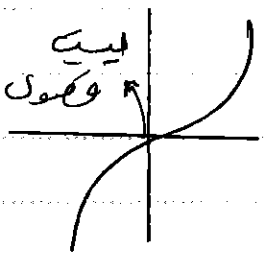
نظرية

اذا كانت (ح، ق(ح)) نقطة قصوى فان
ق'(ح) = صفر أو ق'(ح) غير موجودة

عكس النظرية

اذا كانت ق'(ح) = صفر أو
ق'(ح) غير موجودة فليس
بالضرورة ان تكون النقطة
(ح، ق(ح)) قصوى

مثال



ق(س) = س^{٣}
ق'(س) = ٣س^{٢} = ٠
ق'(٠) = ٠
ولكن (٠، ٠) ليست قصوى

ملاحظة

النقط القصوى توجد عند
① القمم والقيعان
② الأطراف
③ نقط الانفصال
④ الرؤوس المدببة
وغيرها عندها المشتقة = صفر
أو غير موجودة

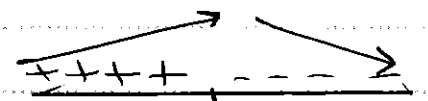
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

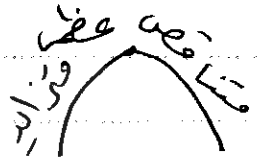
اختبار المشتقة الأولى لمعرفة القيم القصوى

نظرية

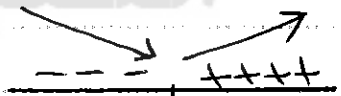
اذا كان $ق(س)$ متصلاً على $[م، ن]$ وقابل للاشتقاق على $(م، ن)$ وكانت $(س_1، ق(س_1))$ نقطة حرجة فان

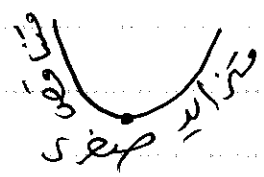
① اذا كانت $ق'(س) \geq 0$ لكل $س < س_1$ وكان $ق'(س) \leq 0$ لكل $س > س_1$ فان $ق(س_1)$ قيمة عظمى محلية للاقتران





② اذا كان $ق'(س) \leq$ صفر لكل $س < س_1$ وكان $ق'(س) \geq$ صفر لكل $س > س_1$ فان $ق(س_1)$ قيمة صغرى محلية لـ $ق$





ملاحظات هامة حول القيم القصوى

① كل نقطة قيمة قصوى مطلقة تكون محلية لكن ليس كل محلية مطلقة

② كل نقطة قيمة قصوى تكون نقطة حرجة لكن ليس كل حرجة قصوى

③ اذا كان $ق(س)$ متصلاً على $[م، ن]$

④ عند بداية فترة التزايد أو نهاية فترة التناقص يوجد نقطة قيم صغرى محلية

⑤ عند بداية فترة التناقص أو نهاية فترة التزايد يوجد نقطة قيم عظمى محلية

④ اذا كان $ق'(س)$ متزايد على $[م، ن]$

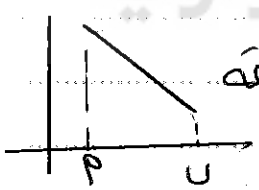
① $(م، ق(م))$ صغرى مطلقة

② $(ن، ق(ن))$ عظمى مطلقة

⑤ اذا كان $ق'(س)$ متناقص على $[م، ن]$

① $(م، ق(م))$ عظمى مطلقة

② $(ن، ق(ن))$ صغرى مطلقة



مكتبة الوسام ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

⑥ عند نقط القيم القصوى تكون المشتقه صفر أو غير موجودة

⑦ في حالة وجود أكثر من نقطة عظمى فان الاحداثي الصادي الأكبر هو الذي يقرر العظمى المطلقه

⑧ في حالة وجود أكثر من نقطة صغرى فان الاحداثي الصادي الأصغر هو الذي يقرر الصغرى المطلقه

مثال ①

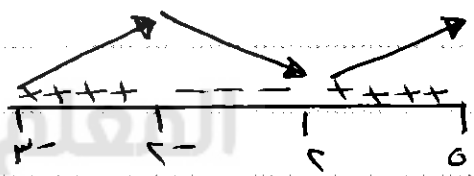
$ق(س) = س^3 - ٢١س + ٢$ حيث

$س \in [-٣، ٥]$ اوجد قيم س المرجه ثم اختبرها لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحليه والمطلقه

الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ٢١ = ٠$

$٣(س^2 - ٧) = ٠ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٧}$



عند $س = -٢$ قيمة عظمى محليه $= ١٨$

عند $س = ٢$ قيمة صغرى محليه

$ق(٢) = -١٢$

عند $س = -٣$

$ق(-٣) = ١١$ نشطب لان نهاية القيمه لاتكون إلا مطلقه

عند $س = ٥$

$ق(٥) = ٦٧$ عظمى مطلقه

ملاحظه

نلاحظ في المثال السابق انه عند $س = -٣$ توجد قيمة صغرى محليه وهذا لايجوز الأطراف تكون عندها مطلقه فقط لذلك نشطب.

مثال ②

$ق(س) = ٣س - س^3$ على $[-٣، ٣]$

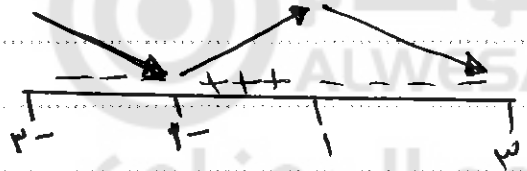
جد القيم القصوى للاقتران $ق(س)$ وحدد نوعها ان وجدت.

الحل

$ق$ متصل $[-٣، ٣]$ وقابل للاشتقاق على $(-٣، ٣)$

$ق'(س) = ٣ - ٣س^2 = ٠$

$٣(١ - س^2) = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$



$ق(-٣) = ٨$ قيمة عظمى مطلقه طرف فترة

$ق(١) = ٢$ قيمة عظمى محليه

$ق(-١) = -٢$ قيمة صغرى محليه

$ق(٣) = -١٨$ صغرى مطلقه طرف فترة

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال ③

$ق(س) = ٥$ حيث قيم س الحرجة وحيث مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى.

الحل

$ق'(س) = صفر$ ..... ثابت

	$-\infty$		$+\infty$

قيم س الحرجة هي ح .

المجموعة للأقتران هي ٥ عند اي نقطة في ح

اصغر قيمة للأقتران هي ٥ عند اي نقطة في ح

ح : مجموعة من القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة للأقتران ق

مثال ④

$ق(س) = -٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣٦س + ١$

الحل

$ق'(س) = -٦س^{٢} - ٦س + ٣٦$

بالقسمة على -٦

$س^{٢} + س - ٦ = ٠$

$(س+٣)(س-٢) = ٠$ $\quad س = -٣$

$ق'(-٣)$ صفر محلية $\quad س + ٢ = ٥$

$ق(٢) = ٥٤$ عظمى محلية

مثال ⑤

اذا كان $ق(س) = س(٤ - س)^{٣}$ $\quad س \in [-١، ٤]$ فجد فترات التزايد والقيم القصوى

الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق

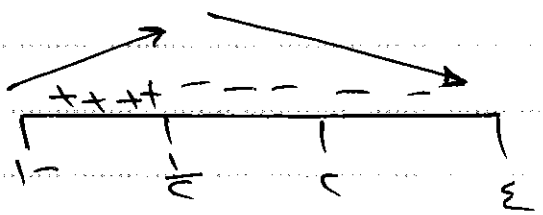
$ق'(س) = س \times ٣(٤-س)^{٢} \times -١ + (٤-س)^{٣} \times ١$

$-٣س(٤-س)^{٢} + (٤-س)^{٣} = ٠$

$(٤-س)^{٢}(-٣س + ٤ - س) = ٠$

$س = ٤ \quad -٤س + ٤ = ٠$

$س = \frac{١}{٤}$



$ق(س)$ متزايد على $[-١، \frac{١}{٤}]$

عند $س = \frac{١}{٤}$ قيمة عظمى مطلقة

وهي $ق(\frac{١}{٤}) = \frac{٢٧}{١٦}$

$ق(-١) = -٧$ لا يوجد

$ق(٤) = -٣٢$ قيمة صغرى مطلقة

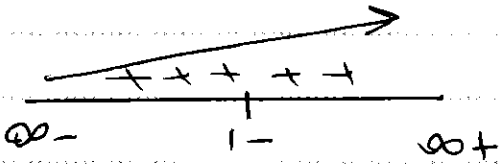
مكتبة الوسام
ALWESAM
للمعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$ق(س) = (س+1)^3$ جد القيم القصوى المحلية.

الحل

$ق'(س) = 3(س+1)^2 \leftarrow س = -1$



لا يوجد قيم قصوى
ق متزايدة على ح.
$س = -1$ نقطة حرجة لكن لا يوجد عندها قيمة قصوى.

مثال ⑦

جد نقط القيم القصوى المحلية لاقتران $ق(س)$ وحدد نوعها
$ق(س) = \sqrt{جاس}$ $\quad س \in [0, 2\pi]$

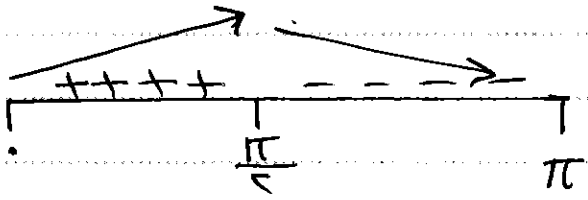
الحل

$ق'(س) = \frac{جتاس}{2\sqrt{جاس}}$

البسط = صفر $\leftarrow$ جتاس = ٠

$س = \frac{\pi}{2} \in$ $\quad س = \frac{3\pi}{2} \notin$

المقام = صفر
جاس = ٠ $\quad س = ٠, \pi \in$
$\pi \notin$



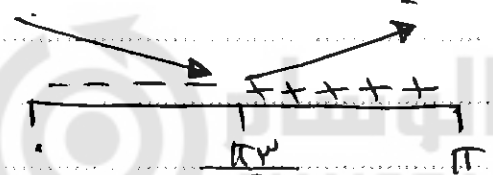
$ق(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{جا\frac{\pi}{2}} = 1$
قيمة عظمى مطلقة
$ق(٠) = ٠$ قيمة صغرى مطلقة
$ق(\pi) = ٠$ قيمة صغرى مطلقة

مثال ⑧

$ق(س) = جتاس - جاس$
$س \in [0, 2\pi]$ اوجد القيم القصوى

الحل

$ق(س)$ متصل $[0, 2\pi]$، قابل للاشتقاق على $(0, 2\pi)$
$ق'(س) = -جاس - جتاس = ٠$
$\leftarrow -جاس = جتاس$ بالقسمة على جتاس
$-ظاس = 1 \leftarrow ظاس = -1$
$س = \frac{3\pi}{4}$ أو $\frac{7\pi}{4}$ مرفوض



$(\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2})$ صغرى محلية مطلقة
$(2\pi, 1)$ عظمى مطلقة
عند $س = \pi$ لا يوجد

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

$ق(س) = س^3 - ١٢س - ٢$

جد أكبر واصغر قيمة للاقتران ق على الفترات التالية

① ع ② $[-٣، ٣]$

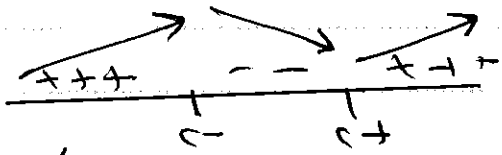
③ $[٠، ٤]$ ④ $(٣، ٤)$

الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢$

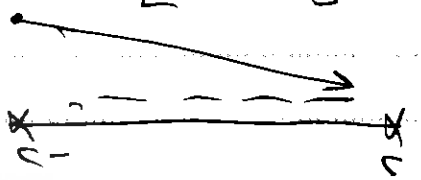
$٣(س^2 - ٤) = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$

① على ع



لا يوجد مطلقات ؛ لا يوجد أكبر أو اصغر قيمة

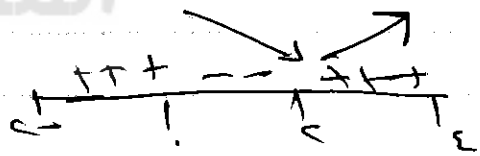
② على $[-٣، ٣]$



أكبر قيمة عندما $س = -٣$ وهي $ق(-٣) = ١٤$

اصغر قيمة عندما $س = ٢$ وهي $ق(٢) = -١٨$

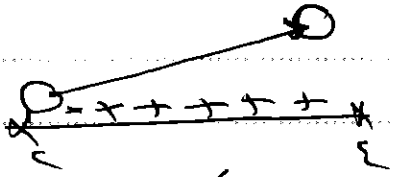
③ على $[٠، ٤)$



اصغر قيمة $ق(٢) = -١٨$

لا يوجد أكبر قيمة

④ $(٢، ٤)$



لا يوجد أكبر قيمة أو اصغر قيمة

$ق(س) = س^2 |س - ٢|$ على ع

اوجد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران.

الحل

س	$-\infty$		٢		∞
$|س-٢|$		$-(س-٢)$	٠	$س-٢$	

$$ق(س) = \begin{cases} -س^3 + ٢س^2 & س \le ٢ \\ س^3 - ٢س^2 & س > ٢ \end{cases}$$

$ق'(١) = ٤$ ، $ق'(٣) = ١٥$

$ق'(٢)$ غير موجود

متصل

$$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^2 + ٤س & س < ٢ \\ غير موجود & س = ٢ \\ ٣س^2 - ٤س & س > ٢ \end{cases}$$

$٤س - ٣س^2 = ٠$

$س(٤ - ٣س) = ٠$

$س = ٠ \in ع$ ، $س = \frac{٤}{٣} \in ع$

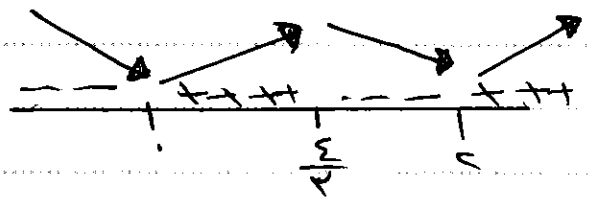
يتبع

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$٣س^{٢} - ٤س = ٠$

$س(٣س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \in$ المجال $\quad س = \frac{٤}{٣} \notin$ المجال



$د(\frac{٤}{٣}) = \frac{٣٢}{٢٧}$ عظمى محلية

$د(٠) = ٠$ صغرى محلية ومطلقة

$د(٢) = ٠$ صغرى محلية ومطلقة

مثال (١١)

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٢ & س < ٢ \\ \frac{١٥}{س} & س \geq ٢ \end{cases}$$

الحل

$د(٣) = \frac{١٥}{٣} = ٥$

$\lim_{س \to ٣^{+}} = \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{١٥}{س} = ٥$

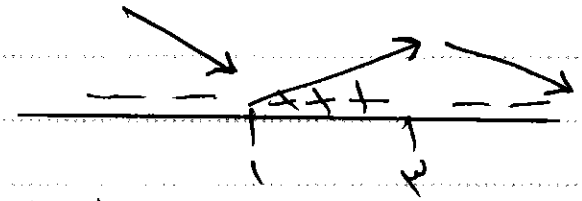
$\lim_{س \to ٣^{-}} = د(٣) = ٥$

متصل عند $س = ٣$

$$د'(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & س < ٣ \\ \frac{-١٥}{س^{٢}} & س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣ \end{cases}$$

$د'(س) = ٠ \Leftarrow ٢س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ١ \in$ المجال

$\frac{-١٥}{س^{٢}} = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin$ المجال



$د(١) = ١$ (١،١) صغرى محلية

$د(٣) = ٥$ (٣،٥) عظمى محلية

مثال (١٢)

أوجد نقط القيم القصوى للاقترانات

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & س < ٢ \\ ٥ - ٧س & س \geq ٢ \end{cases}$$

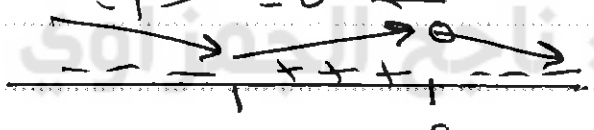
$د(٢) = -٩$

$\lim_{س \to ٢^{+}} د(س) = -٩$ $\quad \lim_{س \to ٢^{-}} د(س) = ٥$

غير متصل $\Leftarrow د(٢)$ غير موجودة

$$د'(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٢ \\ -٧ & س > ٢ \\ \text{غير موجودة} & س = ٢ \end{cases}$$

$٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in$ المجال



$د(٠) = ١ \Leftarrow (٠،١)$ صغرى محلية

$س = ٢ \Leftarrow د(٢) = -٩$ لا يوجد

مكتبة الوسام
ALWESAM
Solving Library
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اوجد القيم القصوى للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٥ & -٢ \le س < ٣ \\ ١٠ - ٢س & ٣ \le س < ٧ \end{cases}$$

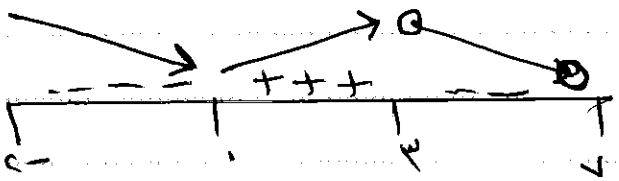
الحل

$ق(٣) = ١٤$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ١٤$ ، $\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٤$

غير متصل ← $ق'(٣)$ غير موجودة

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & -٢ < س < ٣ \\ غير\ موجودة & س = ٣ \\ -٢ & ٣ < س < ٧ \end{cases}$$



$س = ٠ \in$ لماذا

$ق(٠) = ٥$ (٠، ٥) عظمى محلية مطلقة

$ق(٣) = ١٤$ (٣، ١٤) عظمى محلية

$ق(-٢) = ٩$

عند $س = ٠$ يوجد صغرى محلية

وكانه صفر عند $س = ٠$ هي صغرى مطلقة

لمعرفة ذلك نقارنها مع -٢

$\lim_{س \to -٢^+} ق(س) = ٤$ ، $ق(٠) = ٥$

(٠، ٥) صغرى محلية فقط

مثال (١٤)

باستخدام المشتقة بين ان

$-١٥ \le س^3 - ٣س^2 + ٥ \le ٥$

$س \in [-٢، ٣]$

الحل

نفرض ان $ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ٥$

ونريد اثبات ان (٥) قيمة عظمى مطلقة وان (-١٥) قيمة صغرى مطلقة

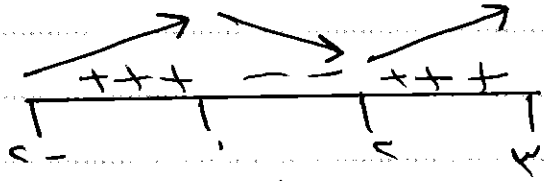
$ق(س)$ متصل على $[-٢، ٣]$

$ق$ قابل للاشتقاق على $(-٢، ٣)$

$ق'(س) = ٣س^2 - ٦س = ٠$

$٣س(س - ٢) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$



$ق(٠) = ٥$ عظمى مطلقة

$ق(٣) = ٥$ (-١٥) قيمة صغرى مطلقة

$ق(-٢) = -١٥$

$ق(٢) = ١$

$-١٥ \le ق(س) \le ٥$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : ناجح الجمزاوي

ملاحظة

اذا كانت $(P, ب)$ نقطة قصوى فان

① $ه'(P) = ب$

② $ه'(P) =$ صفر أو غير موجودة

وعندما يكون $ه(س)$ كثير حدود فان $ه'(P) =$ صفر

مثال (١٥)

اذا كان $ه(س) = P س^٣ - ١٢ س$ وكان له قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ اوجد قيمة P

الحل

$ه'(س) = ٣P س^٢ - ١٢$

$ه'(١) = ٠$

$٣P - ١٢ = ٠ \leftarrow P = ٤$

مثال (١٦)

اذا كان للاقتران $ه(س) = P س^٣ - ب س + ٥$ نقطة قصوى محلية هي $(-١, ٩)$ اوجد $P, ب$

الحل

$ه'(-١) = ٣P + ب = ٠$ ... (١)

$ه(-١) = -P + ب + ٥ = ٩$

$-P + ب = ٤$ ... (٢)

بالطرح $٤P = -٤ \leftarrow P = -١$

بالتعويض في (٢) $ب = ٣$

مثال (١٧)

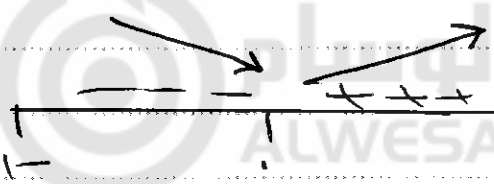
اذا كان $ص^٢ = س^٤$ ، $س \in [-١, ٢]$ اوجد القيم القصوى

الحل

$ص^٢ = س^٤ \Leftarrow ص = \sqrt{س^٤}$

$ص = س^{\frac{٤}{٢}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٢} س^{\frac{٤}{٢}} = ٠ \leftarrow س = ٠$



$ص(٠) = ٠$ صغرى محلية مطلقة

$ص(٢) = \sqrt{١٦} = ٤$ عظمى مطلقة

$ص(-١) = ١$ لا يوجد

مكتبة الوسام ALWESAM

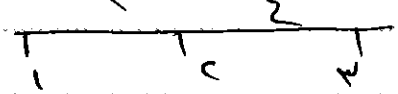
مثال (١٨)

$$ق(س) = \begin{cases} [س+٢] & اذا\ س < ٣ \\ |س-١٥| & س \geq ٣ \end{cases}$$

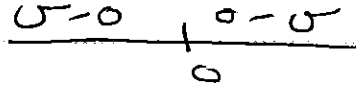
جد قيم س الحرجة، فترات التزايد والتناقص القيم القصوى المحلية والمطلقة.

الحل

$[س+٢]$



$|س-١٥|$



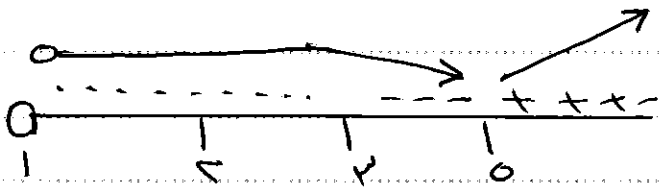
$$ق(س) = \begin{cases} ١ & س < ٣ \\ ٢ & ٣ < س < ٤ \\ ٣ & ٤ < س < ٥ \\ ٥-س & س \geq ٥ \end{cases}$$

ق(س) غير متصل عند س = ٣، ٤

$$ق(س) = \begin{cases} صفر & اذا\ س = ٣ \\ صفر & س = ٤ \\ -١ & س = ٥ \\ ١ & س > ٥ \\ غير\ موجودة & س = ٣، ٤، ٥ \end{cases}$$

قيم س الحرجة

{٣، ٤، ٥، (١، ق(١))، (٢، ق(٢))}



ق(س) ثابت في الفترات

(١، ق(١)) ، [ق(٣)، ٣)

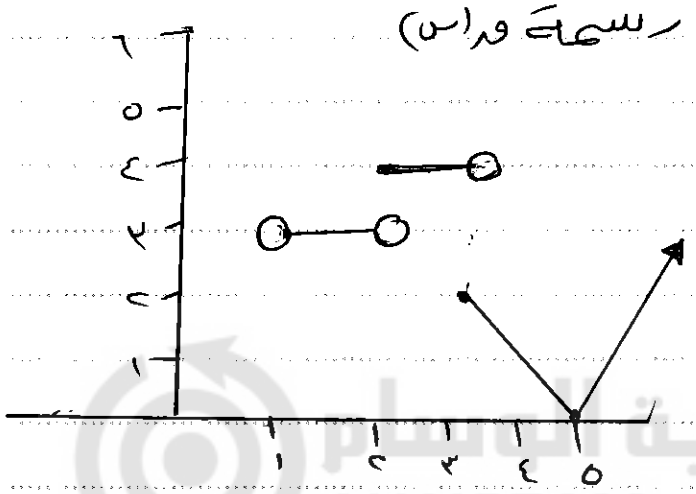
ق(س) متناقص في [٢، ٥]

ق(س) متزايد في [٥، ∞)

الفترات (١، ق(١)) ، [ق(٣)، ٣) محتوية من القيم العظمى والصغرى

(٣، ق(٣)) = (٣، ٣) ليست قيمة عظمى محلية أو صغرى

رسم ق(س)



مكتبة السلام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٩)

$ق(س) = [\frac{س}{٣} - ١]$ ، $س \in [-١، ٩]$

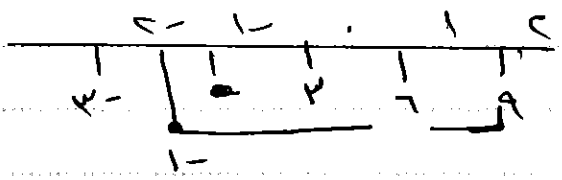
جد قيم س الحرجة والقيم القصوى

الحل

طول المدرجة = ٣ ، $\frac{س}{٣} - ١ = ٠$

$\frac{س}{٣} = ١$

$س = ٣$



$ق(س) = \begin{cases} -٢ & -١ \le س < ٠ \\ -١ & ٠ \le س < ٣ \\ صفر & ٣ \le س < ٦ \\ ١ & ٣ \le س < ٩ \\ ٢ & س = ٩ \end{cases}$

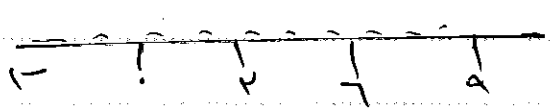
$ق'(س) = \begin{cases} صفر & -١ < س < ٠ \\ صفر & ٠ < س < ٣ \\ صفر & ٣ < س < ٦ \\ صفر & ٦ < س < ٩ \end{cases}$

$ق(س)$ غير متصل عند $س = ٠، ٦، ٣$

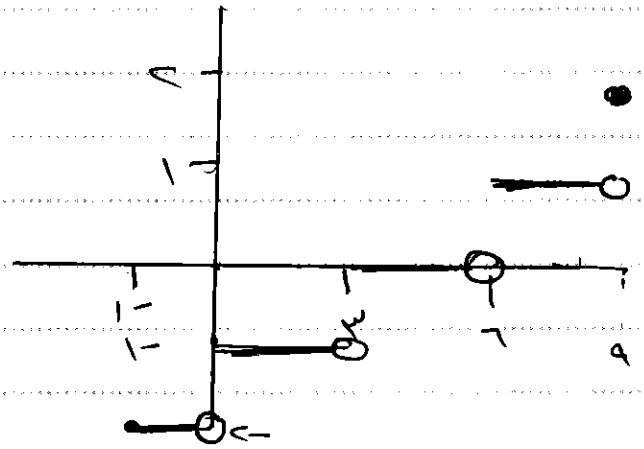
$ق'(س)$ غير موجودة عند

$س = -١، ٠، ٦، ٣، ٩$

قيم س الحرجة هي $[-١، ٩]$



لا نستطيع الحكم حسب اختبار المشتقة الأولى لذلك نرسم الإشارات



عليه اعتبار كل قيمة حزينة تعطي قيم عظمى أو صغرى محلية والقيم هي

$\{-١، ٠، ٣، ٦، ١٠\}$

أما الطلقات فالقيمة $[-١، ٠)$ تعطي مجموعة من القيم الصغرى المحلية والطلقة هي ٢

وكذلك $س = ٩$ توجد قيمة عظمى طلقة $= ٢$

مكتبة الهدام ALWESAM
التعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٢٠)

$ق(س) = س + \frac{١}{س}$ $س \neq ٠$

جد قيم س الحرجة ، مجالات التزايد والتناقص القيم القصوى

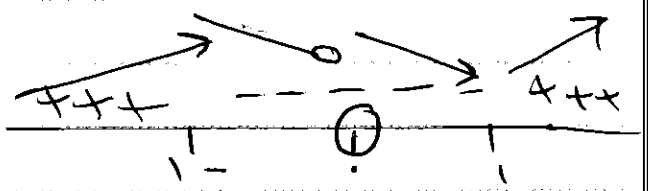
الحل

ق(س) متصل على $ح - \{٠\}$
وقابل للاشتقاق عليه

$ق'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{س^{٢}} = ١$

$\Leftarrow س^{٢} = ١ \leftarrow س = \pm ١$

قيم س الحرجة $\{١ ، -١\}$



ق(س) متزايد $(-\infty ، -١] ، [١ ، \infty)$
متناقص $[-١ ، ٠) ، (٠ ، ١]$

$(-١ ، ق(-١))$ قيمة عظمى محلية
$= (-١ ، -٢)$

$(١ ، ق(١)) = (١ ، ٢)$ صغرى محلية
لا يوجد قيم قصوى مطلقة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

إيجاد التزايد والتناقص والقيم القصوى والحرجة من الرسم

① اذا كانت الرسمة للأقتران ه(س)

ⓐ اذا كان الأقتران صاعد يكون متزايد ، واذا كان الأقتران هابط (نازل) يكون الأقتران متناقص

ⓑ تكون النقط الحرجة للأقتران ه(س) عند الرؤوس المدببة اطراف القترات ، نقاط الانفصال التي ∉ المجال ، القيم والقيعان وكذلك القيم القصوى .

مثال

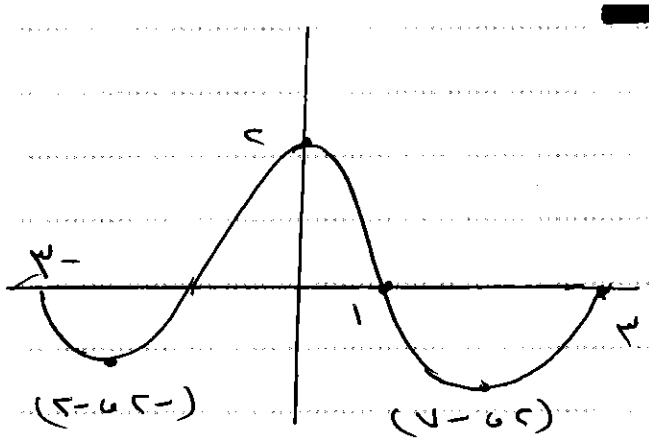
اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ه(س) المعرف على $[-٣ ، ٣]$ اوجد

① مجالات التزايد والتناقص

② القيم القصوى

③ النقط الحرجة

④ ه(١) ، ه(٢) ، ه(-٢) ، ه(٣)



الحل

① ه متزايد على $[-٢ ، ٠٦-٢]$ ، $[٢ ، ٠٦٢]$

ه متناقص $[-٣ ، ٠٦-٢]$ $[٢ ، ٠٦٠]$

② $(-٢ ، ٠٦-٢)$ صغرى محلية

$(٢ ، ٠٦٠)$ عظمى محلية مطلقة

$(-٢ ، ٠٦-٧)$ صغرى محلية مطلقة

③ النقط الحرجة

$(-٣ ، ٠٦٣)$ ، $(-٢ ، ٠٦-٢)$ ، $(٢ ، ٠٦٠)$

$(٢ ، ٠٦-٧)$ $(٣ ، ٠٦٣)$

④ ه(١) = ٠

ه(٢) = ٠ ، ماسات افقيه

ه(-٢) = ٠

ه(٢) غير موجودة طرف فترة

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم : ناجح الجمزاوي

② اذا كانت الرسمة تمثل ق'(س)

لايجاد مجالات التزايد والتناقص من خلال رسمة ق'(س) نتبع الخطوات التاليه

① نجد النقط الحرجه : وهي اطراف الفترات ، نقاط الانفصال نقاط تقاطع ق'(س) مع محور السينات

② نرسم خط الاعداد ونضع عليه النقط الحرجه

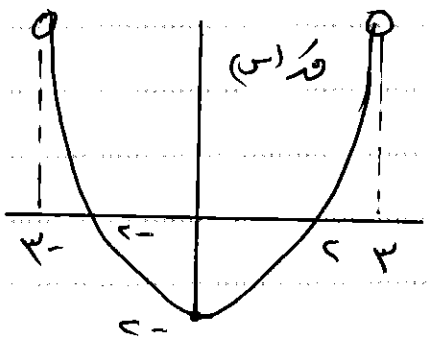
③ نعين اشارة ق'(س) على خط الاعداد وذلك
ⓐ خوفه محور السينات ← ق' موجبه

ⓑ تحت محور السينات ق' سالبه

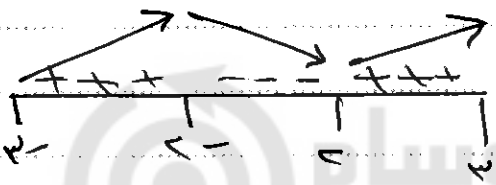
④ نحد المطلوب

مثال ①

الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) حيث ق'(س) معرف على [-٣، ٣] اوجد
① مجالات التزايد والتناقص لـ ق(س)
② القيم القصوى
③ النقط الحرجه
④ مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق'(س)
⑤ النقط القصوى المحليه للاقتران ق'(س)



الحل



① ق تزايد على [-٣، -٢] ، [٢، ٣]
ق متناقص على [-٢، ٢]

② ق(-٢) قيمة عظمى محلية
ق(٢) قيمة صغرى محلية

← يتبع الحل

مكتبة الهسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

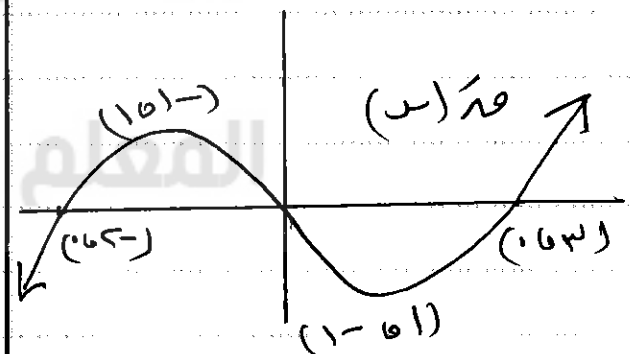
③ $(-٣، ق(-٣))$ ، $(-٢، ق(-٢))$
$(٢، ق(٢))$ $(٣، ق(٣))$
نقط حرجه

④ نتعامل مع الرسم كما لو كانت
$ق(س)$ لـ $ق(س)$
$ق(س)$ متزايد $[٠، ٢]$
$ق(س)$ متناقص $(-٣، ٠]$
$(٢، ٠)$ نقطه صغرى محليه
وطلقه لـ $ق(س)$

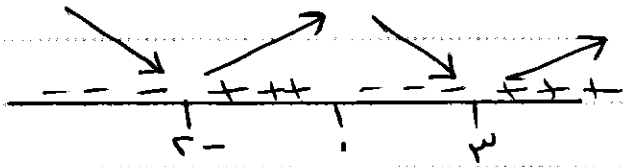
مثال ④

الشكل المجاور يمثل منحنى إشتقه الأولى للاقتران $ق(س)$ المعرف على ع جد مايلي

① مجالات التزايد والتناقص لـ $ق$
② النقط القصوى المحليه لـ $ق(س)$
③ مجموعة الحرجه لـ $ق(س)$
④ مجالات التزايد والتناقص لـ $ق(س)$
⑤ النقط القصوى المحليه لـ $ق(س)$



الحل



① $ق(س)$ متناقص $(-\infty، -٢]$ ، $[٠، ٢]$
$ق(س)$ متزايد $[-٢، ٠]$ ، $[٢، \infty)$

② $(-٢، ق(-٢))$ ، $(٢، ق(٢))$
نقط صغرى محليه
$(٠، ق(٠))$ نقطة عظمى محليه

③ مجموعة الحرجه $\{-٢، ٠، ٢\}$

④ $ق(س)$ متزايد $(-\infty، -١]$
$[١، \infty)$
$ق(س)$ متناقص $[-١، ١]$

⑤ $(-١، ق(-١))$ قيمه عظمى محليه لـ $ق(س)$
$(١، ق(١))$ قيمه صغرى محليه لـ $ق$

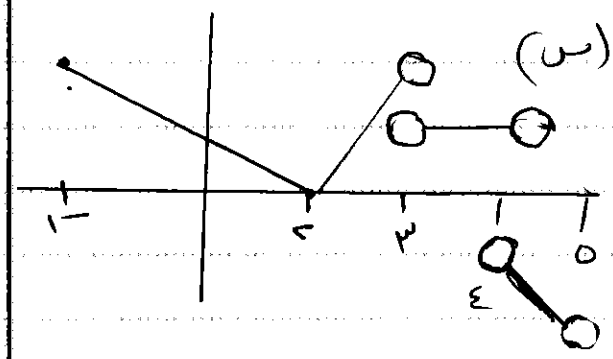
مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

مثال ③

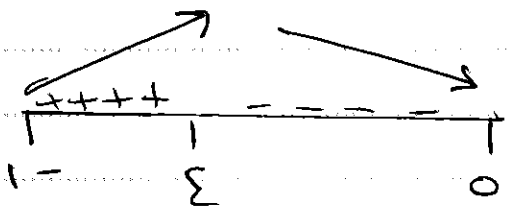
الشكل الجانبي يمثل منحنى ق(س) المعرف على [-١، ٥]. أوجد

① فترات التزايد والتناقص لـ ق

② قيم س الحرجة لـ ق



الحل



ق متزايد على [-١، ٤]

ق متناقص على [٤، ٥]

قيم س الحرجة هي

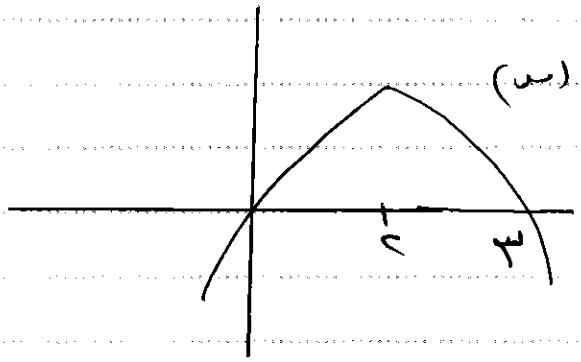
{-١، ٢، ٣، ٤، ٥}

مثال ④

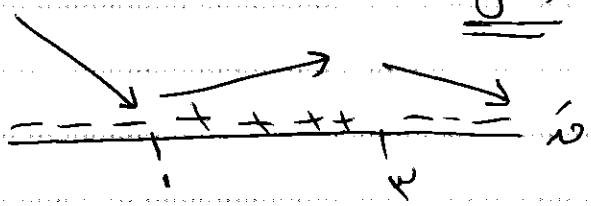
بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى ق(س) أوجد ما يلي

① فترات التزايد والتناقص لـ ق(س)

② قيم س التي يكون عندها للاقترانين ق(س) قيم قصوى محلية



الحل



ق متناقص على (-∞، ١] ∪ [٣، ∞)

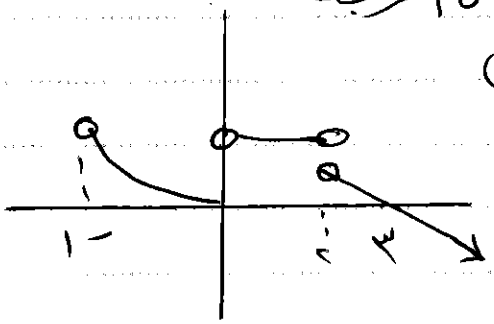
ق متزايد على [١، ٣]

(١، ق(١)) نقطة صغرى محلية

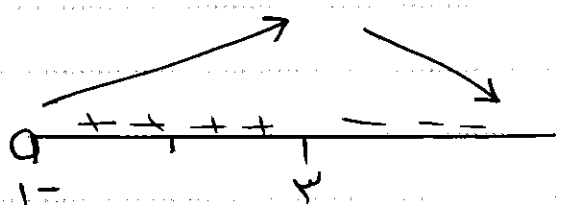
(٣، ق(٣)) نقطة عظمى محلية

مكتبة المعلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤
عمل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى لاقتران ق(س) أوجد
① مجالات التزايد والتناقص
② القيم القصوى
③ مدى الدالة ق(س)



الحل



① متزايد $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$
متناقص $[-1, 3]$

② عند $(3, ق(3))$ قيمة عظمى محلية

③ النقط الحرجة
$س = \{-1, 3\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٩١

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقترانات

$ق(س) = ٢س^٣ - س^٢ - ٩س + ٢$

$س \in [-١، ٥]$

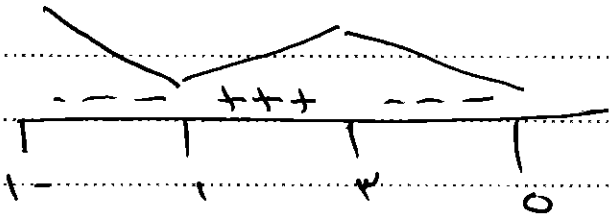
الحل

$ق'(س) = ٦س^٢ - ٢س - ٩ = ٠$

$٣(٢س^٢ - ٤س + ٣) = ٠$

$(س - ٣)(س - ١) = ٠$

$س = ٣ \quad س = ١$



عند $س = ١$ يمثل صغرى محلية $ق(١) = -٢$

عند $س = ٣$ يمثل عظمى محلية $ق(٣) = ٢$

$س = -١ \quad ق(-١) = ١٨$ يمثل عظمى مطلقة

$س = ٥ \quad ق(٥) = -١٨$ يمثل صغرى مطلقة

تدريب ② ص ١٩٢

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران

$ق(س) = |١ - س^٢|$ $س \in [-٣، ٤]$

الحل

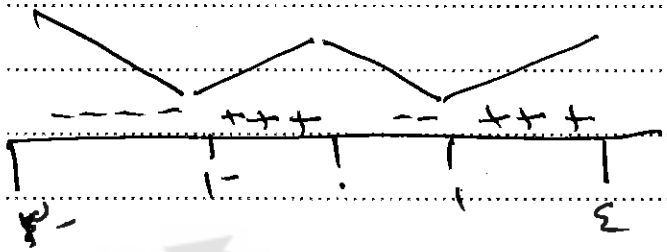
$١ - س^٢ = ٠ \quad س = \pm ١ \quad ق' = -١$

$س^٢ - ١ = ٠ \quad ق' = ١$

$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & ق' = ١ \\ ٢س & ق' = -١ \end{cases}$

$ق' = ٠$

النقط الحرجة عند $س = -١، ٠، ١$



عند $س = -١$ يمثل صغرى محلية ومطلقة $ق(-١) = ٠$

$ق = ١$ يمثل صغرى محلية ومطلقة $ق(١) = ٠$

عند $س = ٠ \quad ق(٠) = ١$ عظمى محلية

عند $س = -٣ \quad ق(-٣) = ٨$ لا يوجد

عند $س = ٤ \quad ق(٤) = ١٥$ عظمى مطلقة

تدريب ③ ص ١٩٣

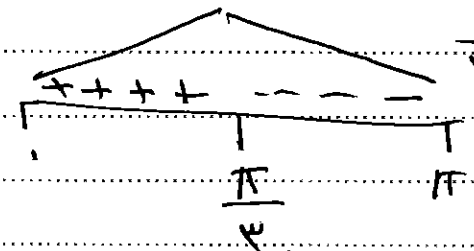
جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران $د(س) = س + ٢ جتا س$
$س \in [٠ ، ٢\pi]$

الحل

$د(س) = ١ + ٢ جتا س = ٠$

$جتا س = -\frac{١}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٣}$



عند $س = \frac{\pi}{٣}$ يوجد عظمى مطلقة $د(\frac{\pi}{٣})$

عند $س = ٠$ $د(٠) = ٠$ عظمى مطلقة

$س = \pi$ $د(\pi) = ٠$ عظمى مطلقة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

صفحة (١٩٤)

السؤال الأول

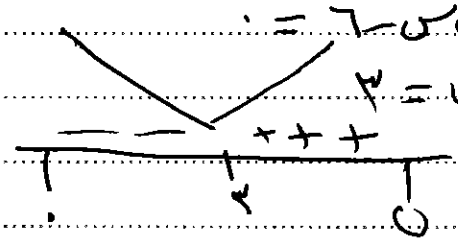
جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) لكل من الاقترانات التالية

(أ) $ق(س) = س^٣ - ٦س + ٩$ [٥٦,٠]

الحل

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٦ = ٠$

$س = ٣$



عند $س = ٣$ قيمة صغرى مطلقة ومحلية

$ق(٣) = ٩ - ١٨ + ٩ = ٠$

$(٣ ، ٠)$

عند $س = ٠$ $ق(٠) = ٩$ قيمة عظمى مطلقة

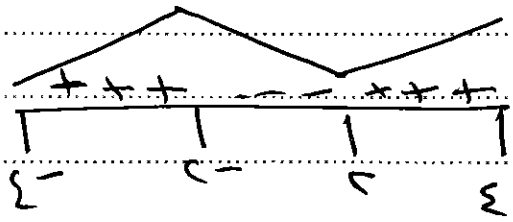
$س = ٥$ $ق(٥) = ٤$ لا يوجد

(ب) $ق(س) = س^٣ - ٣س$ [٤,-٤]

الحل

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٣ = ٠$

$س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$



$س = ١$ قيمة عظمى محلية $ق(١) = ٢$

$س = -١$ قيمة صغرى محلية $ق(-١) = -٢$

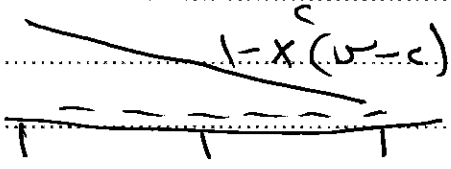
$س = -٢$ ، $ق(-٢) = ٢$ مطلقة فقط

$س = ٤$ $ق(٤) = ٦٠$ مطلقة فقط

(ج) $ق(س) = (٢ - س)^٣$ [٤٦,٠]

الحل

$ق'(س) = ٣(٢ - س)^٢ \times -١$



$ق(٤) = -٨$ قيمة صغرى مطلقة

$(٤ ، -٨)$

$س = ٠$ $ق(٠) = ٨$

$(٠ ، ٨)$ قيمة عظمى مطلقة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

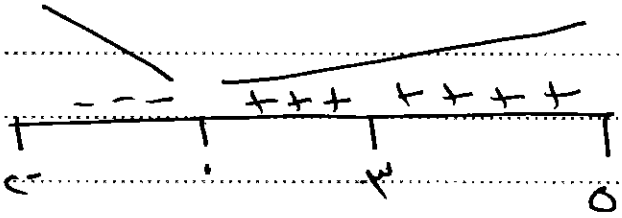
السؤال الأول

(ج) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & -2 \le س \le 3 \\ 3س + 1 & 3 < س \le 5 \end{cases}$

متصل عند $س = 3$

$ق(س) = \begin{cases} س^2 & -2 < س < 2 \\ 3 & س = 2 \\ 3س & 2 < س \le 5 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$



عند $س = 0$ $ق(0) = 1$

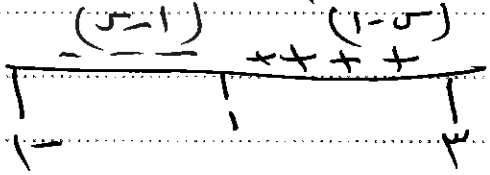
$(0, 1)$ قيمة صغرى مطلقة

$ق(5) = 16$ قيمة عظمى مطلقة

$ق(-2) = 5$ ليست قيمة

(هـ) $ق(س) = |(س-1)^2|$ $[-1, 3]$

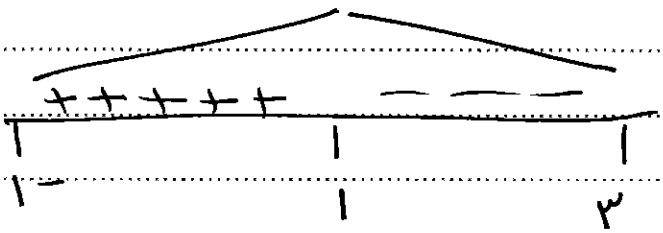
$(س-1)^2 = 0 \Leftarrow س = 1$



$ق(س) = \begin{cases} (س-1)^2 & -1 \le س \le 1 \\ (1-س)^2 & 1 \le س \le 3 \end{cases}$

متصل عند $س = 1$

$ق'(س) = \begin{cases} 2(س-1) & -1 < س < 1 \\ 2(1-س)(-1) & 1 < س < 3 \end{cases}$



$س = 1 \Leftarrow ق(1) =$ صغرى مطلقة $(1, 0)$

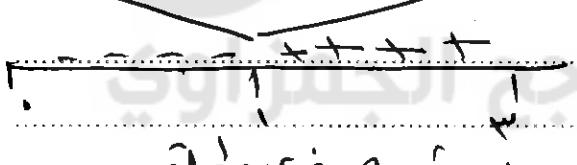
$س = -1 \Leftarrow ق(-1) = 4$ صغرى مطلقة

$س = 3 \Leftarrow ق(3) = 4$ صغرى مطلقة

(و) $ق(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{3}س^3$ $[0, 2]$

$ق'(س) = س^3 - س^2 = 0$

$س^2(س-1) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = 1$



عند $س = 1$ قيمة صغرى مطلقة

$ق(0) = 0$ ليست

$ق(2) = \frac{4}{3}$ قيمة عظمى مطلقة

مكتبة البيسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

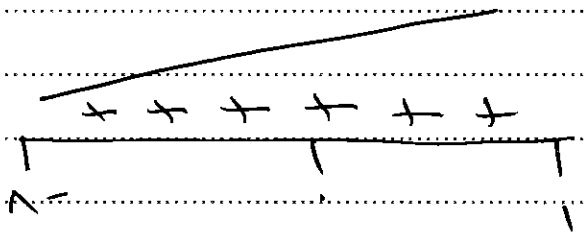
(أ) $ق(س) = \sqrt[3]{س^2}$ $[-8، 1]$

الحل

$ق(س) = س^{\frac{2}{3}}$ ، $ق'(س) = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}}$

$ق'(س) = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

النقط الحرجة $س = 0$



عند $س = 1$ $ق(1) = 1$

$(1، 1)$ قيمة عظمى مطلقة

عند $س = -8$

$ق(-8) = \sqrt[3]{-64} = -4$

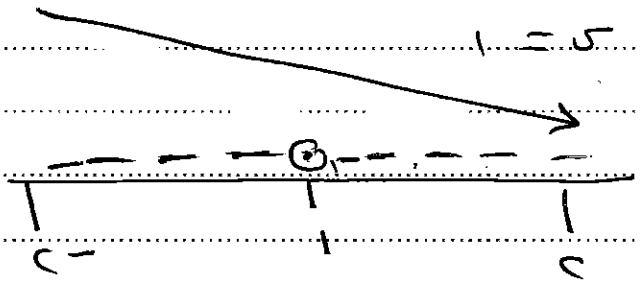
$(-8، -4)$ قيمة صغرى مطلقة

(ط) $ق(س) = (1-س)^3$ $[-2، 2]$

$ق'(س) = 3(1-س)^2 \times -1$

$1 - س = 0$

$س = 1$



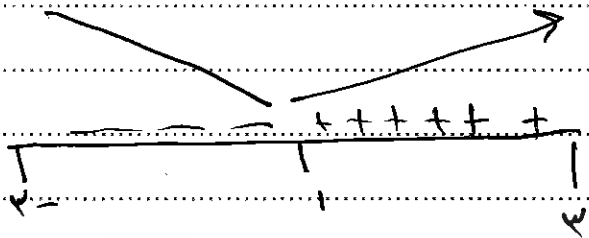
عند $س = 2$ $ق'(2) = -1$ صغرى مطلقة

$س = -2$ $ق(-2) = 27$ عظمى مطلقة

(ي) $ق(س) = (1-س)^4$ $[-3، 3]$

$ق'(س) = 4(1-س)^3 \times -1$

$1 - س = 0$ $س = 1$



عند $س = 1$ قيمة صغرى مطلقة

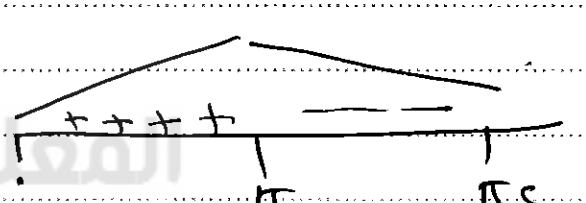
عند $س = 3$ $ق(3) = 16$ لا يوجد

$س = -3$ $ق(-3) = 64$ عظمى مطلقة

(ع) $ق(س) = س + جتاس$ $[0، 2\pi]$

$ق'(س) = 1 + جتاس = 0$

$جتاس = -1$ $س = \pi$



عند $س = \pi$ قيمة عظمى مطلقة

$س = 2\pi$ $ق(2\pi) = 2\pi$ لا يوجد

$س = 0$ $ق(0) = 0$ صغرى مطلقة

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص ١٩٤

إذا كان للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(٢، ٥)$ بين أن للاقتران $و(س) = (١ - ق(س))^٣$ قيمة صغرى محلية عند النقطة $(٢، ٨-)$

$ق'(س)$ + + + | − − −
عند $س = ٢$

لأن $ق$ عند $س = ٢$ قيمة عظمى

$و'(س) = ٣(١ - ق(س))^٢ \times -ق'(س)$

دائماً موجبا بحيد الاشارة

بالضرب $ق'(س)$ في سالب

$-ق'(س)$ − − − | + + +
عند $س = ٢$

قيمة صغرى محلية لـ $و(س)$

السؤال الثالث : ص ١٩٥

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأول للاقتران المتصل $ق$ على $[-٢، ٦]$ حدد كلا مما يأتي

١) مجموعة قيم $س$ الحرجة

٢) فترات التزايد والتناقص

٣) القيم القصوى

$ق'(س)$

$س$ الحرجة $\{-٢، ٠، ٢، ٦\}$

فترات التزايد $[-٢، ٠]$ ، $[٢، ٦]$ متناقص $[٠، ٢]$

عند $س = ٠$ قيمة عظمى مطلقة

السؤال الرابع

$ق'(س)$

+ + + | − − − | + + + | − − −
عند $س = ٠$ ، $س = ٣$

الحرجة $\{٠، ٣\}$

فترات التزايد $(-\infty، ٠]$ ، $[٣، \infty)$ متناقص $[٠، ٣]$

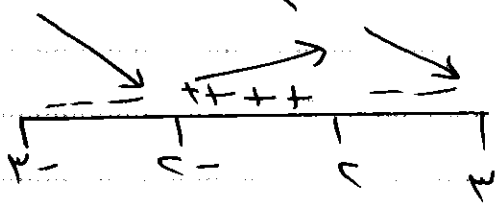
عظمى مطلقة عند $س = ٣$

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) صيفية
اذا كان $ق(س) = ٤س - \frac{١}{٣}س^{٣}$
$س \in [-٣، ٣]$ جد ما يلي

ⓐ الفترة (الفترات) التي يكون ق متزايدًا
ⓑ القيم القصوى المطلقة للاقتران ق وبين نوعها.

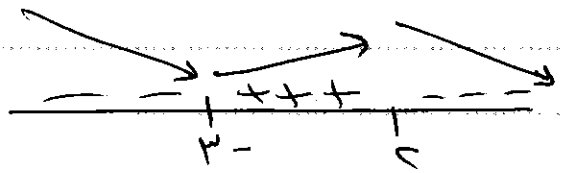
الحل
$ق(س) = ٤ - س^{٢} = ٠$
$س = \pm ٢$



ⓐ متزايد $[-٢، ٢]$
ⓑ
$ق(-٣) = -٣$ لا يوجد
$ق(-٢) = \frac{-١٦}{٣}$ صغرى مطلقة
$ق(٣) = ٣$ لا يوجد
$ق(٢) = \frac{١٦}{٣}$ عظمى مطلقة

② وزارة (٢٠٠٨) شتوية
اذا كان $ق(س) = -٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣٦س + ١٠$
جد القيم القصوى المحلية للاقترانات وبين نوعها.

الحل
$ق(س) = -١٢س^{٢} - ٦س + ٣٦$
بالقسمة ÷ ٦
$س^{٢} + س - ٦ = ٠$
$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$
$س = -٣ \quad س = ٢$



$ق(-٣) = -١٨١$ صغرى محلية
$ق(٢) = ٥٤$ عظمى محلية

---

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية
$ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$
$س \in [٠، ٤]$ جد

ⓐ الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايدًا
ⓑ القيم القصوى المطلقة لـ ق وبين نوعها

الحل
$ق(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩$ ÷ ٣
$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$
يتبع الحل ←

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(س-٣)(س-١) = ٠
س = ٣ ، س = ١

د متزايدة على [٠، ١] ، [٣، ٤]
د(١) = ٦
د(٤) = ٦ ← العظمى المطلقة هي ٦

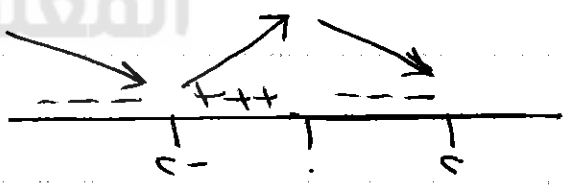
د(٠) = ٢
د(٣) = ٢ ← الصغرى المطلقة = ٢

---

④ وزارة (٢٠١٩) صيفية

اذا كان د(س) = $\frac{1}{4}س^4 - ٢س^2 + ٣$
حيث س ∈ [-٣، ٢] فجد مايلي
① فترات التناقص
② القيم القصوى

الحل
د(س) = $س^3 - ٤س$ = ٠
س($س^2 - ٤$) = ٠
س = ٠ ، س = ±٢



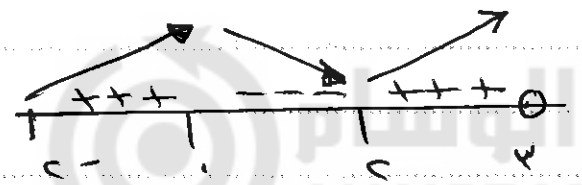
د متناقصة في [-٣، -٢] وفي [٠، ٢]
لدينا قيمة عظمى مطلقة
هي د(س) = -١
س ← ٢
د(-٢) = -١ صغرى مطلقة
د(٠) = عظمى محلية

---

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان د(س) = $\frac{1}{3}س^3 - س^2 + ٢$
حيث س ∈ [-٣، ٣] فجد مايلي
① فترات التزايد
② القيم القصوى

الحل
د(س) = $س^2 - ٢س$ = ٠
س(س-٢) = ٠
س = ٠ ، س = ٢



① د(س) متزايدة [-٣، ٠] ، [٢، ٣]
② د(-٢) = $-\frac{٤}{٣}$ صغرى مطلقة
د(٢) = $\frac{٤}{٣}$
د(٠) = ٢ ← هي د(س) = ٢
س ← ٣
القيمة العظمى المطلقة هي د(٠) = ٢

مكتبة الهدف ALHEDAF
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

$ق(س) = س^3 (٤ - س)$ ، $س \in [-١، ٥]$

جد

① فترات التناقص

② القيم القصوى.

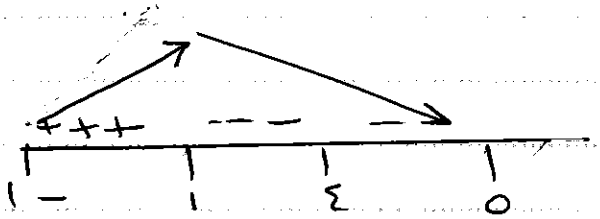
الحل

$ق'(س) = س \times ٣(٤-س)^2 \times -١ + (٤-س)^3 \times ١$

$= (٤-س)^2 [-٣س + ٤ - س]$

$= (٤-س)^2 (٤ - ٤س) = ٠$

$س = ٤ ، ١$



ق متناقص $[-١، ١] \cup [٤، ٥]$

$ق(١) = ١ \times ٧ = ٧$ قيمة عظمى مطلقة

$ق(-١) = -٥ < ٧$ قيمة صغرى مطلقة

$ق(٥) = -٥$ لاحظ

⑦ وزارة (٢٠١١) صيفية

إذا كان $ق(س) = ٦س^2 - ٤س^3$

$س \in [٠، ٤]$ جد

① فترات التناقص

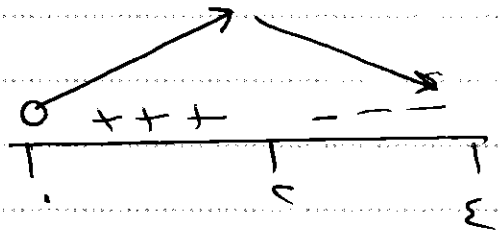
② القيم القصوى وبين نوعها

الحل

$ق'(س) = ١٢س - ١٢س^2 = ٠$

$١٢س(١ - س) = ٠$

$س = ٠ ، ١$



① ق متناقص $[١، ٤]$

② $ق(١) = ٨$ قيمة عظمى محلية وطلقة

كما $ق(س) = ٠ \Leftarrow ق(٤) = -٣٢$

$س = ٠$

∴ قيمة صغرى مطلقة عند $س = ٤$

حيث $ق(٤) = -٣٢$

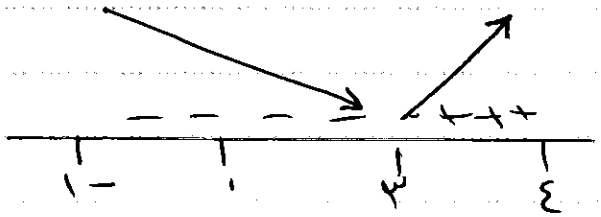
مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}$
$س \in [-١ ، ٤]$ جد القيم القصوى للاقتران $ق(س)$ وبين نوعها

الحل

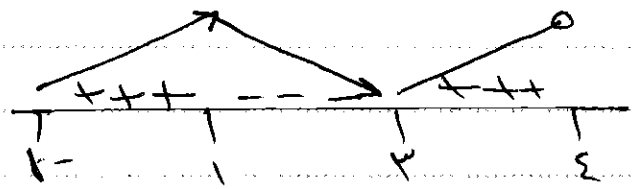
$ق'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢}$
$٤س^{٢}(س - ٣)$
$س = ٠ \quad س = ٣$



$ق(٣) = -٢٧$ قيمة صغرى محلية مطلقة
$ق(-١) = ٥$ ، $ق(٤) =$ صغ
$ق(-١)$ قيمة عظمى مطلقة

الحل

$ق(س) = س(س^{٢} - ٦س + ٩) - ٢$
$= س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س - ٢$
$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ \div ٣$
$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$
$(س - ٣)(س - ١) = ٠$
$س = ١ ، ٣$



$ق$ متزايد $[-١ ، ١] \quad [٣ ، ٤)$

$ق(-١) = -١٨$ قيمة صغرى مطلقة
$ق(١) = ٢$ قيمة عظمى محلية مطلقة
$ق(٣) = -٠$ قيمة صغرى محلية
بها $ق(س) = ٢$
$س \leftarrow ٤$

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان $ق(س) = س(س - ٣)^{٢}$
$س \in [-١ ، ٤)$ جد مايلي

① فترات التزايد

② القيم القصوى وبين نوعها

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٠) وزارة (٢٠١٢) صيفية

$ق(س) = س + \frac{9}{س+2}$ ، $س \in [-1, 4]$

مجد ما يلي

① فترات التزايد والتناقص

② القيم القصوى المحلية والمطلقة

الحل

$ق(س)$ متصل على $[-1, 4]$ وقابل للاشتقاق عليه على $(-1, 4)$

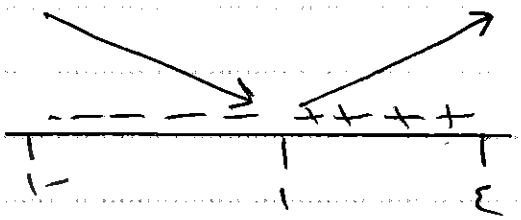
$ق'(س) = 1 - \frac{9}{(س+2)^2} = 0$

$1 = \frac{9}{(س+2)^2} \Leftarrow (س+2)^2 = 9$

$\Leftarrow س+2 = \pm 3$

$\Leftarrow س = -5$ (خارج المجال)

أو $س = 1$



$ق$ متناقص $[-1, 1]$

$ق$ متزايد $[1, 4]$

$ق(1) = 1 + 3 = 4$ قيمة صغرى محلية وطلقة

$ق(-1) = -1 + 9 = 8$

$ق(4) = 5\frac{1}{2}$

$ق(-1) = 8$ قيمة عظمى مطلقة

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان $ق(س) = س^2 - \frac{1}{4}س^4$

$س \in [-3, 3]$ جد

① فترات التزايد والتناقص

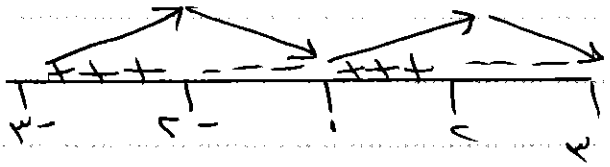
② القيم القصوى

الحل

$ق'(س) = 4س - س^3 = 0$

$س(4 - س^2) = 0$

$س = 0$ $س = \pm 2$



$ق$ متزايد $[-3, -2] \cup [0, 2]$

متناقص $[-2, 0] \cup [2, 3]$

$ق(0) = 0$ قيمة صغرى محلية

$ق(2) = 4$ قيمة عظمى محلية

$ق(-2) = 4$ قيمة عظمى محلية

مكتبة الوسام ALWESAM
للعلم : ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (٢٠١٣ ج) صيفية

$ق(س) = س + \frac{٢٥}{س}$

س ∈ [-٨، ٨] - {٠}

① فترات التزايد والتناقص

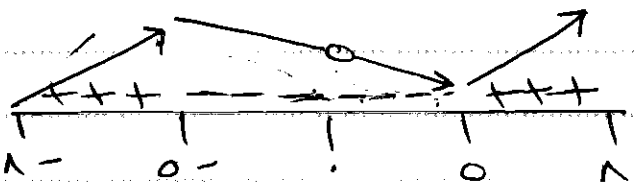
② القيم القصوى المحلية

الحل

$ق'(س) = ١ - \frac{٢٥}{س^٢}$

$١ = \frac{٢٥}{س^٢} \Leftarrow س^٢ = ٢٥$

$س = \pm ٥$



① متزايد [-٨، -٥] ، [٥، ٨]

متناقص [-٥، ٠) ، (٠، ٥]

② $ق(-٥) = -١٠$ عظمى محلية

$ق(٥) = ١٠$ صغرى محلية

(١٣) وزارة (٢٠١٤ ج) شتوية

اذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س^٢ + ٢س}$

حيث س ∈ ح فجد القيم القصوى المحلية أن وجدت

الحل

$ق(س) = (س^٢ + ٢س)^{\frac{١}{٣}}$

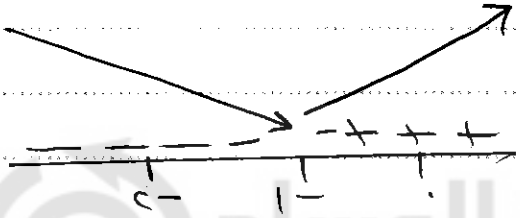
$ق'(س) = \frac{١}{٣}(س^٢ + ٢س)^{-\frac{٢}{٣}} (٢س + ٢)$

$= \frac{٢س + ٢}{٣\sqrt[٣]{(س^٢ + ٢س)^٢}} = \frac{٢س + ٢}{٣\sqrt[٣]{س^٢(س + ٢)^٢}}$

البسط = ٠ ⇒ ٢س + ٢ = ٠ ⇒ س = -١

المقام = ٠ ⇒ $س^٢(س + ٢)^٢ = ٠$

س = ٠ ⇒ س = ٠ ، س = -٢



$ق(-١) = \sqrt[٣]{١ + ٢(-١)} = ١$

صغرى محلية

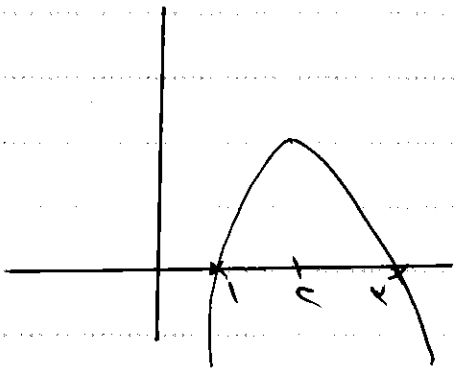
مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

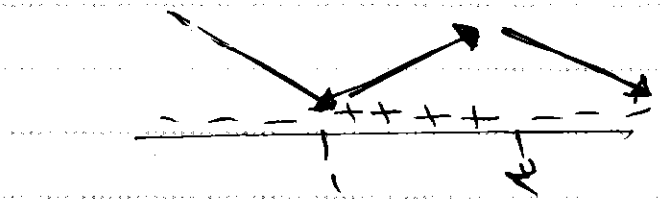
(١٤) وزارة (٢٠١٤ ، ٢) صيفية

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق'(س)$ حيث $ق'(س)$ كثير حدود حدد ما يلي

① فترات التزايد والتناقص لـ ق

② قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية





ق متزايد على $[١ ، ٣]$

متناقص $(-\infty ، ١]$ ، $[٣ ، \infty)$

صغرى محلية عند $س = ١$

عظمى محلية عند $س = ٣$

(١٥) وزارة (٢٠١٥ ، ٢) شتوية

$ق(س) = س - جتا س$ $[٠ ، ٢\pi]$

① مجالات التزايد والتناقص لـ ق

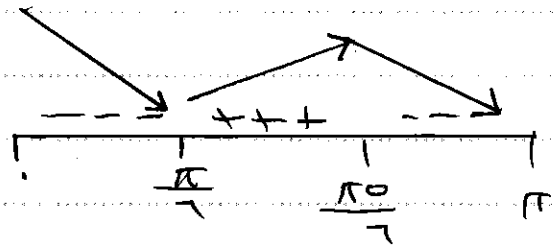
② القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للاقتران ق

الحل

$ق'(س) = ١ - ٢ جتا س = ٠$

$جتا س = \frac{١}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٣}$ ، $س = \frac{٥\pi}{٣}$



① ق متزايد $[\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}]$

متناقص $[٠ ، \frac{\pi}{٣}]$ ، $[\frac{٥\pi}{٣} ، ٢\pi]$

عند $س = \frac{\pi}{٣}$ صغرى محلية $ق(\frac{\pi}{٣})$

$= \frac{\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

عند $س = \frac{٥\pi}{٣}$ عظمى محلية وهي

$ق(\frac{٥\pi}{٣}) = \frac{٥\pi}{٣} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مكتبة العلم
ALILM TEAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑯ وزارة (٢٠١٥) صيفية

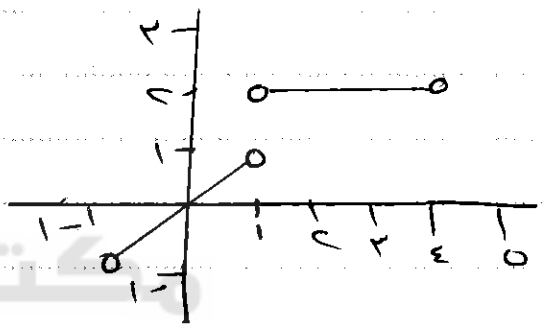
اذا كان الاقتران $هـ(س)$ متصل على الفترة $[-١، ٤]$

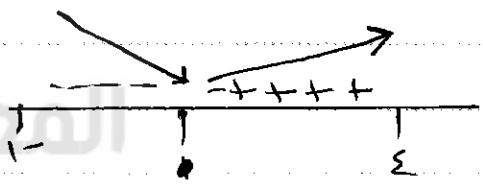
$$هـ(س) = \begin{cases} حـ س^٢ + د س + هـ & -١ \le س < ١ \\ م س + ن & ١ \le س \le ٤ \end{cases}$$

ومثل ضخن المشتقة الأولى $هـ'(س)$ في الشكل المجاور

① النقط الحرجة
② فترات التزايد والتناقص
③ قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية

④ قيم $م، ن، حـ، د، هـ$
علماً $هـ(-١) = ٢$ ، $هـ(٤) = ٨$





هـ متزايد $[٠، ٤]$
متناقص $[-١، ٠]$

النقط الحرجة $س \in \{-١، ٠، ١، ٤\}$

صغرى محلية عند $س = ٠$

④ $هـ'(س) = \begin{cases} ٢ حـ س + د & -١ < س < ١ \\ م & ١ < س < ٤ \end{cases}$

$هـ(٠) = ٠$ من الشكل

$هـ'(١) = ٠ \Leftarrow ٢ حـ + د = ٠ \Leftarrow د = -٢ حـ$

من الشكل $هـ'(١) = ٢ \Leftarrow م = ٢$

$هـ(٤) = ٨$

$٨ = ٤ م + ن \Leftarrow ن = ٠$

$هـ(١) = ١$

$١ = ٢ حـ + د \Leftarrow ١ = -٢ حـ + د \Leftarrow حـ = -\frac{١}{٢}$

$هـ(-١) = ٢$

$هـ = ٢ - \frac{١}{٢} + ١ + ٠ = ٢ \Rightarrow هـ = \frac{٣}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة ٢٠١٦ (شتوية)

إذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{س^3 - ٢٧س}$

$س \in (-١٠ ، ١٠)$ جد مايلي

أ) مجالا التزايد والتناقص

ب) القيم العظمى والصغرى المحلية

الحل

$ق(س) = (س^3 - ٢٧س)^{\frac{1}{3}}$

$ق'(س) = \frac{1}{3}(س^3 - ٢٧س)^{-\frac{2}{3}}(٣س^2 - ٢٧)$

$= \frac{٣س^2 - ٢٧}{٣\sqrt[3]{(س^3 - ٢٧س)^2}}$

البسط = صفر $\Rightarrow ٣س^2 = ٢٧$

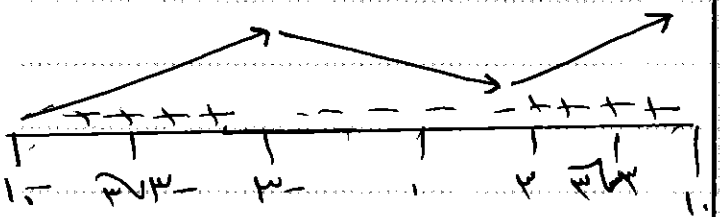
$س^2 = ٩ \Rightarrow س = \pm ٣$

المقام = صفر

$س^3 - ٢٧س = ٠$

$س(س^2 - ٢٧) = ٠$

$س = ٠ \quad س = \pm\sqrt{٢٧} = \pm\sqrt{٩ \times ٣} = \pm ٣\sqrt{٣}$



عند $س = -٣$ يوجد عظمى محلية

وهي $ق(-٣) = \sqrt[3]{٥٤}$

عند $س = ٣$ يوجد صغرى محلية وهي

$ق(٣) = -\sqrt[3]{٥٤}$

ج) $ق(س)$ متزايد $[-١٠ ، -٣] \cup [٣ ، ١٠]$

متناقص $[-٣ ، ٣]$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٨) وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $ق(س) = س^{\frac{1}{3}}(س-٢)$
س ∈ $[-١، ٥]$ جد

① فترات التزايد والتناقص

② القيم القصوى

الحل

$ق(س) = (س^{\frac{1}{3}})(س-٢)$

$= س^{\frac{1}{3}}(س-٢)$

$ق'(س) = \frac{1}{3}(س-٢)س^{-\frac{2}{3}} + س^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{س-٢}{3\sqrt[3]{س^2}} + \frac{3س}{3\sqrt[3]{س^2}}$

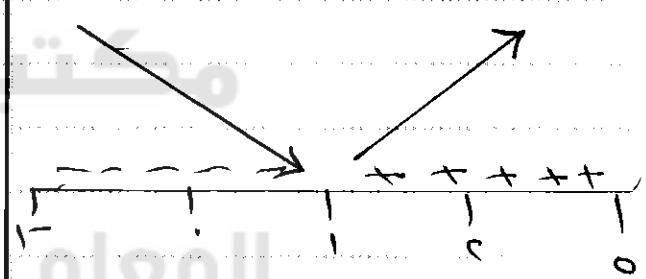
$= \frac{٤س-٢}{3\sqrt[3]{س^2}}$

البسط = ٠ ⇒ $٤س-٢ = ٠$ ⇒ $س = \frac{1}{2}$

المقام = ٠ ⇒ $س^2 = ٠$ ⇒ $س = ٠$

$ق'(س)$ غير معرفة عند $س = ٠$

$ق'(س) = ٠$ عند $س = \frac{1}{2}$



$ق(س)$ متزايد $[\frac{1}{2}، ٥]$

$ق(س)$ متناقص $[-١، \frac{1}{2}]$

عند $س = \frac{1}{2}$ يمثل صغرى محلية مطلقة

وقيمتها $= -\frac{1}{2}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) شتوي

لتكن $ق(س) = س^3 - ١٢س$

$س \in [-٤، ٤]$ حيث كلا مما يأتي

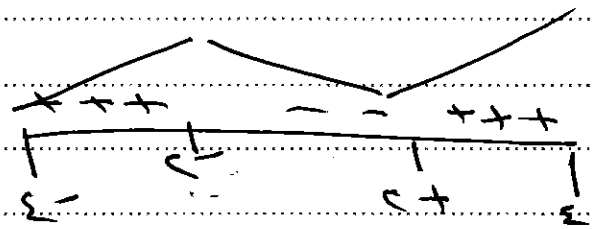
١) فترات التزايد والتناقص

٢) القيم العظمى والصغرى

الحل

$ق'(س) = ٣س^2 - ١٢ = ٠$

$س^2 = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$



$ق$ متزايدة $[-٤، -٢]$ و $[٢، ٤]$

$ق$ متناقصة $[-٢، ٢]$

$(-٢، ١٦)$ قيمة عظمى محلية وطلقة

$(٢، -١٦)$ قيمة صغرى محلية وطلقة

$ق(٤) = ١٦$ قيمة عظمى وطلقة

$ق(-٤) = -١٦$ صغرى وطلقة

وزارة (٢٠١٧) صيفي

لتكن $ق(س) = س^2 + \frac{٤٨}{س}$ $س \neq ٠$

حيث كلا مما يأتي

① فترات التزايد والتناقص

② القيم القصوى.

الحل

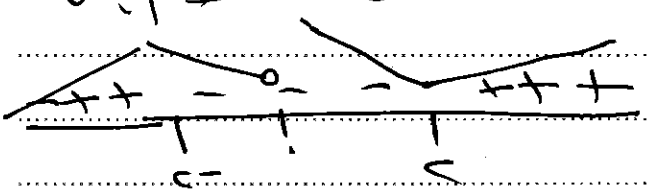
$ق'(س) = ٢س - \frac{٤٨}{س^2} = ٠$

$\frac{٢س^3 - ٤٨}{س^2} = ٠$

$٢س^3 - ٤٨ = ٠ \Leftarrow س^3 = ٢٤$

$س = \sqrt[3]{٢٤} = ٣$

الحرج: $س = ٠$ لا $\in$ ل



$ق$ متزايدة $(-\infty، ٠]$ و $[٣، \infty)$

$ق$ متناقصة $[-٣، ٠)$ و $(٠، ٣]$

$ق(-٣)$ قيمة عظمى محلية

$ق(٣)$ قيمة صغرى محلية

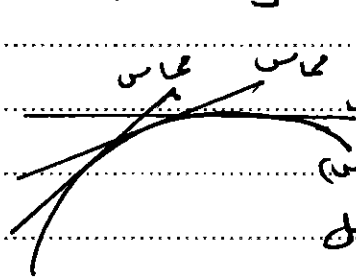
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

التقعر

تعريف

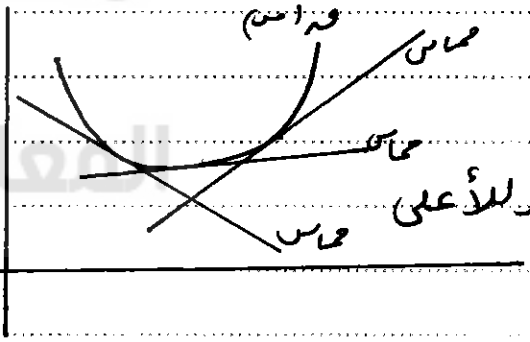
اذا كان هـ اقترانًا هرمًا على الفترة $[أ، ب]$، وما بلا للأشتقاقه على الفترة $(أ، ب)$ فيكون هـ :

١) مقعرًا للأسفل على الفترة $[أ، ب]$ اذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى هـ في الفترة $[أ، ب]$



مقعر للأسفل

٢) مقعرًا للأعلى على الفترة $[أ، ب]$ اذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى هـ في الفترة $[أ، ب]$



مقعر للأعلى

اختبار التقعر

اذا كان هـ اقترانًا متصلاً على الفترة $[أ، ب]$، وكان لكل س ∈ $(أ، ب)$، هـ(س) معرفين على الفترة $(أ، ب)$ فإنه

١) يكون منحنى الاقتران هـ مقعرًا للأسفل على الفترة $[أ، ب]$ اذا كان هـ"(س) > ٠ لكل س ∈ $(أ، ب)$

٢) يكون منحنى الاقتران هـ مقعرًا للأعلى على الفترة $[أ، ب]$ اذا كان هـ"(س) < ٠ لكل س ∈ $(أ، ب)$

خطوات ايجاد مجالات التقعر

١) نجد المشتقة الثانية ونجد اصفارها

٢) نعين الاصفار على خط الاعداد

٣) نحدد اشارة المشتقة الثانية على خط الاعداد

٤) هـ"(س) > ٠ ⇒ مقعر للأعلى
هـ"(س) < ٠ ⇒ مقعر للأسفل

مكتبة السوسان AL WESAM

نقطة الأنعطاف

مثال ①

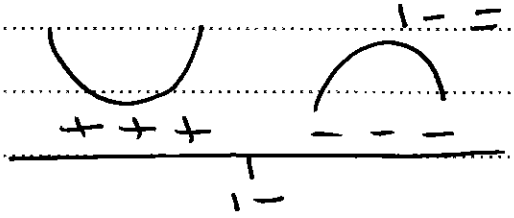
جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الأقتران فـ حيث فـ(س) = ٢ - ٢س - س³

الحل

فـ'(س) = - ٦س - ٣س²

فـ''(س) = - ٦ - ٦س = ٠

س = - ١



تقعر للأعلى]-∞، -١[

تقعر للأسفل]-١، ∞[

مثال ②

جد فترات التقعر للاسفل وللأعلى لمنحنى الأقتران فـ حيث فـ(س) = س⁴ - ٤س³

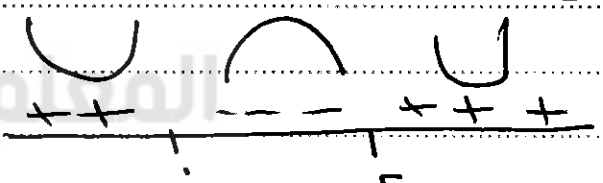
الحل

فـ'(س) = ٤س³ - ١٢س²

فـ''(س) = ١٢س² - ٢٤س = ٠

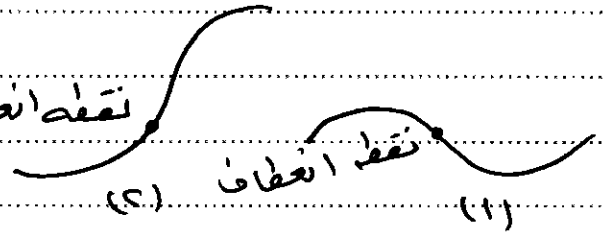
١٢س(س - ٢) = ٠

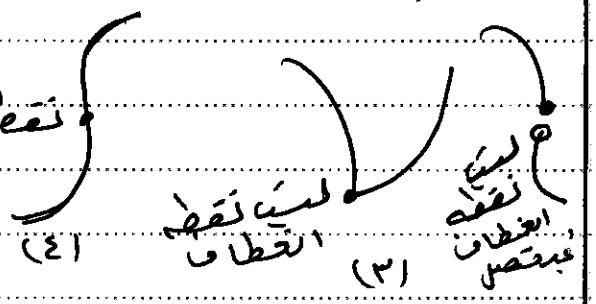
س = ٠ ، س = ٢



تعريف

اذا كان فـ اقترانا متصلا على فترة مفتوحة تحوي س١ ، وكان منحنى فـ يغير اتجاه تقعره عند س١ فإن النقطة (س١ ، فـ(س١)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى فـ .





نلاحظ ان الماس عند نقطة الانعطاف تقطع منحنى الأقتران لأنه المنحنى في احدى جهتي هذه النقطة يقع تحت الماس وفي الجهة الأخرى يقع فوقه الماس

لا يوجد نقطة انعطاف في الشكل رقم (٣) لعدم وجود ماس عند النقطة

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام ناجح الجمزاوي

مثال ①

جد فترات التقعر للأعلى والأسفل ونقط الانعطاف للأقترانات $ق(س) = س^٤ - ٦س^٢ + ١$

$س \in ح$

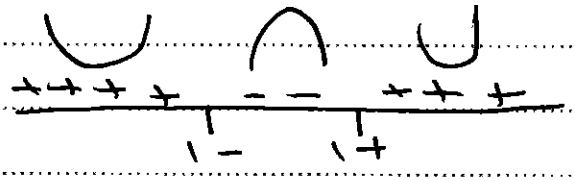
الحل

$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٢س$

$ق''(س) = ١٢س^٢ - ١٢ = ٠$

$١٢(س^٢ - ١) = ١٢(س-١)(س+١) = ٠$

$س = ١ ، س = -١$



مقعر لأعلى $(-\infty ، -١] \cup [١ ، \infty)$

مقعر للأسفل $[-١ ، ١]$

نقط الانعطاف

$(-١ ، ق(-١)) = (-١ ، -٤)$ ، $(١ ، ق(١)) = (١ ، -٤)$

مثال ②

$ق(س) = ه^{س} - جاس$ حيث $س \in [٠ ، ٢\pi]$

جد مجالات التقعر ونقط الانعطاف

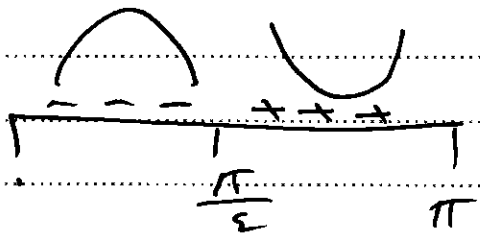
الحل

$ق'(س) = ه^{س} - جاس$

$ق''(س) = ه^{س} - جتاس = ٠$

$\Leftarrow جاس = ه^{س}$

$س = \frac{\pi}{٤}$



مقعر لأعلى $[\frac{\pi}{٤} ، ٢\pi]$

مقعر للأسفل $[٠ ، \frac{\pi}{٤}]$

نقطة الانعطاف $(\frac{\pi}{٤} ، ق(\frac{\pi}{٤}))$

$= (\frac{\pi}{٤} ، ٠)$

مثال ③

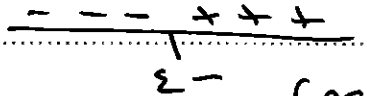
$ق(س) = (س+٤)^{\frac{٣}{٢}} + ٢$

أوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف

الحل

$ق(س) = \sqrt{(س+٤)^٣} + ٢$

نجد المجال



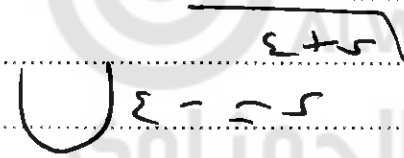
$س \in [-٤ ، \infty)$

$ق'(س) = \frac{٣}{٢}(س+٤)^{\frac{١}{٢}}$

$ق''(س) = \frac{٣}{٤}(س+٤)^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{٣}{٤\sqrt{س+٤}}$

$س+٤ = ٠ \Rightarrow س = -٤$



مقعر للأعلى $[-٤ ، \infty)$

لا يوجد نقط انعطاف

مكتبة الهدف
ALHADAF
الأستاذ : ناجح الجمزاوي

مثال ④

$ق(س) = س^{٢} + \frac{١}{ك}$ ، $ك \neq ٠$

جد فترات التقعر ونقط الانعطاف

الحل

$ق(س)$ غير معرف عند $س = ٠$

$ق'(س) = ٢ك - \frac{١}{ك^{٢}}$

$ق''(س) = ٢ + \frac{٢ك}{ك^{٤}}$

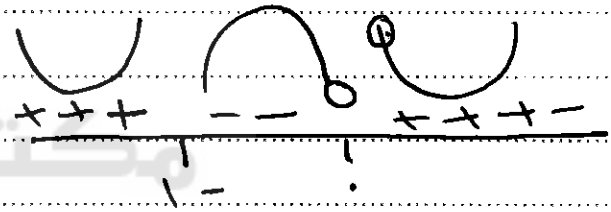
$= ٢ + \frac{٢}{ك^{٣}} = \frac{٢ك^{٣} + ٢}{ك^{٣}} = ٠$

$\Leftarrow ٢ك^{٣} + ٢ = ٠$

بالضرب التبادلي $٢ك^{٣} = -٢$

$ك^{٣} = -١$ $\boxed{ك = -١}$

بإضافة المقام $س = ٠$ تجعل غير معرف



مقعر للأعلى $[-١، ٠) \cup (٠، \infty)$

مقعر للأسفل $(-\infty، -١]$

نقطة انعطاف $(-١، ٠)$

مثال ⑤

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٨ & س \leq ٢ \\ ٤س - ١٢ & س > ٢ \end{cases}$

جد مجالات التقعر

الحل

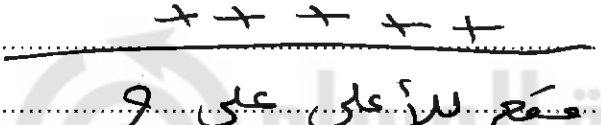
متصل عند $س = ٢$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ك \neq ٢ \\ \text{غير موجودة} & ك = ٢ \\ ٤ & س > ٢ \end{cases}$

$ق''(س) = \begin{cases} ٢ & ك \neq ٢ \\ \text{غير موجودة} & ك = ٢ \\ ٠ & س > ٢ \end{cases}$

لا يوجد نقط انعطاف

$ق'(س)$ دائماً موجب



مقعر للأعلى على $ح$

مكتبة العلم ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$هـ(س) = |س^2 - 9|$ اوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف

الحل

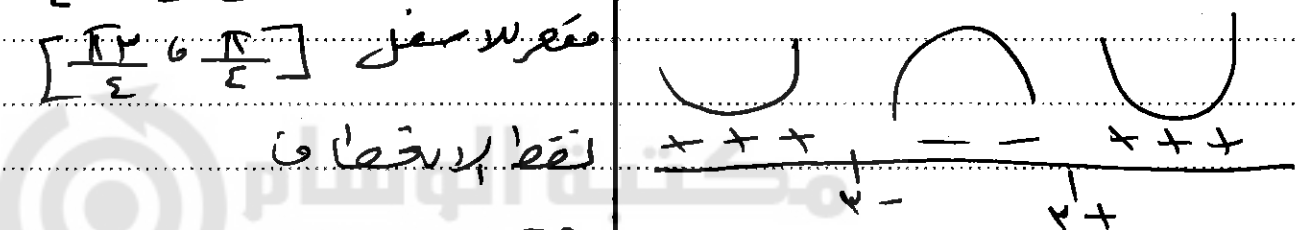
نعيد التعريف $س^2 - 9 = 0$

$\Leftarrow س = \pm 3$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 - 9 & س \le -3 \text{ أو } س \ge 3 \\ 9 - س^2 & -3 < س < 3 \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} 2س & س < -3 \text{ أو } س > 3 \\ \text{غير موجودة} & س = -3 \text{ أو } 3 \\ -2س & -3 < س < 3 \end{cases}$$

$$هـ''(س) = \begin{cases} 2 & س < -3 \text{ أو } س > 3 \\ \text{غير موجودة} & س = -3 \text{ أو } 3 \\ -2 & -3 < س < 3 \end{cases}$$



مقعر للاعلى $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

للاسفل $[-3, 3]$

نقط الانعطاف

$(3, هـ(3)) = (3, 0)$ ، $(-3, هـ(-3)) = (-3, 0)$

مثال ⑦

$هـ(س) = 1 + جتا^2 س - جا^2 س$

$س \in [0, 2\pi]$

جد فترات التقعر ونقط الانعطاف

الحل

$هـ'(س) = 2جتاس \times -جاس + 2جاس جتاس$

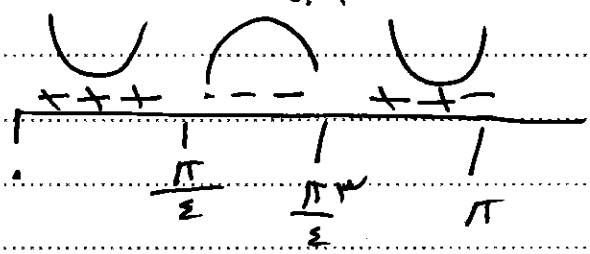
$= -2جاس جتاس + 2جاس جتاس$

$= 0$

$هـ''(س) = 2جتاس = 0$

$س = \frac{\pi}{2}$ أو $2س = \pi$ أو $2س = 3\pi$

$س = \frac{\pi}{4}$ أو $س = \frac{3\pi}{4}$ على $[0, 2\pi]$



مقعر للأعلى $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$

مقعر للاسفل $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

نقط الانحطاف

$(\frac{\pi}{4}, هـ(\frac{\pi}{4})) = (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

$(\frac{3\pi}{4}, هـ(\frac{3\pi}{4})) = (\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2})$

مثال ⑧

$ق(س) = س^{\frac{1}{3}}$ $س \in ح$

اوجد فترات التقعر

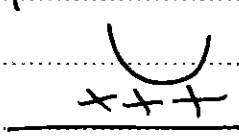
الحل

$ق'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}}$

$ق''(س) = -\frac{2}{9} س^{-\frac{5}{3}}$

$= \frac{-2}{\sqrt[3]{9 س^5}}$

المقام $= 0 \Leftarrow س = 0$ المجال



مقعر للأعلى $(-\infty, 0]$

للأسفل $[0, \infty)$

$(0, 0)$ نقطة انعطاف

مثال ⑨

$ق(س) = \sqrt{16 - س^2}$

المجال

$ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{16 - س^2}}$

$ق'(س) = \frac{-س}{\sqrt{16 - س^2}} \times \frac{\sqrt{16 - س^2}}{\sqrt{16 - س^2}}$

$= \frac{-س^2}{\sqrt{(16 - س^2)^3}}$

$ق''(س) = \frac{-\sqrt{16 - س^2} \times 2س - (-س^2) \times \frac{-2س}{2\sqrt{16 - س^2}}}{(16 - س^2)}$

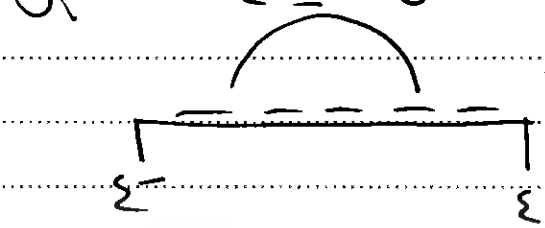
$= \frac{-32س + س^3 - س^3}{(16 - س^2)\sqrt{16 - س^2}}$

$= \frac{-32س}{\sqrt{(16 - س^2)^3}}$

$= \frac{-16}{\sqrt{(16 - س^2)^3}}$

المقام $= 0 \Leftarrow 16 - س^2 = 0$

$س = \pm 4 \in$ المجال



مقعر للأسفل $[-4, 4]$

لا يوجد نقط انعطاف

مكتبة الهدف
المعلم : ناجح الجمزاوي

ملاحظة

اذا كانت (أ، ب) تمثل نقطة انعطاف فان

① $ق(أ) = ب$

② $ق'(أ) = 0$ أو $ق'(أ)$ غير موجودة

وكذلك اذا كان ق كثير حدود فان $ق'(أ) = صفر$

③ اذا كان لـ انعطاف افقي فان $ق'(أ) = صفر$

مثال ①

اذا كان لمنحنى $ق(س) = أس^3 + 6س^2 + ب$ نقطة انعطاف عند (١، ٥) فجد قيمة أ، ب

الحل

$ق'(س) = 3أس^2 + 12س$

$ق''(س) = 6أس + 12$

$ق''(١) = 0 \Leftarrow 6أ + 12 = 0$

$\Leftarrow أ = \frac{-12}{6} = -2$

لكن $ق(١) = 0$

$= أ + 6 + ب = 0$

بتعويض $أ = -2$

$-2 + 6 + ب = 0 \Leftarrow ب = -4$

مثال ②

جد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر بالنقطة (٠، ٥) وتكون منه (١، ٣٠٦) نقطة انعطاف افقية

الحل

$ق(س) = أس^3 + بس^2 + جس + د$

$ق'(س) = 3أس^2 + 2بس + ج$

$ق''(س) = 6أس + 2ب$

$ق''(١) = 0$

$6أ + 2ب = 0$

$ق(٠) = 5$

$د = 5$

$ق(١) = 3$

$أ + ب + ج + د = 3 \quad ... ①$

$ق(١) = 0$ نقطة انعطاف افقية

$3أ + 2ب + ج = 0 \quad ... ②$

$ق'(١) = صفر$

$6أ + 2ب = 0 \quad ... ③$

معادلة ① - ⑤

$-أ - ب - ج = 3 - 5$

$-أ - ب - ج = -2 \quad ... ④$

$6أ + 2ب = 0$

$-2أ - 2ب - 2ج = -4$

$6أ + 2ب = 0$

$4أ - 2ج = -4$

$2أ = 4 \quad أ = 2$ نعوضها في ②

$6 + 2ب = 0$

$-12 + 2ب = 0$

$ب = 6$ نعوضها في ① $\Leftarrow ج = -6$

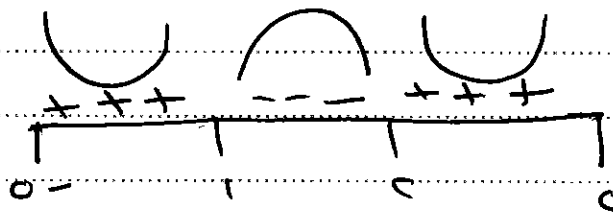
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٩٨

جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق حيث
ق(س) = س⁴ − ٦س³ + ١٢س²
س ∈ [−٥، ٥]

الحل
ق'(س) = ٤س³ − ١٨س² + ٢٤س
ق''(س) = ١٢س² − ٣٦س + ٢٤ = ٠
١٢(س² − ٣س + ٢) = ٠
١٢(س − ٢)(س − ١) = ٠
س = ٢ ، س = ١

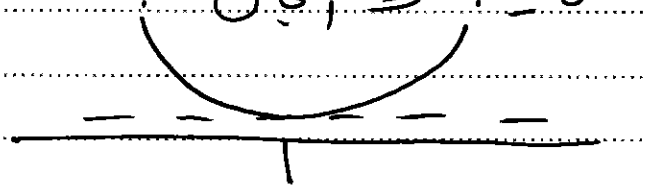


مقعر للأعلى [−٥، ١] ، [٢، ٥]
مقعر للأسفل [١، ٢]

تدريب ② ص ١٩٩

ليكن ق(س) = س^(٤/٣) حدد مجالات التقعر لمنحنى ق.

الحل
ق'(س) = (٤/٣) س^(١/٣)
ق''(س) = (٤/٩) س^(−٢/٣) = (٤/٩) / (٩√س⁴)
س = ٠ ∉ المجال



مقعر للأسفل على ح

تدريب ③ ص؟

اذا كان ق(س) = ٦س³ − س⁴
جد نقط الانعطاف

الحل
ق'(س) = ١٨س² − ٤س³
ق''(س) = ٣٦س − ١٢س² = ٠
١٢س(٣ − س) = ٠
س = ٠ ، س = ٣

نقط الانعطاف ٣
(٠، ق(٠)) = (٠، ٠)
(٣، ق(٣)) = (٣، ٨١)

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ④ ص ١٠٢

اذا كان $ق(س) = ٢ جتا س + \frac{١}{٢} جا ٢س$

$س \in [٠ ، ٢\pi]$ جد نقط الانعطاف

الحل

$ق'(س) = -٢ جا س + ٢ جتا ٢س$

$ق''(س) = -٢ جتا س - ٤ جا ٢س = ٠$

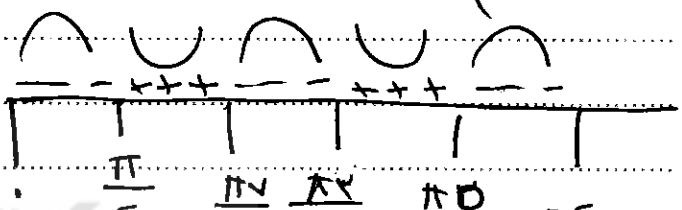
$-٢ جتا س (١ + ٢ جا س) = ٠$

$جتا س = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$ $س = \frac{٣\pi}{٢}$

$١ + ٢ جا س = ٠ \Leftarrow جا س = -\frac{١}{٢}$

$س = ٢١٠° = \frac{٧\pi}{٦}$ $س = ٣٣٠° = \frac{١١\pi}{٦}$



نقط حرجة

عند $س = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٧\pi}{٦} ، \frac{١١\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٤}$

مكتبة الهسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

ايجاد مجالات التقعر من الرسمة

① رسمة $ق'(س)$

يكون من الشكل مباشر ∩

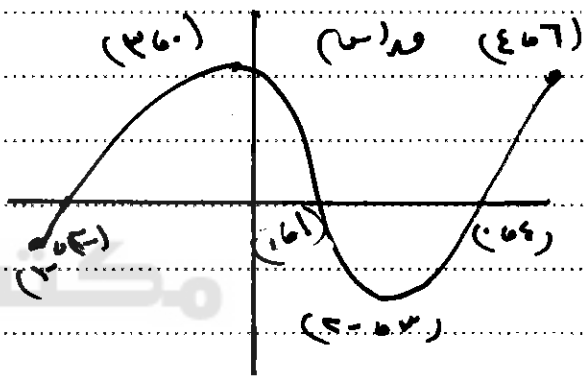
مقعر للاسفل

مقعر للأعلى

مثال ①

عمل الشكل المجاور منحنى $ق(س)$ وهو كثير حدود من الدرجة الثالثة المعرف على $[-٢، ٦]$ اوجد فترات

التقعر ونقط الانحطاف



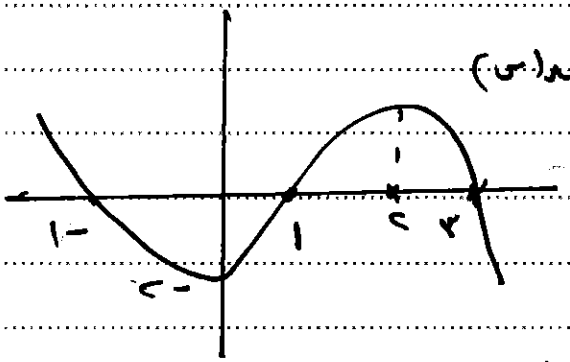
مقعر للأعلى $[١، ٦]$

مقعر للاسفل $[-٢، ١]$

$(١، ٠)$ نقطة انحطاف

مثال ②

الشكل المجاور يمثل منحنى $ق(س)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة اوجد مجالات التقعر ونقط الانحطاف



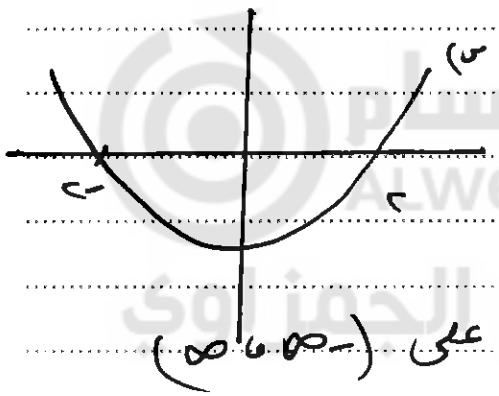
مقعر للاعلى $(-∞، ١]$

مقعر للاسفل $[١، ∞)$

نقطة الانحطاف $(١، ٠)$

مثال ③

الشكل المجاور يمثل $ق'(س)$ أوجد مجالات التقعر



مقعر للاعلى $(-∞، ٢]$

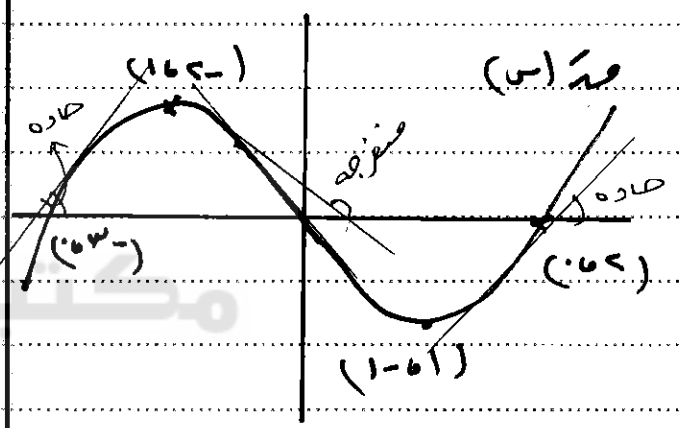
مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

② رسم ق(س)

لتحديد إشارة ق'(س) وذلك عن طريق رسم مماسات لـ ق(س) فإذا كان المماس يصنع زاوية حادة تكون ق'(س) موجبة، وإذا كان المماس لـ ق(س) يصنع زاوية منفرجة تكون ق'(س) سالبة

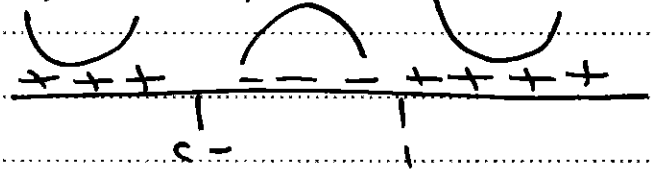
مثال ①

بالاعتماد على الشكل المقابل الذي يمثل منحنى ق(س) حيث ق(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة وتعرف على ح أوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



لو رسمنا مماسات فنلاحظ أنها تصنع زاوية حادة وفي الفترة]-∞، ١-[زاوية منفرجة]١-، ٢[حادة

فتكون إشارة المشتقة الثانية

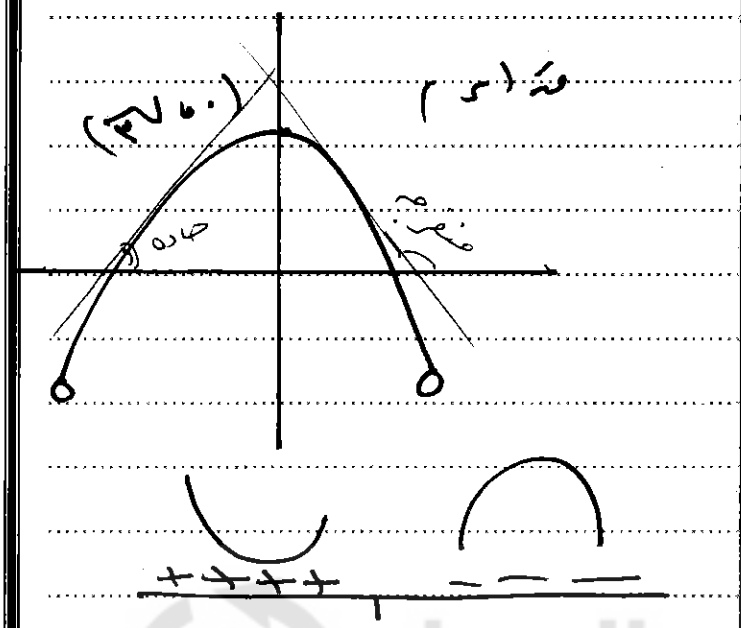


(١-، ٠) ، (٢، ٠) نقط الانعطاف

مثال ②

الشكل المجاور يمثل ق(س)

أوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



تقعر للأعلى]-∞، ١[

تقعر للأسفل]١، ∞[

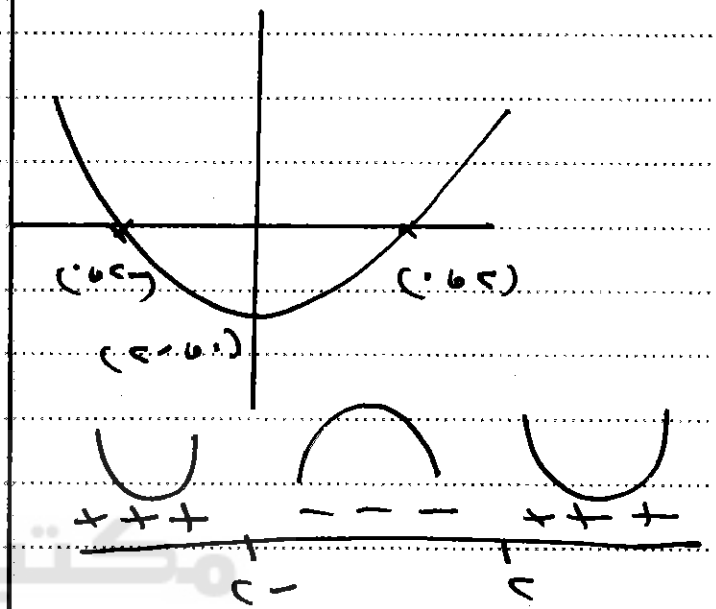
(١، ٥) نقطة انعطاف

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

③ اذا كانت لرسمة $ق'(س)$

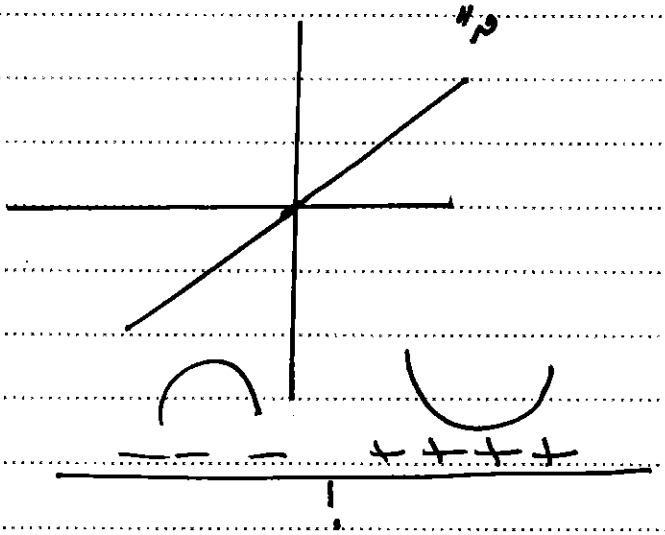
يتم ايجاد مجالات التقعر وذلك بتضيير الرسمة على خط الاعداد بحيث انه فوقه محور اشارات تكون $ق''$ موجبة، تحت محور اشارات تكون $ق''$ سالبة، ونقط تقاطع منحنى $ق''$ مع محور اشارات هي نقط انعطاف

مثال ①
بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق''$ اوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



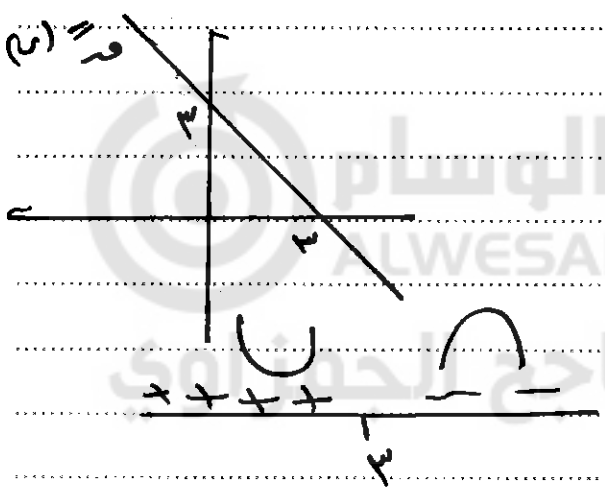
مقعر للأعلى $(-\infty، -٢] \cup [٢، \infty)$
للأسفل $[-٢، ٢]$
نقط الانعطاف
$(-٢، ق(-٢))$ $(٢، ق(٢))$

مثال ②
بالاعتماد على الشكل الجانبي الذي يمثل منحنى $ق'(س)$ اوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



مقعر للأعلى $[١، \infty)$
للأسفل $(-\infty، ١]$

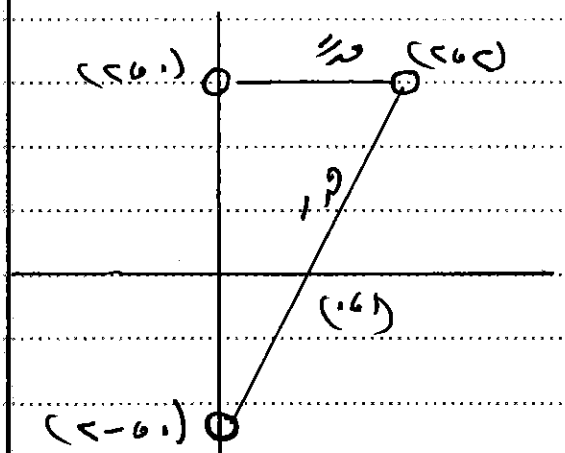
مثال ③
يمثل الرسم المجاور $ق''$ اوجد مجالات التقعر ونقط الانعطاف



مقعر للاعلى $(-\infty، ٣] \cup [٣، ٥)$ للأسفل $[٢، ٥)$
$(٣، ق(٣))$ نقطة انعطاف

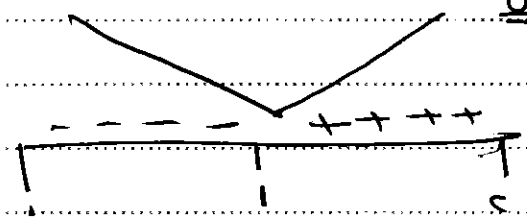
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④
الشكل المجاور يمثل منحنى
$هـ(س)$ و $هـ'(س)$ للأقتران $ف(س)$
المعرف على الفترة $[-٢,٥]$ اجب
عن الأسئلة التالية



① مجالات التزايد والتناقص
للأقتران $ف(س)$

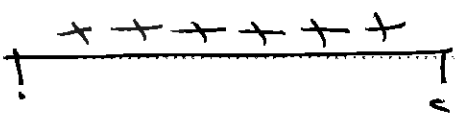
الحل



فتزايد $[١,٤]$ وتناقص $[-٢,١]$

② القيم القصوى
عند $س = ١$ يوجد صغرى مطلقة

③ مجالات التقعر



مقعر لأعلى $[٠,٥]$

مكتبة الهسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى

تعريف

اذا كانت هـ(س)، هـ'(س) معرفتان عند س١ ∈ (أ، ب) فان :-

① اذا كان هـ'(س١) = ٠ وكان هـ''(س١) > ٠ فان للاقتران هـ قيمة صغرى محلية عند س١ وهي هـ(س١)

② اذا كان هـ'(س١) = ٠ وكان هـ''(س١) < ٠ فان للاقتران هـ قيمة عظمى محلية عند س١ وهي هـ(س١)

③ اذا كان هـ'(س١) = ٠ وكان هـ''(س١) = صفر فان اختبار المشتقة الاولى هو الحل

الخطوات

نجد القيم القصوى من المشتقة الثانية كالتالي

① نجد اصفار المشتقة الاولى فقط

② نجد المشتقة الثانية ونعوض اصفار المشتقة الاولى فيها فاذا كان

أ) هـ''(ج) = ٠ هـ'(ج) ≠ ٠
عند س = ج قيمة صغرى

ب) هـ''(ح) = ٠ هـ'(ح) > ٠
عند س = ح قيمة عظمى

ج) هـ''(ك) = ٠ هـ'(ك) = ٠
نفشل

ملاحظة

اذا نص السؤال على استخدام اختبار المشتقة الثانية فيجب ان يحل السؤال بهذه الطريقة

المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ①
لكل من الاقترانات التالية جد القيم العظمى والصغرى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية

① $ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣} + ١$

الحل
$ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$
$٦س - ٣س^{٢} = ٠$
$٣س(٢ - س) = ٠$
$س = ٠ \quad س = ٢$

$ق''(س) = ٦ - ٦س$
$ق''(٠) = ٦ - ٦ \times ٠ = ٦ > ٠$ ∴ قيمة صغرى محلية
$(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ١)$

$ق''(٢) = ٦ - ٦ \times ٢ = ٦ - ١٢ = -٦ < ٠$
∴ قيمة عظمى محلية
$(٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٥)$

② $ق(س) = س + \frac{٤}{س}$ $س \neq ٠$

الحل
$ق'(س) = ١ - \frac{٤}{س^{٢}} = ٠$
$١ = \frac{٤}{س^{٢}} \Leftarrow س^{٢} = ٤$
$\Leftarrow س = \pm ٢$
$ق''(س) = \frac{-٤ \times ٢س}{س^{٤}}$
$ق''(س) = \frac{٨}{س^{٣}}$
$ق''(٢) = \frac{٨}{٨} = ١ > ٠$
∴ قيمة صغرى محلية
$(٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٤)$
$ق''(-٢) = \frac{٨}{-٨} = -١ < ٠$
∴ قيمة عظمى محلية
$(-٢ ، ق(-٢)) = (-٢ ، -٤)$

③ $ق(س) = س^{٢} - ٦س$
$ق'(س) = ٢س - ٦ = ٠$
$س = ٣$
$ق''(س) = ٢ > ٠$
∴ قيمة صغرى محلية $(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، -٩)$

④ $ق(س) = س^{٤}$
$ق'(س) = ٤س^{٣} = ٠$
$\Leftarrow س = ٠$
$ق''(س) = ١٢س^{٢}$
$ق''(٠) = ٠$ لفشل اختبار المشتقة الأولى لذلك نعود لاختبار المشتقة الأولى

	-	+
	٠	

∴ قيمة صغرى محلية وطلقة عند $س = ٠$
$(٠ ، ٠)$

مكتبة الهدى
ALHUDA
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ $ق(س) = |س-١| - |س+١| + س^2$

نعيد تعريف الدالة

	$س-١$	$س+١$
$س-١$	$-(س-١)$	$-(س-١)$
$س+١$	$(س-١)$	$(س+١)$

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + س - ٣ & س \geq ١ \\ س^2 - ٣س + ١ & -١ \leq س < ١ \\ س^2 + س - ٣ & س < -١ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & س > ١ \\ ٢س - ٣ & \text{اذا كان } -١ < س < ١ \\ ٢س + ١ & س < -١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ ، -١ \end{cases}$$

$٢س - ١ = ٠ \Rightarrow س = \frac{١}{٢} \notin (-\infty ، -١)$

$٢س - ٣ = ٠ \Rightarrow س = \frac{٣}{٢} \notin (-١ ، ١)$

$٢س + ١ = ٠ \Rightarrow س = -\frac{١}{٢} \notin (١ ، \infty)$

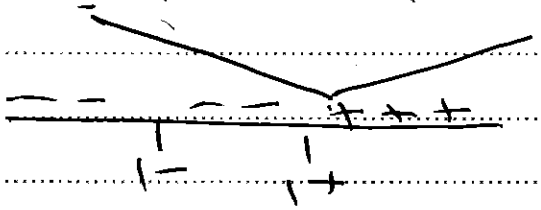
$\Leftarrow$ لا يوجد اصفار للمشتقة

$\Leftarrow$ لا يوجد قيم حرجة

لذلك اذا اردنا ايجاد القيم

القصوى عند $س = -١ ، ١$

(اله وجيت) تذهب لاختبار المشتقة الاولى لانه اختبار المشتقة الثانية فشل لان $ق'(١)$ و $ق'(-١)$ غير موجودة



عند $س = ١$ اعظمي محلي مطلق $(١ ، ٠)$

مثال ⑥

جد القيم القصوى المحلية للدالة $ق(س) = جا س - \sqrt{٣}$ جتا س باستخدام اختبار المشتقة الثانية على $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

$ق'(س) = جتا س + \sqrt{٣}$ جا س $= ٠$

$\frac{جا س}{جتا س} = -\frac{١}{\sqrt{٣}} \leftarrow ظا س = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

$س = \frac{٥\pi}{٦}$ و $\frac{١١\pi}{٦}$

$ق''(س) = -جا س + \sqrt{٣}$ جتا س

$ق''(\frac{٥\pi}{٦}) =$ سالب $\Rightarrow$ عظمى محلية

$ق''(\frac{١١\pi}{٦}) =$ موجب $\Rightarrow$ صغرى محلية

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

ص٢٠٢

السؤال الأول

حدد فترات التقعر لكل من منحنيات الدوال التالية:

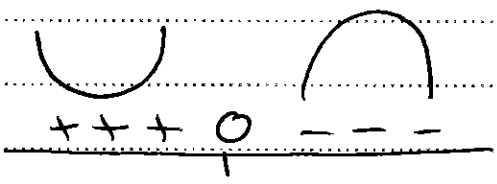
(أ) $هـ(س) = س + \frac{٤}{س}$

الحل

$هـ'(س) = ١ - \frac{٤}{س^٢}$

$هـ''(س) = \frac{-٤ \times ٢س}{س^٤} = \frac{-٨}{س^٣}$

المقام = ٠ ⟹ $س = ٠ \notin$ المجال



مقعر للأعلى $(-\infty, ٠)$

مقعر للأسفل $(٠, \infty)$

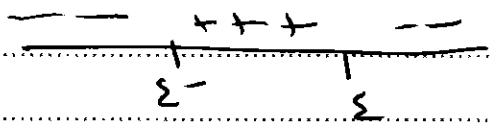
لا يوجد نقط انعطاف

$٠ \notin$ المجال

(ب) $هـ(س) = \sqrt{١٦ - س^٢}$

الكل

المجال



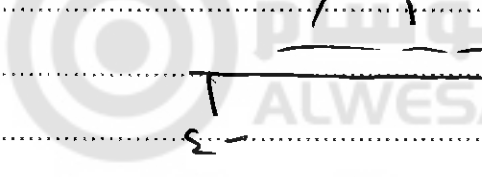
$هـ'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦ - س^٢}}$

$هـ''(س) = \frac{-١ \times \sqrt{١٦ - س^٢} - (-س) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦ - س^٢}}}{(\sqrt{١٦ - س^٢})^٢}$

$= \frac{-١٦ + س^٢ - س^٢}{(١٦ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

المقام = ٠ ⟸ $١٦ - س^٢ = ٠$

$س = \pm ٤ \in$ المجال



مقعر لأسفل $[-٤, ٤]$

لا يوجد نقط انعطاف

مكتبة الوسام ALWESAM

السؤال الأول

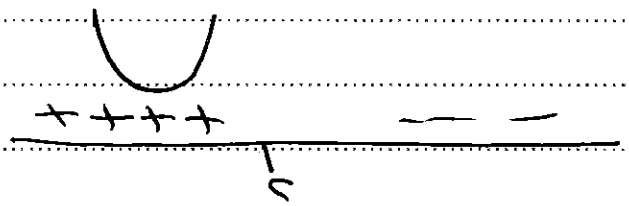
(ج)

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - ١ & س < ٢ \\ ٥ - س & س \geq ٢ \end{cases}$$

متصل عند $س = ٢$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & س = ٢ \\ -١ & س > ٢ \end{cases}$$

$$ق''(س) = \begin{cases} ٢ & س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & س = ٢ \\ \text{صفر} & س > ٢ \end{cases}$$



مقعر للأعلى $(-\infty, ٢]$
لا يوجد نقط انعطاف

(د)

$$هـ(س) = \left(\frac{س - ١}{س}\right)^2$$

الحل

$$هـ(س) = \left(١ - \frac{١}{س}\right)^2$$

$$هـ'(س) = ٢\left(١ - \frac{١}{س}\right)\left(\frac{+١}{س^2}\right)$$

$$هـ''(س) = ٢\left(\frac{١}{س^2} - \frac{١}{س^3}\right)$$

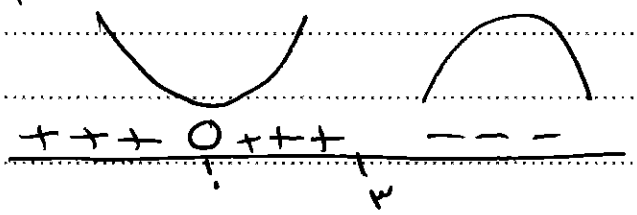
$$هـ''(س) = ٢\left(\frac{-س}{س^4} + \frac{٣}{س^3}\right)$$

$$= ٢\left(\frac{-س}{٤س} + \frac{٣}{٤س}\right)$$

$$= ٢\left(\frac{٣ - س}{٤س}\right)$$

البسط = صفر $\Rightarrow س = \frac{٣}{٢}$

المقام = صفر $\Rightarrow س = ٠$ لا يحقق



$س = \frac{٣}{٢}$ نقطة انعطاف

(هـ)

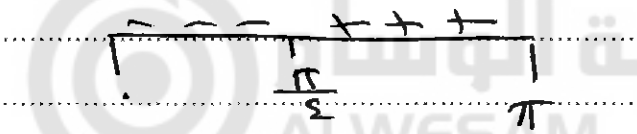
$ق(س) = جتا س - جا س + ١ \quad س \in [٠, ٢\pi]$

الحل

$ق'(س) = -جا س - جتا س$

$ق''(س) = -جتا س + جا س = ٠$

$جا س = جتا س \Rightarrow س = \frac{\pi}{٤}$



مقعر للأعلى $[\frac{\pi}{٤}, ٢\pi]$

مقعر للأسفل $[٠, \frac{\pi}{٤}]$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) لكل من منحنيات الاقترانات الآتية

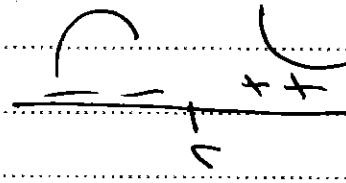
(أ) $ق(س) = س^٢ - ٦س^٢ + ٩س + ٢$
$س \in ح$

الحل

$ق'(س) = ٣س^٤ - ١٢س + ٩$

$ق''(س) = ٦س - ١٢ = ٠$

$س = ٢$



نقطة الانعطاف $(٢، ق(٢))$

(ب) $ق(س) = س^{\frac{٤}{٣}} - س^{\frac{١}{٢}}$ $س \in ح$

الحل

$ق'(س) = \frac{٤}{٣}س^{\frac{١}{٣}} - \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}}$

$ق''(س) = \frac{٤}{٩}س^{-\frac{٢}{٣}} + \frac{١}{٤}س^{-\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{٤}{٩س^{\frac{٢}{٣}}} + \frac{١}{٤س^{\frac{٣}{٢}}}$

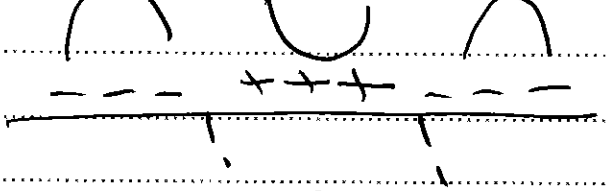
$= \frac{٤س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س^{\frac{٢}{٣}}}{٣٦س^{\frac{٧}{٦}}}$ بوضع المقام

$-٤س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س^{\frac{٢}{٣}} = ٠$

$٤س^{\frac{٤}{٣}}(\frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}} - ١) = ٠$

$س = ٠ \quad س^{\frac{١}{٢}} = ١$

$س = ١$ مجال $س = ١ \in$ مجال



نقطة الانعطاف
$(٠، ق(٠))$ ، $(١، ق(١))$

(ج) $ق(س) = س^{\frac{٣}{٥}}$ $س \in ح$

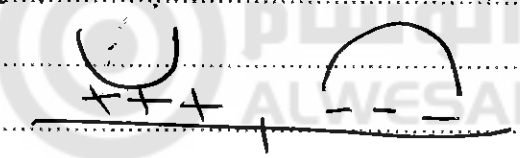
الحل

$ق'(س) = \frac{٣}{٥}س^{-\frac{٢}{٥}}$

$ق''(س) = -\frac{٦}{٢٥}س^{-\frac{٧}{٥}}$

$= \frac{-٦}{٢٥س^{\frac{٧}{٥}}}$

المقام $= ٠$ $س = ٠ \in$ مجال



نقطة الانعطاف $(٠، ق(٠))$

السؤال الثاني

(ج) $ق(س) = س - ظا س$

$س \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

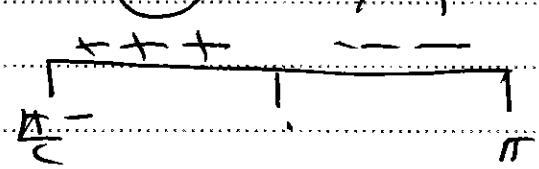
الحل

$ق'(س) = ١ - ظا^٢ س$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow -ظا^٢ س = ٠$

$\frac{-٢ جا س}{جتا^٣ س} = -٢ \times \frac{١}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س}$

$-٢ جا س = ٠ \Leftarrow جا س = ٠$



(٠، ٠) نقطة انعطاف

السؤال الثالث

جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكل من الاقترانات الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن ذلك

(ب) $ق(س) = جا س - جتا س$ $[٠، ٢\pi]$

الحل

$ق'(س) = جتا س + جا س$

$ق'(س) = جتا س - جا س$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow جتا س = جا س$

$س = \frac{\pi}{٤}$ $س = \frac{٥\pi}{٤}$

$ق''(س) = -جا س + جتا س$

$ق''(\frac{\pi}{٤}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$

$ق''(\frac{٥\pi}{٤}) = +\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} > ٠$

يمثل صغرى محلية

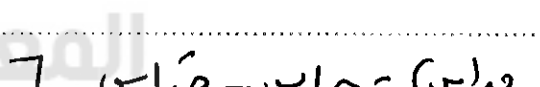
(أ) $ق(س) = س^٤$ $س \in ح$

الحل

$ق'(س) = ٤س^٣ = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ق''(س) = ١٢ س^٢$

$ق''(٠) = ٠$ يفشل اختبار المشتقة الثانية ناجأ الى اختبار المشتقة الاولى



$س = ٠$ يمثل صغرى مطلقة

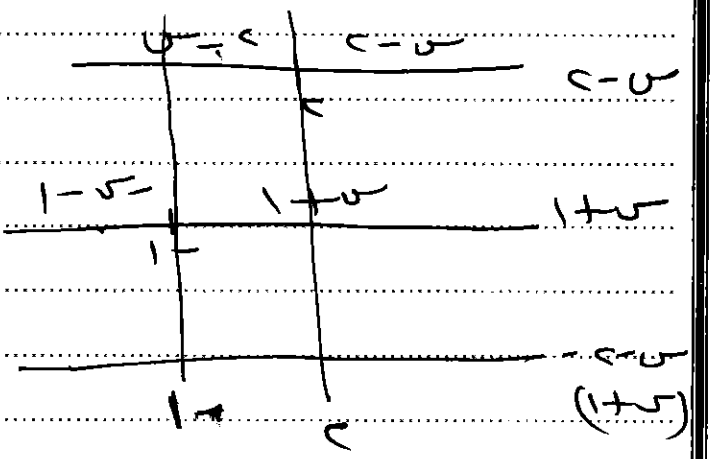
ALWESAM
الموقع : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(ج) $ق(س) = |س-٢| - |س+١| + س$

$س \in ح$

بعيد التعريف



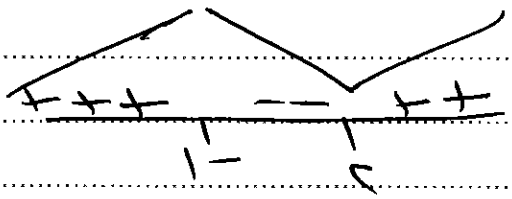
$ق(س) = \begin{cases} -س+٢+س+١+س & س \leq -١ \\ -س+٢-س-١+س & -١ < س < ٢ \\ س-٢-س-١+س & س \geq ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} س+٣ & س \leq -١ \\ -س+١ & -١ < س < ٢ \\ س-٣ & س \geq ٢ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} ١ & س \leq -١ \\ -س+١ & -١ < س < ٢ \\ ١- & س \geq ٢ \end{cases}$

لا يوجد اصفار للمنحنى

تقدم اختبار المشتق الأول



عند $س = -١$ يحقق عظمى محلية

$س = ٢$ يحقق صغرى محلية

(د) $ق(س) = س^٢ + \frac{١٢٨}{س}$ $\quad س \neq ٠$

الحل

$ق'(س) = ٢س - \frac{١٢٨}{س^٢} = ٠$

$٢س = \frac{١٢٨}{س^٢} \Leftarrow ٢س^٣ = ١٢٨$

$س^٣ = ٦٤ \leftarrow س = ٤$

$ق''(س) = ٢ + \frac{٢ \times ١٢٨}{س^٣}$

$= ٢ + \frac{٥١٢}{س^٣}$

$ق''(٤) = ٢ + \frac{٥١٢}{٦٤}$

$= ٢ + ٨ = ١٠ > ٠$

يحقق صغرى محلية

مكتبة الهندسة ALWESAM
الهندسة : ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع ص٢٠٣

عين قاعدة الاقترانين
$ق(س) = أس^3 + ب س^2 + جـ س + د$
الذي يمر منحناه بالنقطة (١،٥)
ومماس المنحنى ٥ عند
نقطة انعطاف (٢،١٥) هي
$ص + ٣س - ٧ = ٠$

الحل
يمر بالنقطة (١،٥)
$أ + ب + جـ + د = ٥$ ---- (١)

$ق'(٢) =$ ميل المماس
$= -٣$
$ق'(س) = ٣أس^2 + ٢ب س + جـ$
$١٢أ + ٤ب + جـ = -٣$ ---- (٢)

(٢،١٥) نقطة انعطاف
$ق''(٢) = صفر$
$٦أ س + ٢ب = ق''(س)$
$١٢أ + ٢ب = ٠$ ---- (٣)

أيضاً $ق(٢) = ١$
$٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١$ ---- (٤)

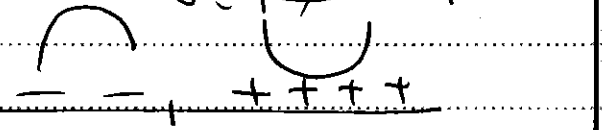
أكمل حل النظام المعادلات بطريقة الحذف

السؤال الخامس ص٢٠٣

اذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$
$ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ ، $ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$
ماذا تستنتج عما يأتي

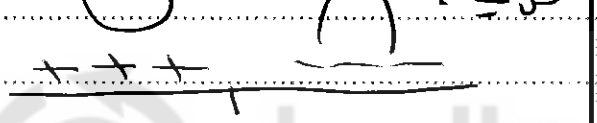
(أ) قارن مجالات التقعر لكل من الاقترانين

$ق'(س) = -\frac{١}{س^2}$ $ق''(س) = \frac{٢}{س^3}$
$= \frac{٢}{س^3}$
المقام = ٠ عندما $س = ٠$



مقعر للاعلى $(-\infty, ٠)$ للاسفل $(٠, \infty)$

$ق'(س) = \frac{١}{٣}س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}}$
$ق''(س) = -\frac{٢}{٩}س^{-\frac{٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩س^{\frac{٥}{٣}}}$



مقعر للاعلى $(-\infty, ٠)$
مقعر للاسفل $(٠, \infty)$

مكتبة الوسام ALWESAM
الهاتف : ناجح الجمزاوي

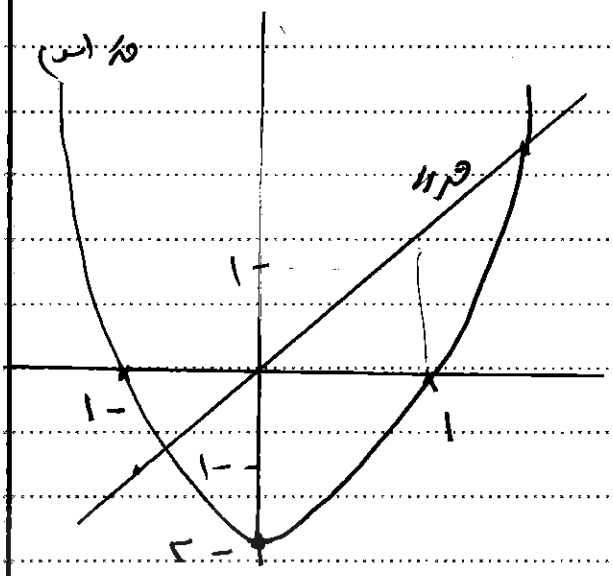
السؤال الخامس ص٢٠٢

(أ) $\text{هـ}(س)$ غير متصل عند $س = ٠$
$\text{هـ}(س)$ متصل على ح

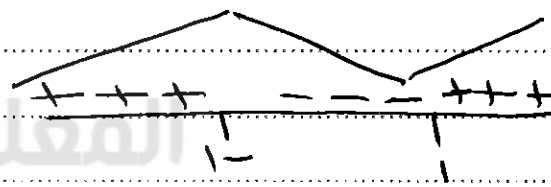
(ج) $\text{هـ}(س)$ لا يوجد له نقط انعطاف
$س = ٠ \notin$ المجال
$\text{هـ}(س)$ نقطة انعطاف $(٠، ٠)$

السؤال السادس ص٢٠٢

عثل الشكل المجاور منحنى $\text{هـ}'(س)$
$\text{هـ}'(س)$ اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة التالية:



(ب) مجالات التزايد والتناقص



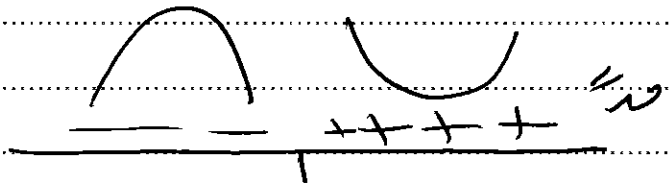
متزايد $[١، ∞+) ، (-∞، ١-]$
متناقص $[١-، ١]$

(ب)

(أ) $(-١، \text{هـ}(-١))$ قيمة عظمى محلية
$(١، \text{هـ}(١))$ قيمة صغرى محلية

(ج) اختبار المشتقة الثانية
$\text{هـ}''(-١) = -١ < ٠$ قيمة عظمى محلية
$\text{هـ}''(١) = ١ > ٠$ قيمة صغرى

(د) التقعر



مقعر للأعلى $[٠، ∞+)$
مقعر للأسفل $(-∞، ٠]$

$س = ٠$ نقطة انعطاف

مكتبة الهسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

الدرس السادس

تطبيقات القيم القصوى

مقدمة

خطوات حل المسألة

① تحديد عبارة أكبر ما يمكن أو اصغر ما يمكن على ماذا تعود فتكون هي العلاقة المطلوبة

② تحديد الثوابت والمتغيرات برموز والربط بينهما بالعلاقة المطلوبة

③ جعل العلاقة بمتغير واحد من خلال علاقة جانبية (مساعدة)

④ الرسم التوضيحي اذا لزم الأمر

⑤ ايجاد المشتقة الأولى ومساواته بالصفر وايجاد اصفار المشتقة

⑥ اختبار هذه الاصفار من حيث أنها عظمى أو صغرى حسب اختبار المشتقة الأولى

كلمة أكبر ما يمكن ← قيمة عظمى
كلمة اصغر ما يمكن ← قيمة صغرى

مثال ①

عددان موجبان مجموعهما ٩٠ أوجد العددين اذا كان حاصل ضرب احدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

الحل

نفرض ان احد العددين = س
فيكون العدد ص ←

$س + ص = ٩٠ \leftarrow ص = ٩٠ - س$

$ع = س \times ص^2$

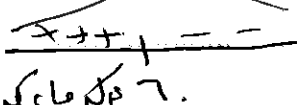
$= س(٩٠ - س)^2$

$ع' = ١٨٠ - ٣س^2 = ٠$

$٣(٦٠ - س)(٦٠ + س) = ٠ \Rightarrow س = ٦٠$

العدد الأول = ٦٠

العدد الثاني = $٩٠ - ٦٠ = ٣٠$



مكتبة الوسام
AL WESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

مثال ②

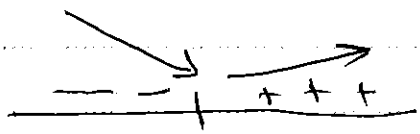
اوجد عددين موجبين مجموعهما ٤٠ بحيث يكون مجموع مربعيهما اقل ما يمكن

الحل

نفرض احد العددين = س
والعدد الآخر = ص
س + ص = ٤٠ ⇐ ص = ٤٠ − س

اعادة

ع = س² + ص²
= س² + (٤٠ − س)²
ع′ = ٢س + ٢(٤٠ − س)(−١)
= ٢س + ٨٠ − ٢س
= ٤س − ٨٠ = ٠
س = ٢٠

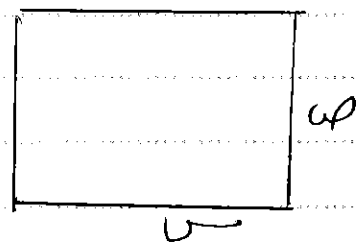


٢٠

اقل ما يمكن
العدد الثاني = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

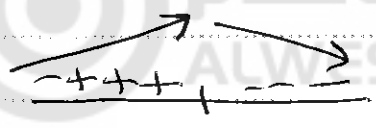
مثال ③

يريد رجل اقامة سياج حول منطقة مستطيلة الشكل من حديقته فاذا كان عنده ٨٠ م من الاسلاك فما ابعاد اكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن احاطته بهذا السياج



اكبر مساحة ممكنة هي العلاقة المطلوبة
المساحة = الطول × العرض
م = س × ص

المحيط = ٢س + ٢ص = ٨٠ ÷ ٢
ص + س = ٤٠ ← ص = ٤٠ − س
م = س(٤٠ − س) = ٤٠س − س²
م′ = ٤٠ − ٢س = ٠
س = ٢٠



٢٠

س = ٢٠
ص = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

مكتبة الهسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ④

اثبت انه أكبر مساحة للمستطيل الذي محيطه ل تحدث عندما يكون مربعًا

الحل

الطول = س ، العرض = ص

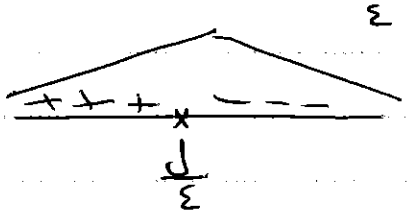
م = س × ص العلاقة الرئيسية

ل = ٢س + ٢ص ⇐ ص = $\frac{ل}{٢}$ − س

∴ م = س($\frac{ل}{٢}$ − س) = $\frac{ل}{٢}$ س − س^{٢}

م′ = $\frac{ل}{٢}$ − ٢س = ٠ ⇐ ٢س = $\frac{ل}{٢}$

س = $\frac{ل}{٤}$



ص = $\frac{ل}{٢}$ − $\frac{ل}{٤}$ = $\frac{٢ل}{٤}$ − $\frac{ل}{٤}$

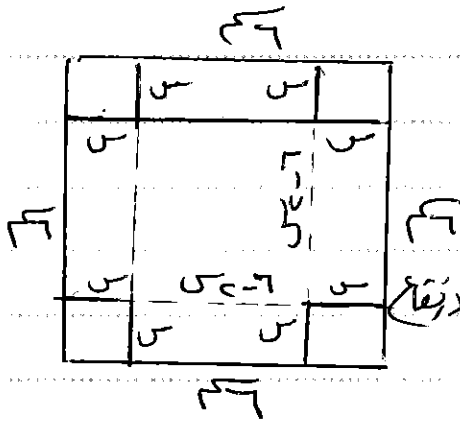
= $\frac{ل}{٤}$

⇐ س = ص = $\frac{ل}{٤}$

∴ مربع

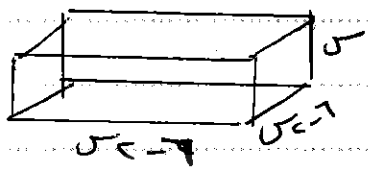
مثال ⑤

يراد صنع صندوق مفتوح من الاعلى من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ٦ سم وذلك بقطع ٤ مربعات متساوية من اطرافها الاربعة ثم طي الاجزاء البارزة لأعلى أوجد أكبر حجم يمكن تكوينه بهذه الطريقة



الحل

ح = الطول × العرض × الارتفاع



ح = (٦ − ٢س)(٦ − ٢س) × س

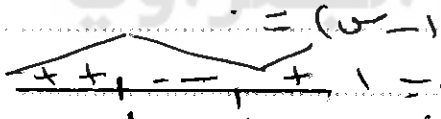
ح = (٣٦ − ٢٤س + ٤س^{٢}) × س

ح = ٣٦س − ٢٤س^{٢} + ٤س^{٣}

ح′ = ٣٦ − ٤٨س + ١٢س^{٢} = ٠

٣ − ٤س + س^{٢} = ٠ (÷ ١٢)

(٣ − س)(١ − س) = ٠



س = ٣ ، س = ١

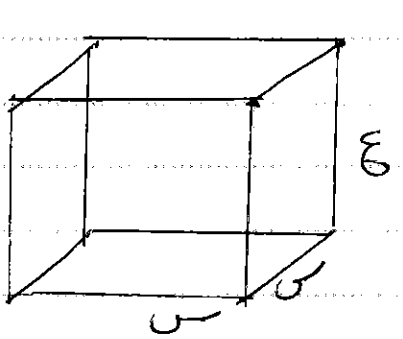
أكبر ما يكون عند س = ١

ح = (٦ − ٢) (٦ − ٢) × ١ = ١٦ سم^{٣}

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

نريد صنع صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه ١٢٨ سم٣ اوجد ابعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة لصنعه أقل ما يمكن



الحل

كمية المادة اللازمة =
مادة القاعدة + مادة الجوانب

$ل = س^2 + 4 س ع$

لكن $ح = ١٢٨ = س \times س \times ع$

$\Leftarrow ١٢٨ = س^2 ع \leftarrow ع = \frac{١٢٨}{س^2}$

$\Leftarrow ل = س^2 + 4 س \times \frac{١٢٨}{س^2}$

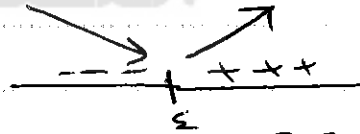
$= س^2 + \frac{٥١٢}{س}$

$ل' = ٢ س - \frac{٥١٢}{س^2} = ٠$

$٢ س^2 = ٥١٢ \leftarrow س^3 = ٢٥٦$

$س = ٤$

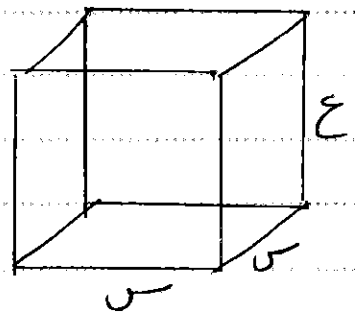
العرض = ٤ :



الارتفاع $= ع = \frac{١٢٨}{١٦} = ٨$

مثال ⑦

صفيحة معدنية مساحتها ١٢٠٠ سم٢ نريد صنع صندوق منها قاعدته مربعة الشكل ومفتوح من أعلى اوجد أكبر حجم يمكن تكوينه



الحل

$ح = س^2 \times ع$

المساحة = ١٢٠٠ = مساحة القاعدة + مساحة الجوانب

$١٢٠٠ = س^2 + 4 س ع$

$١٢٠٠ - س^2 = 4 س ع$

$\Leftarrow ع = \frac{١٢٠٠ - س^2}{4 س} = \frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{4}$

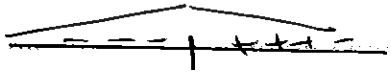
$\Leftarrow ح = س^2 (\frac{٣٠٠}{س} - \frac{س}{4})$

$= ٣٠٠ س - \frac{س^3}{4}$

$ح' = ٣٠٠ - \frac{٣}{4} س^2 = ٠ \leftarrow ٣٠٠ = \frac{٣}{4} س^2$

$\leftarrow س^2 = \frac{٤ \times ٣٠٠}{٣} = ٤٠٠ \leftarrow س = \pm ٢٠$

$س = ٢٠$



$ح = ٣٠٠ \times ٢٠ - \frac{(٢٠)^3}{4} = ٤٠٠٠ سم^3$

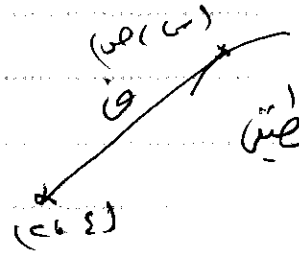
مكتبة التعلم
الأستاذ : ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

جد النقطة على منحنى $ق(س) = \sqrt{8س}$ التي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(٤، ٢)$ ؟

الحل

نفرض ان النقطة هي $(س، ص)$



ف : البعد بين النقطتين $(س، ص)$ ، $(٤، ٢)$

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢}$$

لكن $ص = \sqrt{8س}$ قاعدة

$$ف = \sqrt{(س - ٤)^٢ + (\sqrt{8س} - ٢)^٢}$$

$$ف' = \frac{٢(س - ٤) + ٢(\sqrt{8س} - ٢) \times \frac{٨}{٢\sqrt{8س}}}{٢\sqrt{(س - ٤)^٢ + (\sqrt{8س} - ٢)^٢}}$$

البسط = صفر

$$٢(س - ٤) + \frac{٨(\sqrt{8س} - ٢)}{\sqrt{8س}} = ٠$$

وبضرب أطرافه في $\sqrt{8س}$

$$٢\sqrt{8س}(س - ٤) + ٨(\sqrt{8س} - ٢) = ٠$$

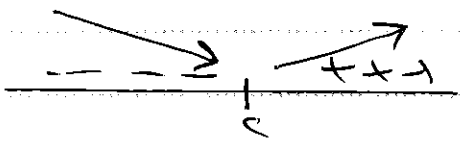
$$٢\sqrt{8س}\,س - ٨\sqrt{8س} + ٨\sqrt{8س} - ١٦ = ٠$$

$$٢س\sqrt{8س} - ١٦ = ٠$$

$$س\sqrt{8س} = ٨$$ بتربيع الطرفين

$$س^٢(8س) = ٦٤ \Leftarrow 8س^٣ = ٦٤$$

$$س^٣ = ٨ \Leftarrow س = ٢$$



عند $س = ٢$ تكون أقرب ما يمكن

$$ص = \sqrt{8 \times ٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

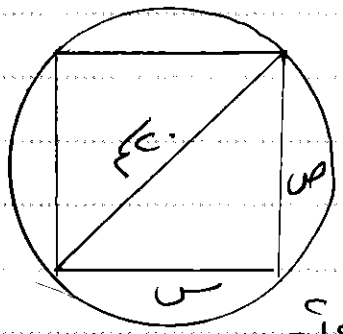
النقطة هي $(٤، ٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٢٠ سم

الحل



م = س × ص

لكن $س^2 + ص^2 = (٤٠)^2 = ١٦٠٠$

$ص^2 = ١٦٠٠ - س^2$

$ص = \sqrt{١٦٠٠ - س^2}$

$م = س \times \sqrt{١٦٠٠ - س^2}$

$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦٠٠ - س^2}} + \sqrt{١٦٠٠ - س^2} \times ١ = ٠$

$= \frac{-س^2}{\sqrt{١٦٠٠ - س^2}} + \sqrt{١٦٠٠ - س^2} = ٠$

$\sqrt{١٦٠٠ - س^2} = \frac{س^2}{\sqrt{١٦٠٠ - س^2}}$ ضرب تبادلي

$١٦٠٠ - س^2 = س^2 \Leftarrow ٢س^2 = ١٦٠٠$

$ص^2 = ٨٠٠ \Leftarrow س = \sqrt{٨٠٠}$

$ص = \sqrt{١٦٠٠ - ٨٠٠} = \sqrt{٨٠٠}$

$م = \sqrt{٨٠٠} \times \sqrt{٨٠٠} = ٨٠٠$

عظمى عند $س = \sqrt{٨٠٠}$

مثال ⑩

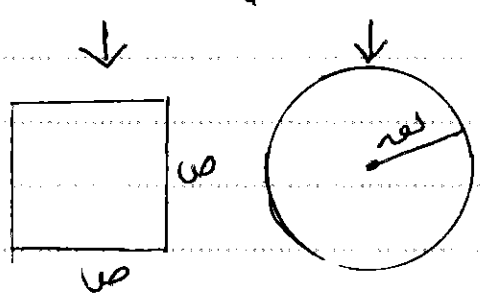
سلك طوله ٦٠ سم يريد قطعة إلى جزئين تكون احدهما مربع والآخر دائرة فاين يقطع السلك بحيث يكون مجموع المساحة

(أ) أقل ما يمكن

(ب) أكبر ما يمكن

الحل

(أ)



مساحة الدائرة $= \pi$ نصف^2

محيط الدائرة $= ٢\pi$ نصف $= س$

$\Leftarrow$ نصف $= \frac{س}{٢\pi}$

$\Leftarrow$ مساحة الدائرة $= \pi (\frac{س}{٢\pi})^2$

$= \frac{\pi س^2}{٤\pi^2} = \frac{س^2}{٤\pi}$

مساحة المربع $= ص^2$

محيط المربع $= ٤ص = ٦٠ - س$

$\Leftarrow ص = \frac{٦٠}{٤} - \frac{س}{٤} = ١٥ - \frac{س}{٤}$

$\Leftarrow$ مساحة المربع $= (١٥ - \frac{س}{٤})^2$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

المساحة الكلية = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$م = \frac{س^2}{4\pi} + (15 - \frac{س}{4})^2$

$م' = \frac{2س}{8\pi} + 2(15 - \frac{س}{4}) \times -\frac{1}{4} = 0$

$\frac{س}{4\pi} = \frac{1}{2}(15 - \frac{س}{4}) = \frac{15}{2} - \frac{س}{8}$

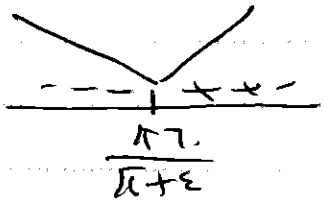
$(\pi 8 \times)$

$\leftarrow$

$4س = 60\pi - \pi س$

$4س + \pi س = 60\pi$

$س(4 + \pi) = 60\pi \leftarrow ص = \frac{60\pi}{4+\pi}$



(أ) تحدث عندما لا يقطع السلك فيكون الشكل إما دائرة فقط أو مربع فقط

أولاً الدائرة

$م = \pi نق^2$

لكن $2\pi نق = 60$

$\therefore نق = \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$

$\therefore م = \pi(\frac{30}{\pi})^2 = \pi \times \frac{900}{4\pi^2} = \frac{900}{4\pi}$

ثانياً مربع

$م = ص^2$

لكن $4ص = 60 \leftarrow ص = 15$

$\therefore م = (15)^2 = 225$

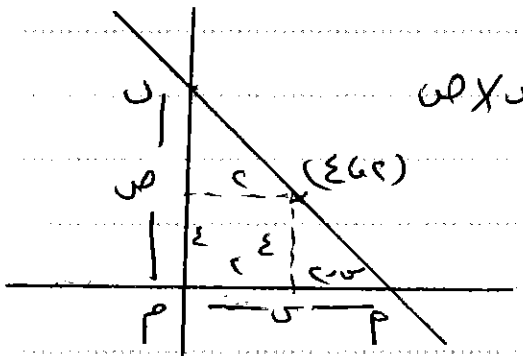
$\frac{900}{4\pi} < 225$ $\therefore$ الشكل دائرة

مثال (11)

أوجد موقع النقطة $(4, 6)$ على قطع محوري السينات والصادات الموجبين حتى $م$ ، $ن$ أوجد أقل مساحة للمثلث $م م ن$ حيث $م$ نقطة الأصل.

الحل

$م = \frac{1}{2} س \times ص$



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

من التشابه $\frac{ص}{س} = \frac{6}{س-4}$

$\Leftarrow ص = \frac{6س}{س-4}$

$\Leftarrow م = \frac{1}{2} س \times \frac{6س}{س-4} = \frac{3س^2}{س-4}$

$م' = \frac{(س-4) \times 6س - 3س^2 \times 1}{(س-4)^2}$

$\leftarrow$ تتبع الحل

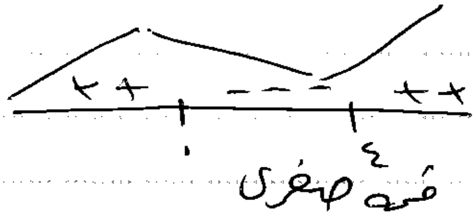
مكتبة الهندسة ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

$م' = \frac{٤س^2 - ٨س - ٢س^2}{(س - ٢)^2}$

$= \frac{٢س^2 - ٨س}{(س-٢)^2} = صفر$

$٢س^2 - ٨س = ٠$

$٢س(س - ٤) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٤$

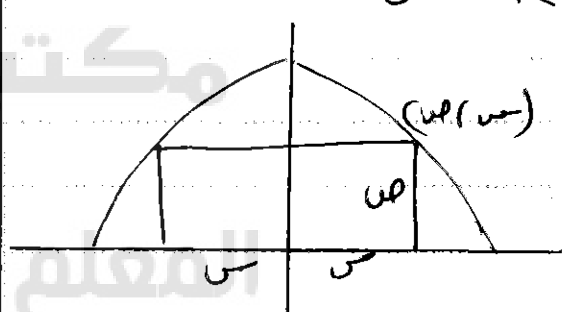


$س = ٤ \Leftarrow ص = \frac{٤ \times ٢}{٤ - ٢} = ٨$

$م = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٨ = ١٦$

مثال (١٢)

اوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يقع احد اضلاعه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على المنحنى $ص = ١٢ - س^2$



مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ٢س \times ص$

لكن $ص = ١٢ - س^2$

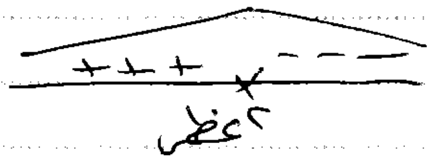
$م = ٢س(١٢ - س^2)$

$= ٢٤س - ٢س^3$

$م' = ٢٤ - ٦س^2 = ٠$

$٦(٤ - س^2) = ٠$

$س = \pm ٢$

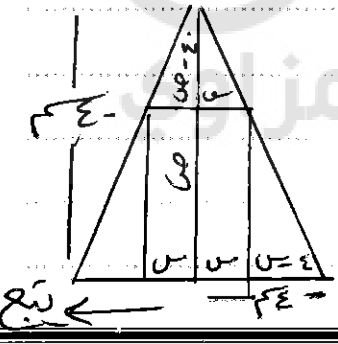


$ص = ١٢ - ٢^2 = ٨$

$م = ٢ \times ٢ \times ٨ = ٣٢$

مثال (١٣)

مثلث ارتفاعه ٤سم وقاعدته ٨سم، نريد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على ساقي المثلث أوجد أكبر مستطيل من حيث المساحة



الحل

م = الطول × العرض

$= ٢س \times ص$

يتبع ←

← تابع الحل

من التشابه $\frac{٤٠ - ص}{س} = \frac{٤٠}{٤}$

← $\frac{٤٠ - ص}{س} = ١٠$

$٤٠ - ص = ١٠ س$ ← $ص = ٤٠ - ١٠ س$

$م = ٢ س (٤٠ - ١٠ س)$

$= ٨٠ س - ٢٠ س^٢$

$م' = ٨٠ - ٤٠ س = ٠$

$س = ٢$

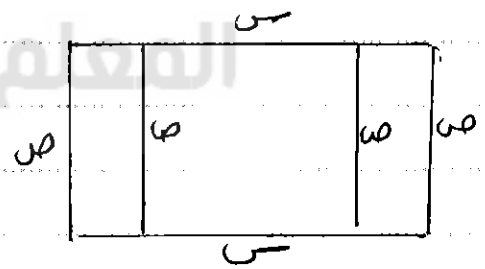
$ص = ٤٠ - ١٠ \times ٢ = ٢٠$

$م = ٢ \times ٢٠ \times ٢ = ٨٠ م^٢$

مثال (١٤)

لدى رجل حقل مستطيل يريد سياجه ثم قسمته الى ثلاثة اقسام بسياج بين بوابتان احد اضلاعه فاذا كان عنده ١٠٠٠ متر من السياج أوجد أكبر مساحة يمكن سياجها

الحل



$م = س \times ص$

كمية السياج $= ١٠٠٠ م$

$١٠٠٠ = ٢ س + ٤ ص$ (÷٢)

$٥٠٠ = س + ٢ ص$

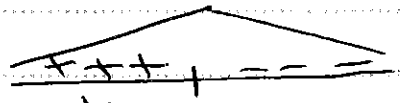
← $س = ٥٠٠ - ٢ ص$

$م = ص \times (٥٠٠ - ٢ ص)$

$= ٥٠٠ ص - ٢ ص^٢$

$م' = ٥٠٠ - ٤ ص = ٠$

← $ص = \frac{٥٠٠}{٤} = ١٢٥$



$س = ٥٠٠ - ٢ \times ١٢٥ = ٥٠٠ - ٢٥٠$

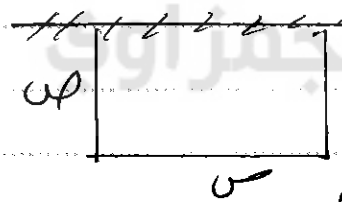
$= ٢٥٠$

$م = ٢٥٠ \times ١٢٥ = ٣١٢٥٠ م^٢$

مثال (١٥)

يريد رجل اقامة سياج حول قطعة مستطيلة الشكل تقع على ضفة نهر مستقيم فاذا لم يسيج طرف الذي أوجد ابعاد القطعة ليكون طول السياج أقل ما يمكن علما بان مساحة القطعة ٨٠٠ م^٢

الحل



طول السياج

$ل = س + ٢ ص$

← ينتج

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

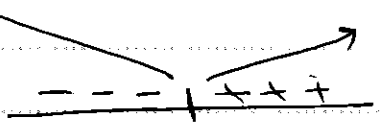
$س \times ص = ٨٠٠ \leftarrow ص = \frac{٨٠٠}{س}$

$ل = س + ٢ص = س + \frac{١٦٠٠}{س} = س + ٢ \times \frac{٨٠٠}{س}$

$ل' = ١ - \frac{١٦٠٠}{س^٢} = ٠$

$\leftarrow ١ = \frac{١٦٠٠}{س^٢} \Leftarrow س^٢ = ١٦٠٠$

$س = \pm \sqrt{١٦٠٠} = \pm ٤٠$

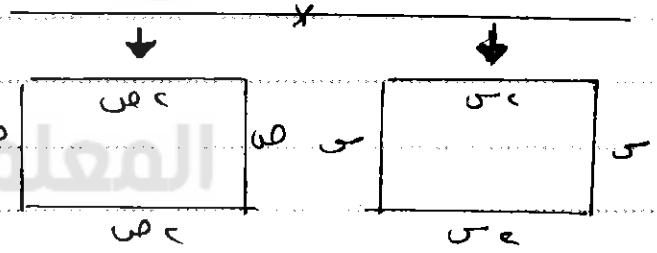


$ص = \frac{٨٠٠}{٤٠} = ٢٠$

مثال (١٦)

سلك طوله ٦٠ سم قُطع إلى جزئين يتكون من كل جزء مستطيل طوله مثلى عرضه أوجد أقل مساحة ممكنة للمستطيلين

الحل



$م = ٢س \times س + ٢ص \times ص$

$= ٢س^٢ + ٢ص^٢$

لكن محيط المستطيل ① + محيط المستطيل ② = طول السلك

$٦س + ٦ص = ٦٠$ (÷٦)

$س + ص = ١٠$

$ص = (١٠ - س)$

$\Leftarrow$

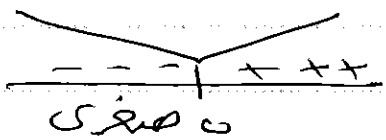
$م = ٢س^٢ + ٢(١٠ - س)^٢$

$م' = ٤س + ٤(١٠ - س) \times -١$

$= ٤س - ٤٠ + ٤س$

$= ٨س - ٤٠ = ٠$

$س = \frac{٤٠}{٨} = ٥$



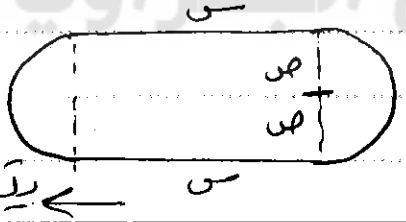
$ص = ١٠ - ٥$

$م = ٢(٥)^٢ + ٢(٥)^٢ = ١٠٠$ سم^٢

مثال (١٧)

ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصف دائرة فإذا كان محيط الملعب ٤٠٠ م أوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن

الحل



مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

المساحة (م) = مساحة المستطيل + مساحة الدائرة

$م = س \times ص + \pi ص^2$

$م = ٢ س ص + \pi ص^2$

المحيط $= ٤٠$ سم

$٢ س + ٢ ص + \pi ص = ٤٠$

$س = ٢٠ - ص - \frac{\pi}{٢} ص$

$م = (٢٠ - ص - \frac{\pi}{٢} ص) ص + \pi ص^2$

$م = ٢٠ ص - ص^2 - \frac{\pi}{٢} ص^2 + \pi ص^2$

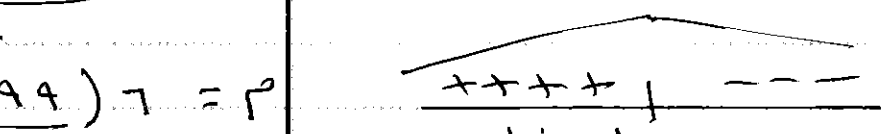
$م = ٢٠ ص - ص^2 + \frac{\pi}{٢} ص^2$

$م' = ٢٠ - ٢ ص + \pi ص = ٠$

$٢٠ = ٢ ص + \pi ص$

$٢٠ = ص (٢ + \pi)$

$ص = \frac{٢٠}{٢ + \pi}$



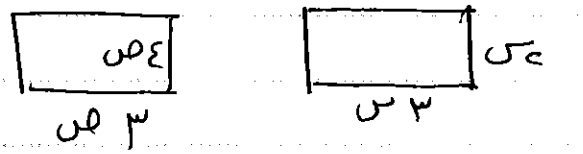
$ص = \frac{٢٠}{٢ + \pi}$ عظمى

$ص = \frac{٢٠}{٢ + \pi}$ نصف قطر الدائرة

مثال (١٨)

مجموع محيطي مستطيلين ٩٩ سم والنسبة بين بعدي المستطيل الأول ص ٢ : ١ والنسبة بين بعدي المستطيل الثاني ٣ : ٤ أوجد أصغر مجموع مساحتي المستطيلين

الحل



$م = ٦ س^2 + ١٢ ص^2$

محيط الأول + محيط الثاني = ٩٩

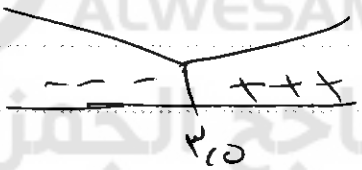
$١٠ س + ١٤ ص = ٩٩$

$س = \frac{٩٩ - ١٤ ص}{١٠}$

$م = ٦ (\frac{٩٩ - ١٤ ص}{١٠})^2 + ١٢ ص^2$

$م' = ١٢ (\frac{٩٩ - ١٤ ص}{١٠}) \times \frac{-١٤}{١٠} + ٢٤ ص = ٠$

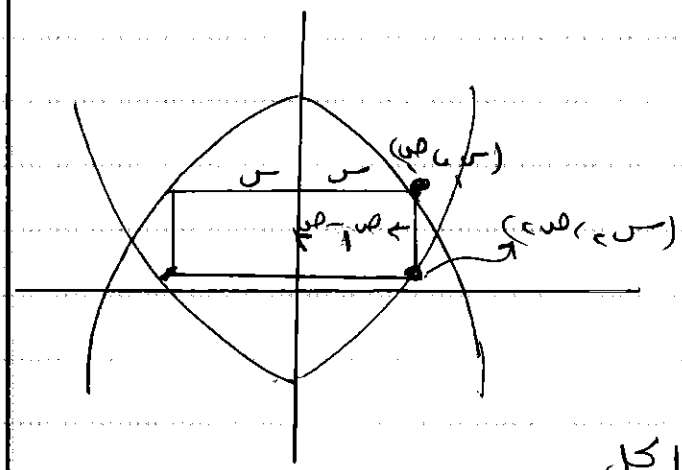
$ص = ٣,٥$ وبالتعويض $س = ٥$



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (١٩)

اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث تقع رؤوسه على المنحنيين $ق_1(س) = ١٠ - س^٢$ ، $ق_2(س) = س^٢ - ٨$ وتكون اضلاعه موازية للمحاور



الحل

$س_1 = -س_2 = ٠ \leftarrow س = ٠$

$هـ = ص_2 = ٠ \leftarrow س = ٠$

محور التماثل لكل من المنحنيين $س = ٠$

(محور الصادات)

$م = س \times ص$

$م = ٢س (ص_1 - ص_2)$

$= ٢س (١٠ - س^٢ - (س^٢ - ٨))$

$= ٢س (١٠ - س^٢ - س^٢ + ٨)$

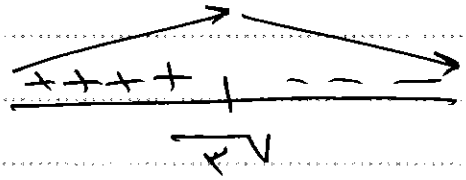
$= ٢س (١٨ - ٢س^٢)$

$= ٣٦س - ٤س^٣$

$م' = ٣٦ - ١٢س^٢ = ٠$

$س^٢ = \frac{٣٦}{١٢} = ٣ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٣}$

$س = \sqrt{٣}$



$ص_1 = ١٠ - (\sqrt{٣})^٢ = ٧$

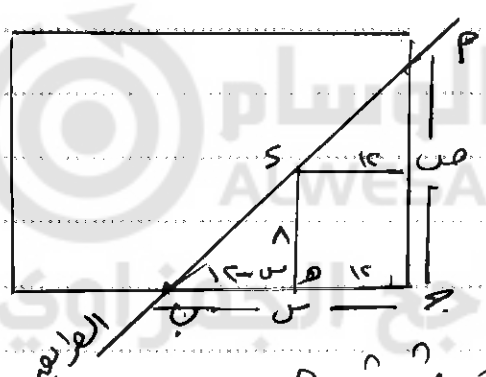
$ص_2 = (\sqrt{٣})^٢ - ٨ = -٥$

$م = ٢ \times \sqrt{٣} \times ٢ \times (٧ - -٥) = ٤٨\sqrt{٣}$

مثال (٢٠)

ارض مستطيلة الشكل توجد فيها شجرة بالقرب من احدى زواياها اذا كانت الشجرة تبعد عن الحافتين اللتين تحدان الزاوية ١٢م، ٨م واردنا ان نعمل طريقاً مستقيماً يقطع جزء من الارض ويمر بجانب الشجرة فما هي مساحة اصغر مثلث من الارض يمكن اقتطاعه

الحل



مساحة المثلث $أ ب م$

$= \frac{١}{٢} \times س \times ص$ ← لنبحث

مكتبة الإسلام ALWEISLAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

من تشابه Δ ا ب ج ، د هـ ب

يكون $\frac{ص}{س} = \frac{٨}{س-١٢}$ ←

$ص = \frac{٨س}{س-١٢}$

$م = \frac{١}{٢} \times س \times \frac{٨س}{س-١٢} = \frac{٤س^{٢}}{س-١٢}$

$م' = \frac{(س-١٢)(٨س^{٢}) - ٤س^{٣}(١)}{(س-١٢)^{٢}}$

$= \frac{٨س^{٢} - ٩٦س - ٤س^{٢}}{(س-١٢)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٢} - ٩٦س}{(س-١٢)^{٢}}$

$٤س^{٢} - ٩٦س = ٠ \leftarrow ٤س(س-٢٤) = ٠$

$س = ٠ ، ٢٤$

	+ + +	— — —
٢٤ صغرى		

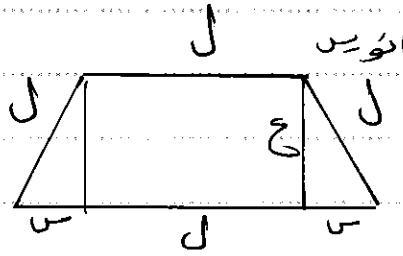
$ص = \frac{٨ \times ٢٤}{٢٤-١٢} = ١٦$

$م = \frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ١٦ = ١٩٢$

مثال (٢١)

اذا كانت اطوال ثلاثة اضلاع لشبه منحرف متساوية، اثبت ان مساحة شبه المنحرف تكون أكبر ما يمكن عندما يكون طول الضلع الرابع ضعف طول اي ضلع من الاضلاع الثلاث الأخرى.

الحل



الارتفاع = ع

$ل^{٢} = س^{٢} + ع^{٢}$

$ع^{٢} = ل^{٢} - س^{٢}$

$ع = \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × مجموع القاعدتين × الارتفاع

$م = \frac{١}{٢}(ل + ل + س + ٢س) \times \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

$= \frac{١}{٢}(٣ل + ٣س) \times \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

$= (ل + س)\sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}$

$م' = (ل + س) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}} + \sqrt{ل^{٢} - س^{٢}} \times ١$

$= \frac{-س(ل + س)}{\sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}} + \frac{ل^{٢} - س^{٢}}{\sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}}$

$= \frac{ل^{٢} - س^{٢} - س(ل + س)}{\sqrt{ل^{٢} - س^{٢}}}$

$ل^{٢} - س^{٢} = ل^{٢} - س^{٢}$ ←

$س ل + س^{٢} = ل^{٢} - س^{٢}$

$٢س^{٢} + ل س - ل^{٢} = ٠$

$(س + ل)(٢س - ل) =$

$س = -ل$ ، $س = \frac{١}{٢}ل$

	+ + +	— — —
$\frac{١}{٢}ل$ عظمى		

طول الضلع الثالث $= ل + \frac{١}{٢}ل + \frac{١}{٢}ل$

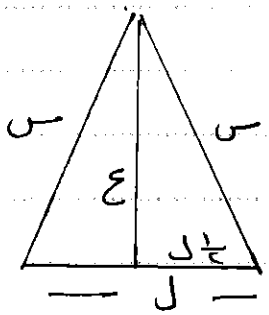
$= ٢ل$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٢)

مثلث متساوي الساقين محيطه ٣٦ سم أوجد أكبر مساحة ممكنة له

الحل



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ل \times ع$

لكن $س + س + ل = ٣٦$

$\therefore 2س = ٣٦ - ل \leftarrow \boxed{س = ١٨ - \frac{ل}{2}}$

لكن حسب نظرية فيثاغورس

$ع^2 + (\frac{ل}{2})^2 = س^2 \leftarrow ع^2 + \frac{ل^2}{4} = س^2$

$ع^2 + \frac{ل^2}{4} = (١٨ - \frac{ل}{2})^2$

$ع^2 + \frac{ل^2}{4} = ٣٢٤ - ١٨ل + \frac{ل^2}{4}$

$١٨ل = ٣٢٤ - ع^2$

$ل = \frac{1}{18}(٣٢٤ - ع^2)$

$م = \frac{1}{2} \times \frac{1}{18}(٣٢٤ - ع^2) \times ع$

$= \frac{1}{36}(٣٢٤ع - ع^3)$

$م' = \frac{1}{36}(٣٢٤ - ٣ع^2) = ٠$

$٣ع^2 = ٣٢٤ \leftarrow ع^2 = ١٠٨$

$ع = \sqrt{١٠٨}$

$= \sqrt{٣ \times ٣ \times ٦ \times ٦}$

$= ٦\sqrt{٣}$ عظمى

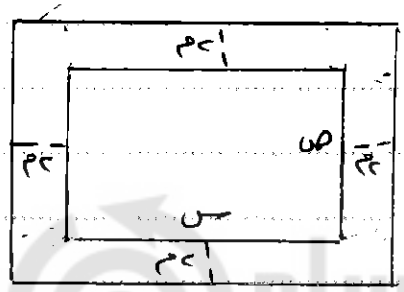
$ل = \frac{1}{18}(٣٦ - ع^2) = \frac{1}{18}(٣٦ - ١٠٨)$

$= ٤$

$م = \frac{1}{2} \times ٤ \times ٦\sqrt{٣} = ١٢\sqrt{٣}$

مثال (٢٣)

يراد انشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠ م^2 واحاطتها من جميع الجوانب بطريق خارجي فتنظم عرضه ٢ م ، أوجد ابعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق اقل ما يمكن.



مساحة الحديقة $= م$

$م = (س + ٤)(ص + ٤)$

$س \times ص = ٩٠٠ \leftarrow ص = \frac{٩٠٠}{س}$

$م = (س + ٤)(\frac{٩٠٠}{س} + ٤)$

$= ٩٠٠ + ٤س + \frac{٤ \times ٩٠٠}{س} + ١٦$

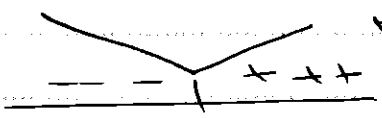
$= ٩٠٠ + ٤س + \frac{٣٦٠٠}{س} + ١٦$ ← تتبع

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$م' = ٤ - \frac{٣٦٠٠}{س^٢}$ ← $٤ = \frac{٣٦٠٠}{س^٢}$

$٤س^٢ = ٣٦٠٠$ ← $س^٢ = ٩٠٠$

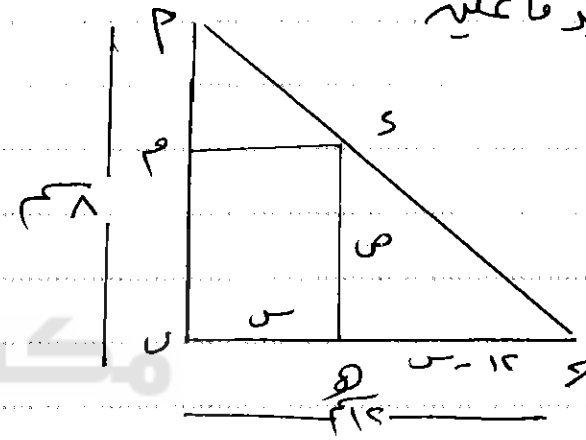
$س = ٣٠$



$ص = \frac{٩٠٠}{٣٠} = ٣٠$

مثال (٤)

أ ب ﻫ مثلث قائم الزاوية في ب بحيث أ ب = ٨ سم ، ب ﻫ = ١٢ سم ، أخذت النقطة د على الوتر أ ﻫ ، وأنزل منها العمودان د هـ ، د م على الضلعين ب ﻫ ، أ ب على الترتيب أوجد طولي ضلعي المستطيل العموديين للذين يجعلان مساحة المستطيل د هـ ب م أكبر ما يمكن



من تشابه $\frac{٨}{١٢} = \frac{ص}{١٢ - س}$

$١٢ص = ٩٦ - ٨س$ (÷ ١٢)

$ص = ٨ - \frac{٢}{٣}س$

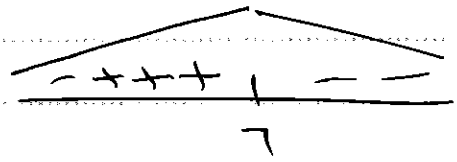
$م = س ص$

$م = س(٨ - \frac{٢}{٣}س)$

$= ٨س - \frac{٢}{٣}س^٢$

$م' = ٨ - \frac{٤}{٣}س = ٠$

$٨ = \frac{٤}{٣}س$ ← $س = \frac{٢٤}{٤} = ٦$



$ص = ٨ - \frac{٢}{٣} \times ٦ = ٤$

$م = ٦ \times ٤ = ٢٤$ سم

مثال (٥)

قطعة أرض على شكل مستطيل يريد أن يسيجها فإذا كانت تكلفة المتر الواحد من حائطين متوازيين هي ٣ دنانير ومن الحائطين الآخرين دينارين فأوجد مساحة أكبر قطعة مستطيلة يمكن تسييجها بمبلغ ٦٠٠ دينار

الحل

$م = س \times ص$

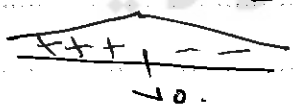
$٣ص + ٣ص + ٢س + ٢س = ٦٠٠$

$٤ص + ٤س = ٦٠٠$ ← $س = ١٥٠ - \frac{٢}{٣}ص$

$م = (١٥٠ - \frac{٢}{٣}ص)ص = ١٥٠ص - \frac{٢}{٣}ص^٢$

$م' = ١٥٠ - \frac{٤}{٣}ص = ٠$

$ص = \frac{٣١٥٠}{٤} = ٧٥٠$



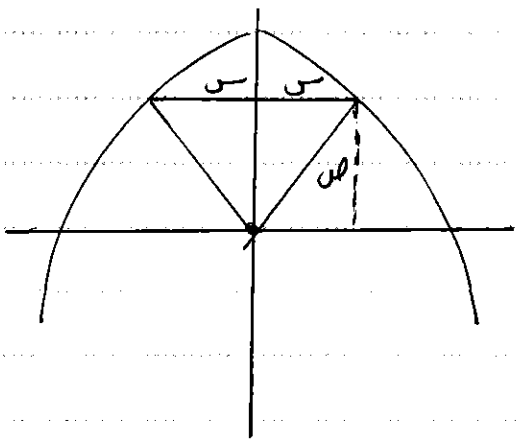
$س = ١٥٠ - \frac{٢}{٣} \times ٧٥٠ = ٥٠٠$

$م = ٧٥٠ \times ٥٠٠ = ٣٧٥٠٠$

مكتبة الوسام AL WESAM
الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٦)

مثلث متساوي الساقين مرسوماً فوقه محور السينات بحيث يقع رأسه الحصور بين ضلعيه المتساويين في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى الاقتران ص = ٧ - س² هـ أكبر مساحة لهذا المثلث



الحل

م = ½ × القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٢س × ص = س ص

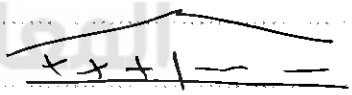
لكنه ص = ٧ - س²

م = س (٧ - س²)

= ٧س - س³

م' = ٧ - ٣س² = ٠

س² = ٩ ⇐ س = ٣

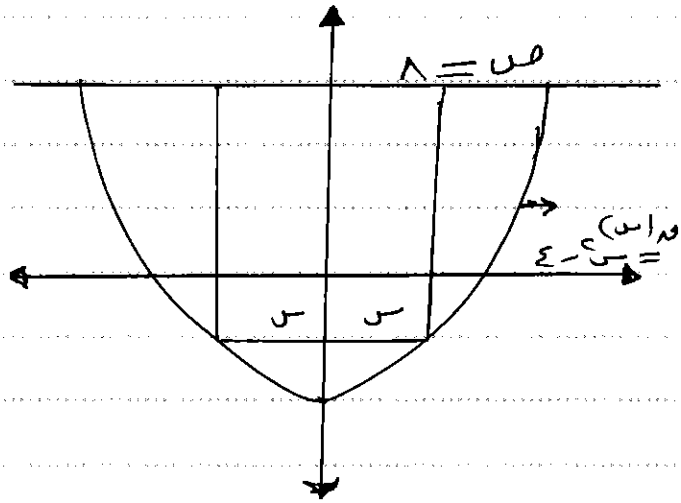


ص = ٧ - ٩ = ١٨

م = ٢ × ١٨ = ٥٤

مثال (٧)

في الشكل المجاور أوجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل.



الحل

م = ق (الارتفاع)

= ق (العلوي - السفلي)

= ق (٨ - (س² - ٤))

= ق (٨ - س² + ٤)

= ق (١٢ - س²)

= ٣ق - ق٤

م' = ٤ق - ٦س = ٠

س² = ٤ ⇐ س = ٢

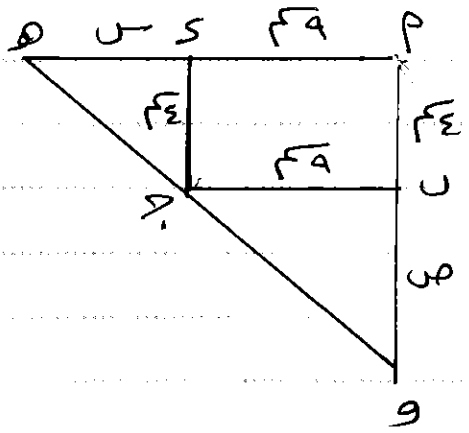
م = ٢ × ق (١٢ - ٤) = ٨ × ٤

= ٣٢

مكتبة الوسام ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

ا ب ج د قطعة فيها ا ب = ٤ سم، ب ج = ٩ سم، رسم قطعة يمر بالنقطة جـ ويقطع امتداد ا د في هـ وامتداد ا ب في و، جد أصغر مساحة ممكنة للمثلث ا هـ و



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$م = \frac{1}{2}(٩+س)(٤+ص)$

من تشابه المثلثان ن و ج، ج د هـ

$\frac{٤}{س} = \frac{ص}{٩} \leftarrow ص = \frac{٣٦}{س}$

$م = \frac{1}{2}(٩+س)(٤+\frac{٣٦}{س})$

$= \frac{1}{2}(٣٦ + \frac{٣٦ \times ٤}{س} + ٤س + ٣٦)$

$م' = \frac{1}{2}(\frac{-٣٦ \times ٤}{س^{٢}} + ٤) = ٠$

$\frac{٣٦ \times ٤}{س^{٢}} = ٤ \leftarrow ٤س^{٢} = ٣٦ \times ٤$

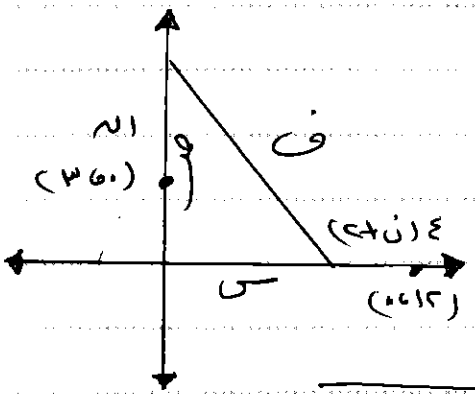
$س^{٢} = ٨١ \quad س = ٩$

$ص = \frac{٣٦}{٩} = ٤$

	صغرى	
س	٩	
م'	−	+

مثال (٩)

بدأت النقطة م الحركة من النقطة (١٢، ٠) على محور السينات باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤ سم/ث وبعد ثانيتين بدأت النقطة ب الحركة من النقطة (٠، ٣٦) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٣ سم/ث، متى تكون المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن



$ف = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

كما $س = ١٢ - ٤(ن+٢) = ٤ - ٤ن$

$ص = ٣ + ٨١ = ٢ + ن$

$ف = \sqrt{(٤-٤ن)^{٢} + (٣+ن)^{٢}}$

$ف' = \frac{(٤-٤ن) \times -٤ + (٣+ن)}{\sqrt{(٤-٤ن)^{٢} + (٣+ن)^{٢}}}$

$(٤-٤ن) \times -٤ + (٣+ن) = ٠$

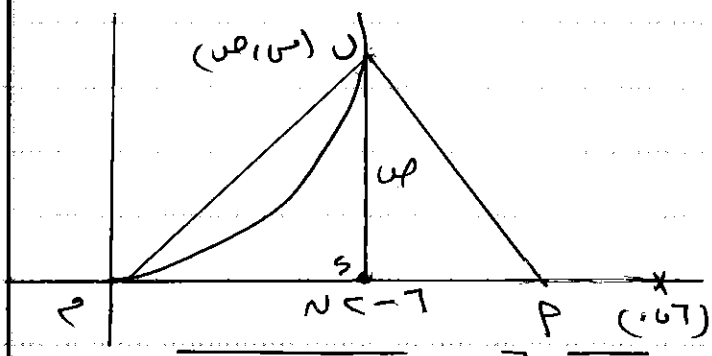
$ن = \frac{٢٦}{٣٤}$ ص تحرك لبناية

	$\frac{٢٦}{٣٤}$	
−		+

مكتبة الوفاء ALWFEAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٣٠)

جسم م بدأ الحركة من النقطة (٠،٥٦) بسرعة ٢سم/ث باتجاه نقطة الأصل وفي نفس اللحظة بدأ جسم ب الحركة من م على منحنى ص = س٢ في الربع الأول بحيث ان معدل ازدياد الاحداثي السيني للنقطة ب يساوي ١سم/ث أوجد متى تكون مساحة المثلث م م ب أكبر ما يمكن.



م = $\frac{1}{2}$ × م م × ب د

لكن م م = ٦ - ن

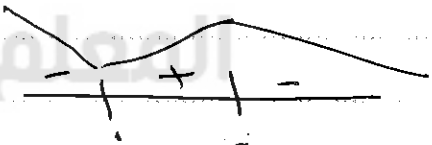
ب د = ص = س٢ = (ن)٢ = ن٢

م = $\frac{1}{2}$ (٦ - ن) × ن٢

= ٣ ن٢ - ن٣

م/ = ٦ ن - ٣ ن٢ = ٠

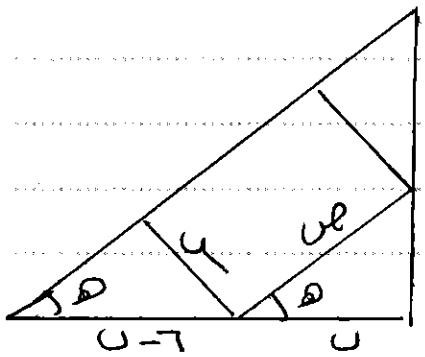
٣ ن (٢ - ن) = ٠ ← ن = ٠ ، ن = ٢



ن = ٢

مثال (٣١)

مثلث قائم الزاوية طول وتره ٦٠سم وارتفاعة ٤٨سم وطول قاعدته ٦سم يراد رسم مستطيل بداخله بحيث يقع رأسان من رؤوس المستطيل على وتر المثلث ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة أوجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل



الحل

م = س × ص لكن جاهـ = $\frac{م}{ص}$ = $\frac{س}{ب - ٦}$

⇐ س × ص = م × (ن - ٦)

ومن التشابه $\frac{م}{ن}$ = $\frac{٨}{٦}$

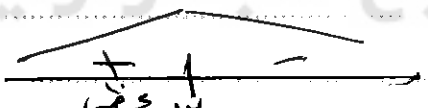
⇐ م = $\frac{٤}{٣}$ ن

⇐ م = $\frac{٤}{٣}$ ن × (ن - ٦)

م = $\frac{٤}{٣}$ (ن٢ - ٦ن)

م/ = $\frac{٤}{٣}$ (٢ن - ٦) = ٠

٢ن - ٦ = ٠ ⇐ ن = ٣



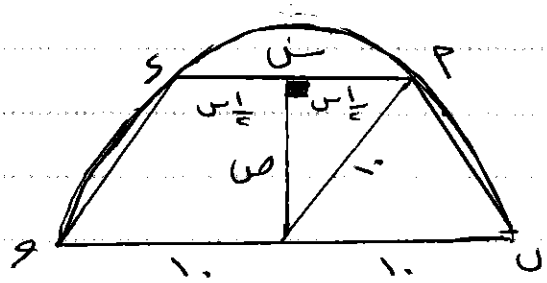
م = $\frac{٤}{٣}$ × ٣ (٦ - ٣) = ١٢

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٥)

دائرة نصف قطرها ١٠ سم ، أوجد مساحة أكبر شبه منحرف مرسوم داخلها بحيث يقع الرأسان ب ، د على نهايتي قطر في الدائرة ، والرأسان م ، ك على محيط الدائرة

الحل



$م = \frac{1}{2}(ك + س) \times ص$

$= (١٠ + \frac{س}{2}) \times ص$

لكن $ص^2 + \frac{1}{4}س^2 = ١٠٠$ (المثلث قائم الزاوية)

$ص = \sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}$

$م = (١٠ + \frac{س}{2}) \times \sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}$

$م' = (١٠ + \frac{س}{2}) \times \frac{-\frac{1}{2}س}{2\sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}} + \sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\frac{1}{2}س(١٠ + \frac{س}{2})}{4\sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{١٠٠ - \frac{1}{4}س^2}$

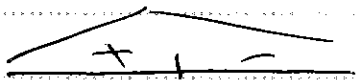
$\leftarrow ١٠٠ - \frac{1}{4}س^2 = ٥٠ + \frac{1}{4}س^2$

$\leftarrow -\frac{1}{2}س^2 - ٥٠ + ١٠٠ = ٠$ (×-٢)

$\leftarrow س^2 + ١٠٠ - ٤٠٠ = ٠$

$(س + ٢٠)(س - ١٠) = ٠$

$\leftarrow س = -٢٠ ، ١٠$



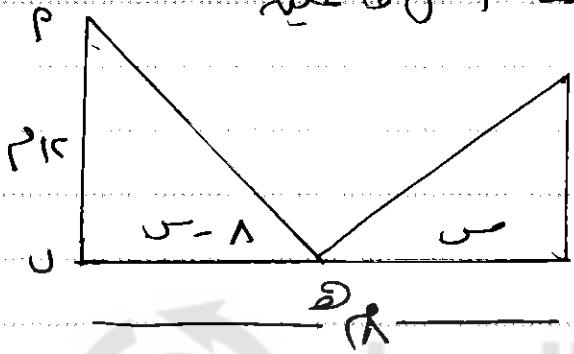
$ص = \sqrt{١٠٠ - ١٠٠} = \sqrt{٧٥}$

$م = \frac{1}{2}(٢٠ + ٠)\sqrt{٧٥}$

$= ١٠\sqrt{٧٥}$

مثال (٣٦)

عمودان كهربائيان أطوالهما ١٢م ، ١٠م على أرض شارع فيصل والبعد بينهما ٨م ، حدد نقطة بينهما على أرض الشارع بحيث تكون مجموع مربعي بعدي النقطة عنهما أقل ما يمكن



الحل

نفرض م = مجموع مربعي بعدي النقطة هـ عن النقطة د

حيث س تحقق

$ل(ك هـ)^2 = س^2 + ١٠٠$

$ل(ب هـ)^2 = (٨ - س)^2 + ١٤٤$

$\leftarrow$ يتبع

←

م = (ك هـ)^{٢} + (٢ هـ)^{٢}

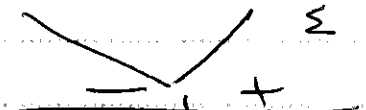
= س^{٢} + ١٠٠ + (٨ − س)^{٢} + ١٤٤

م = س^{٢} + ١٠٠ + ٦٤ − ١٦س + س^{٢} + ١٤٤

م = ٢س^{٢} − ١٦س + ٣٠٠

م′ = ٤س − ١٦ = ٠

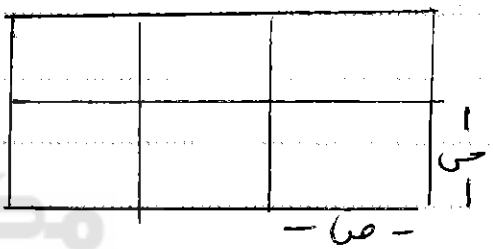
س = ٤



س = ٤

مثال (٣٤)

صاحب مزرعة اغنام لديه ٣٦٠ م من السلك الشائك، يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية مساحة كما في الشكل جد أكبر مساحة للحظائر عليه عملها



الحل

م مساحة الحظائر، ل اطوال السلك

م = الطول × العرض

= ٣ص × ٢س

ل = ٣ص + ٤س = ٣٦٠

٣ص + ٤س = ٣٦٠

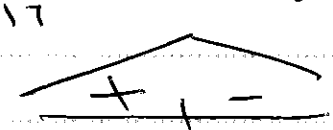
ص = (٣٦٠ − ٤س) / ٣

م = ٣ص × ٢س = ٣ × ((٣٦٠ − ٤س)/٣) × ٢س

= (٢/٣)(٣٦٠س − ٤س^{٢})

م′ = (٢/٣)(٣٦٠ − ٨س)

٨س = ٣٦٠ ← س = ٣٦٠/٨ = ٤٥



٤٥ أكبر ما عليه

عند س = ٤٥ تكون مساحة أكبر ما عليه

أكبر مساحة =

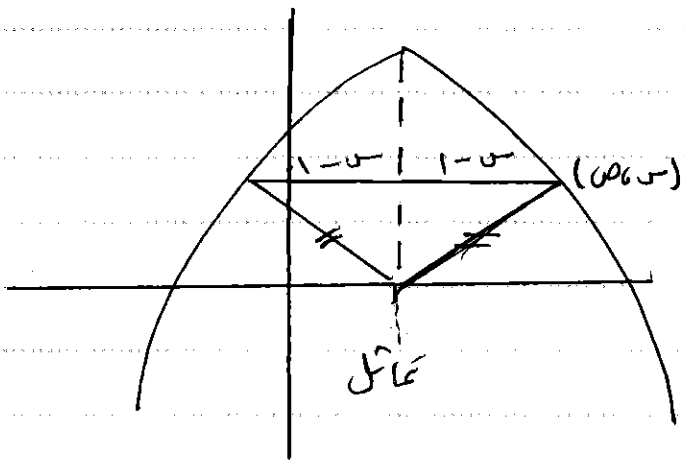
٢ × ٤٥ (٣٦٠ − ٨ × ٤٥) / ٣

= ٧٢٠ م^{٢}

مكتبة الوسام ALWESAM
للمعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٥)

مثلث متساوي الساقين رأسه عند النقطة (١، ١٠) والرأسان الآخران على منحنى $ص = ٤س - س^٢ + ١١$ وقاعده محور السينات بحيث ان القاعدة توازي محور السينات أوجد أكبر مساحة ممكنه للمثلث.



مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

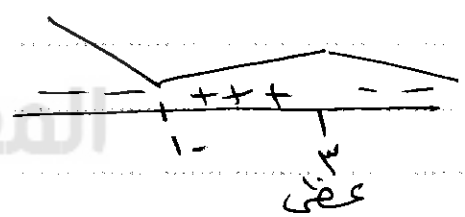
$م = \frac{١}{٢} \times ٤ \times (س - ١) \times ص$

$= (س - ١)(٤س - س^٢ + ١١)$

$= -٣س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$ (÷ -٣)

$س^٢ - ٤س - ٣ = ٠$

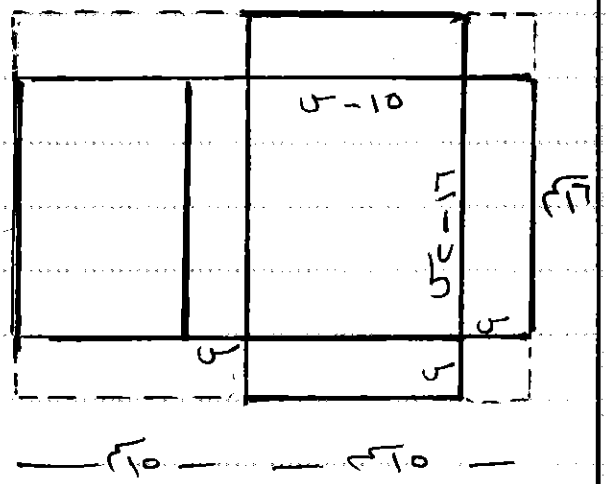
$(س - ٣)(س + ١) = ٠$ $\quad س = ٣ ، -١$



عند $س = ٣$ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن

مثال (٣٦)

اعتمد على الشكل لايجاد حجم أكبر صندوق ممكن.



الحل

ح : حجم الصندوق

طول الصندوق $= ١٦ - ٢س$

عرض الصندوق $= ١٥ - س$

ارتفاع الصندوق $= س$

$ح = (١٦ - ٢س)(١٥ - س) \times س$

$= ٢٤٠س - ١٦س^٢ - ٣٠س^٢ + ٢س^٣$

$= ٢س^٣ - ٤٦س^٢ + ٢٤٠س$

$ح' = ٦س^٢ - ٩٢س + ٢٤٠ = ٠$ (÷٢)

$٣س^٢ - ٤٦س + ١٢٠ = ٠$

$(٣س - ١٠)(س - ١٢) = ٠$

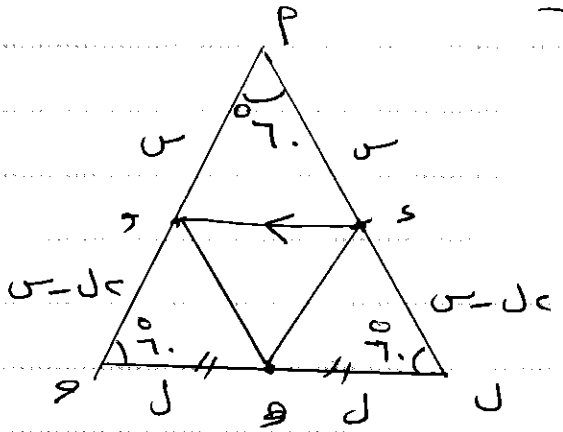
عند $س = \frac{١٠}{٣}$ أكبر حجم

مكتبة السلام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٧)

Pب ح مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعة $= ل$ ، $د$ ، $هـ$ ، $و$ ثلاثة نقاط على Pب ، ب ح ، Pح بحيث $د و \parallel$ ب ح ، $هـ$ منتصف ب ح اثبت ان اكبر مساحة للمثلث $د هـ و = \frac{1}{4}$ مساحة المثلث Pب ح

الحل



مساحة المثلث $د هـ و$

$= $ مساحة المثلث Pب ح − (مساحة ΔPد و + مساحة Δ و هـ ح + مساحة المثلث $د هـ$)

$= \frac{1}{2} \times د$ح $\times$ ل ح $\times$ جا ٦٠° −

$\left[\left(\frac{1}{2} \times$ ٧ $\times$ ٧ $\times$ جا ٦٠° $\right) + \frac{1}{2}$ (ل ح − س) $\times$ ٦ جا ٦٠° + $\frac{1}{2}$ (ل ح − س) $\times$ ٦ جا ٦٠° $\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}$ س$^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ل ح − س) س $\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{1}{2}$ س^2 + ل ح س − ل^2 $\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [س − ل] [س − ل]

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [س^2 − ٢ ل س + ل^2]

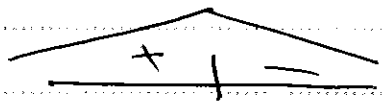
$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س^2 + $\sqrt{3}$ ل س − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل^2

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س^2 + $\sqrt{3}$ ل س

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ [ل^2 − ٢ ل س + س^2]

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ [ل − س]^2

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ [ل − س]^2 = ٠ ← ل − س = ٠ ← س = ل

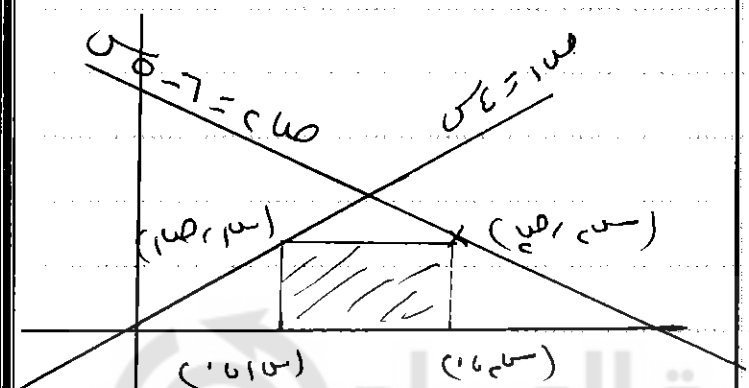


$\frac{\sqrt{3}}{2}$ [ل^2 − ٢ ل س + س^2] = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل س + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س^2

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2 = $\frac{1}{4}$ مساحة المثلث Pب ح

مثال (٣٨)

اوجد مساحة اكبر مستطيل بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات الموجب ويقع الرأسان الآخران على المستقيم ص = ٤ − ٢ س ، ص = ٦ − س



الحل

مساحة المستطيل = طول × العرض

$= $ (س٢ − س١) × ص١

بما ان ص١ = ص٢ ← ٤ − ٢ س١ = ٦ − س١

← س١ = $\frac{٦ - ٤}{١}$ = ٢

← يتبع

مكتبة الهدام ALWSEAM
الموقع : ناجح الجمزاوي

م = ((٦ - ١٣ع) / ٥ = ١٥) × ٤ س^١٥
توحيد مقام

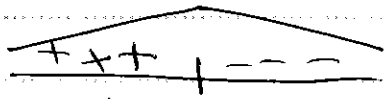
م = (٦ - ١٣ع) / ٥ × ٤ س^١٥

= ١/٥ (٢٤ س^١٥ - ٢٦ س^١٥)

م' = ١/٥ (٢٤ س^١٥ - ٢٦ س^١٥) = صفر

٢٤ - ٢٦ س = ٠

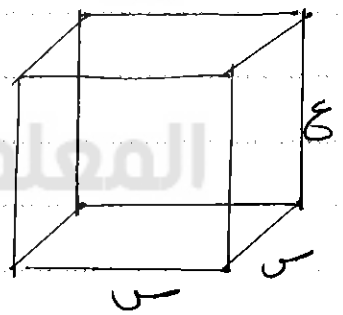
س = ١/٣ ←



م = ١/٥ (٢٤ × ١/٣ - ٢٦ × (١/٣)^٤) = ٤/٥

مثال (٣٩)

صندوق خشبي على شكل منشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يراد تقوية ارتباط أوجهه الستة وذلك بتثبيت شريط على طول أحرفه فاذا كان الطول الكلي للشريط المستخدم ٣٠ قدماً



الحل

ح = س × س × ع = س^٢ ع

لكن ٣٠ = ٨ س + ٤ ع ← ٤ ع = ٣٠ - ٨ س

ع = (٣٠ - ٨ س)/٤ = (١٥ - ٤ س)/٢

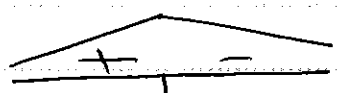
ح = ١/٢ (١٥ - ٤ س) × س^٢

= ١/٢ (١٥ س^٢ - ٤ س^٣)

ح' = ١/٢ (٣٠ س - ١٢ س^٢) = ٠

٣٠ س - ١٢ س^٢ = ٠

٦ س (٥ - ٢ س) = ٠ ← س = ٠ ، س = ٥/٢

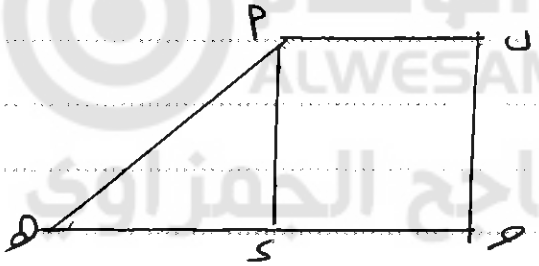


ع = ١٥ - ٤ × ٥/٢ / ٢ = ٥/٢

مثال (٤٠)

اذا أثني سلك طول ٧٢ سم كما في الشكل المجاور حيث ان ب ه = ٢٤ سم ، ج د = ب و = ٥ سم ، د ه = ٣ سم

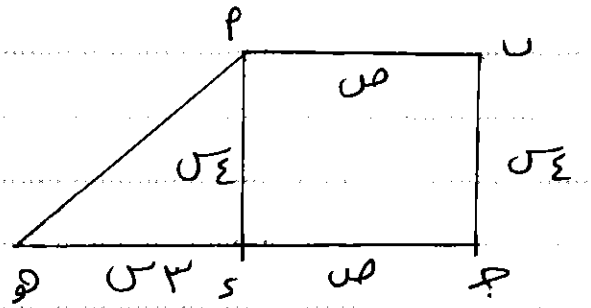
اوجد أكبر مساحة ممكنه للشكل ب و ه د



← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

الحل

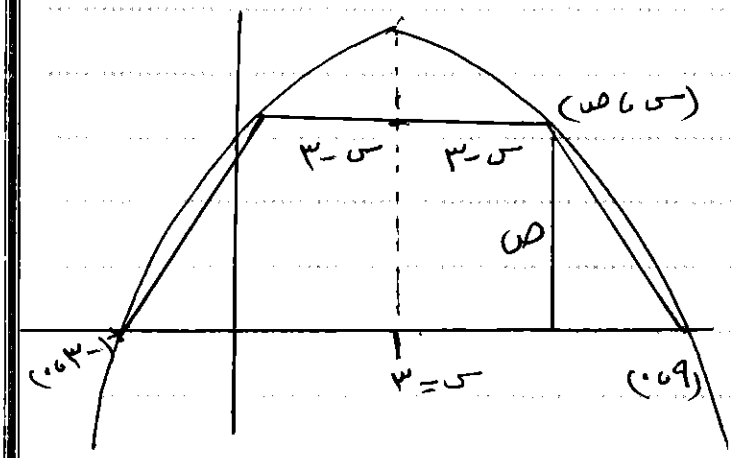


مساحة الشكل أ ب د هـ =
= مساحة أ ب د + مساحة أ د هـ
م = ص × ٤س + ½ × ٣س × ٤س
= ٤س ص + ٦ س²
لإيجاد أ هـ ⇐
(أ هـ)² = (٤س)² + (٣س)²
أ = ٥س
محيط الشكل = ص + ٣س + ٥س = ٧٢
ص = ٣٦ − ٦س
م = ٤س(٣٦ − ٦س) + ٦س²
= ١٤٤س − ٢٤س² + ٦س²
= ١٤٤س − ١٨س²
م′ = ١٤٤ − ٣٦س = ٠
س = ٤

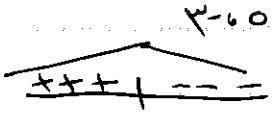
ص = ٣٦ − ٦ × ٤ = ١٢
م = ٤ × ٤ × ١٢ + ٦ × (٤)²
= ١٩٢ + ٩٦ = ٢٨٨

مثال (٤١)

أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف المرسوم فوقه محور السينات واحدى قاعدتيه هي محور السينات ورأساه الآخران على منحنى ص = −س² + ٦س + ٢٧



يقطع المنحنى محور السينات عندما
−س² + ٦س + ٢٧ = ٠ ⇐ س² − ٦س − ٢٧ = ٠
(س − ٩)(س + ٣) = ٠
س = ٩ ، س = −٣
طول القاعدة السفلى ٩ − (−٣) = ١٢
م = ½ (١٢ + ٢(س − ٣)) × ص
= ½ (١٢ + ٢س − ٦) × (−س² + ٦س + ٢٧)
= ½ (٢س + ٦) × (−س² + ٦س + ٢٧)
= (س + ٣) × (−س² + ٦س + ٢٧)
م′ = (س + ٣) × (−٢س + ٦) + (−س² + ٦س + ٢٧) × ١
= −٢س² + ٦س − ٦س + ١٨ − س² + ٦س + ٢٧
= −٣س² + ٦س + ٤٥ = ٠
(س − ٥)(س + ٣) ⇐ س = ٥ ، −٣
عظمى عند س = ٥

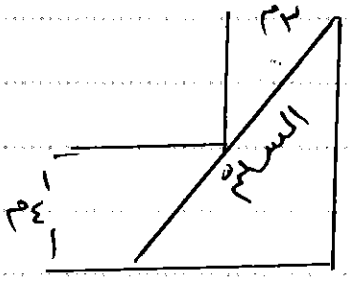


م = (٥ + ٣)(−٢٥ + ٣٠ + ٢٧) = ٥٦

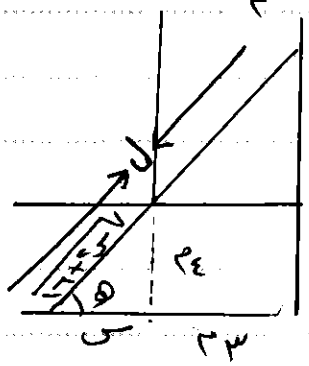
مكتبة الوسام AL WISAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٤٢)

الشكل المجاور يمثل ممران متعامدان اوجد طول اطول سلم يمكن ان يمر عمودياً بالممر



الحل : ل: طول السلم



$\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+16}}$ = جتاهـ

$\frac{\text{س}+3}{\text{ل}}$ = جتاهـ

$\frac{\text{س}+3}{\text{ل}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+16}}$

$\text{ل س} = (\text{س}+3)\sqrt{\text{س}^2+16}$

$\text{ل} = \left(\frac{\text{س}+3}{\text{س}}\right)\sqrt{\text{س}^2+16}$

$= \left(1+\frac{3}{\text{س}}\right)\sqrt{\text{س}^2+16}$

$\text{ل}' = \left(1+\frac{3}{\text{س}}\right)\times\frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2+16}} + \sqrt{\text{س}^2+16}\times\frac{-3}{\text{س}^2}$

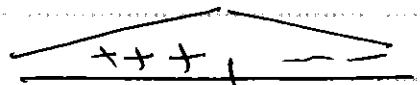
$= 0$

$\frac{\text{س}+3}{\sqrt{\text{س}^2+16}} = \frac{3}{\text{س}^2}\sqrt{\text{س}^2+16}$

$\text{س}^3+3\text{س}^2 = 3(\text{س}^2+16)$

$\text{س}^3+3\text{س}^2 = 3\text{س}^2+48$

$\text{س}^2 = 48 \leftarrow \text{س} = \sqrt{48}$

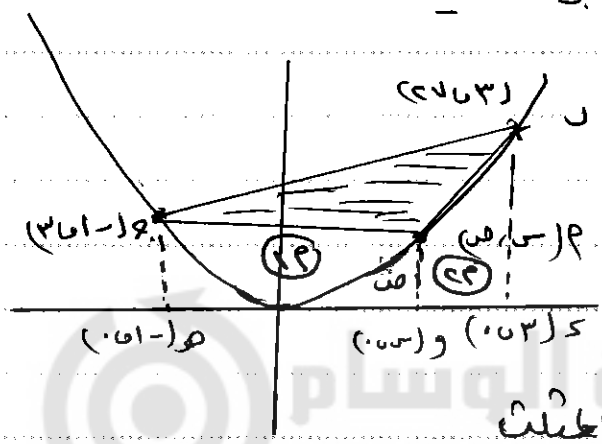


عظمى عندما $\text{س} = \sqrt{48}$

$\text{ل} = \left(1+\frac{3}{\sqrt{48}}\right)\sqrt{(\sqrt{48})^2+16}$

مثال (٤٣)

اذا كانت ل (٣، ٧٦٣) ، هـ (-١، ٣) نقطتان على منحنى ص = ٣س^2 ، النقطة م (س، ص) نقطة على المنحنى بينهما اوجد الاحداثي السيني للنقطة م بحيث تكون مساحة المثلث م ل هـ أكبر ما يمكن .



م ا لمثلث

= مساحة شبه المنحرف ل ك و م

− [مساحة شبه المنحرف ل ك و م + مساحة شبه المنحرف م و هـ]

← يتبع الحل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : ناجح الجمزاوي Solutions

$م = \frac{1}{2} \times (٣+٧ص) \times ٤$

$- \left[\frac{1}{2} \times (٧+٥ص) \times (٣-س) + \frac{1}{2}(ص+٣)(س+١) \right]$

لما $ص = ٣س^{٢}$

$م = ٦٠ - \left[\frac{1}{2}(٣س^{٢}+٧)(٣-س) + \frac{1}{2}(٣س^{٢}+٣)(س+١) \right]$

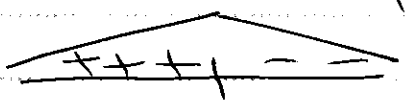
$= ٦٠ - \left[\frac{1}{2}(٩س^{٢}+٨١ - ٣س^{٣} - ٧س) + \frac{1}{2}(٣س^{٣}+٣س^{٢}+٣س+٣) \right]$

$= ٦٠ - \frac{1}{2}(٩س^{٢}+٨١ - ٣س^{٣} - ٧س + ٣س^{٣}+٣س^{٢}+٣س+٣)$

$= ٦٠ - \frac{1}{2}(١٢س^{٢} - ٤س + ٨٤)$

$م' = ٠ - \frac{1}{2}(٢٤س - ٤) = ١٢س - ١٢ = ٠$

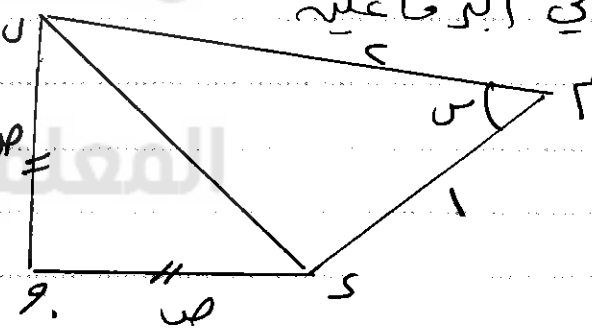
$س = ١$



عظمى عند $س = ١$

مثال (٤٤)

صندوق سعته $س$ التي تجعل مساحة كل الثماني أكبر ما يمكن



الحل

مساحة المثلث $م ب د$ + مساحة المثلث $ب ج د$

$م = \frac{1}{2} \times ١ \times ١ \times جاس + \frac{1}{2} \times ص \times ص$

$م = \frac{1}{2} جاس + \frac{1}{2} ص^{٢}$

قانون جيب التمام

$ب د^{٢} = ١^{٢} + ١^{٢} - ٢ \times ١ \times ١ \times تاس$

$= ٢ - ٢ تاس$

وايضاً $(ب د)^{٢} = ص^{٢} + ص^{٢} = ٢ ص^{٢}$

$\Leftarrow ٢ ص^{٢} = ٢ - ٢ تاس \quad (\div ٤)$

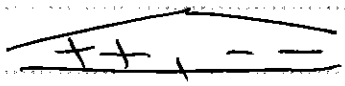
$\frac{1}{2} ص^{٢} = \frac{١}{٢} - تاس$ نعوضها في $م$

$م = جاس + \frac{١}{٢} - تاس$

$م' = تاس + جاس = ٠$

$تاس = - جاس$

$س = ١٣٥^{\circ}$



عندما $س = ١٣٥^{\circ}$

عظمى $= \frac{\pi ٣}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٤٥)

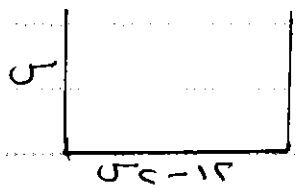
لوحة مستطيلة عرضها ١٢م ثنيت من اكابسين بجدارين لتصبح قناة ماء اوجد طول الجدار - حتى تكون سعة القناة أكبر ما يمكن في كل من:

(أ) اذا كان الجدار عمودي على القاعدة

(ب) اذا كان الجدار يميل بزاوية ٦٠° على الافقي

الحل

(أ)

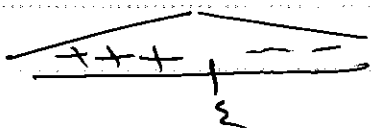


مساحة المقطع = م = (١٢-٢س) × س

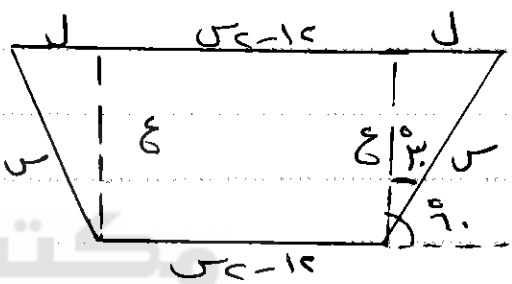
= ١٢س - ٢س^٢

م' = ١٢ - ٤س = ٠ ← س = ٣

عظمى عند س = ٣



(ب)



م = ½ × (١٢-٢س+١٢-٢س+ل+ل) × ع

= ½ (٢٤-٤س+٢ل) × ع

= ع (١٢ - ٢س + ل)

لكن جا٣٠ = ½ = ع/س

← ل = ½ س

جتا٣٠ = ٢ل/ع = ع/س ← ع = √٣ س

← م = (١٢-٢س+½س) × √٣ س

= √٣ س (١٢ - ٢½ س)

= √٣ (١٢س - ٣/٢ س^٢)

م' = √٣ (١٢ - ٣س) = ٠

١٢ - ٣س = ٠ ← س = ٤

عظمى عند س = ٤

مثال (٤٦)

أ ب ج د شبه منحرف قائم الزاوية في ب

أ د = ٦٠ سم ، ق(د أ ب) = ٣٠° ، ر نقطة داخله

شبه منحرف أ ب ج د ، ر ∈ أ د

والرأسان الآخران على الضلعين أ ب ، ب ج

أوجد أكبر مساحة ممكنة لـ ب ر ج د

الحل

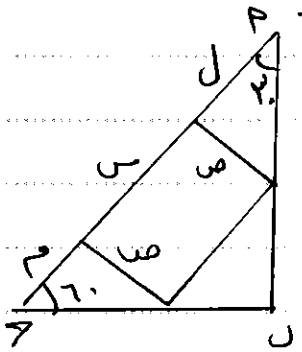
← يتبع

مكتبة السوسوان AWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

الحل

العامة م = س × ص

ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ص}{ل}$



$\Leftarrow$ ل = $\sqrt{٣}$ ص

ظا ٦٠ = $\sqrt{٣} = \frac{ص}{م}$

$\Leftarrow$ م = $\frac{ص}{\sqrt{٣}}$

لكن ل + س + م = ١٠

$\sqrt{٣}$ ص + س + ص = ١٠ ... (١)

$٣ص + \sqrt{٣}س + ص = ١٠\sqrt{٣}$

$٤ص = ١٠\sqrt{٣} - \sqrt{٣}س$

$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(١٠ - س)$

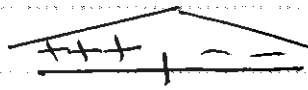
$م = س \times \frac{\sqrt{٣}}{٤}(١٠ - س)$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}(١٠س - س^٢)$

$م' = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(١٠ - ٢س) = ٠$

$١٠ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٥$

عظمى عند س = ٥

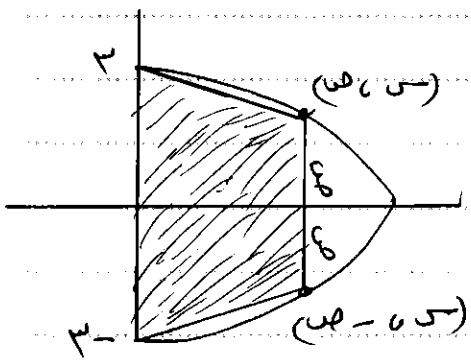


$ص = ١٠\sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}(١٠ - ٥) = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$

$م = \frac{٥\sqrt{٣} \times ٥}{٢} = \frac{٢٥\sqrt{٣}}{٢}$

مثال (٤٧)

محمد أ على الشكل المجاور أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف حيث س = ٩ − ص^٢



الحل

٩ − ص^٢ = ٠ $\leftarrow$ ص = $\pm$ ٣

القاعدة السفلى = ٢ + ص

القاعدة العليا = ٢ ص

م = $\frac{١}{٢}$ (٢ ص + ٦)(ص + ٣) = س (٩ − ص^٢)

م' = (ص + ٣)(−٢ ص) + (٩ − ص^٢) × ١

= −٢ ص^٢ − ٦ ص + ٩ − ص^٢

= −٣ ص^٢ − ٦ ص + ٩ = ٠

ص^٢ + ٢ ص − ٣ = ٠

(ص + ٣)(ص − ١) = ٠

ص = ١ ... (−٣ مرفوض)

عظمى عند ص = ١

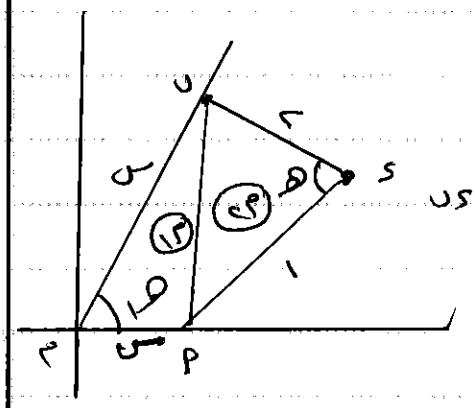
م = (١ + ٣)(٩ − ١) = ٤ × ٨ = ٣٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٤٨)

بدأت النقطتان P ، ن تتحركان من نقطة الأصل م بحيث تحركت P على محور السينات الموجب بينما تحركت ن على المستقيم ص = √٣ س في الربع الأول وكان بعد كل منهما عن نقطة الأصل متساوي دائماً وكانت النقطه د تتحرك في الربع الأول بحيث يبقى بعدها عن P يساوي ٢ سم وعن ن يساوي ٤ سم جاعلاً من الزاويه P د ن التي تجعل مساحة المثلث الرباعي م P د ن أكبر ما يمكن .

الحل



مساحة المثلث م P د ن = (١٣) + (١٤)

ص = √٣ س

هـ = ٦٠°

١٣ = ½ × س × س جا ٦٠° = ½ س² × √٣/٢

= √٣/٤ س²

١٤ = ½ × ١ × ٢ جا هـ = جا هـ

لكن (P ن)² = ١² + ٢² − ٢ × ١ × ٢ جتا هـ

= ٥ − ٤ جتا هـ

وأيضاً

(P ن)² = س² + س² − ٢ × س × س × جتا ٦٠°

= ٢ س² − ٢ س² × ½ = س²

∴ س² = ٥ − ٤ جتا هـ

م = ١٣ + ١٤

= √٣/٤ س² + جا هـ

= √٣/٤ (٥ − ٤ جتا هـ) + جا هـ

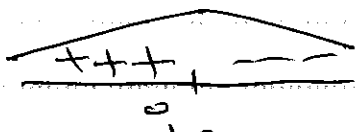
م′ = √٣/٤ × ٤ جا هـ + جتا هـ = ٠

√٣ جا هـ = − جتا هـ بالقسمة على جتا هـ

√٣ ظا هـ = − ١

ظا هـ = −١/√٣

هـ = ١٥٠°



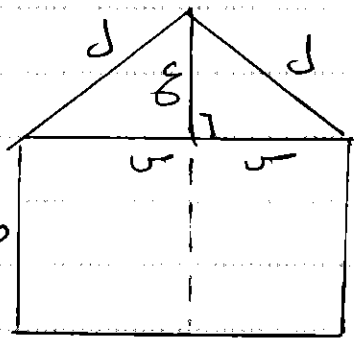
عظمى عند هـ = ١٥٠°

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٤٩)

نافذه على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين ارتفاعه $\frac{3}{8}$ طول قاعدته، اذا كان محيط النافذه ٩ امتار اوجد ابعادها بحيث تسمح بادخال اكبر كمية من الضوء.

الحل



$ع = \frac{3}{8} \times ٢س = \frac{3}{4} س$

نفرض ان معامل نفاذية الضوء P

كمية الضوء = مساحة × معامل النفاذية

$= P \times$ مساحة المستطيل $+ P \times$ مساحة المثلث

$= P \times ٢س \times ص + \frac{1}{2} \times P \times ٢س \times ع$

$= ٢ P س ص + P س ع$

$ك = ٢ P س ص + P س \times \frac{3}{4} س$

$= ٢ P س ص + \frac{3}{4} P س^{٢}$

كمية محيط النافذه $= ٩$

$٢ل + ٢س + ص = ٩$

مثلث قائم الزاوية

$ل = \sqrt{س^{٢} + ع^{٢}}$

$= \sqrt{س^{٢} + \frac{9}{16} س^{٢}} = \sqrt{\frac{25}{16} س^{٢}}$

$\Leftarrow ل = \frac{5}{4} س$ بالتعويض في المحيط

$٢ \times \frac{5}{4} س + ٢س + ص = ٩$

$\frac{9}{2} س + ص = ٩$

$ص = ٩ - \frac{9}{2} س$

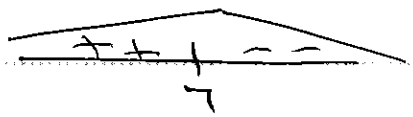
$ك = ٢ P س (٩ - \frac{9}{2} س) + \frac{3}{4} P س^{٢}$

$ك = P (١٨ س - ٩ س^{٢} + \frac{3}{4} س^{٢})$

$ك' = P (١٨ - ٩ س + \frac{3}{2} س) = ٠$

$١٨ - \frac{15}{2} س = ٠$

$\Leftarrow س = \frac{36}{15} = \frac{6}{5}$



كمية الضوء عند $س = \frac{6}{5}$

$ص = \frac{1}{2} (٩ - \frac{9}{4} \times \frac{6}{5})$

$= \frac{1}{2} (٩ - \frac{27}{10})$

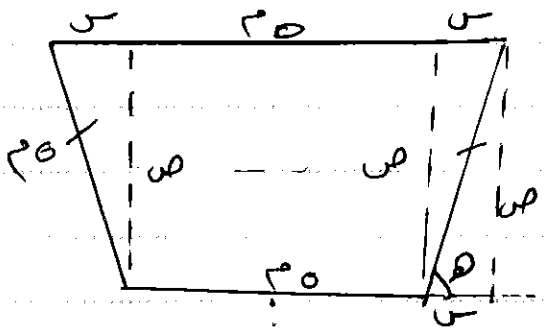
$= \frac{90 - 27}{20} = \frac{63}{20}$

$ع = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{10}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٥٠)

سد مياه مقطعة العرضي على شكل شبه منحرف طول قاعدته السفلى ٥م وطول كل من الجانبين المائلين ٥م انظر الشكل، جد زاوية ميل الضلعين الجانبين بحيث تكون مساحة شبه المنحرف (المقطع العرضي) أكبر ما يمكن



م = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ (٥ + ٥ + ٥جتا هـ) × ص

= $\frac{1}{2}$ (١٠ + ٥جتا هـ) × ٥جا هـ

= (٥ + ٥جتا هـ) × ٥جا هـ

لكن

جا هـ = $\frac{ص}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{س}{٥}$

← ص = ٥جا هـ ، س = ٥جتا هـ

م = (٥ + ٥جتا هـ) × ٥جا هـ

= ٢٥جا هـ + ٢٥جا هـ جتا هـ

= ٢٥(جا هـ + جا هـ جتا هـ)

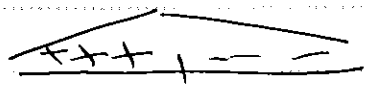
م = ٢٥(جا هـ + $\frac{1}{2}$ جا ٢هـ)

م' = ٢٥(جتا هـ + جتا ٢هـ) = ٠

- جتا هـ = جتا ٢هـ

جتا (π - هـ) = جتا ٢هـ

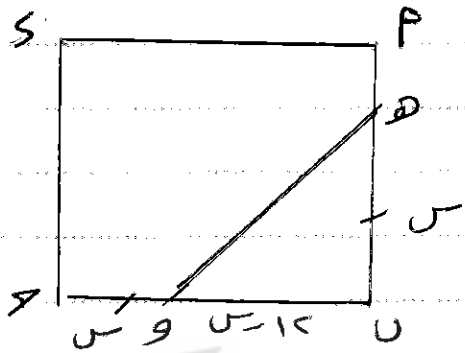
← π - هـ = ٢هـ ← هـ = $\frac{\pi}{3}$



$\frac{\pi}{3}$ قيمة عظمى

مثال (٥١)

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم أخذت النقطتان هـ ، و على أ ب بحيث كان هـ ب = ٢ و ب جـ طول كل من هـ ب ، ب و بحيث تكون مساحة المنطقة أ د جـ و هـ أصغر ما يمكن



الحل

لتكون مساحة الشكل أ هـ و جـ د أصغر ما يمكن يجب أن تكون مساحة المثلث أ ب جـ أكبر ما يمكن

م = $\frac{1}{2}$ × (١٢-س) × س

= ٦س - $\frac{س^2}{2}$ = ٦ - $\frac{س}{2}$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWSAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

$م = ٦س - \frac{س^٢}{٢}$

$م' = ٦ - س = ٠$

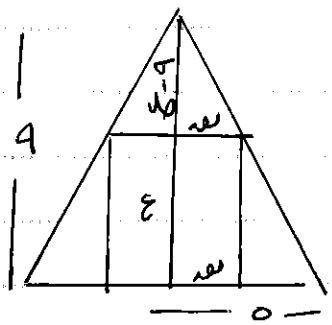
$س = ٦$

أكبر ما يكون عند $س = ٦$

مثال (٥٥)

صف ارتفاع الاسطوانة ذات أكبر حجم والتي يمكن وضعها داخل مخروط نصف قطره ٥ سم وارتفاعه ٩ سم

الحل



حجم الاسطوانة $= \pi نق^٢ ع$

من التشابه

$\frac{٩-ع}{نق} = \frac{٩}{٥} \Leftarrow ٥(٩-ع) = ٩نق$

$\leftarrow نق = \frac{٥}{٩}(٩-ع)$

$ح = \pi (\frac{٥}{٩}(٩-ع))^٢ ع$

$= \frac{٢٥\pi}{٨١}(٨١ع - ١٨ع^٢ + ع^٣)$

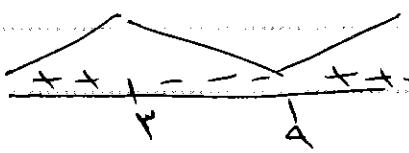
$ح' = \frac{٢٥\pi}{٨١}(٨١ - ٣٦ع + ٣ع^٢)$

$٨١ - ٣٦ع + ٣ع^٢ = ٠$

$٣(٢٧ - ١٢ع + ع^٢) = ٠$

$٣(٩-ع)(٣-ع) = ٠$

$ع = ٩ ، ٣$

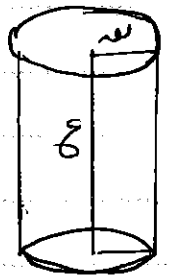


عظمى عند $ع = ٣$

مثال (٥٦)

يراد عمل وعاء اسطواني الشكل سعته ٦٤ سم^٣ ومفتوح من أعلى جد ابعاد الوعاء لتكون مساحة المعدن المستعمل اقل ما يمكن.

الحل



مساحة المعدن
= مساحة الجانب + مساحة القاعدة

$م = ٢\pi نق ع + \pi نق^٢$

لكن $ح = ٦٤ = \pi نق^٢ ع$

$ع = \frac{٦٤}{\pi نق^٢}$

$م = \pi نق^٢ + ٢\pi نق \times \frac{٦٤}{\pi نق^٢}$

$= \pi نق^٢ + \frac{١٢٨}{نق}$

$م' = ٢\pi نق - \frac{١٢٨}{نق^٢} = ٠$

$نق = \frac{٤}{\sqrt{\pi ٣}}$

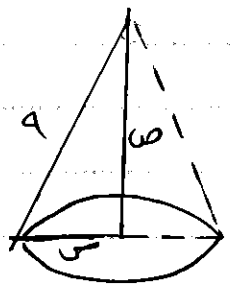
$ع = \frac{٤}{\sqrt{\pi ٣}}$

صغرى $\frac{٤}{\sqrt{\pi ٣}}$

مكتبة الإمام
Alimam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٥٤)

مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت ويساوي ٩ سم وطول ضلعي القائمة س، ص فاذا دار المثلث حول احد ضلعي القائمة فكون مخروط اوجد أكبر حجم محلة للمخروط.



الحل

$ح = \frac{1}{3}\pi نق^2 ع$

$ح = \frac{1}{3}\pi س^2 ص$

لكن

$س^2 + ص^2 = ٨١$

$\Leftarrow س^2 = ٨١ - ص^2$

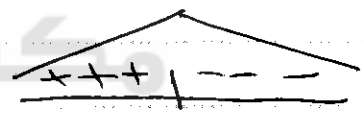
$ح = \frac{\pi}{3}(٨١ - ص^2) \times ص$

$= \frac{\pi}{3}(٨١ ص - ص^3)$

$ح' = \frac{\pi}{3}(٨١ - ٣ص^2) = ٠$

$٨١ - ٣ص^2 = ٠ \leftarrow ص^2 = \frac{٨١}{3} = ٢٧$

$ص = \sqrt{٢٧}$



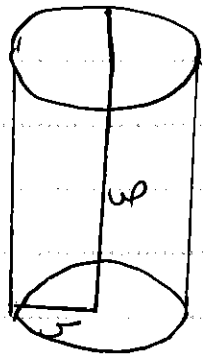
$س^2 = ٨١ - ٢٧$

$= ٥٤$

$ح = \frac{\pi}{3} \times ٥٤ \times \sqrt{٢٧}$

مثال (٥٥)

قطعة سلك محيطها ٣٦ سم دار حول احد اضلاعه فكون اسطوانة اوجد أكبر حجم محلل للأسطوانة



الحل

$ح = \pi نق^2 ع$

$= \pi س^2 ص$

لكن

$٣٦ = ٢ص + ٢س$

$س + ص = ١٨ \Leftarrow ص = ١٨ - س$

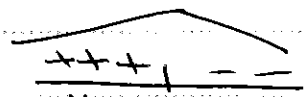
$ح = \pi س^2 (١٨ - س)$

$= \pi (١٨ س^2 - س^3)$

$ح' = \pi (٣٦ س - ٣ س^2) = ٠$

$٣٦ س - ٣ س^2 = ٠$

$٣س (١٢ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ١٢$



$ص = ١٨ - س$

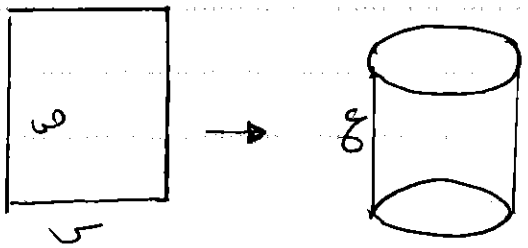
$= ١٨ - ١٢ = ٦$

$ح = \pi \times ١٢ \times ١٢ \times ٦ = ٢٨٨ \pi$ سم^3

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٥٦)

سلك طوله محيطة ٣٦ سم ثني ليكون اسطوانة أوجد أكبر حجم ممكن للاسطوانه



الحل

$ح = \pi نق^2 ع$

$ع = ص$

محيط القاعدة $= 2\pi نق = س$

$\leftarrow نق = \frac{س}{2\pi}$

$ح = \pi \times (\frac{س}{2\pi})^2 \times ص$

$= \frac{\pi س^2}{4\pi^2} \times ص = \frac{1}{4\pi} \times س^2 \times ص$

لكن $2س + 2ص = 36$

$س + ص = 18 \leftarrow ص = 18 - س$

$\Leftarrow ح = \frac{1}{4\pi} \times س^2 (18 - س)$

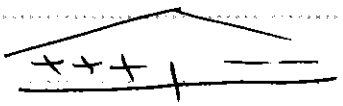
$= \frac{1}{4\pi} (18س^2 - س^3)$

$ح' = \frac{1}{4\pi} (36س - 3س^2) = 0$

$\leftarrow 36س - 3س^2 = 0$

$3س (12 - س) = 0$

$س = 0 ، 12$

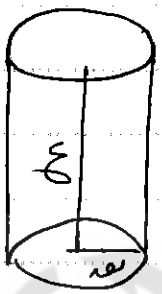


$س = 12 \Leftarrow ص = 18 - 12 = 6$

$ح = \frac{1}{4\pi} \times 12 \times 12 \times 6 = \frac{864}{\pi}$

مثال (٥٧)

وعاء اسطواني زجاجي ذو غطاء معدني، اذا كانت تكلفه وحدة المساحة من المعدن ثلاثة امثال تكلفه الزجاج فاثبت ان النسبه بين بعدي الوعاء (نق، ع) الأقل تكلفه والذي يسع حجماً ثابتاً هي ١ : ٤



الحل

نفرض تكلفة وحدة زجاج $= ك$

فتكون تكلفة وحدة المعدن $= 3ك$

$م = 2\pi نق ع + \pi نق^2$

التكاليف

$ت = ك \times 2\pi نق ع + ك \times \pi نق^2 + 3ك \times \pi نق^2$

زجاج — زجاج — المعدن

لكن $ح = \pi نق^2 ع \Leftarrow ع = \frac{ح}{\pi نق^2}$

ح ثابت

$\leftarrow$ يتبع

$ت = ٢\pi ٢ نق^{٢} + \frac{ع}{نق \pi} \times نق ٢\pi ٢$

$= ٢\pi ٤ نق^{٢} + \frac{ع ٢}{نق}$

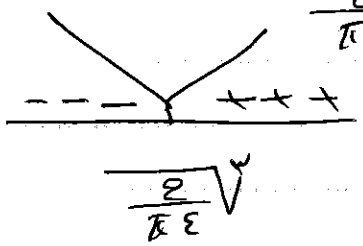
$ت' = ٨\pi ٢ نق - \frac{ع ٢}{نق^{٢}}$

$٨\pi ٢ نق = \frac{ع ٢}{نق^{٢}} \leftarrow$

$٨\pi ٢ نق^{٣} = ع ٢$

$نق^{٣} = \frac{ع ٢}{٨\pi ٢} = \frac{ع}{٤\pi}$

$نق = \sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}}$



$\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}}$

$ع = \pi (\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}})^{٢} \times نق$

$\frac{نق}{ع} = \frac{\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}}}{\pi (\sqrt[٣]{\frac{ع}{٤\pi}})^{٢}}$

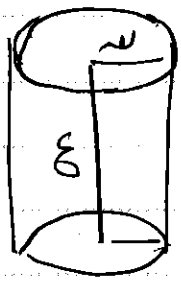
$= \frac{\pi ٤}{ع} \times \pi (\frac{ع}{٤\pi})^{\frac{٢}{٣}} = \frac{\pi ٤}{ع ٤\pi}$

$= \frac{١}{٤} \quad ١ : ٤$

مثال (٥٨)

يراد صنع وعاء اسطواني الشكل قاعدته دائرية ومفتوح من الأعلى لتكون مساحته ٤٥π سم^{٢} فاذا كانت تكاليف صنع سم^{٢} من الجوانب قرشين ومن القاعدة ٤ قروش جد ابعاد هذا الوعاء لتكون تكلفة صناعته أقل ما يمكن.

الحل



مساحة وجه الوعاء الاسطواني = م

$= ٢\pi نق ع + \pi نق^{٢}$ وعليه تكون تكاليف صناعته

$ت = ٤\pi نق ع^{٢} + ٤\pi نق^{٢}$

لكن $نق^{٢}\pi ع = ٤٥\pi$

$ع = \frac{٤٥\pi}{نق^{٢}\pi} = \frac{٤٥}{نق^{٢}}$

$ت = ٤\pi نق \times \frac{٤٥}{نق^{٢}} + ٤\pi نق^{٢}$

$= \frac{١٦٢\pi}{نق} + ٤\pi نق^{٢}$

$ت' = -\frac{١٦٢\pi}{نق^{٢}} + ٨\pi نق$

$\leftarrow$ يتبع

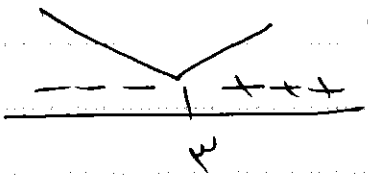
مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : ناجح الجمزاوي

$\frac{\pi ق^{16}}{نق^{2}} = \pi 8$ نهـ

$نق^{2} \times \pi 8 = \pi ق^{16}$ نهـ $= 12 ق^{16}$

$نق^{2} = \frac{\pi ق^{16}}{\pi 8} = \frac{ق^{16}}{8} = ق^{2}$

نهـ $= 3$

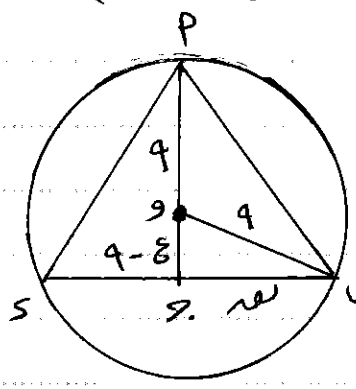


$ع = \frac{54}{9} = 6$ سم

مثال (٥٩)

اوجد نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم حجمه أكبر ما يمكن مرسوم داخل كرة نصف قطرها ٩ سم

الحل



ع ارتفاع المخروط

نهـ : نصف قطر قاعدته

حجم المخروط $= \frac{\pi}{3}$ نق^{2} ع

حسب فيثاغورس على Δ ب و

$81 = نق^{2} + (9-ع)^{2}$

$81 = نق^{2} + ع^{2} - 18ع + 81$

$نق^{2} = 18ع - ع^{2}$ ← قاعدة

$ح = \frac{\pi}{3} (18ع - ع^{2}) ع$

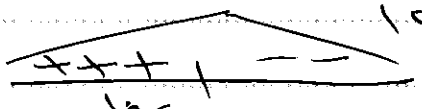
$ح = \frac{\pi}{3} (18ع^{2} - ع^{3})$

$ح' = \frac{\pi}{3} (36ع - 3ع^{2}) = 0$

$36ع - 3ع^{2} = 0$

$3ع(12 - ع) = 0$

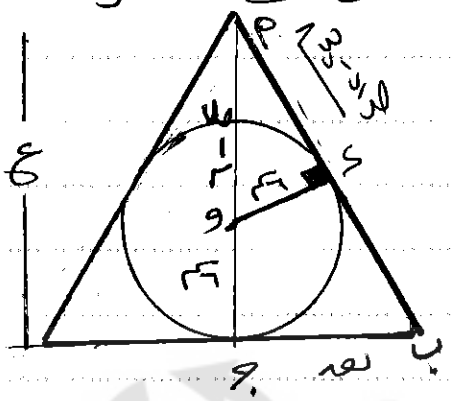
$ع = 12$



نهـ $= \sqrt{18 \times 12 - 12^{2}} = \sqrt{72}$

مثال (٦٠)

اصغر حجم مخروط دائري قائم رسم بداخله كرة نصف قطرها ٦ سم .



الحل

حسب نظرية فيثاغورس Δ P د و

$(ع-6)^{2} = (ب د)^{2} + 6^{2}$

$ع^{2} - 12ع + 36 = (ب د)^{2} + 36$

$(ب د)^{2} = ع^{2} - 12ع$

$ب د = \sqrt{ع^{2} - 12ع}$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام
ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

وهن تشابه لمثلثات

$\frac{ع}{نق} = \frac{\sqrt{ع^2 - ١٢ع}}{٦}$ وبالتربيع

$\frac{ع^2}{نق^2} = \frac{ع^2 - ١٢ع}{٣٦}$

$نق^2 (ع^2 - ١٢ع) = ٣٦ ع^2$

$نق^2 = \frac{٣٦ ع^2}{ع^2 - ١٢ع}$ نعوضها في ح

$ح = \frac{\pi}{٣} \times \frac{٣٦ ع^2}{ع^2 - ١٢ع} \times ع$

$= \frac{\pi ١٢ ع^3}{ع(ع - ١٢)}$

$= \pi ١٢ \left(\frac{ع^2}{ع - ١٢}\right)$

$ح' = \pi ١٢ \left(\frac{(ع - ١٢)(٢ع ع - ع^2 ١)}{(ع - ١٢)^2}\right)$

$= \pi ١٢ \left(\frac{٢ع^2 - ٢٤ع - ع^2}{(ع - ١٢)^2}\right)$

$ع^2 - ٢٤ع = ٠$

$ع(ع - ٢٤) = ٠ \quad ع = ٢٤$

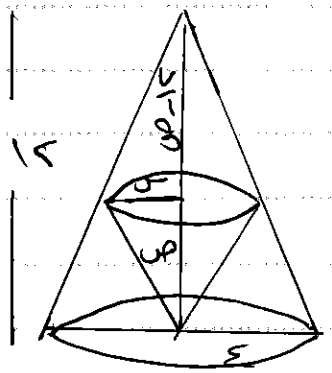
$- - - + + +$ (٢٤)

ع = ٢٤ صغرى

اصغر حجم $= \frac{\pi ١٢ (٢٤)^2}{٢٤} = \pi ٥٧٦$

مثال (٦١)

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم عليه ركنة داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث ينطبق رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي :



الحل

$ح = \frac{\pi}{٣} \pi س^2 ص$

$\frac{س}{١٢ - ص} = \frac{ع}{١٤} \Leftarrow ٣س = ١٢ - ص$

$\Leftarrow ص = ١٢ - ٣س = ٣(٤ - س)$

$ح = \frac{\pi}{٣} س^2 (٣(٤ - س))$

$= ٤\pi س^2 - \pi س^3$

$= \pi (٤س^2 - س^3)$

$ح' = \pi (٨س - ٣س^2) = ٠$

$٨س - ٣س^2 = ٠$

$س(٨ - ٣س) = ٠ \quad ٨ - ٣س = ٠$

$س = \frac{٨}{٣}$

$+ + + \; | \; - - -$ ($\frac{٨}{٣}$)

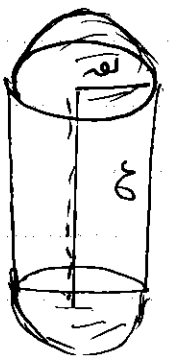
$ح = \frac{١}{٣} \pi (\frac{٨}{٣})^2 \times ٤$

$= \frac{٢٥٦\pi}{٢٧}$

مثال (٦٤)

تريد صنع كبسولة على شكل اسطوانة تنتهي بنصفي كرة حجمها ٣٠ π سم٣ فاذا كانت تكلفة وحدة المساحات من الاسطوانة ٢ مرة وتكلفة وحدة المساحات من الكرة تضاعف مرة ونصف اوجد نصف قطر الكرة لتكون التكاليف اقل ما يمكن

الحل



التكاليف = تكاليف الكرة + تكاليف الاسطوانة

$ت = ٢٫٥ \times ٤ \pi نق^{٢} + ٢ \times ٢ \pi نق ع$

$= ٦ \pi نق^{٢} + ٤ \pi نق ع$

ح = حجم الكرة + حجم الاسطوانة

$ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^{٣} + \pi نق^{٢} ع = ٣٠ \pi$

$ع = \frac{٣٠ \pi - \frac{٤}{٣} \pi نق^{٣}}{\pi نق^{٢}} = \frac{٣٠}{نق^{٢}} - \frac{٤}{٣} نق$

$ت = ٦ \pi نق^{٢} + ٤ \pi نق (\frac{٣٠}{نق^{٢}} - \frac{٤}{٣} نق)$

$= ٦ \pi نق^{٢} + \frac{١٢٠ \pi}{نق} - \frac{١٦ \pi نق^{٢}}{٣}$

$ت' = ١٢ \pi نق - \frac{١٢٠ \pi}{نق^{٢}} - \frac{٣٢ \pi نق}{٣}$

$١٢ \pi نق - \frac{٣٢ \pi نق}{٣} = \frac{١٢٠ \pi}{نق^{٢}}$

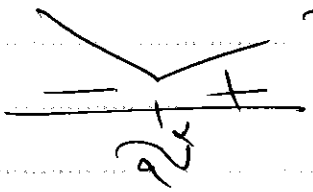
$\frac{٣٦ \pi نق - ٣٢ \pi نق}{٣} = \frac{١٢٠ \pi}{نق^{٢}}$

$\frac{٤ \pi نق}{٣} = \frac{١٢٠ \pi}{نق^{٢}}$

$٤ \pi نق^{٣} = ٣٦٠ \pi$

$نق^{٣} = \frac{٣٦٠ \pi}{٤ \pi} = ٩٠$

$نق = \sqrt[٣]{٩٠}$



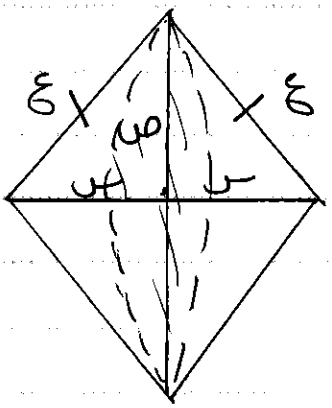
صغرى عندما

$نق = \sqrt[٣]{٩٠}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٦٣)

اذا دارت صفيحه على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدتها فما أكبر حجم محكمة للجسم الناتج عن الدوران



الحل

ح = ط × مجم المخروط الواحد.

$= ط \times \frac{1}{3} \times ط ص^2 \times س$

المحيط = $س + ع + ع = ٤٠$

$س + ع = ٢٠ \leftarrow ع = ٢٠ - س$

وحسب فيثاغورس

$ع^2 = س^2 + ص^2$

$(٢٠ - س)^2 = س^2 + ص^2$

$ص^2 = (٢٠ - س)^2 - س^2$

$= ٤٠٠ - ٤٠ س + س^2 - س^2$

$= ٤٠٠ - ٤٠ س$ نعوضها

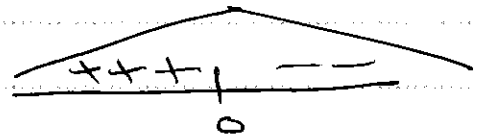
$ح = ط \times \frac{1}{3} (٤٠٠ - ٤٠ س) س$

$= \frac{ط}{3} (٤٠٠ س - ٤٠ س^2)$

$ح' = \frac{ط}{3} (٤٠٠ - ٨٠ س) = ٠$

$٤٠٠ - ٨٠ س = ٠$

$٨٠ س = ٤٠٠ \leftarrow س = \frac{٤٠٠}{٨٠} = ٥$



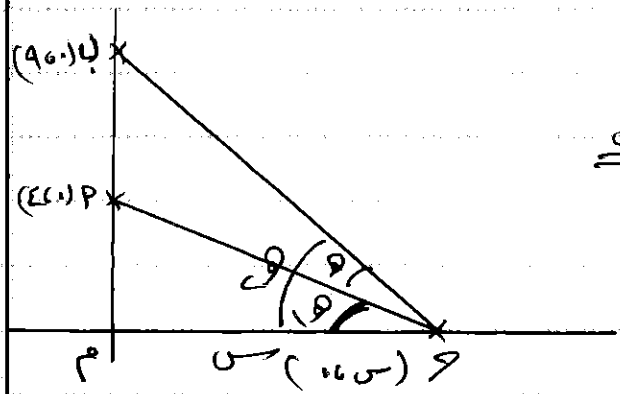
عندما س = ٥

$ح = \frac{٤٠٠}{3} ط$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال (٦٤)

أ(٠،٤) ، ب(٠،٩) نقطتان ثابتتان على محور الصادات الموجب جد الاحداثي السيني للنقطة المتحركة ج الذي يجعل قياس الزاوية أجب أكبر ما يمكن



الحل

نفرض أن

$\angle$ أجب = هـ ، $\angle$ مجأ = هـ١

$\angle$ بجم = هـ٢

هـ = هـ٢ − هـ١

ظاهـ = ظا(هـ٢ − هـ١)

$= \dfrac{\text{ظاهـ}_2 - \text{ظاهـ}_1}{1 + \text{ظاهـ}_2 \times \text{ظاهـ}_1}$

ظاهـ١ $= \dfrac{4}{\text{س}}$ ، ظاهـ٢ $= \dfrac{9}{\text{س}}$

ظاهـ $= \dfrac{\frac{9}{\text{س}} - \frac{4}{\text{س}}}{1 + \frac{9}{\text{س}} \times \frac{4}{\text{س}}} = \dfrac{\frac{5}{\text{س}}}{1 + \frac{36}{\text{س}^2}}$

$= \dfrac{\frac{5}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^2 + 36}{\text{س}^2}} = \dfrac{5}{\text{س}} \times \dfrac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 36}$

ظاهـ $= \dfrac{5\text{س}}{\text{س}^2 + 36}$

قا²هـ × هـَ $= \dfrac{(\text{س}^2 + 36) \times 5 - 5\text{س} \times 2\text{س}}{(\text{س}^2 + 36)^2}$

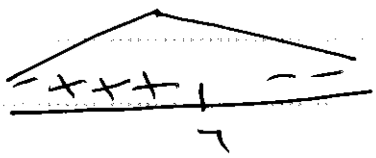
هـَ $= \dfrac{5\text{س}^2 + 180 - 10\text{س}^2}{(\text{س}^2 + 36)^2 \, \text{قا}^2\text{هـ}}$

$5\text{س}^2 + 180 - 10\text{س}^2 = 0$

$180 - 5\text{س}^2 = 0$

$5\text{س}^2 = 180 \Leftarrow \text{س}^2 = 36$

س = ± ٦



عند س = ٦ يكون قياس الزاوية أجب أكبر ما يمكن

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٢٠٥

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠ ، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

الحل

العدد الأول : س

العدد الثاني : ص

س + ٢ص = ٤٠ ⟸ س = ٤٠ − ٢ص

م = س × ص

م = ص (٤٠ − ٢ص)

= ٤٠ص − ٢ص^2

م' = ٤٠ − ٤ص = ٠

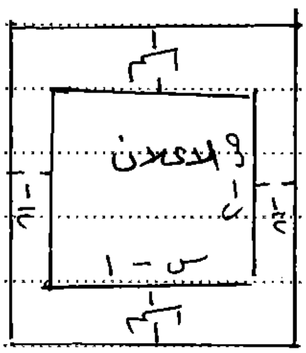
٤ص = ٤٠ ⟸ ص = ١٠

+ + | − − (عند ١٠) أكبر ما يمكن

س = ٤٠ − ٢ × ١٠ = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

تدريب ② ص ٢٠٧

صفحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨ سم^2 ، يراد طباعة إعلان عليها ، إذا كان عرض كل من الهامشين في أعلى الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل من الجانبين ½ سم . جد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن



الحل

س × ص = ١٢٨

ص = $\frac{١٢٨}{س}$

مساحة الورقة (الإعلان)

م = (س − ١)(ص − ٢)

= (س − ١)($\frac{١٢٨}{س}$ − ٢)

م' = (س − ١)($\frac{-١٢٨}{س^2}$) + ($\frac{١٢٨}{س}$ − ٢) × ١

٠ = $\frac{-١٢٨}{س}$ + $\frac{١٢٨}{س^2}$ + $\frac{١٢٨}{س}$ − ٢

$\frac{١٢٨}{س^2}$ = ٢ ⟸ س^2 = $\frac{١٢٨}{٢}$ = ٦٤

س = ±٨ ⟸ س = ٨

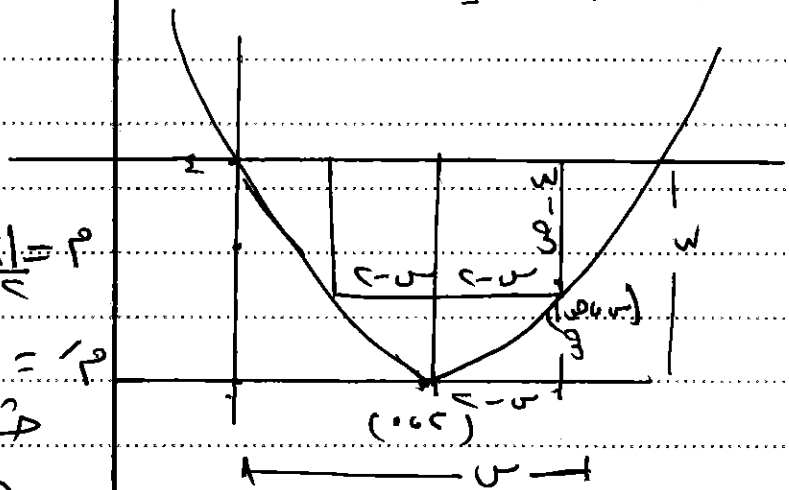
+ + + | − − (عند ٨)

ص = $\frac{١٢٨}{٨}$ = ١٦

مكتبة الوسام ALWESAM — المعلم : ناجح الجمزاوي

تدريب (٣) ص٢٠٨

ليكن المستطيل أ ب جـ د في المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س٢ - ٤س + ٤ والمستقيم ص = ٤، بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ويقع رأساه الآخران جـ، د على المستقيم ص = ٤، جد يقع المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.



م = (٤ - ص)(س - ٢ + س - ٢)

م = (٤ - (س٢ - ٤س + ٤))(٢س - ٤)

م = (٤ - س٢ + ٤س - ٤)(٢س - ٤)

= (-س٢ + ٤س)(٢س - ٤)

= -٢س٣ + ٤س٢ + ٨س٢ - ١٦س

= -٢س٣ + ١٢س٢ - ١٦س

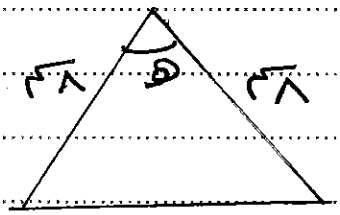
م' = -٦س٢ + ٢٤س - ١٦ = ٠

-٢(٣س٢ - ١٢س + ٨) = ٠

$$\frac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$$

تدريب (٤) ص٢٠٩

تصنع أحد قصدير على شكل مثلث متطابق الضلعين، طول كل منهما ٨ سم، إذا كانت زاوية الرأس هـ متغيرة، فجد قياس الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

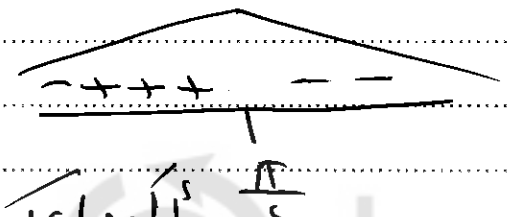


م = ½ × ٨ × ٨ × جا هـ

م' = ٣٢ جتا هـ = ٠

جتا هـ = ٠

هـ = $\frac{\pi}{2}$

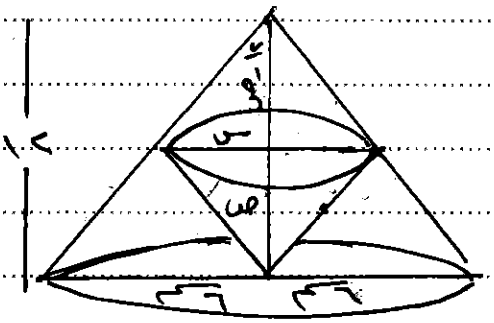


أكبر ما يمكن

مكتبة الوسام ALWESAM
الهواوم: ناجح الجمزاوي

تدريب ⑤ ص ٢١٠

صندوق أكبر مخروط دائري قائم عكيه وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي



الحل

$ح = \frac{\pi}{٣} س^٢ ص$ داخلي

من التشابه

$\frac{س}{٦} = \frac{ص}{١٢}$ ← $٢س = ١٢ - ص$

← $ص = ١٢ - ٢س$

$ح = \frac{\pi}{٣} س^٢ (١٢ - ٢س)$

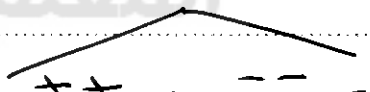
$= \frac{\pi}{٣} س^٢ \times ١٢ - \frac{\pi}{٣} س^٢ \times ٢س$

$= ٤\pi س^٢ - \frac{٢\pi}{٣} س^٣$

$ح' = ٨\pi س - ٢\pi س^٢ = ٠$

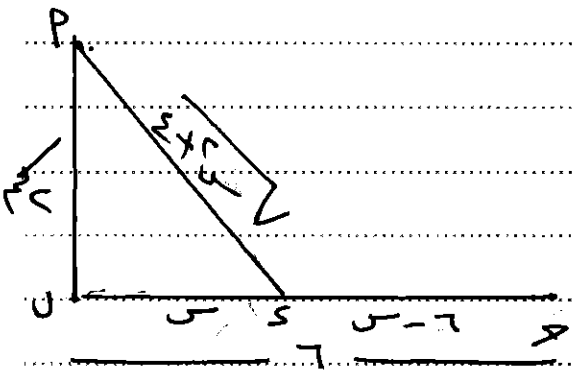
$٢\pi س (٤ - س) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٤$



$ح = \frac{\pi}{٣} (٤)^٢ (١٢ - ٢ \times ٤)$

تدريب ⑥ ص ٢١٢



$ن = \sqrt{س^٢ + ٤} \times ٥٠٠٠٠ + ٣٠٠٠٠ (٦ - س)$

$ن' = \frac{٥٠٠٠٠ س}{\sqrt{س^٢ + ٤}} - ٣٠٠٠٠ = ٠$

$\frac{٥٠٠٠٠ س}{\sqrt{س^٢ + ٤}} = ٣٠٠٠٠$

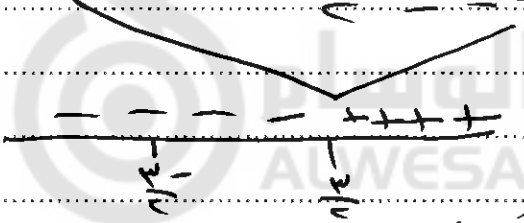
$٥س = ٣\sqrt{س^٢ + ٤}$

بالتربيع

$٢٥س^٢ = ٩(س^٢ + ٤) = ٩س^٢ + ٣٦$

$١٦س^٢ = ٣٦ \quad س^٢ = \frac{٣٦}{١٦}$ ← $س = \frac{٣}{٢}$

$س = \pm \frac{٣}{٢}$



أقل تكلفة $س = \frac{٣}{٢}$

لا يوجد أكبر تكلفة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل

ص ١٣٢

السؤال الأول

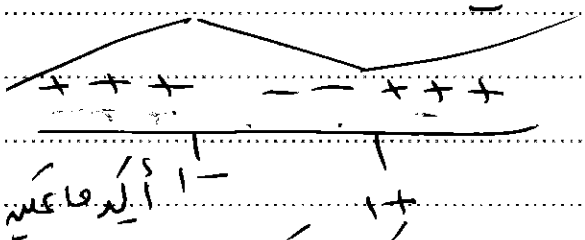
الكل

العدد = س

$م = س + \frac{1}{س}$

$م' = 1 - \frac{1}{س^2} = \frac{س^2 - 1}{س^2} = 0$

$س^2 = 1 \quad س = \pm 1$



السؤال الثاني

حجم الاسطوانة = π نق^2 ع

π نق^2 ع = ١٠٠٠

$ع = \frac{١٠٠٠}{\pi نق^2}$

م = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$= 2\pi نق ع + \pi نق^2$

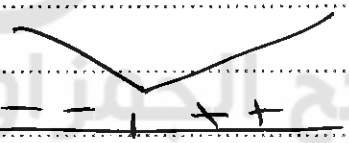
$= 2\pi نق \times \frac{١٠٠٠}{\pi نق^2} + \pi نق^2$

$= \frac{٢٠٠٠\pi}{نق} + \pi نق^2$

$م' = -\frac{٢٠٠٠\pi}{نق^2} + 2\pi نق = 0$

$2\pi نق = \frac{٢٠٠٠\pi}{نق^2} \Leftarrow نق^3 = \frac{٢٠٠٠}{2} = ١٠٠٠$

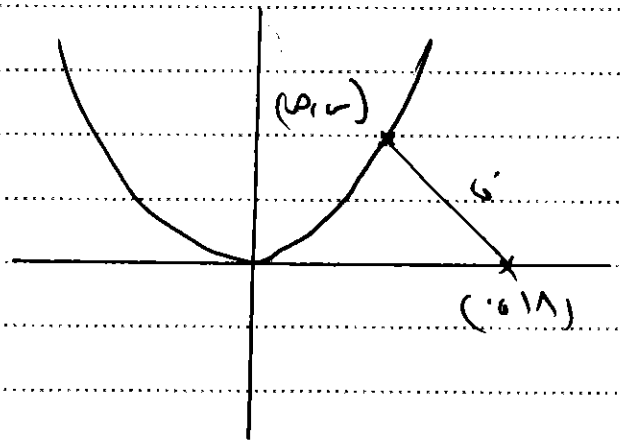
$نق = ١٠ \quad نق^2 = ١٠٠$



$م = \frac{\pi ٢٠٠٠}{١٠} + \pi (١٠)^2$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث ص ٢١٣



$ف = \sqrt{(س-١٨)^٢ + (ص-٠)^٢}$

$= \sqrt{(س-١٨)^٢ + س^٢}$

$ف' = \frac{٢(س-١٨) + ٢س}{٢\sqrt{(س-١٨)^٢ + س^٢}}$

$٢(س-١٨) + ٢س^٢ = ٠$ بالضرب في $\frac{١}{٢}$

$س^٢ + س - ١٨ = ٠$

صفة تركيبية

	٢	٠	١	-١٨
٢		٤	٨	١٨
	٢	٤	٩	٠

$(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٩) = ٠$

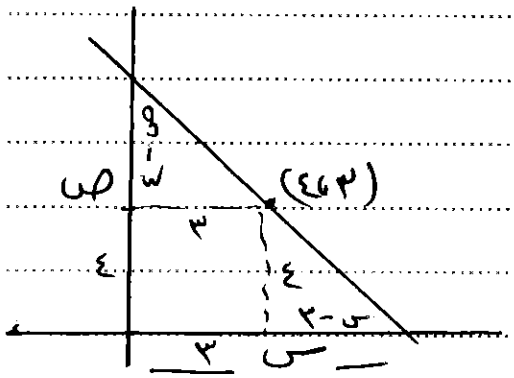
لا حل

	—	—	٢	+	+

٢

أقل ما يمكن

السؤال الرابع ص ٢١٣



$م = س \times ص$

من التشابه

$\frac{ص}{س} = \frac{٤}{س-٣}$

$ص = \frac{٤س}{س-٣}$

$م = س \times \frac{٤س}{س-٣} = \frac{٤س^٢}{س-٣}$

$م' = \frac{(ص-٣)(٨س) - ٤س^٢ \times ١}{(س-٣)^٢}$

$(س-٣)(٨س) - ٤س^٢ = ٠$

$٨س^٢ - ٢٤س - ٤س^٢ = ٠$

$٤س^٢ - ٢٤س = ٠$

$٤س(س-٦) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٦$

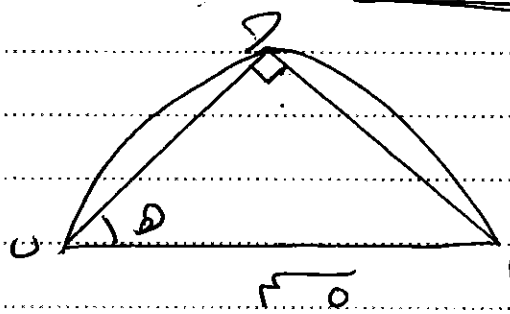
	—	—	٠	+	+

٦

أقل ما يمكن $س = ٦ \quad ص = \frac{٤}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس



م = مساحة المثلث

$= \frac{1}{2} \times م ن \times ن د \times جا هـ$

$= \frac{1}{2} \times ٥ \times ن د \times جا هـ$

$م = \frac{٥}{2} ن د جا هـ$

لكن $جا هـ = \frac{ن د}{٥}$

$\Leftarrow ن د = ٥ جا هـ$

$م = \frac{٥}{2} \times ٥ جا هـ جا هـ$

$= \frac{٥^2}{2} \times جا هـ جا هـ$

$= \frac{٥^2}{2} \times \frac{جا^2 هـ}{1}$

$= \frac{٥^2}{2} جا^2 هـ$

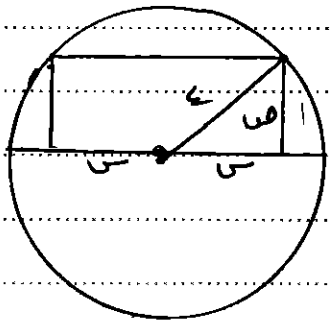
$م' = \frac{٥^2}{2} \times ٢ جا هـ \times جتا هـ = ٢٥ جا هـ جتا هـ$

$جتا هـ = \frac{\pi}{2} \Leftarrow هـ = \frac{\pi}{2}$ ، $هـ = \frac{٣\pi}{2} \Leftarrow جتا هـ = ٠$

$\frac{\pi}{2}$		$\frac{٣\pi}{2}$
+	0	−

أكبر ما يمكن

السؤال السادس



م = ٤ س ص = ٤ س ص

$س^2 + ص^2 = 16$

$ص^2 = 16 - س^2$

$ص = \sqrt{16 - س^2}$

$م = ٤ س \times \sqrt{16 - س^2}$

$م' = ٤ \times \frac{-٢س}{2\sqrt{16 - س^2}} \times \sqrt{16 - س^2} + ٤ \times \sqrt{16 - س^2}$

$= \frac{-٤س^2}{\sqrt{16 - س^2}} + \sqrt{16 - س^2}$

$= \frac{-٤س^2 + 16 - س^2}{\sqrt{16 - س^2}}$

$= \frac{16 - ٥س^2}{\sqrt{16 - س^2}}$

$16 - ٥س^2 = 0 \Leftarrow س = \frac{٤}{\sqrt{٥}}$

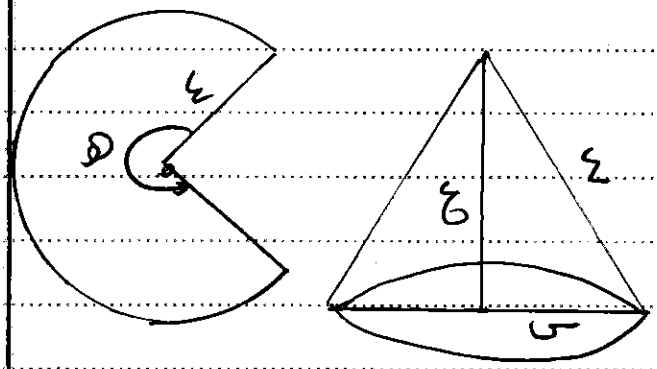
$ص = \sqrt{16 - \frac{16}{٥}} = \sqrt{\frac{64}{٥}} = \frac{٨}{\sqrt{٥}}$

$\frac{٤}{\sqrt{٥}}$		
+	0	−

أكبر ما يمكن

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

السؤال السابع ص١٣٢



عندما يكون القطاع الدائري اكبر محروط فان نصف القطاع يصبح وجه المحروط وطول القوس يصبح محيط قاعدة

$ح = \frac{\pi}{٣} س^{٢} ع$

وحسب فيثاغورس فان

$٤^{٢} = س^{٢} + ع^{٢}$

$س^{٢} = ١٦ - ع^{٢}$ بالتعويض في ح

$ح = \frac{\pi}{٣}(١٦ - ع^{٢}) ع$

$= \frac{\pi}{٣}(١٦ ع - ع^{٣})$

$ح' = \frac{\pi}{٣}(١٦ - ٣ع^{٢}) = ٠$

$٣ ع^{٢} = ١٦ \quad ع^{٢} = \frac{١٦}{٣}$

$ع = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$

$\frac{٤}{\sqrt{٣}}$

عندما $ع = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$ يكون حجم المحروط أكبر ما يمكن

طول القوس = محيط قاعدة المحروط

$٤ \times هـ = ٢ \pi س$

$\Leftarrow$

لكن $ف^{٢} - ع^{٢} = س^{٢}$

$١٦ - ع^{٢} = س^{٢}$

$١٦ - (\frac{٤}{\sqrt{٣}})^{٢} = س^{٢}$

$١٦ - \frac{١٦}{٣} = س^{٢}$

$\frac{٤٨ - ١٦}{٣} = س^{٢} \Leftarrow س^{٢} = \frac{٣٢}{٣}$

$س = \sqrt{\frac{٣٢}{٣}}$

$\Leftarrow ٤ هـ = ٢ \pi س$

$هـ = \frac{٨ س}{٤} = \frac{٢ س}{٤}$

$هـ = \frac{٢ \times \pi \sqrt{\frac{٣٢}{٣}}}{٤}$ راديان

مكتبة الهدام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن ص٢١٢

س = عدد الأجزاء

الربح = الإيراد − التكلفة

$= س(٢٠٠ - ٠.١س) - (٥٠٠س + ٤٠)$

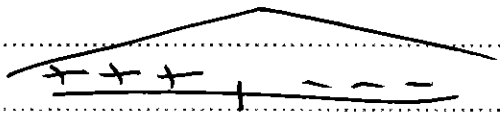
$= ٢٠٠س - ٠.١س^٢ - ٥٠٠س - ٤٠$

$= ١٥٠س - ٠.١س^٢ - ٤٠$

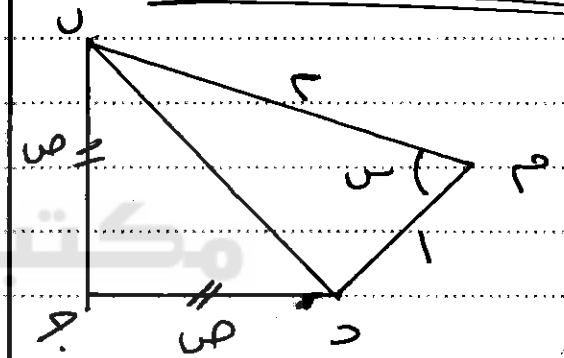
$ر' = ١٥٠ - ٠.٢س = ٠$

$٠.٢س = ١٥٠$

$س = \frac{١٥٠}{٠.٢} = \frac{١٥٠٠٠}{٢} = ٧٥٠٠$



السؤال التاسع ص٢١٤



نفرض ان $أ د = ص = ب جـ$

م مساحة الشكل الرباعي

= مساحة المثلث ب جـ د + مساحة م ب د

$= \frac{١}{٢} \times ص \times ص \times ١ \times ٤ \times ص س$

م = $\frac{١}{٢}ص^٢ + حاس$

نطبق متباينة ميشا غورس على Δ ب جـ د

$(ب د)^٢ = ص^٢ + ص^٢ = ٢ص^٢$

$ب د = ص\sqrt{٢}$

ونطبق قانون جيب التمام على Δ م ب د

$(ص\sqrt{٢})^٢ = ١^٢ + ٢^٢ - ٢ \times ١ \times ٢ \times$ جتاس

$٢ص^٢ = ٥ - ٤$ جتاس

$ص^٢ = \frac{٥ - ٤جتاس}{٢}$ نعوض في م

$م = \frac{١}{٤}\left(\frac{٥ - ٤جتاس}{٢}\right) + حاس$

$= \frac{١}{٤}(٥ - ٤جتاس) + حاس$

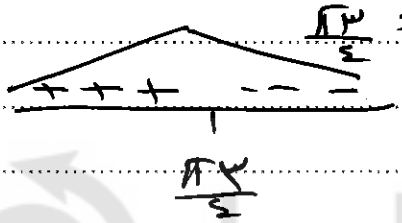
$م' = \frac{١}{٤}(٠ + ٤ص س) + جتاس = ٠$

$\leftarrow حاس + جتاس = ٠$

حاس = − جتاس $\leftarrow$ ظاس = −١

س = ٠.٧٥ π ، س = ٣.١٥ مهمل

$= \frac{٣\pi}{٤}$



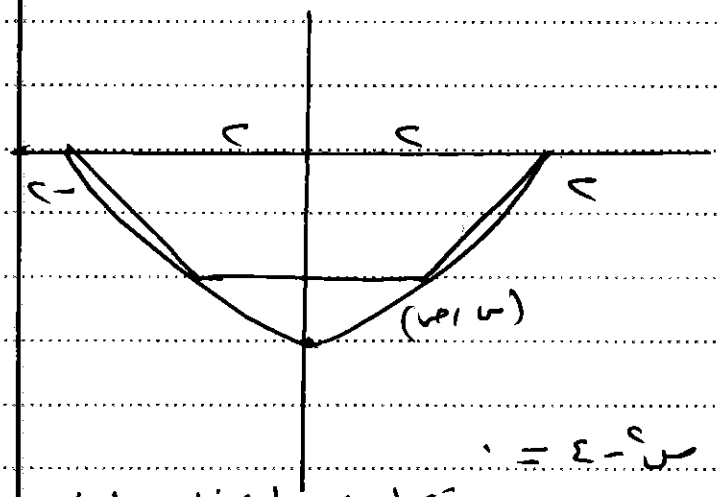
$م = \frac{١}{٤}(٥ - ٤جتا\frac{٣\pi}{٤}) + حا\frac{٣\pi}{٤}$

$= \frac{١}{٤}(٥ - ٤ \times -\frac{١}{\sqrt{٢}}) + \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{١}{٤}(٥ + \frac{٤}{\sqrt{٢}}) + \frac{١}{\sqrt{٢}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

السؤال العاشر



$س^2 - ٤ = ٠$

$س = \pm ٢$ نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم

صاحبة شبه المنحرف

$= \frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} (٤ + ٤) \times ص$

بما أن $ص = |س^2 - ٤|$ إذن الارتفاع موجب

لذلك نكون $ص = ٤ - س^2$

$م = \frac{١}{٢} (٤ + ٤)(٤ - س^2)$

$= (٢ + س)(٤ - س^2)$

$= ٨ - ٤س^2 + ٤س - س^3$

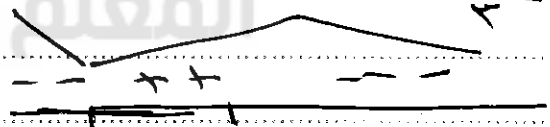
$م' = -٤س + ٤ - ٣س^2 = ٠$

$-٣س^2 - ٤س + ٤ = ٠$

$-(٣س^2 + ٤س - ٤) = ٠$

$-(٣س - ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = \frac{٢}{٣}$ $\quad$ $س = -٢$



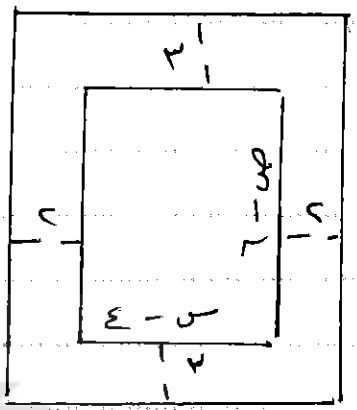
عظمى عند $س = \frac{٢}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

يراد طباعة اعلان على ورقة مستطيلة الشكل بحيث يكون عرض كل من الهامشين في رأس الورقة واسفلها (٣) سم وفي كل من الجانبين (٢) سم ، اذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة تساوي (١٥٠) سم٢ فجد ابعاد الورقة التي مساحتها اصغر ما يمكن ، وعليه استعملها للطباعة .



نفرض ابعاد الورقة هي س ، ص
ابعاد الورقة المطبوعة هي
ص - ٦ ، س - ٤

م = س × ص

مساحة المنطقة المطبوعة = م

١٥٠ = (ص - ٦) (س - ٤)

$ص - ٦ = \frac{١٥٠}{س - ٤} \Leftarrow$

$ص = \frac{١٥٠}{س - ٤} + ٦$

$م = س (\frac{١٥٠}{س - ٤} + ٦)$

$= \frac{١٥٠ س}{س - ٤} + ٦ س$

$م' = \frac{(س - ٤) \times ١٥٠ - ١٥٠ س}{(س - ٤)^{٢}} + ٦$

$= \frac{\cancel{١٥٠ س} - ٦٠٠ - \cancel{١٥٠ س}}{(س - ٤)^{٢}} + ٦$

$= \frac{-٦٠٠}{(س - ٤)^{٢}} + ٦$

$\frac{-٦٠٠}{(س - ٤)^{٢}} + ٦ = ٠ \Leftarrow (س - ٤)^{٢} \times ٦ = ٦٠٠$

$(س - ٤)^{٢} = ١٠٠$

$س - ٤ = \pm ١٠ \Leftarrow س = ١٤ ، س = -٦$ مرفوض

	-	+
	١٤ صغرى	

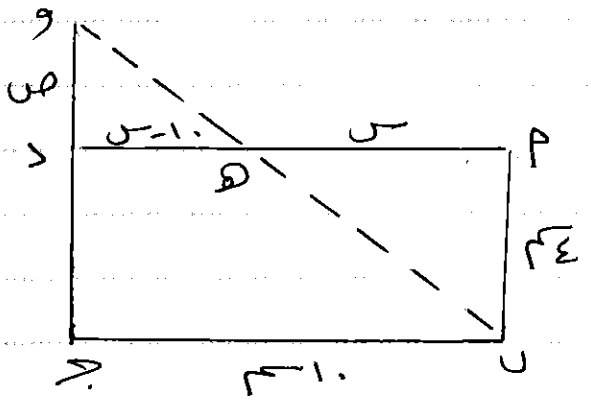
$ص = \frac{١٥٠}{س - ٤} + ٦ = \frac{١٥٠}{١٤ - ٤} + ٦$

$= ٢١$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٨) صيفية

أ ب ج د مستطيل فيه أب = ٤ سم ، ب ج = ١٠ سم ، قُدّ الضلع ج د على استقامته الى (و) ثم وصل ب و فقطع الضلع أ د في هـ ، فاذا كان أ هـ = س سم ، و ص سم فجد محتى س ، ص اللتين تجعلان مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب اصغر ما يمكن



نفرض ان م = مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب

مساحة د هـ و = $\frac{1}{2}$ (١٠-س) × ص

مساحة أ هـ ب = $\frac{1}{2}$ × س × ٤ = ٢ س

م = $\frac{1}{2}$ (١٠-س) × ص + ٢ س

المثلثان د هـ و ، أ هـ ب متشابهان

$\frac{٤}{س} = \frac{ص}{١٠-س}$

س ص = ٤ (١٠-س)

ص = $\frac{٤(١٠-س)}{س}$

م = $\frac{1}{2}$ (١٠-س) × $\frac{٤(١٠-س)}{س}$ + ٢ س

م = $\frac{٢(١٠-س)^{٢}}{س}$ + ٢ س

م' = $\frac{س \times ٤(١٠-س) \times ٢ - ١ \times ٢(١٠-س)^{٢}}{س^{٢}}$ + ٢

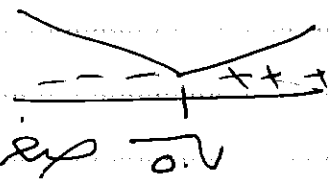
= $\frac{-٤٠ س + ٤ س^{٢} - ٢(١٠٠ - ٢٠ س + س^{٢})}{س^{٢}}$ + ٢

= $\frac{-٤٠ س + ٤ س^{٢} - ٢٠٠ + ٤٠ س - ٢ س^{٢} + ٢ س^{٢}}{س^{٢}}$

٤ س^٢ - ٢٠٠ = ٠ ⇐ ٤ س^٢ = ٢٠٠

س^٢ = ٥٠ ⇐ س = ± √٥٠

س = + ٥٠٧



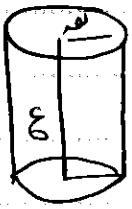
ص = $\frac{٤(١٠-٥٠٧)}{٥٠٧}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اسطوانة دائرية قائمة مجموع مساحتي قاعدتها وارتفاعها يساوي ٦٦ سم اوجد ارتفاع الاسطوانة الذي يجعل حجمها أكبر ما يمكن.

الحل



$ح = \pi نق^2 ع$

$٢\pi نق + ع = ٦٦$

$ع = ٦٦ - ٢\pi نق$

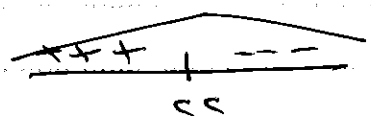
$ح = \pi نق^2 (٦٦ - ٢\pi نق)$

$= ٦٦\pi نق^2 - ٢\pi نق^3$

$ح' = ١٣٢\pi نق - ٦\pi نق^2$

$٦\pi نق (٢٢ - \pi نق) = ٠$

$نق = ٠ \quad نق = \frac{٢٢}{\pi}$

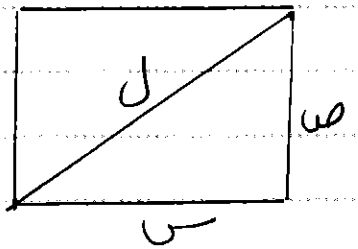


عظمى عند $نق = \frac{٢٢}{\pi}$

$ع = ٦٦ - ٢\pi \times \frac{٢٢}{\pi} = ٢٢$

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

ستطيل مساحته ١٦ سم^2 أوجد بعديه عندما يكون طول قطره أصغر ما يمكن.



الحل

$ل^2 = س^2 + ص^2$

$س \times ص = ١٦ \leftarrow ص = \frac{١٦}{س}$

$ص^2 = \frac{٢٥٦}{س^2}$ نعوضها في ل

$ل^2 = س^2 + \frac{٢٥٦}{س^2}$

$ل \times ل' = ٢س - \frac{٥١٢}{س^3} = ٠$

$٢س = \frac{٥١٢}{س^3} \leftarrow ٢س^4 = ٥١٢ \leftarrow س^4 = ٢٥٦$

$س = ٤ - ٤ \quad س^2 = ١٦ = ٢٥٦$

نأخذ $س = ٤$

٤ صغرى

$ص = \frac{١٦}{س} = \frac{١٦}{٤} = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (١٠،٢٠) شتوية

اذا كان الانتاج اليومي لمصنع حديد ص طناً من نوع الحديد الجيد، س طناً من نوع الحديد الأقل جودة فاذا كانت $ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$ $س \neq ٠$

وكان سعر الطن من الحديد الجيد يساوي مثلي سعر الطن من الحديد الأقل جودة، فجد الكمية التي ينتجها المصنع يومياً من كل نوع حتى تحقق أكبر ايراد.

الحل

نفرض سعر طن الحديد الأقل جودة = ل

← سعر طن الحديد الجيد = ٢ل

ايراد المصنع = عدد طلع ص × سعر ص + عدد طلع س × سعر س

$\therefore$ ح = ص × ٢ل + س × ل

ح(س) = ص ل س + ل ص

لكن $ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$

$ح'(س) = ل\left(\frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}\right) + ل ص$

$= \frac{ل(٤٠ - ٥س) + ل ص (١٠ - س)}{١٠ - س}$

$= \frac{٨٠ل - ١٠ل س + ١٠ل س - ل س^٢}{١٠ - س}$

$ح'(س) = \frac{٨٠ل - ل س^٢}{١٠ - س}$

$ح''(س) = \frac{(١٠ - س)(-٢ل س) - (٨٠ل - ل س^٢)(-١)}{(١٠ - س)^٢}$

$= \frac{-١٠ل س + ٢ل س^٢ + ٨٠ل - ل س^٢}{(١٠ - س)^٢}$

$= \frac{ل س^٢ - ١٠ل س + ٨٠ل}{(١٠ - س)^٢}$

$ل س^٢ - ١٠ل س + ٨٠ل = ٠$ بالقسمة على ل

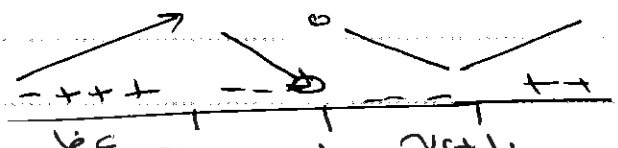
$س^٢ - ١٠س + ٨٠ = ٠$

نستخدم القانون العام

$س = \frac{١٠ \pm \sqrt{١٠٠ - ٣٢٠}}{٢}$

$س = ١٠ \pm ٥\sqrt{٢}$

$س = ١٠ - ٥\sqrt{٢}$

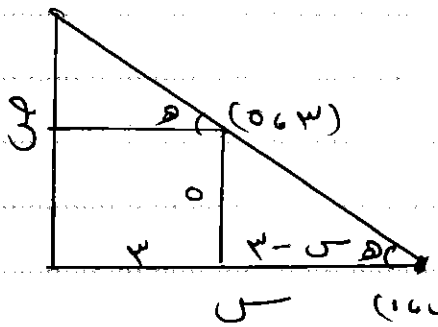


أكبر ايراد عند $س = ١٠ - ٥\sqrt{٢} = ٣,٠٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

ص معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويقطع من الربع الأول في المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أقل ما يمكن



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ س $\times$ ص

ظا هـ = أو تشابه

$$\frac{٥}{س-٣} = \frac{ص}{س}$$

$$\leftarrow ص = \frac{٥س}{س-٣}$$

$$م = \frac{1}{2} س \left(\frac{٥س}{س-٣}\right) = \frac{٥س^{٢}}{(س-٣)^{٢}}$$

$$م' = \frac{(س-٣)^{٢} \times ١٠س - ٥س^{٢} \times ٢(س-٣)}{(س-٣)^{٤}}$$

$$١٠س^{٢} - ٦٠س = ٠ \leftarrow س(س-٦) = ٠$$

$$\leftarrow س = ٠ \quad س = ٦$$

	٠	٦
م'	+	-
		صغرى

المقطع السيني (٦، ٠)

ميل المستقيم $= \frac{٠-٥}{٦-٣} = -\frac{٥}{٣}$

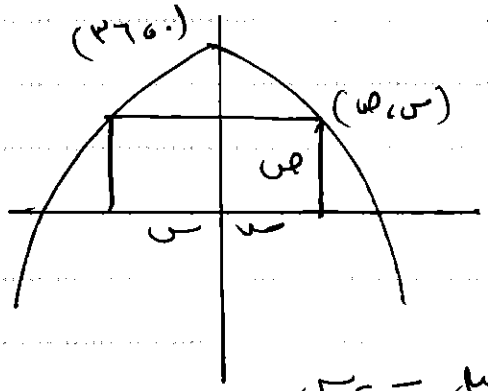
معادلة المستقيم

$$ص - ٠ = -\frac{٥}{٣}(س-٦)$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ : ناجح الجمزاوي

(٧) وزارة (٢٠١١) شتوية

صندوق أكد مستطيل قاعدته محاطة بشبه دائرة نصف قطرها ٦ سم، بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى $ق(س) = ٣٦ - س^٢$



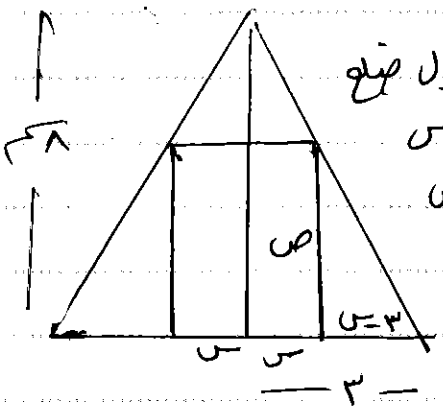
طول المستطيل $= ٢س$
عرض المستطيل $= ص$
$م = ٢س \times ص$
$ص = ٣٦ - س^٢ \Leftarrow$
$م = ٢س(٣٦ - س^٢) = ٧٢س - ٢س^٣$
$م' = ٧٢ - ٦س^٢ = ٠$
$٦س^٢ = ٧٢ \quad س^٢ = \frac{٧٢}{٦} = ١٢$
$س = \pm\sqrt{١٢} = \pm ٢\sqrt{٣}$
اهمل السالب لماذا؟

$ص = ٣٦ - ١٢ = ٢٤$

(٨) وزارة (٢٠١١) صيفية

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦ سم، وارتفاعه ٨ سم، أُريد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل



نفرض ان طول ضلع المستطيل $= ٢س$
عرضه $= ص$

$م = ٢س \times ص$ من تشابه المثلثان
$\frac{ص}{٨} = \frac{٣-س}{٣} \Leftarrow ص = \frac{٨}{٣}(٣-س)$

$م = \frac{٨}{٣}(٣-س) \times ٢س$
$= \frac{١٦}{٣}(٣س - س^٢)$
$م' = \frac{١٦}{٣}(٣ - ٢س)$
$٣ - ٢س = ٠$
$س = \frac{٣}{٢}$ سم

البعد الآخر
$ص = \frac{٨}{٣}(٣ - \frac{٣}{٢}) = ٤$ سم

مكتبة العلم ALWESAM
العلم : ناجح الجمزاوي

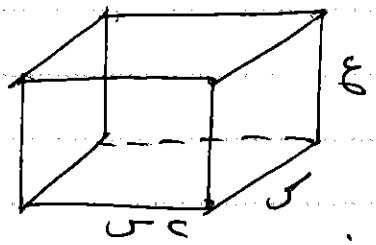
⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه، اذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم فجد البعد الذي يجعل حجمه أكبر ما يمكن

الحل

نفرض ان عرض الصندوق = س

ارتفاعه = ع طوله = ٢س



ح = الطول × العرض × الارتفاع

$= ٢س \times س \times ع = ٢س^{٢} ع$

لكن الارتفاع + محيط القاعدة = ٧٢

$ع + ٦س = ٧٢$

$\Leftarrow ع = ٧٢ - ٦س$

$ح = ٢س^{٢}(٧٢ - ٦س) = ١٤٤س^{٢} - ١٢س^{٣}$

$ح' = ٢٨٨س - ٣٦س^{٢} = ٠$

$٣٦س(٨ - س) = ٠ \quad س = ٨$

ارتفاعه $= ٧٢ - ٦ \times ٨$

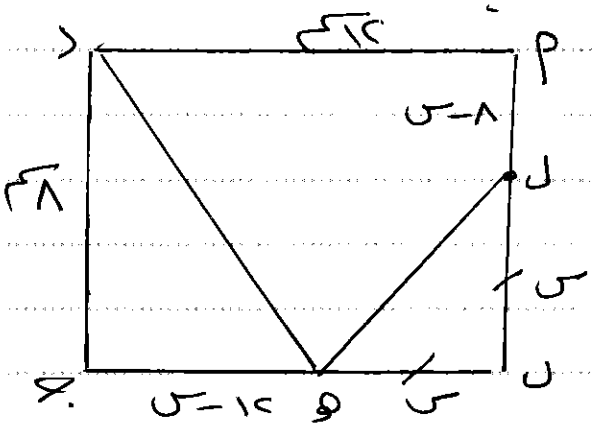
$= ٢٤$

طوله = ١٦ عرضه = ٨

⑩ وزارة (٢٠١٢) صيفية

في الشكل المجاور أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم، ب ج = ١٢ سم

عينت النقطتان ل، هـ على الضلعين أ ب، ب ج على الترتيب بحيث كان ب ل = ب هـ، جد طول ل ج الذي يجعل مساحة الشكل الرباعي أ ل هـ د أكبر ما يمكن



مساحة الشكل أ ل هـ د

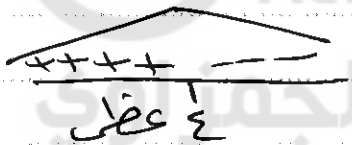
= مساحة المستطيل − (مساحة Δ ل ب هـ + مساحة Δ هـ ج د)

$= ٨ \times ١٢ - (\frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{٢}(١٢ - س) \times ٨)$

$= ٩٦ - (\frac{١}{٢} س^{٢} + ٤٨ - ٤س)$

$= ٩٦ - \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤٨ + ٤س$

$م' = -س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤$



$س = ب ل$

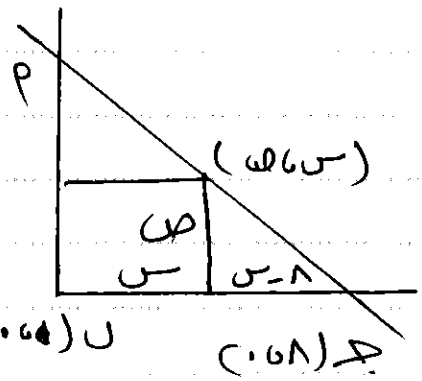
$= ٤$

تكون مساحة الشكل أكبر ما يمكن

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٢) ثنوية

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل المثلث P ب جـ القائم الزاوية في ب ، جـ مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث .



نفرض ان النقطة (س، ص)

طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص

م = س × ص

من تشابه المثلثات

$\frac{ص}{٨-س} = \frac{٦}{٨} \Leftarrow ص = \frac{٦}{٨}(٨-س)$

$ص = \frac{٣}{٤}(٨-س)$

$م = س \times \frac{٣}{٤}(٨-س) = \frac{٣}{٤}(٨س - س^{٢})$

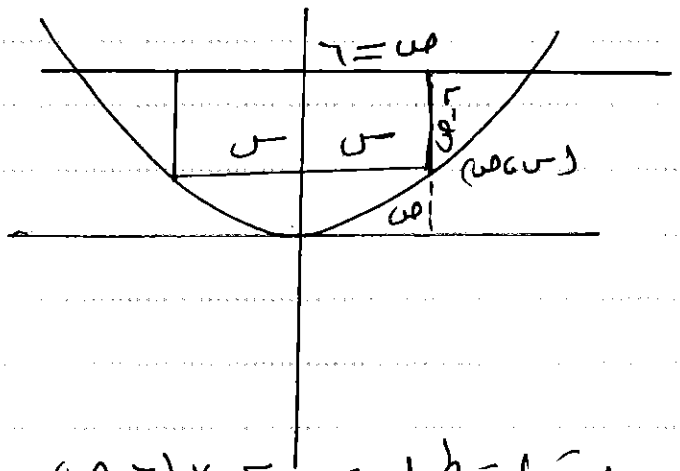
$م' = \frac{٣}{٤}(٨ - ٢س) = ٠$

$٨ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٤$

$ص = \frac{٣}{٤}(٨-٤) = ٣$

(١٢) وزارة (٢٠١٢) صيفية

جد أكبر مستطيل في الشكل المجاور الذي يقع رأسان من رؤوسه على منحنى العلاقة $٤ص = س^{٢}$ ويقع رأسان أخران على المستقيم $ص = ٦$



مساحة المستطيل = $٢س \times (٦ - ص)$

لكن $٤ص = س^{٢} \Leftarrow ص = \frac{س^{٢}}{٤}$

$م = ٢س(٦ - \frac{س^{٢}}{٤})$

$= ١٢س - \frac{س^{٣}}{٢}$

$م' = ١٢ - \frac{٣}{٢}س^{٢} = ٠$

$\frac{٣}{٢}س^{٢} = ١٢ \Rightarrow س^{٢} = \frac{٢٤}{٣} = ٨$

$س = ٢\sqrt{٢}$

$ص = \frac{(٢\sqrt{٢})^{٢}}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

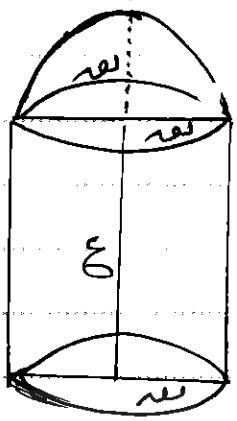
$م = ٢ \times ٢\sqrt{٢}(٦-٢) = ٨\sqrt{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

حافظة للماء إلى الخلف ستكون من مزج بين الجزء الأول وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) والجزء الثاني غطاء على شكل نصف كرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الاسطوانة كما في الشكل، إذا كان حجم الحافظة ٣٦٠π سم٣ جد كلاً من نصف القطر والارتفاع اللذان يجعلان المساحة الكلية لسطح الحافظة أقل ما يمكن

الحل



$\pi ٣٦٠ = ح$

$\pi ٣٦٠ = \pi نق^٢ ع + \pi \frac{٤}{٣} نق^٣ \times \frac{١}{٢}$

$ح = \frac{٣٦٠ - \frac{٢}{٣} نق^٣}{نق^٢}$

$= \frac{٣٦٠}{نق^٢} - \frac{٢}{٣} نق$

المساحة = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية + مساحة سطح نصف الكرة

$م = \pi نق^٢ + ٢\pi نق ع + \frac{١}{٢}(٤\pi نق^٢)$

$= \pi نق^٢ + ٢\pi نق \left(\frac{٣٦٠}{نق^٢} - \frac{٢}{٣} نق\right) + ٢\pi نق^٢$

$م = \frac{\pi ٧٢٠}{نق} + \frac{٥}{٣}\pi نق^٢$

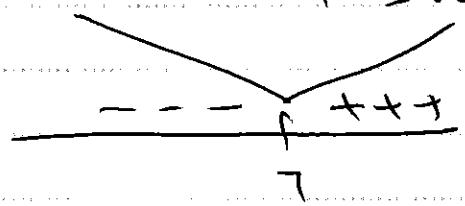
$م' = -\frac{\pi ٧٢٠}{نق^٢} + \frac{١٠}{٣}\pi نق = ٠$

بالضرب في $نق^٢$

$-\pi ٧٢٠ + \frac{١٠}{٣}\pi نق^٣ = ٠$

$نق^٣ = \frac{٣ \times ٧٢٠}{١٠} = ٢١٦$

$نق = ٦$



صغرى عند $نق = ٦$

$ع = \frac{٣٦٠}{٣٦} = ٦ \times \frac{٢}{٣}$

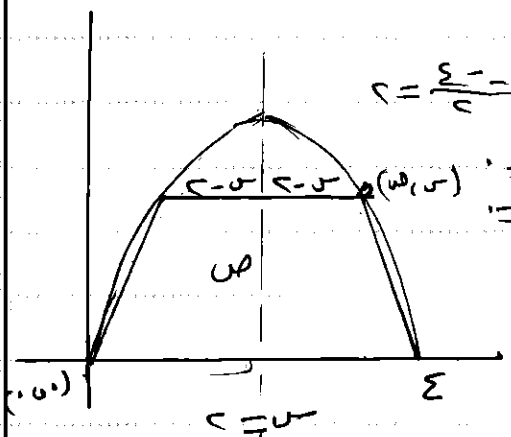
$= ١٠ - ٤ = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام : ناجح الجمزاوي

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

حد ابعاد قطعة الخرف الذي على شكل رسمة في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات، ورأسان آخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٤س - س^{٢}$ لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل



$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$

$٤س - س^{٢} = ٠$

$س(٤ - س) = ٠$

$س = ٠ ، ٤$

$م = \frac{١}{٢} \times ق \times (٤ + (ق - س)ق) \times ص$

$= (س - ق)(٤س - س^{٢})$

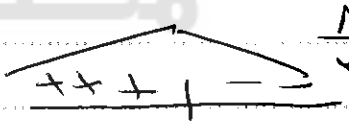
$= (س)(٤س - س^{٢})$

$= ٤س^{٢} - س^{٣}$

$م' = ٨س - ٣س^{٢} = ٠$

$س(٨ - ٣س) = ٠$

$س = ٠ ، س = \frac{٨}{٣}$



القاعدة العليا $= ق(س - ق)$

$= ق(\frac{٨}{٣} - ٢) = \frac{٤}{٣}ق$

القاعدة السفلى $= ٤$

الارتفاع $= ٤(\frac{٨}{٣}) - (\frac{٨}{٣})^{٢} = \frac{٣٢}{٣} - \frac{٦٤}{٩}$

$= \frac{٣٢}{٩}ق$

(١٩) وزارة (٢٠١٥) شتوية

اسطوانة دائرية قائمة مغلقة نصف قطر قاعدتها $(نق)^{٣}$ سم وارتفاعها $(ع)$ ومجموعها (٥٤π) سم^{٣} حيث نصف قطر قاعدة الاسطوانة وارتفاعها اللذان يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

الحل

المساحة م = مساحة جانبية + مساحة قاعدتين

$م = ٢\pi ق ع + ٢\pi ق^{٢} ن^{٢}$

$٥٤\pi = ٢\pi ق^{٢} ن^{٢} ع$

$ع = \frac{٥٤}{ق^{٢} ن^{٢}}$

$م = ٢\pi ق \times \frac{٥٤}{ق^{٢} ن^{٢}} + ٢\pi ق^{٢} ن^{٢}$

$= \frac{١٠٨\pi}{ق} + ٢\pi ق^{٢} ن^{٢}$

$م' = -\frac{١٠٨\pi}{ق^{٢}} + ٤\pi ق ن^{٢}$

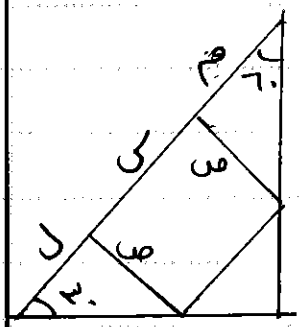
$٤\pi ق = \frac{١٠٨\pi}{ق^{٢}} \leftarrow ٤ ق^{٣} = ١٠٨ \leftarrow ق^{٣} = \frac{١٠٨}{٤} = ٢٧ \leftarrow ق = ٣$

$ع = \frac{٥٤}{ق^{٢}} = \frac{٥٤}{٩} = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٦) وزارة (٢٠١٥) صيفية

صمم صانعة ألعاب فستطيل عليه رسمة داخل المثلث قائم الزاوية طول وتره ٤ سم وقياس احدى زواياه ٣٠° بحيث تقع احدى قاعدتي المستطيل على الوتر ورأساه الاخران على ضلعي القائمة.



الحل

$ظا ٣٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ص}{ل}$

$\leftarrow ل = \sqrt{٣}\, ص$

$ظا ٦٠ = \sqrt{٣} = \frac{ص}{م} \leftarrow م = \frac{ص}{\sqrt{٣}}$

$ل + م + س = ٤$

$\sqrt{٣}\, ص + \frac{ص}{\sqrt{٣}} + س = ٤$ $\times \sqrt{٣}$

$٣ص + ص + \sqrt{٣} س = ٤\sqrt{٣}$

$٤ص = ٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣} س$

$= \sqrt{٣}(٤ - س)$

$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - س)$

$م = س \times ص = س \times \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - س)$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤س - س^٢)$

$م' = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - ٢س) = ٠$

$٤ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٢$

$\leftarrow$

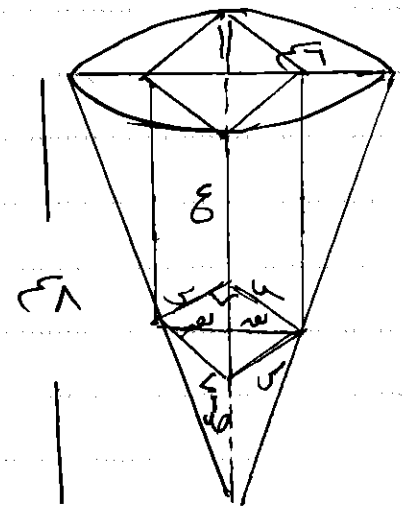
$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(٤ - ٢) = \sqrt{٣}$

$م = ٢ \times ٢\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوي

جد حجم أكبر مخروط (قشور) دائري قائم قاعدته مرتبطة بشكل عكسي وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (٦) سم وارتفاعه (٨) سم.



الحل

نفرض طول قاعدة المخروط = س
ارتفاعه = ع

حجم المخروط = مساحة القاعدة × $\frac{1}{3}$ الارتفاع

$$ح = \frac{1}{3} \times \pi س^2 \times ع \quad \text{---} (1)$$

نفرض طول القطعة في قاعدة = ص = نق

حسب فيثاغورس

$$(ص + نق)^2 = س^2 + س^2$$
$$٤ نق^2 = ٢ س^2$$
$$نق^2 = \frac{1}{2} س^2 \leftarrow \boxed{نق = \frac{1}{\sqrt{2}} س}$$

فتستخدم تشابه المثلثات

$$\frac{نق}{٨ - ع} = \frac{٦}{٨}$$

$$٦(٨ - ع) = ٨ نق$$

$$٤٨ - ٦ع = ٨ نق \leftarrow نق = ٦ - \frac{٣}{٤} ع$$

$$نق = ٦ - \frac{٣}{٤} ع \leftarrow$$

$$ع = \frac{٤}{٣}(٦ - نق) \leftarrow$$

$$ع = ٨ - \frac{٤}{٣} نق$$

بتعويض $نق = \frac{1}{\sqrt{2}} س$

$$ع = ٨ - \frac{٤}{٣\sqrt{2}} س$$ بتعويضها في الحجم

$$ح = س^2 (٨ - \frac{٤}{٣\sqrt{2}} س)$$

$$= ٨ س^2 - \frac{٤}{٣\sqrt{2}} س^3$$

$$ح' = ١٦ س - \frac{٤}{\sqrt{2}} س^2 = ٠$$

$$٤ س (٤ - \frac{1}{\sqrt{2}} س) = ٠$$

$$س = ٠ \text{ مرفوض}, \quad ٤ - \frac{1}{\sqrt{2}} س = ٠$$

$$س = ٤\sqrt{2}$$

	$٤\sqrt{2}$	
$ح'$	+	−
$ح$	عظمى	

$$نق = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ٤\sqrt{2} = ٤$$

$$ع = ٨ - \frac{٤}{٣} \times ٤ = ٨ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

$$ح = \frac{1}{3} \times \pi \times ٤\sqrt{2} \times ٤\sqrt{2} \times \frac{٨}{٣}$$

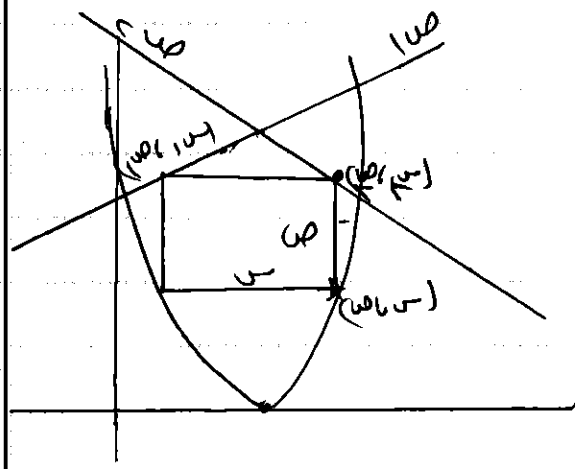
$$= \frac{٢٥٦ \pi}{٣} = ٨٥,٣ \pi$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٨) وزارة صيفية (٢٠١٦ ج)

يقع رأسان من رؤوس المستطيل المظلل في الشكل الآتي على منحنى الاقتران $و(س) = -س^٢ + ٦س + ٩$ ورأساه الآخران على المستقيمين $ص_١ = ٢ + س$ ، $ص_٢ = ٨ - س$

جد بعدي المستطيل اللذين يجعلان مساحته أكبما يمكنه



$م = س \times ص$

الطول $= س_٢ - س_١$

لكن $ص_١ = ص_٢ \Leftarrow ٢ + س_١ = ٨ - س_٢$

$\Leftarrow س_١ = ٦ - س_٢$

$\Leftarrow$ الطول $س = س_٢ - ٦ + س_٢$

$\boxed{س = ٢س_٢ - ٦}$

$ص = ص_٢ - ص_١ = ٨ - س_٢ - (-س_٢^٢ + ٦س_٢ + ٩)$

$ص = ٨ - س_٢ + س_٢^٢ - ٦س_٢ - ٩$

$\boxed{ص = س_٢^٢ - ٥س_٢ - ١}$

$م = س \times ص$

$= (٢س_٢ - ٦)(س_٢^٢ - ٥س_٢ - ١)$

$= ٢س_٢^٣ - ١٠س_٢^٢ - ٢س_٢ + ٦س_٢^٢ - ٣٠س_٢ + ٦$

$= ٢س_٢^٣ - ١٦س_٢^٢ + ٣٢س_٢ + ٦$

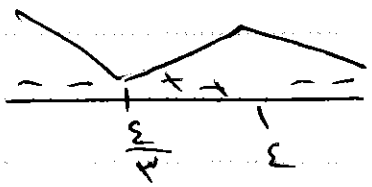
$م' = ٦س_٢^٢ - ٣٢س_٢ + ٣٢ = ٠$

$\div (-٢)$

$٣س_٢^٢ - ١٦س_٢ + ١٦ = ٠$

$(٣س_٢ - ٤)(س_٢ - ٤) = ٠$

$س_٢ = ٤ \quad ، \quad س_٢ = \frac{٤}{٣}$



عظمى عند $س_٢ = ٤$

$\Leftarrow س = \text{طول} = ٢ \times ٤ - ٦$

$= ٨ - ٦ = ٢$

$ص = (٤)^٢ - ٥ \times ٤ - ١$

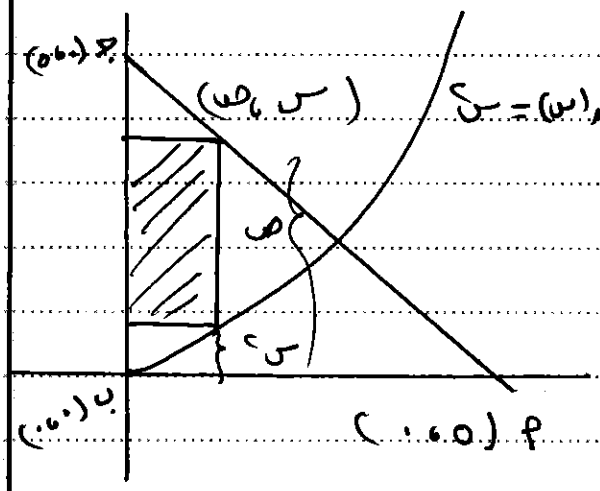
العرض $= ١٦ - ٢٠ - ١$

$= ٣$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

مثال ٥ (٢٠١٧) شتوي

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أحداثيات رؤوسه أ (٠،٥) ، ب (٠،٠) جـ (٥،٠) رسم داخله مستطيل فيطبقه رأسان منه رؤوسه على الضلع ب جـ وأحد رأسيه الآخرين على الضلع أ جـ والرأس الآخر على منحنى الاقتران ق(س) = س٢ كما في الشكل الآتي ، جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل الظل



نجد معادلة المستقيم أ جـ

$ص - ٠ = \frac{٥ - ٠}{٠ - ٥}(س - ٥)$

$ص = -١(س - ٥) = -س + ٥$

م = الطول × العرض

$= س(ص - س^٢)$

$= س(-س + ٥ - س^٢)$

$= -س^٣ + ٥س - س^٣$

$م' = -٣س^٢ + ٥ - ٣س^٢ = ٠$

$-٦س^٢ + ٥ = ٠$

$(٣س + \sqrt{٥})(٥ - س) = ٠$

$س = -\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ✗ ، $س = ١$

	+	+	+		−	−	−
				١			

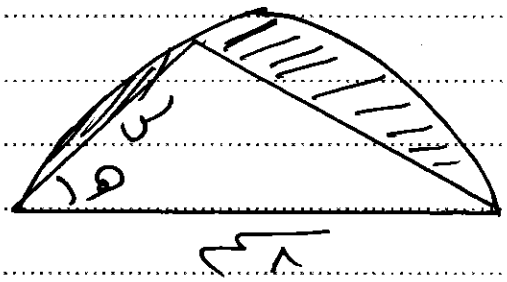
أكبر ما يمكن

$م = -١ + ٥ - ١ = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

وزارة (٢٠١٧) صيفية

رسم المثلث ABC داخل نصف دائرة قطرها (٨) سم، بحيث يقع الرأسان B، C على نهايتي القطر، والرأس الآخر (A) يتحرك على منحنى نصف الدائرة كما في الشكل المجاور، فجد قياس الزاوية (θ) التي تجعل مساحة المنطقة المظللة أصغر ما يمكن



مساحة المنطقة المظللة

= مساحة ½ الدائرة − مساحة المثلث

م = ½ × π × ٤ − ½ × س × ٨ جا θ

= ٨π − ٤ س جا θ

لكن جا θ = س/٨

⟸ س = ٨ جا θ

⟸ م = ٨π − ٤ × ٨ جا θ جا θ

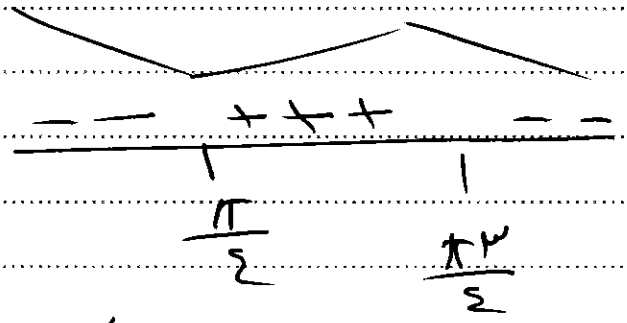
م = ٨π − ٣٢ جا² θ

م′ = −٣٢ × ٢ جا θ جتا θ = ٠

جا θ جتا θ = ٠

θ = π/٢ أو θ = ٣π/٢

θ = π/٤ ، θ = ٣π/٤



عند س = π/٤ أصغر ما يمكن

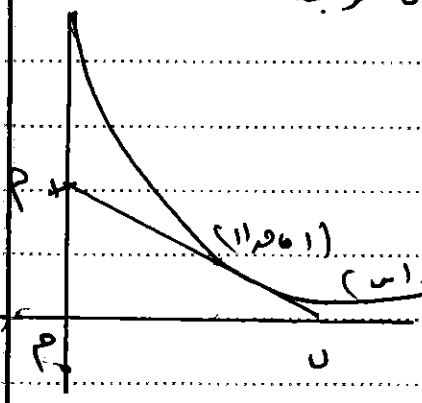
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوحدة

ص ١١٥

السؤال الأول

معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل المثلث م أ ب الذي ضلعه أ ب يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{ح}{س+1}$ عند $(1، ق(1))$ حيث ح ثابت موجب، والتي تجعل مساحة المثلث تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة مربعة.



الحل

ميل المماس $= ق'(س)$

$= \frac{-ح}{(س+1)^2}$ عند $س = 1$

$ق'(1) = \frac{-ح}{4}$ ، $ق(1) = \frac{ح}{2}$

معادلة المماس $\overline{أ ب}$

$(ص - \frac{ح}{2}) = -\frac{ح}{4}(س - 1)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات ص.

$-\frac{ح}{2} = -\frac{ح}{4}(س - 1)$ بقسمة $-\frac{ح}{4}$

$2 = س - 1 \Leftarrow س = 3$

ب $(0، \frac{3ح}{4})$

نقطة التقاطع مع محور الصادات

$س = 0$

$ص - \frac{ح}{2} = +\frac{ح}{4}$

$ص = \frac{ح}{2} + \frac{ح}{4} = \frac{3ح}{4}$

$أ \in (0، \frac{3ح}{4})$

$م = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3ح}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{1}{2} \times \frac{3ح}{4} \times 2 = \frac{9}{4}$

$\frac{9}{4} ح = \frac{9}{4}$

$ح = \frac{4}{9} \times \frac{9}{4} = 1$

السؤال الثاني

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة $ف(ن) = \frac{ن}{2} - جا ن$ حيث $ن \in [0، 2\pi]$ جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته

الحل

$ف'(ن) = \frac{1}{2} - جتا ن = 0$

$جتا ن = \frac{1}{2}$

$ن = \frac{\pi}{3} \Leftarrow ن = \frac{\pi}{12}$

$ف''(ن) = ع'(ن) = ت(ن)$

$= جا ن$

$ت(\frac{\pi}{12}) = جا \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

السؤال الثالث ص ١١٥

اذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{س^2 - 27س}$

$س \in ح$ حيث كلا مما يأتي

أ) قيم س الحرجة

ب) فترات التزايد والتناقص

ج) القيم القصوى.

الحل

$ق(س) = (س^2 - 27س)^{\frac{1}{3}}$

$ق'(س) = \frac{1}{3}(س^2 - 27س)^{-\frac{2}{3}} \times (2س - 27)$

$= \frac{2س - 27}{3\sqrt[3]{(س^2 - 27س)^2}}$

المقام $= 0$ $\quad 3\sqrt[3]{(س^2 - 27س)^2} = 0$

$(س^2 - 27س)^2 = 0$

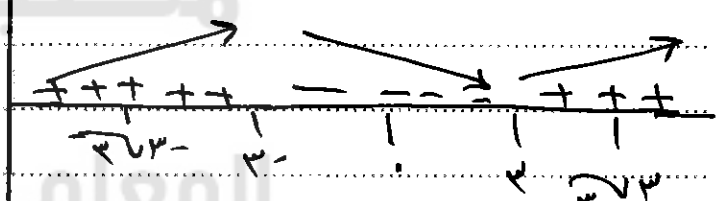
$س(س - 27) = 0$

$س = 0 \quad س = 27$

البسط $= 0$ $\quad 2س - 27 = 0$

$2س = 27$

$س = \frac{27}{2}$



عند $س = -٣$ قيمة عظمى محلية وهي

$ق(-٣) = \sqrt[3]{54}$

عند $س = ٣$ قيمة صغرى محلية وهي

$ق(٣) = \sqrt[3]{-54}$

$ق(س)$ متزايد $(-\infty, -٣] \cup [٣, \infty)$

متناقص $[-٣, ٣]$

السؤال الرابع

عين قاعدة الاقتران

$ق(س) = أس^3 + بس^2 + جس + د$

$أ, ب, ج, د$ اعداد حقيقية ثابتة

وبما منحنى الاقتران ق بالنقطة $(٥, ٥)$

ومعادلة المماس لمنحنى ق عند النقطة

$(١, ق(١))$ هي $٩س + ص - ٩ = ٠$

ولمنحنى ق نقطة انعطاف عند $س = ٠$

الحل

$ق(١) = ٥$

$أ + ب + ج + د = ٥$ ... (١)

ميل المماس $= -٩$ من المستقيم

$ق'(١) = -٩$

$ق'(س) = ٣أس^2 + ٢بس + ج$

$ق'(١) = ٣أ + ٢ب + ج = -٩$ ... (٢)

$(١, ٥) \in$ المماس $\Leftarrow ص = ٠$ $\quad ق(١) = ٠$

$أ + ب + ج + د = ٠$ ... (٣)

بطرح (١) من (٣)

$٥ + د = ٠$ ... (٤)

نقطة انعطاف

$ق''(س) = ٦أس + ٢ب$ عند $س = ٠$

$ق''(٠) = ٠ \Leftarrow ٦أ(٠) + ٢ب = ٠$ ... (٥)

نحل النظام

(٨) $ق(س) = \sqrt[3]{س^2} \; ، \; س \in [-١، ١]$

فان احداثيي النقطة الحرجة هي

$ق(س) = س^{\frac{2}{3}}$

$ق'(س) = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

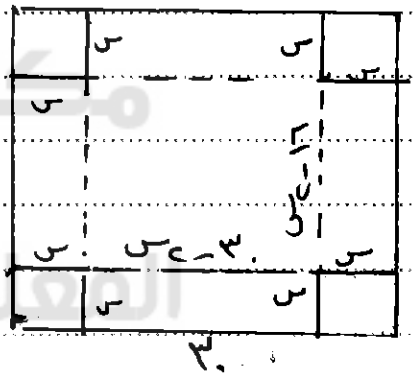
المقام = ٠ ⟸ $س = ٠ \in$ مجال

(٠، ٠) النقطة الحرجة

الجواب (ج)

---

(٩) يراد عمل علبة مفتوحة من الاعلى من قطعة كرتون مستطيلة الشكل ابعادها ١٦ سم، ٣٠ سم وذلك بقص مربعات متساوية من زواياها الاربع طول كل منها (س) وحدة ثم طي الجوانب للأعلى فما قيمة س التي تجعل حجم العلبة اكبر ما يمكن



$ح = (١٦ - ٢س)(٣٠ - ٢س) \times س$

$= (٤٨٠ - ٦٠س - ٣٢س + ٤س^2) س$

$= ٤س^3 - ٩٢س^2 + ٤٨٠س$

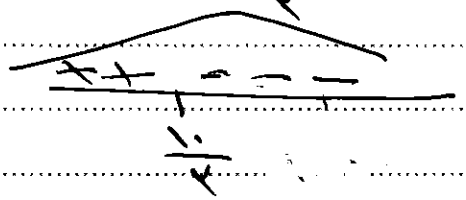
$ح' = ١٢س^2 - ١٨٤س + ٤٨٠ = ٠$

بالقسمة ÷ ٤

$٣س^2 - ٤٦س + ١٢٠ = ٠$

$(٣س - ١٠)(س - ١٢) = ٠$

$س = \frac{١٠}{٣}$ ، $س = ١٢$



$س = \frac{١٠}{٣}$ الجواب (ب)

---

(١٠) $ق(س) = ضتا س - جا س$

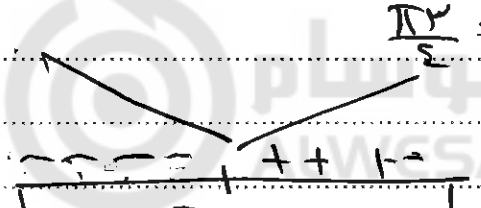
$س \in [٠، ٢\pi]$ فان مجموعة س التي يكون عندها ق صغرى وطلقة

الحل

$ق'(س) = -جا س - ضتا س = ٠$

$-جا س = ضتا س \Rightarrow ظا س = -١$

$س = \frac{٣\pi}{٤}$



$ق(\pi) = ضتا \pi - جا \pi = -١$

$ق(٠) = ضتا ٠ - جا ٠ = ١$ عظمى وطلقة

عند $س = \frac{٣\pi}{٤}$ صغرى

مكتبة الهدام AlHDAM
الهدام ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

عين الشكل مخطط إشارة المشتقة الأولى لكثير الحدود $d(س)$ حيث:

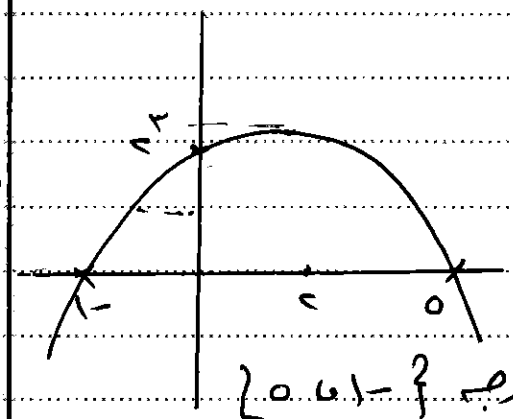
أ) النقط الحرجة

ب) فترات التزايد والتناقص

ج) نقط التي عندها قيم قصوى محلية

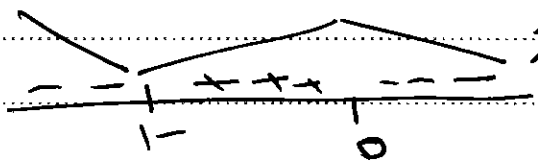
د) فترات التقعر

هـ) نقط الانعطاف



النقط الحرجة $\{-١، ٥\}$

فترة



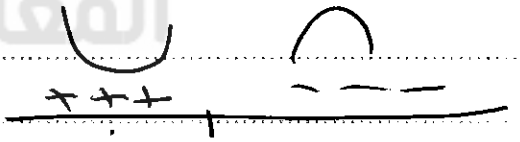
متزايدة $[-١، ٥]$

متناقصة $(-\infty، -١]$ ، $[٥، \infty)$

عند $س = -١$ نقطة صغرى محلية

$س = ٥$ نقطة عظمى محلية

قد من المماسات الحادة موجبة المنفرجة سالبة



مقعر لأعلى $(-\infty، ٤)$ ، لأسفل $[٤، \infty)$

عند $س = ٤$ نقطة انعطاف

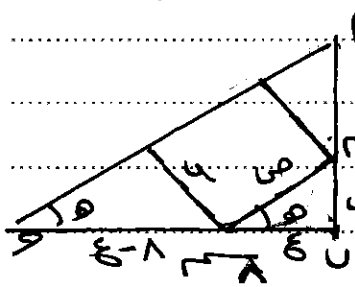
السؤال السادس

وزارة (٢٠١٥ صيفية)

محلول صفحة (٢٧٤) لدوسية

السؤال السابع

$\triangle ب ح$ مثلث قائم الزاوية في $ب$ فيه $ب ح = ٦$ سم، $ب ا = ٨$ سم، وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على ضلعي القائمة، جد ابعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن



$م = س \times ص$

$\frac{ل}{ص} = \frac{٦}{٨}$ بالتشابه

$\frac{س}{٨-٤} = \frac{ل}{٤}$

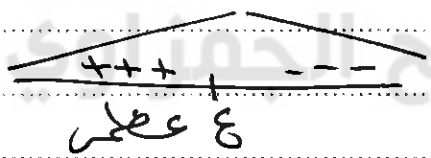
$س \times ص = ل \times (٨-٤)$

$ل = \frac{٣}{٤}٤$ ومن التشابه $\frac{ل}{٤} = \frac{٦}{٨}$

$م = \frac{٣}{٤}٤ \times (٨-٤) = \frac{٣}{٤}(٨٤-٤^٢)$

$م' = \frac{٣}{٤}(٨-٢٤) = ٠$

$٢٤ = ٨$ $٤ = ٤$



مكتبة الوسام ALWESAM
للمعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

① يتحرك نقطة مادية على خط مستقيم حيث ان المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي ف(ن) = ٦ن² - ن³ + ١٢
اوجد المسافة عندما يصبح التسارع صفرًا

الحل

ع(ن) = ١٢ن - ٣ن²

ت(ن) = ١٢ - ٦ن = ٠

ن = ٢

ف(٢) = ٢٤ - ٨ + ١٢ = ٢٩

الجواب ⑦

② معدل تغير حجم كرة بالنسبة الى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم

الحل

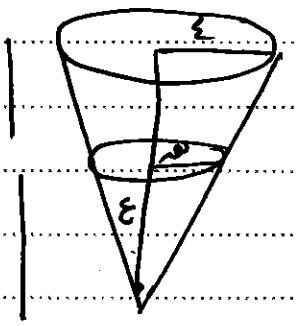
ح = ٤/٣ π نق³

ح/ز = ٤ π نق² ح/ز نق

ح/ز | نق = ٥ = ٤ π × ٥² = ١٠٠ π

الجواب ⑤

③ وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه الى اسفل ارتفاعه ١٦ سم، وطول نصف قطر قاعدته ٤ سم، صب فيه الماء بمعدل ٢ سم³/ث فاوجد معدل تغير ارتفاع الماء فيه في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء فيها ٨ سم.



ح/ز = π ن² ع/ز

ح/ز | ع = ٨ = ٤

ح = ١/٣ π نق² ع

من المتشابهة ١٦/ع = ع/نق

٤ نق = ع ⟹ نق = ع/٤

ح = ١/٣ × π × ع²/١٦ × ع = π/٤٨ ع³

ح/ز = π٣/٤٨ ع² × ع/ز

٢ = π/١٦ (٨)² × ع/ز

ع/ز = ٢ × ٤/π = ١/٢

الجواب ④

مكتبة الوفاء ALWEFAA
المعلم : ناجح الجمزاوي

(٤) اذا كان $ق(س) = ١٢س + ٦(م-٤)س^{٢}$ فان جميع م التي تجعل منحنى الاقتران مقعرا للاسفل

$ق(س) = ١٢ + ١٢(م-٤)س$

$ق''(س) = ١٢(م-٤) < ٠$

$م - ٤ < ٠ \Leftarrow م < ٤$

(ج) $(-\infty, ٤)$ الجواب

(٥) اذا كان لمنحنى الاقتران $ق(س) = جا٤س$ تقطة انعطاف عند $س = \frac{\pi}{٤}$ فان ميل المماس عندها

ميل المماس $= ق'(س)$

$= -٤ جا٤س$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = -٤ جا٤ \times \frac{\pi}{٤}$

$= +٤$

الجواب (أ)

(٦) $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤س + ١}{س^{٤}}$

فان منحنى ق متناقص في $]-\infty, ٥[$

اكل $ق'(س) = ١ - ٤س + \frac{١}{س^{٢}}$

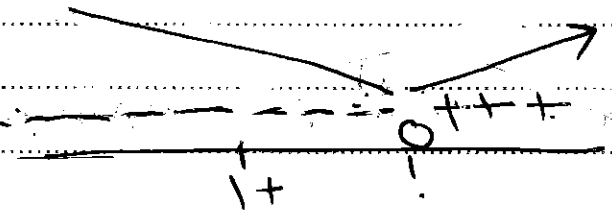
$ق''(س) = +٤ - \frac{٤س^{٣}}{س^{٤}}$

$= \frac{٤}{س^{٣}} - \frac{٤}{س^{٣}}$

$= \frac{٤ - ٤س^{٣}}{س^{٣}} = ٠$

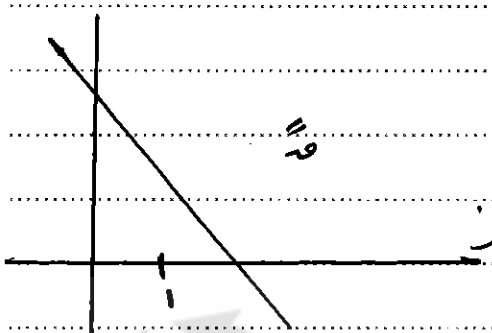
$٤ = ٤س^{٣} \quad س = ١+$

$س = ٠ \notin$ مجال



(ب) $(-\infty, ١]$ الجواب

(٧) الشكل عثل منحنى $ق'(س)$ اذا كان للاقتران ق نقطة حرجة عند $(١، ق(١))$ فان $ق(١)$ هي قيمة

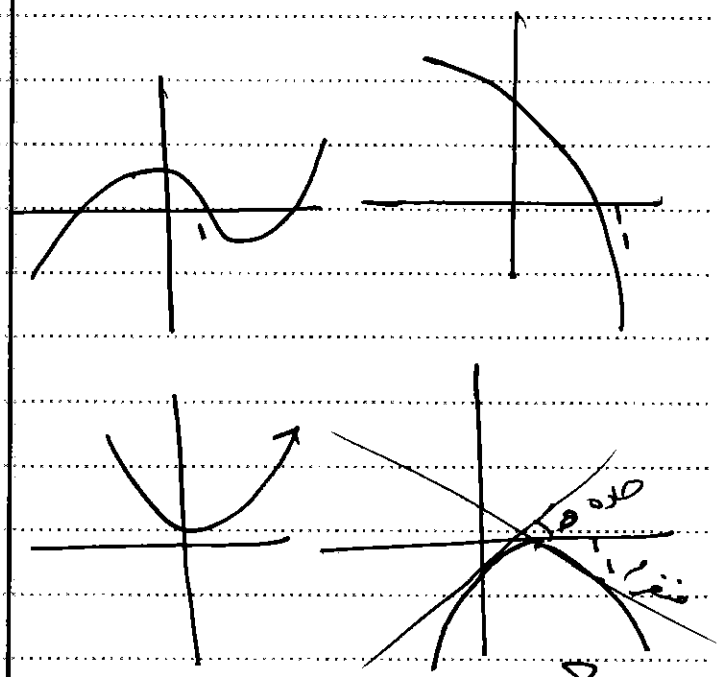


$ق'(١) <$ صفر صيغة صغرى محلية

$\Leftarrow ق(١)$ قيمة صغرى محلية

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

(١١)
أي المنحنيات في الشكل المقابل يمكن أن يكون منحنى الاقتران ق حيث ق(١) > ٠
ق(١) = ٠ ، ق'(س) سالبة



ق(١) > ٠ ق هـ = جاه
المشتقة موجبة (الميل موجب)
ق(١) = ٠ عند س = ١ المماس
يصنع زاوية منفرجة

ق'(س) > ٠ دائماً
مقعر للأسفل
ج

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

امنياتي بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : ناجح الجمزاوي