الأستاذ علي حافظ على استعداد لإعطاء دروس خصوصية لطلبة الثانوية العامة الفرع العلمي

أ. علي حافظ ٠٧٧٨٣٢٤٥٣٢

أولاً ١ – ١ التزايد والتناقص والقيم القصوى والتقعر

مثال

أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية والمطلقة وفترات التقعر ونقط الانعطاف (إن وجدت) لكل من الاقترانات التالية.

١) ق(س) = |س^{٢} – ٩|

٢) ق(س) = |س + ١| • |س – ٢|

٣) ق(س) = س$^{\frac{٤}{٣}}$ – ٨س$^{\frac{١}{٣}}$

٤) ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ (٥ – س)

٥) ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٤}$

٦) ق(س) = س^{٢} |س – ٣|

٧) ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ – جتا٢س ، س ∈ [٠، π]

٨) ق(س) = $\sqrt[٣]{٣}$ جاس + جتاس ، س ∈ [٠، π]

٩) ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠، π]

١٠) ق(س) = $\sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ، س ∈ [٠، π]

١١) ق(س) = $\frac{\text{س}}{٢}$ – جا^{٢}س ، س ∈ [٠، π]

١٢) ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{١+\text{جتاس}}$ ، س ∈ [٠، ٢π]

١٣) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١}$ ، (س ≠ ١)

١٤) ق(س) = | جا٢س | ، س ∈ [٠، π]

١٥) ق(س) = جا^{٤}س ، س ∈ [٠، π]

١٦) ق(س) = جا^{٢}($\frac{\text{س}}{٢}$) – جتاس ، س ∈ [٠، ٢π]

١٧) ق(س) = ظاس – ٢س ، س ∈ [$\frac{-\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٢}$]

١٨) ق(س) = جا^{٢} ٢س ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

١٩) ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٤}$

٢٠) ق(س) = س. $\sqrt[٣]{\text{س}-٢}$

٢١) ق(س) = ٤|س – ٥| + |س^{٢} + ١| – ٣س

٢٢) ق(س) = { ٣ – س^{٢} ، س ≥ ١ ; $\frac{٢}{\text{س}}$ ، س > ١ }

٢٣) ق(س) = { س^{٢} + ٦س – ١٥ ، س ≥ ٠ ; [س + ٢] ، ٠ > س > ١ ; |٣س – ١| ، س ≤ ١ }

٢٤) ق(س) = { س$^{\frac{١}{٥}}$ ، س > ١ ; س + $\frac{٤}{\text{س}}$ ، س ≤ ١ }

مثال

أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) لكل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = |س – ٢| – |٣س + ١| + ٤ ، س ∈ [–٢، ٤]

٢) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ جا٢س – ٣جاس + ٢س ، س ∈ [٠، ٢π]

٣) ق(س) = ٢جا٢س + ٤جتاس ، س ∈ [٠، π]

٤) ق(س) = جا^{٢}س – $\sqrt{٣}$ جاس ، س ∈ [٠، π]

٥) ق(س) = جتاس – $\frac{١}{٢}$ جتا٢س ، س ∈ [٠، π]

مثال

إذا كان ق(س) قابلًا للاشتقاق على الفترة (أ، ب) حيث قَ(س) > ٠ لكل س ∈ (أ، ب).

وكان هـ(س) = ق(س) + س^{٣}، أثبت أن هـ(س) متزايد في [أ، ب].

مثال

ق(س) = ٢ + جتا^{٢}س – جتا٢س ، س ∈ [٠، π] أوجد:

١) مجالات التقعر لأعلى ولأسفل.

٢) نقط وزوايا الانعطاف.

مثال

إذا كانت $\text{ق}'(س) = \frac{٩ - ٤س^{٢}}{\sqrt[٣]{١ + س}}$، أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق.

مثال

أثبت ان الاقتران:

ق(س) = س+جاس متزايد في ح

مثال

أثبت أن الاقتران

ق(س) = $س^{٣} + ٤س - ٦$ متزايد في ح

مثال

إذا كان الاقتران ق(س)= $س^{٣} - أس^{٢} + ٣س$

متزايد في ح، جد مجموعة قيم أ

مثال

إذا كان الاقتران

ق(س) = $\frac{٣ - س}{س^{٢} + جـ}$ متزايد في ح، جد مجموعة قيم جـ

مثال

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$جتا٢س+$جا^{٢}$س، أثبت أن ق(س) ثابت.

مثال

إذا كان $\text{ق}'(١) = \text{ق}'(٣) = ٠$

وكان $\text{ق}''(س) = ٥ - ٢س$:

١) حدد فترات التزايد والتناقص.

٢) حدد نقط القيم العظمى والصغرى.

٣) حدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل

مثال

إذا كان ق(س) = (س+١)° + ٤$جا^{٢}$س، أثبت أن ق(س) متزايد في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

مثال

باستخدام التزايد والتناقص، أثبت أن:

$\frac{أ}{٩ + أ^{٢}} < \frac{ب}{٩ + ب^{٢}}$ حيث أن $٣ \geq أ > ب$

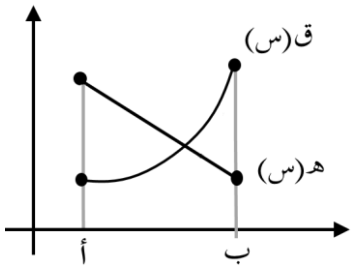
مثال

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانان معرفان على الفترة [أ،ب] ويقعان في الربع الأول، إذا كان ق(س) متزايدًا على [أ،ب]. هـ(س) متناقص على [أ،ب]، أثبت أن:

ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$، (هـ(س) ≠ ٠) متزايد في[أ،ب] .

مثال

الشكل المجاور يبين منحنى الاقترانين ق(س)، هـ(س) المعرفين على [أ،ب].



أثبت أن:

١) $(ق \times هـ)'(س)$ اقتران متناقص في [أ،ب]

٢) (ق − هـ)(س) اقتران متزايد في [أ،ب]

٣) $(\text{ق}' \circ هـ)'(س)$اقتران متناقص في [أ،ب]

٤) الاقتران $\frac{\text{ق}'(س)}{هـ(س)}$ هو اقتران متزايد في [أ،ب]

٥) ل(س) = (س•ق) مقعّر لأعلى في [أ،ب]

مثال

إذا كان ق(س)= $(١ - هـ(س))^{٣}$، وكان للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٣) أثبت أن للاقتران ق قيمة صغرى عند النقطة (٢ ، −٨)

مثال

إذا كان ق(س) قابلًا للاشتقاق على الفترة (أ،ب) حيث قَ(س)>٠ لكل س ∈ (أ،ب) . وكان هـ(س) = ق(س) + س^{٣}، أثبت أن هـ(س) متزايد في [أ،ب] .

مثال

إذا كان قَ(س)=هـ(س) ، هَ(س)= − ق(س)، أثبت أن (ق^{٢} + هـ^{٢}) اقتران ثابت.

مثال

إذا كانت قَ(س)>كَ(س) لجميع قيم س ∈ ع . اثبت أن الاقتران ق(س) − ك(س) متزايد على ع .

وإذا كان ق(أ) = ك(أ) حيث أ ∈ ع فأثبت أن:

ق(ب) > ك(ب) حيث ب > أ

مثال

باستخدام القيم القصوى، أثبت أن:

س + $\frac{١}{س}$ ≥ ٢ عندما س ≥ ١

مثال

باستخدام القيم القصوى، أثبت أن:

|٣س − س^{٣}| ≥ ٢ عندما |س| ≥ ٢

مثال

باستخدام القيم القصوى، أثبت أن:

جاس ≥ س في الفترة [٠ ، ٢π]

مثال

إذا كان ق(س) = س(س−أ)^{ن}، حيث أ ثابت، ن عدد صحيح (ن ≥ ١)، أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية وفترات التقعر ونقط الانعطاف في الحالتين: ١) ن عدد فردي ٢) ن عدد زوجي

مثال

إذا كان ق(س)= $\frac{س^{ن}}{س-١}$ ، (س ≠ ١).

(ن) عدد صحيح (ن ≥ ٢)، أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران (ق) إذا كان (ن) تمثل عدد زوجي.

مثال

إذا كان ق(س) = (١ + س)^{ن} − (١ + نس)

(ن) عدد صحيح (ن>١):

١) أثبت أن نقطة الأصل هي نقطة حرجة للاقتران.

٢) اثبت أن (٠، ق(٠)) هي نقطة قيمة صغرى مطلقة.

٣) إذا كان (ن) عدد فردي، أثبت أن (−١، ن−١) هي نقطة انعطاف بزاوية منفرجة.

مثال

إذا كان ق(س) = س^{ن} (١−س)^{م} .

(ن، م) أعداد صحيحة (ن، م ≥ ٢)

١) أثبت أن القيم الحرجة للاقتران(ق)هي $\{٠، ١، \frac{ن}{ن+م}\}$

٢) إذا كان (ن) عدد زوجي، أثبت أن (ق) له قيمة صغرى محلية عندما (س = ٠)

٣) إذا كان (م) عدد زوجي، أثبت أن (ق) له قيمة صغرى محلية عندما (س=١)

٤) أثبت أنه يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران (ق) عندما س = $\frac{ن}{ن+م}$

مثال

إذا كانت (د، ق(د)) هي نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران: ق(س) = (س−أ) (س − ب) (س − جـ)

أثبت أن د = $\frac{أ+ب+جـ}{٣}$

مثال

بيّن أن كثير الحدود من الدرجة (ن) له على الأكثر (ن – ٢) نقطة انعطاف.

مثال

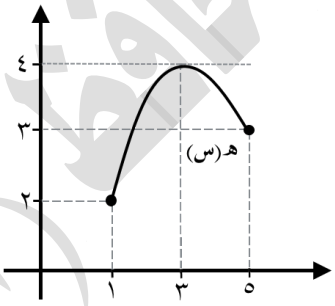
إذا كان ق(س)= $\frac{٣}{٤}$س^{٤} + (م – ٢) س^{٢} +٦، جد مجموعة قيم م التي تجعل ق(س) مقعرًا لأعلى في ح.

مثال

إذا كان ق(س) =س^{٤} + ب س^{٢} + جـ س^{٢} + دس ، أثبت أنه توجد نقطتي انعطاف للاقتران (ق) إذا كانت جـ < $\frac{٣}{٨}$ب^{٢}

مثال

إذا كان ق(س)= (٥–هـ(س))^{ن}، ن عدد صحيح موجب (ن ≥ ٢) ، هـ(س) اقتران معرف على الفترة [١ ، ٥] كما في الشكل المجاور:



١) أثبت أن (س=٣) هي قيمة حرجة للاقتران ق.

٢) اثبت أن ق(س) متناقص على الفترة [٣،١]

٣) أثبت ان للاقتران (ق) قيمة صغرى عند النقطة (١، ٣)

٤) أثبت ان ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [١ ، ٥]

٥) أثبت أن الاقتران (ق•هـ)(س) متناقص في الفترة [٣ ، ٥].

مثال

إذا كان ق(س) س^{٣} + أس^{٢} + ب س +جـ ،

١) أثبت أن ق(س) له نقطة انعطاف وحيدة.

٢) أثبت أن ق(س) له قيم قصوى إذا كانت أ^{٢} ≤ ٣ب

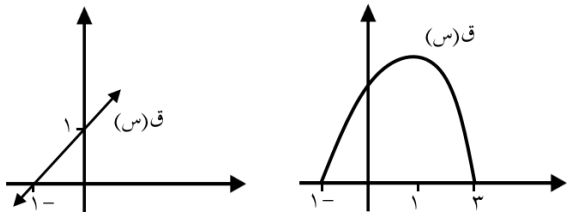
٣) إذا كان للاقتران قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية، أثبت ان نقطة الانعطاف تقع في منتصف المسافة بينهما.

مثال

إذا كان ق(س) =أس^{٣} +ب س^{٢} + جـ س + د، (أ ≠ ٠) أوجد شروط على الثوابت (أ،ب،جـ) بحيث يكون الاقتران (ق) متزايدًا دائمًا

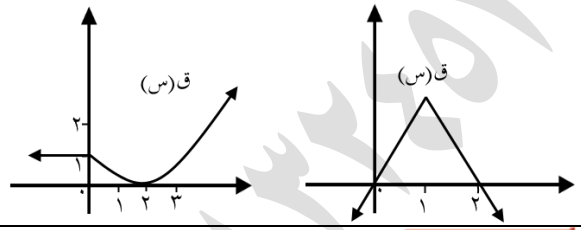
مثال

الأشكال التالية تمثل منحنى قَ(س) ارسم منحنى تقريبي للاقتران ق.



مثال

الأشكال التالية تمثل منحنى ق(س) ارسم منحنى تقريبي للاقتران قَ(س).



مثال

إذا كان الاقتران ق(س)= أجتا٢س + ب جتا٣س له نقطة انعطاف هي ($\frac{\pi}{٦}$،٥)، جد قيم أ، ب

مثال

إذا كان ق(س)= أس^{٣} + ب س^{٢} له قيمة قصوى عند النقطة (١،٦) جد أ، ب

مثال

إذا كان للاقتران ق(س)= س^{٣} – ٣س^{٢} + أس نقطة انعطاف أفقي، أوجد: ١) قيمة أ ٢) تقعر قَ(س)

مثال

إذا كان الاقتران ق(س)= أ جاس + ب جتاس وكانت ($\frac{\pi ٣}{٤}$ ، $\sqrt{٢}$) نقطة قيمة عظمى للاقتران ق:

١) جد قيم أ، ب

٢) أوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف على الفترة [٠، ٢π]

مثال

إذا كان المستقيم ص + س − ٤ = ٠ يمس منحنى الاقتران ق(س)= أس^{٣} + بس^{٢} + جـ عند نقطة الانعطاف (١ ، ق(١)) . جد قيمة أ،ب،جـ

مثال

إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود موجبان لكل منهما قيمة صغرى محلّية عندما س=أ.

أثبت أن للاقتران ق×هـ قيمة صغرى عندما س=أ.

مثال

إذا ل(س) كثير حدود متزايد على الفترة [أ،ب]، ل(س) ≠ ٠ وكان قَ(س) = $\frac{٧}{\text{ل}(\text{س})}$ − ٩س. أثبت أن الاقتران ق مقعّر لأسفل في الفترة [أ،ب].

مثال

إذا كان للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + أس (أ ثابت) نقطة انعطاف افقي، جد:

١) قيمة أ

٢) مجالات التقعر لأعلى ولأسفل.

٣) احداثي نقطة الانعطاف الأفقي.

مثال

إذا كان للاقتران ق(س)= س^{٣} − ٣س^{٢} + أس نقطة انعطاف أفقي، أوجد: ١) قيمة أ ٢) تقعر قَ(س)

مثال

جد معادلة كثير الحدود من الدرجة الثالثة يمر بالنقطة (٢،٠) والنقطة (−١، ٤) نقطة انعطاف بزاوية ٤٥°

مثال

أثبت أنه يوجد للاقتران ق(س)=جاس(١+جتاس) قيمة عظمى عندما س = $\frac{\pi}{٣}$

مثال

إذا كان للاقتران ق(س)= س^{٤} − ٢س^{٣} + أ س^{٢} نقطتا انعطاف أحدهما (٢، ق(٢)). جد نقطة الانعطاف الثانية ومجالات التقعر.

مثال

جد الفترات التي يكون فيها الاقتران ق(س) = س^{٤} − س^{٢} + ٥س فوق جميع مماساته والفترات التي يكون فيها الاقتران تحت جميع مماساته.

مثال

إذا كان للاقتران ق(س)= س^{٤} − ٤س^{٣} + ل(س) نقطة انعطاف أفقي هي (١ ، ٢) وكان ع(س) = ل^{٢}(س) جد عً(١)