الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الفصل الأول

التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة

الدرس الأول

** التفسير الهندسي

ميل المماس	معادلة المماس
ص - ص١ = م (س - س١)	

*خطوات الحل	*خطوات الحل
① نشتق	① نجد ص١
② نعوض	② نشتق
ملاحظة: إذا أعطاك	③ نعوض
ص = ق(س) نعوض مباشرة	

مثال ① : إذا كان ق(س) = س^{٥} - ٣س^{٢} + ١
نجد ميل المماس عند س = ١

مثال ② : إذا كان ق(س) = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧
نجد ميل المماس لمنحنى ق(س)
عند س = ٢

③ إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{\text{س} - ٢}$ نجد
ميل المماس عند (١،٣) س - ٢

④ إذا كان ق(س) = $\frac{٢\text{س} + ١}{٥\text{س} - ٤}$ نجد
ميل المماس عند (٢،٠)

⑤ إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٧٢س - ١
نجد ميل المماس عند (١،٤)

⑥ إذا كان ق(س) = (٣س + ٢)^{٤} نجد
ميل المماس عند (٠،٣)

⑦ إذا كان ق(س) = س(س - ٥)² فجد ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ١

⑧ إذا كان ق(س) = س (س - ٥)³ فجد ميل المماس لمنحنى ق(س)

⑨ إذا كان ق(س) = ٢س² - ٥س فجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢

⑩ إذا كان ق(س) = س² + ٥ فجد معادلة المماس عند س = ١

⑪ أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س² + ٧س عند س = ١

⑫ إذا كان ق(س) = $\frac{٢س}{١ + ٣س}$ فجد معادلة المماس عند النقطة (١، ١)

تدريب: إذا كان ق(س) = (٢س + ١)³ فجد معادلة المماس عندما س = ٠

(١٣) أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س^{٣} − ٨ عند نقطة تقاطع ق(س) مع محور السينات

(١٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س^{٤} + س عند نقطة تقاطع ق(س) مع محور الصادات

(١٥) إذا كان ق(س) = ٣س^{٤} + ٥س فجد قيمة س على منحنى ق(س) بحيث يكون ميل المماس عندها يساوي (٧)؟

(١٦) إذا كان ق(س) = ٤س^{٤} − ٥س فجد قيمة س عندما يكون ميل المماس يساوي (٣)؟

(١٧) إذا كان ق(س) = أ س^{٤} + ٢س + ٥ حيث أ عدد ثابت وكان ميل المماس عندما س = ٢ يساوي (١٨) فما قيمة الثابت أ ؟

(١٨) إذا كان ق(س) = أ س^{٤} + ٤س − ٣ حيث أ عدد ثابت وكان ميل المنحنى عندما س = ٣ يساوي (٢٢) فجد قيمة الثابت أ ؟

الدرس الثاني :

التفسير الفيزيائي للمشتقة

ف ـ ع ـ ت

ف (ن) ← المسافة (م)

↓

ع (ن) ← السرعة (م/ث)

↓

ت (ن) ← التسارع (م/ث²)

السرعة	التسارع
ع (ن) = ف' (ن)	ت (ن) = ع' (ن)
المشتقة الأولى	المشتقة الثانية
م/ث	م/ث²

ملاحظة : تستخدم عندما يطلب (المسافة ، السرعة ، التسارع) بدون كلمة متوسط التغير

طبيعة السؤال

مباشر | غير مباشر

إذا أعطانا في السؤال كلمة ثواني بعد مرور ثواني

إذا لم يعطينا في السؤال كلمة ثواني

خطوات الحل

① ننسخ السؤال ، نشتق قد ما نقدر

② نبسّط على المطلوب

③ نعوض المفتاح في المعادلة

④ المفتاح هو الزمن

إذا الزمن غير موجود نبحث عنه عن طريق إيجاد المجاهيل

المجاهيل على جهة والأعداد على جهة

ملاحظة : بعد التسارع لا نشتق

① يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٣ن² + ٢ن + ١ حيث ف بالأمتار ، ن بالثواني جد سرعة الجسم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة ؟

② يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ١/٤ ن⁴ + ٥ حيث ف بالأمتار ، ن بالثواني إحسب سرعة الجسم بعد مرور (٤) ثوانٍ

③ يتحرك جسم على منحنى المسافة ف(ن) = ن^{٣} − ٥ ن^{٢} + ٧ حيث ف بالأمتار ، ن الزمن بالثواني أحسب سرعة الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ؟

④ يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٥ ن^{٢} + ٣ ن + ١ حيث ف بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسم بعد مرور (٧) ثوان

⑤ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ٣ ن^{٣} + ٤ ن^{٢} + ؟ حيث ف بالأمتار ، ن الزمن بالثواني أحسب تسارع الجسم بعد مرور (٣) ثواني

⑥ يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن + $\frac{1}{2}$ ن^{٢} حيث ف بالأمتار ، ن الزمن بالثواني أحسب سرعة الجسم وتسارعه عندن = ٢ ثانية ؟

⑦ يتحرك جسم على منحنى السرعة ع(ن) = ن^{٣} − ٥ ن^{٢} + ٧ حيث ع السرعة بالمتر لكل ثانية ، ن الزمن بالثواني و ن ≥ ٠ ، فجد التسارع للجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ؟

⑧ يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ ن^{٣} + ٤ ن جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٤٢ م/ث^{٢} ؟

⑨ يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٣٠ن - ٧ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ن ≥ ٠ ، فجد السرعة لكل متر عندما يكون تسارعه ١٨ م/ث^{٢} ؟

⑩ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} - ٢ن + ٦ جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٥٢ م/ث

⑪ يتحرك جسم على منحنى المسافة ف(ن) = ن^{٣} + ٣٠ن - ٧ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٥٧ م/ث؟

⑫ يتحرك جسم على منحنى المسافة ف(ن) = ٢ن^{٢} - ٥ن حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٣ م/ث ؟

⑬ يتحرك جسم على منحنى المسافة ف(ن) = $\frac{ن^{٣}}{٣}$ - ٣ن^{٢} + ١٠ن - ٧ حيث ف المسافة ، ن الزمن بالثواني ن ≥ ٠ ، فجد التسارع اللحظي عندما تكون سرعته ٣٥ م/ث ؟

(١٤) يتحرك جسم على منحنى المسافة ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ١٠ن + ١٠ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني فجد سرعة الجسم عندما تنعدم تسارعة ؟

(١٥) يتحرك جسم على منحنى المسافة ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} - ن^{٢} - ٣ن فجد تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة ؟

(١٦) إذا تحركت سيارة وكان موقعها في اللحظة ن معروفاً بالإقتران ف(ن) = ٣٠ن^{٢} - ٤ن + ٦ حيث ف المسافة التي تقطعها السيارة بالأمتار، ن الزمن بالثواني فجد سرعة السيارة بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الفصل الثاني :

تطبيقات الإشتقاق

الدرس الثالث + الدرس الرابع

(التزايد والتناقص) ، (القيم القصوى)

كلمات مفتاح السؤال

(القيم العظمى ، القيم الصغرى)

الحرجات ، القيم القصوى)

* خطوات الحل

① نشتق ق (س) ونساويها بالصفر لنجد السينات ← الحرجة

② نضع أصفار المشتقة على خط الأعداد

③ ندرس إشارة قـ (س)

إذا كانت قـ (س) موجبة ← متزايد

④

إذا كانت قـ (س) سالبة ← متناقص

⑤ عندما يتحول قـ (س) من متزايد إلى متناقص تكون قيمة عظمى

وعندما يتحول قـ (س) من متناقص إلى متزايد يكون قيمة صغرى

قيم س الحرجة ← قـ (س) ← صفر ← متزايد

← قـ (س) ← صفر ← متناقص

← قـ (س) = صفر ← ثابتاً

القيم القصوى ← تعوض في السؤال

∧ له قيمة عظمى عند المرتفعات

∨ له قيمة صغرى عند المنخفضات

** التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى

① جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق (س) = س٣ + ٣س٢ + ١ وقيم س الحرجة والقيم القصوى

② إذا كان ق (س) = ٢س٣ + ٥س - ٤ فجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

③ إذا كان ق (س) = ٤س - س٢ فجد فترات التزايد والتناقص والقيم س الحرجة والقيم القصوى.

⑤ جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) = (س+١)(س+٢) وقيم س الحرجة والقيم القصوى

⑦ جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) = $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤$ وقيم س الحرجة والقيم القصوى

⑥ إذا كان ق(س) = $س^{٢} + ٢س - ١$ فجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

⑧ جد فترات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) = $س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$ وقيم س الحرجة والقيم القصوى

⑨ إذا كان ق(س) = $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢$ فجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

)إذا كان ق (س) = ٢س^{٣} - ٤٢ س
د فترات التزايد والتناقص
قيم س الحرجة والقيم القصوى

⑫ إذا كان ق (س) = ٦س^{٤} - ٢س^{٣} فجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

① جد فترات التزايد والتناقص
لة قتران ق (س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

⑬ إذا كان ق (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤٢س + ١٢ فجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

⑪ إذا كان ق (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٣
فجد فترات التزايد والتناقص
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(١٤) إذا كان ق(س) = ٩س٤ - ٢س٣ + ٣
نجد فترات التزايد والتناقص
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(١٥) إذا كان ق(س) = ٣س - س٣ + ١
نجد فترات التزايد والتناقص
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(١٦) جد فترات التزايد والتناقص
للإقتران ق(س) = ٧ ٢س - س٢ + ٥
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(١٧) إذا كان ق(س) = ٦س٤ - س٣ - ٩س + ٦
نجد فترات التزايد والتناقص وقيم
س الحرجة والقيم القصوى

(١٨) إذا كان ق(س) = $-س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٥س - ٦$ أوجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(١٩) جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $س^{٢}(س - ١)$ وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(٢٠) جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $س^{٢}(٣ - س)$ وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(٢١) إذا كان ق(س) = $س(٢س^{٢} - ٤٢)$ أوجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(٢٣) جد فترات التزايد والتناقص
لإقتران ق(س) = س(٣ - س٤)
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(٢٤) جد فترات التزايد والتناقص
للإقتران ق(س) = ٥ - س^{٣} وقيم
س الحرجة والقيم القصوى

(٢٦) إذا كان ق(س) = س^{٣} + ١ فجد
فترات التزايد والتناقص وقيم
س الحرجة والقيم القصوى

(٢٥) إذا كان ق(س) = ٦١س - $\frac{س^{٣}}{٣}$
فجد فترات التزايد والتناقص
وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(٢٦) إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ - ٦$س^{٢}$ + ٩س - ٦
نجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

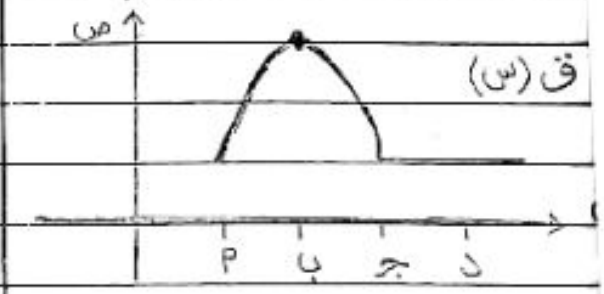
(٢٧) إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٣}$ - ٣$س^{٢}$ + ٩س - ٥
نجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

(٢٨) إذا كان قـ(س) = ٣$س^{٢}$ + ٦س - ٩
نجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

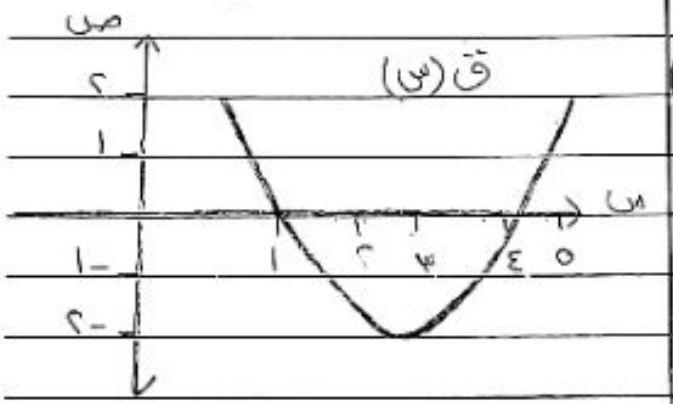
(٢٩) إذا كان قـ(س) = -٣$س^{٢}$ + ٢٤س + ٦٠
نجد فترات التزايد والتناقص وقيم س الحرجة والقيم القصوى

** التزايد والتناقص والقيم القصوى من خلال الرسم

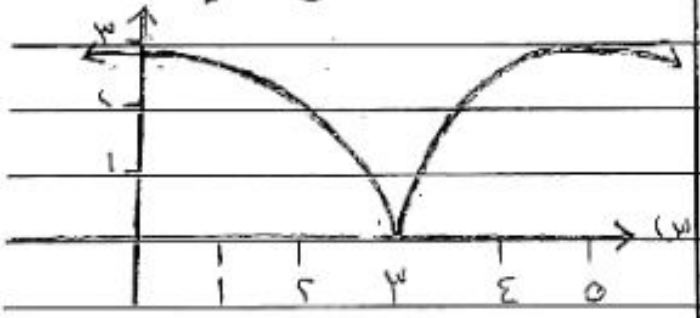
معتمداً على الشكل المجاور الذي
مثل منحنى ق(س) جد خواص الإقتران ق(س)



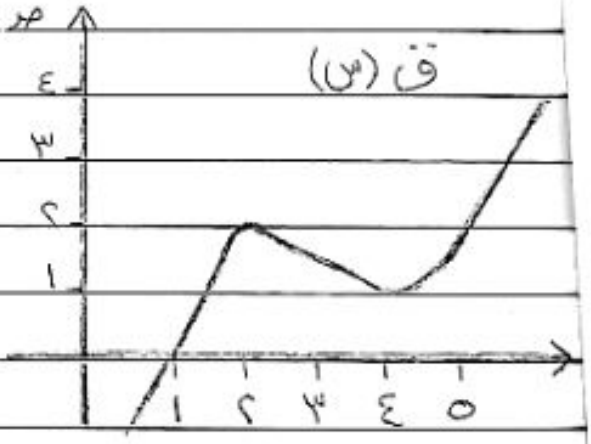
③ معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد خواص الإقتران ق(س)



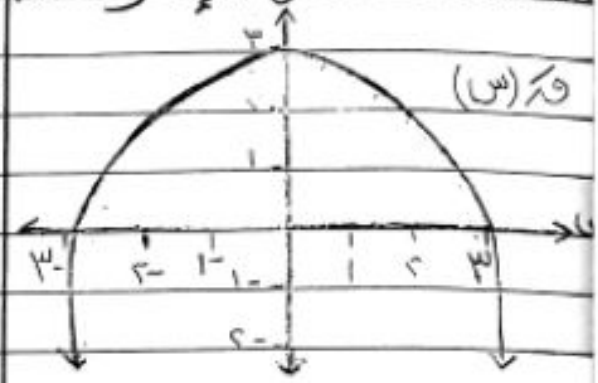
④ معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) جد خواص الإقتران ق(س)



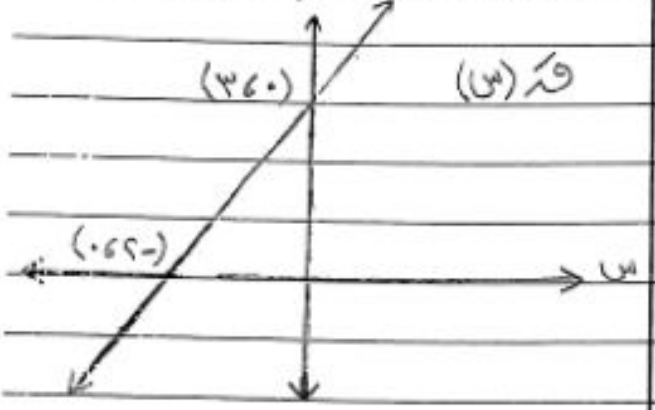
① معتمداً على الشكل المجاور الذي
مثل منحنى ق(س) جد خواص الإقتران ق(س)



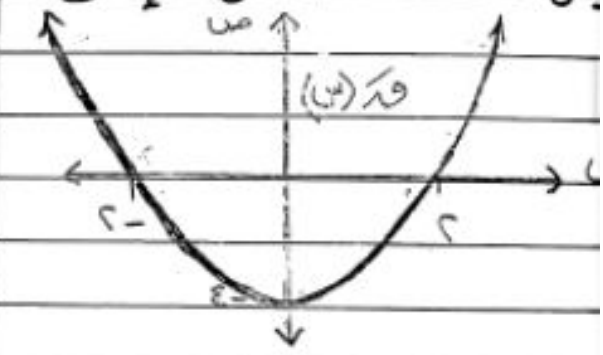
⑥ معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قـ(س) جد خواص الإقتران قـ(س)



⑦ معتمد أعلى الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للإقتران ق(س) جد خواص الإقتران قـ(س)



⑧ معتمد أعلى الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قـ(س) جد خواص الإقتران قـ(س)



***إيجاد الثوابت في التزايد والتناقص والقيم القصوى

① إذا كان للإقتران ق(س) = ٢س - س^{٣}
قيمة حرجه عندما س = -٢ فجد قيمة الثابت ٢ ؟

② إذا كان للإقتران ق(س) = -٢س^{٤} + ١٢س - ١٥
قيمة حرجة عندما س = ١ فجد الثابت ٢ ؟

③ إذا كان للإقتران ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٤} - ٤٢س
نقطة قصوى عندما س = ٤ فجد الثابت ٢؟

إذا كان للإقتران ق(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢
قيمة عظمى عندما س = -١ فجد الثابت P

إذا كان للإقتران
ن(س) = س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٩س - ٢
قيمة صغرى عندما س = ٣ فجد الثابت P

الدرس السادس ٥٫٦

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

* الرموز

ك (س) ← اقتران التكلفة الكلية

ك́ (س) ← اقتران التكلفة الحدية

د (س) ← اقتران الإيراد الكلي

د́ (س) ← اقتران الإيراد الحدي

ر (س) ← اقتران الربح الكلي

ر́ (س) ← اقتران الربح الحدي

* قوانين :

الربح ← ر (س)

ر (س) = د (س) − ك (س)

الإيراد ← د (س)

د (س) = ع × س

الربح أكبر ما يمكن ← ر́ (س) = صفر

الإيراد أكبر ما يمكن ← د́ (س) = صفر

ملاحظة الحدي ← تعني الإشتقاق

ر (س) = د (س) − ك (س)

الربح = الإيراد − التكلفة

① معطى ② غير معطى ③ معطى سعر وضع

الربح + التكلفة موجبان

د (س) = ر (س) + ك (س) سعرها ١٠ دنانير

د (س) = ١٠ س

أو

سعرها ٣ − س

د (س) = س٢ − ٣س

① إذا كان إقتران التكلفة الكلية هوك (س) = ٥٨٠٠ + ٧٠ س نجد التكلفة الحدية ؟

② إذا كانت ع = ٢٠٠ - ٣ر حيث معادلة السعر والطلب، نجد
ⓐ الإيراد الناتج
ⓑ الإيراد الحدي

③ وجدت شركة إنتاج ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي ك(س) = ٢٠٠ - ٠٫٠٥ س + ١٠٠٠ وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هي ر(س) = ٢٠ ع - س نجد
ⓐ التكلفة الحدية وعدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟
ⓑ الإيراد الحدي ؟
ⓒ الربح الحدي ؟

④ إذا كان إقتران الإيراد الكلي د(س) = ٦٠ س - س٢ وإقتران التكلفة الكلية ك(س) = ١٥ + ٢ س٢ حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة نجد ؟
① الربح الحدي ؟
② قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

⑤ ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريا فإذا كانت التكلفة للإنتاج تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٣٤س + س؟ وكان بيع الثلاجة الواحدة بسعر (٥٠٠) دينار فجد

① إقتران الإيراد الكلي ؟

② عدد الثلاجات التي يجب بيعها لمصنع شهريا لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

⑥ ينتج مصنع أجهزة تلفاز وكان يبيع الوحدة بسعر (٧٠) دينار فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س وحدة من هذة السلعة هي ك(س) = ٦٠٠٠٠ + ٥٠س + ٠٫٠٠٢٥س؟ فجد ① إقتران الإيراد الكلي ؟

② عدد الوحدات التي يجب إنتاجها حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟

⑦ وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرف النوم التي عددها س تقدر بالدينار

ك(س) = س٣ - ٣٠س٢ - ٨٠٠س + ٥٠٠

فإذا بيعت كل غرفة نوم بـ (٢٨٠٠) دينار فما الإنتاج الأسبوعي للشركة الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

⑧ يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (٩٠) دينار فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة

ك(س) = ٢٠٠ + ٧٠س + ٠,٠٢س٢

جد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن ؟

⑨ إذا كان د(س) = ١٦س - س^{٤} - ٢٠
و ك(س) = ٢س^{٤} - ٣٨س + ١٥
هما إيراد س من الوحدات لسلعة معينة وتكلفتها فجد
① إقتران الربح ؟
② قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

⑩ إذا كان ك(س) هو إقتران التكلفة الكلية لـ (س) من الوحدات من سلعة معينة ينتجها أحد المصانع حيث ك(س) = ٠.٠٠١س^{٣} + ٠.٢س^{٢} + ٢٠س + ١٠٠٠
وكان الإقتران للإيراد الكلي د(س) = ٣٨س
فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن ؟

(١١) إذا كان ك (س) هو اقتران التكلفة الكلية لـ (س) من الوحدات من سلعة ما التي ينتجها أحد المصانع حيث أن ك (س) = ٠,٠٢س٣ + ٦٠س + ٥٠٠ وكان اقتران الإيراد الكلي د(س) = ٨٦س فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن

(١٢) إذا كان ك (س) = ٦٠ + ٨س تمثل التكلفة الكلية د (س) = ٩٠ س - س٢ يمثل الإيراد الكلي ، فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن ؟

(١٣) إذا كان ع = (٧٨ - ٢١ س) تمثل معادلة السعر
ك (س) = س^{٣} - ٣٦ س^{٢} + ٦٠ س + ٢٠
تمثل التكلفة فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن ؟

(١٤) إذا كان ع = (٢٧ - ٣ س) تمثل معادلة السعر ك (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ١٥
إقتران التكلفة الكلية فجد عدد الوحدات اللازم انتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن ؟