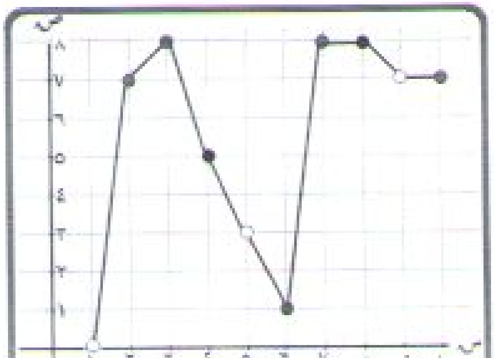
الرياضيات

العلمي والصناعي

المستوى الثالث

جميع أمثلة وتمارين الكتاب – في الوحدة الثانية –

التي تبدأ بـ : **أثبت أن** **مع الحل**



المعلم : **عبدالقادر الحسنات**

078 531 88 77

المعلم: عبدالقادر الحسنات 077 88 531 078

ورقة عمل **جميع مسائل** أثبت أن مع الحل

١) س٣/ أ / ص ٩٧ : إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق فاثبت أن $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق(س+هـ) − ق(س − هـ)}}{\text{هـ}}$ = ٢ قَ(س)

٢) س٣/ ب / ص ٩٧ : إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق فاثبت أن $\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع ق(س) − س ق(ع)}}{\text{ع − س}}$ = ق(س) − س قَ(س)

٣) س٣/ ج / ص ٩٧ : إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق فاثبت أن $\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^3\text{ ق(ع) − س}^3\text{ ق(س)}}{\text{ع − س}}$ = ٣ ق(س) + ٣ س قَ(س)

٤) س٥/ ص ٩٧ : إذا كان ق(س) = (س − أ) ل(س) حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، فبين باستخدام تعريف المشتقة أن قَ(أ) = ل(أ) ، حيث أ ثابت

---

٥) نظرية (١) / ص٩٨: إذا كان ق قابلاً للاشتقاق عند س = س_1 ، فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة

٦) قاعدة (١) / ص١٠٥: إذا كان ق(س)= جـ ، حيث جـ عدد ثابت ، فإن قَ(س) = صفراً لكل س ∈ ح

٧) قاعدة (٢) / ص١٠٦: إذا كان ق(س)= $\text{س}^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإن قَ(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-1}$

٨) قاعدة (٣) / ص١٠٧: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، جـ عدد ثابت وكان د(س) = جـ ق(س)، فإن :

الاقتران د(س) قابل للاشتقاق عند س ، وأن دَ(س) = جـ قَ(س)

٩) قاعدة (٤) / ص١٠٨: إذا كان كل من الاقترانين ل ، م قابلاً للاشتقاق عند س ، فإن كلاً من الاقترانين ق ، هـ حيث :

ق(س)= ل(س) + م(س) ، هـ(س) = ل(س) − م(س) قابل للاشتقاق عند س ، وأن :

قَ(س)= لَ(س) + مَ(س) ، هـَ(س) = لَ(س) - مَ(س)

١٠) نتيجة (١) / ص١١٤: إذا كان الاقتران م قابلاً للاشتقاق عند س ، أ عدد ثابت وكان : ق(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{م (س)}}$ ، م(س) ≠ ٠

فإن ق قابل للاشتقاق عند س وإن : قَ(س)= $\frac{\text{-أ مَ(س)}}{(\text{م (س)})^2}$

---

١١) نتيجة (٢) / ص١١٤: إذا كان ق(س)= $\text{س}^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح سالب ، فأثبت أن قَ(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-1}$

١٢) س ٦ / ص١٢٠: إذا كان ق(س)= ل(س) م(س) هـ(س) فاثبت أن

قَ(س)= لَ(س) م(س) هـ(س) + مَ(س) ل(س) هـ(س) +هـَ(س) ل(س) م(س)

١٣) س ٢ / ص١٢٣: إذا كان ق(س)= (٣س^2+٢)(س^3 − ٢س+١) فاثبت أن : قَ(١)× قً(١)= ٢١٠

١٤) قاعدة (١) / ص١٢٤: إذا كان ق(س)= جاس ، فاثبت أن : قَ(س) = جتاس

١٥) قاعدة (٢) / ص١٢٦: إذا كان ق(س)= جتاس ، فاثبت أن : قَ(س) = - جاس

١٦) <u>مثال (٤) / ص١٢٧</u>: إذا كان ق(س)= أ جاس + ب جتاس ، أ، ب ∈ ح ، فاثبت أن : ق″(س) + ق(س) = صفراً

١٧) <u>مثال (٥) / ص١٢٧</u>: إذا كان ق(س)= ظاس ، فاثبت أن : ق′(س) = قا^{2}س

١٨) <u>س ٣/ ص١٢٩</u>: أثبت أن : ص= جتاس ، ص= جاس حلولاً للمعادلة ص + ص″ = صفراً

١٩) <u>نتيجة / ص١٣٣</u>: إذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان ص =(هـ (س))^{ن} ، حيث ن عدد صحيح فاثبت أن :

دص/دس = ن (هـ (س))$^{ن-1}$ × هـ′(س)

٢٠) <u>مثال (٥) / ص١٣٣</u>: إذا كان ص= (ظاس + قاس)^{ن} ، حيث ن عدد صحيح موجب ، بين أن : دص/دس = ن ص قا س

---

٢١) <u>مثال (٨) / ص١٣٥</u>: إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان ص = جتا (هـ (س))، فاثبت أن :

دص/دس = − هـ′(س) جا (هـ (س))

٢٢) <u>س ٤/ ص١٣٧</u>: إذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س , وكان ص = جا^{ن} (هـ (س))، حيث ن عدد صحيح ، فاثبت أن :

دص/دس = ن جا$^{ن-1}$ (هـ (س))× جتا (هـ (س)) × هـ′(س)

٢٣) <u>س ٧/ ص١٣٧</u>: إذا كان ص= جتا (س + $\frac{\pi}{2}$) ، فاثبت أن :ص + ص″ = صفراً

٢٤) <u>س ٨/ ص١٣٧</u>: إذا كان ص= ظاس+ $\frac{1}{3}$ ظا^{3}س فبرهن أن : دص/دس = قا^{4}س

٢٥) <u>نظرية / ص١٤١</u>: إذا كان ص = س$^{م/ن}$ ، حيث م/ن عدد نسبي ، فإن دص/دس = م/ن س$^{م/ن - 1}$

---

٢٦) <u>نتيجة / ص١٤٣</u>: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان ص =(ق(س))^{ن} ، حيث ن عدد نسبي فاثبت أن :

دص/دس = ن (ق(س))$^{ن-1}$ ×ق′(س)

٢٧) <u>مثال (٥) / ص١٤٣</u>: إذا كان ص=$\sqrt{هـ(س)}$ وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س ، فاثبت أن : دص/دس = هـ′(س) / (٢ $\sqrt{هـ(س)}$)

٢٨) <u>مثال (٧) / ص١٤٤</u>: إذا كان س= ظا ص ، فاثبت أن : ص″(١+س^{2}) = - جا٢س

٢٩) <u>تدريب(٣) / ص١٤٥</u>: إذا كان س= جا ص ، س ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{2}$) ، فاثبت أن : دص/دس = ١ / $\sqrt{١-س^{2}}$

٣٠) <u>س ٦/ ص١٤٦</u>: إذا كان س = جا ص ، فاثبت أن : ص″ = ظا ص قا^{2} ص

---

٣١) <u>س ٨/ ص١٤٦</u>: إذا كان ص س = جا س ، فاثبت أن : س ص″ + ٢ص′ + س ص= صفراً

٣٢) <u>س ١/ ص١٤٧</u>: إذا كان ق(س) = ظاس ، فاثبت أن متوسط التغير للاقتران ق يساوي : قا^{2}س ظا هـ / هـ (١ − ظاس ظا هـ)

إذا تغيرت س من س إلى س + هـ

٣٣) <u>س٣ (أ) / ص١٤٧</u>: إذا علمت أن ص = س ظا س ، فاثبت أن : ص″ - ٢ص قا^{2} س = ٢قا^{2} س

٣٤) <u>س٣ (ب) / ص١٤٧</u>: إذا كان جتا ص = س ، |س| < ١ ، فاثبت أن : دص/دس = −١ / $\sqrt{١-س^{2}}$ ، ص ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{2}$)

٣٥) <u>س٤(ب) / ص١٥٠</u>: إذا كان ص =$\sqrt{٤+٣ جاس}$ ، فاثبت أن : ٢ص ص″ + ٢(ص′)^{2} + ص^{2} = ٤

المعلم عبدالقادر الحسنات ٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

① طرح وإضافة : $-\text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{-\left(\text{ق}(\text{س}+-\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})\right)}{\text{هـ}}$$

$$= \text{ق}'(\text{س}) + \lim_{\text{م}\to 0} \frac{-\left(\text{ق}(\text{س}+\text{م}) - \text{ق}(\text{س})\right)}{-\text{م}}$$

$$= \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س})$$

$$= 2\,\text{ق}'(\text{س})$$

② طرح وإضافة ع ق(ع)

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) + \text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}\left(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{ع})\right)}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$$

$$= -\text{س} \times \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})$$

$$= \text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$$

③ طرح وإضافة: $3\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - 3\text{ع}\,\text{ق}(\text{س})$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{3\text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) - 3\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) + 3\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - 3\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim \frac{3\text{ع}\left(\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})\right)}{\text{ع}-\text{س}} + \lim \frac{3\,\text{ق}(\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$$

$$= 3\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) + 3\,\text{ق}(\text{س})$$

④ $\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}}$

$$= \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\cancel{(\text{س}-\text{أ})}\,\text{ل}(\text{س}) - (\text{أ}-\text{أ})\,\text{ل}(\text{أ})}{\cancel{(\text{س}-\text{أ})}}$$

$$= \text{ل}(\text{أ})$$

⑤ $\text{ق}'(\text{س}_1)$ موجودة $\Leftarrow$ ق معرّفاً عند س_1

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) = \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}-\text{س}_1} \times (\text{س}-\text{س}_1)$$

نأخذ النهاية للطرفين

$$\lim \left(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)\right) = \lim \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}-\text{س}_1} \times \lim(\text{س}-\text{س}_1)$$

$$\lim \text{ق}(\text{س}) - \lim \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}'(\text{س}) \times (\text{س}_1-\text{س}_1)$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \text{ق}(\text{س}) - \lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to\text{س}_1} \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}(\text{س}_1)$$

النهاية = الصورة $\Leftarrow$ ق متصل عند س_1

⑥ $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$= \lim \frac{\text{جـ}-\text{جـ}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \text{صفر} = \text{صفر}$$

أو : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جـ}-\text{جـ}}{\text{ع}-\text{جـ}} = \text{صفر}$$

⑦ $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\left(\text{ع}^{\text{ن}-1}\text{س}^{0} + \text{ع}^{\text{ن}-2}\text{س}^{1} + \dots + \text{ع}^{1}\text{س}^{\text{ن}-2} + \text{س}^{\text{ن}-1}\right)}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{س} + \dots + \text{س}\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \text{س}^{\text{ن}-1}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1}$$

$$= \text{ن} \times \text{س}^{\text{ن}-1}$$

⑧ $\text{ك}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ك}(\text{ع}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$$= \lim \frac{\text{جـ}\,\text{ق}(\text{ع}) - \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim \frac{\text{جـ}\left(\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})\right)}{\text{ع}-\text{س}} = \text{جـ} \times \text{ق}'(\text{س})$$

⑨ (أ) $\text{هـ}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) + \text{م}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{ل}'(\text{س}) + \text{م}'(\text{س})$$

٩) ب) $\text{هـ}(س) = ل(س) - م٣(س)$

$\text{هـ}(س) = ل(س) + (-١)\,م٣(س)$

مشتقة مجموع اقترانين :

$\text{هـ}'(س) = ل'(س) + (-١)\,م'٣(س)$

$= ل'(س) - م'(س)$

أ) $\text{هـ}'(س) = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ل(ع) - م(ع) - ل(س) + م(س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} + \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{-م(ع) + م(س)}{ع - س}$

$= ل'(س) + \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{-(م(ع) - م(س))}{ع - س}$

$= ل'(س) - م'(س)$

١٠) نستخدم قاعدة قسمة اقترانين

$ق'(س) = \dfrac{(٠)(م(س)) - (م'(س)) \times ٩}{(م(س))^٢}$

$= \dfrac{-٩\,م'(س)}{(م(س))^٢}$

١١) نفرض أن $ن = -م$ ، م عدد صحيح موجب

$ق(س) = س^{ن} = س^{-م} = \dfrac{١}{س^{م}}$

$ق'(س) = \dfrac{(٠)(س^{م}) - م\,س^{م-١} \times ١}{(س^{م})^٢}$

$= \dfrac{-م\,س^{م-١}}{س^{٢م}} = -م\,س^{م-١-٢م}$

$= -م\,س^{-م-١} = -(-ن)\,س^{-(-ن)-١}$

$= ن\,س^{ن-١}$

١٢) $ق(س) = [ل(س)\,م(س)] \times \text{هـ}(س)$

$ق'(س) = [ل'(س)\,م(س) + م'(س)\,ل(س)]\,\text{هـ}(س)$

$+\ \text{هـ}'(س)\,[ل(س)\,م(س)]$

$= ل'(س)\,م(س)\,\text{هـ}(س)$

$+\ م'(س)\,ل(س)\,\text{هـ}(س)$

$+\ \text{هـ}'(س)\,ل(س)\,م(س)$

١٣) $ق'(س) = (٦س)(س^٣ - ٢س + ١) +$

$(٣س^٢ - ٢)(٣س^٢ + ٢)$

$= ٦س^٤ - ١٢س^٢ + ٦س + ٩س^٤ - ٤$

$= ١٥س^٤ - ١٢س^٢ + ٦س - ٤$

$ق'(١) = ١٥ - ١٢ + ٦ - ٤ = ٥$

$ق''(س) = ٦٠س^٣ - ٢٤س + ٦$

$ق''(١) = ٦٠ - ٢٤ + ٦ = ٤٢$

$ق'(١) \times ق''(١) = ٥ \times ٤٢ = ٢١٠$

١٤) $ق'(س) = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{جا ع - جا س}{ع - س} = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{٢ جتا \frac{ع+س}{٢}\ جا \frac{ع-س}{٢}}{ع - س} \Rightarrow \dfrac{١}{٢}$

$= ٢ جتا \dfrac{س+س}{٢} \times \dfrac{١}{٢} = جتا \dfrac{٢س}{٢} = جتا س$

١٥) $ق'(س) = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{جتا ع - جتا س}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{-٢ جا \frac{ع+س}{٢}\ جا \frac{ع-س}{٢}}{ع - س} \Rightarrow \dfrac{١}{٢}$

$= -٢ جا \dfrac{س+س}{٢} \times \dfrac{١}{٢} = -جا \dfrac{٢س}{٢} = -جا س$

١٦) $ق'(س) = ٩ جتا س - ب جا س$

$ق''(س) = -٩ جا س - ب جتا س$

$ق'' + ق = \cancel{-٩ جا س} - \cancel{ب جتا س} + \cancel{٩ جا س} + \cancel{ب جتا س}$

$=$ صفر

١٧) $ق(س) = ظا س = \dfrac{جا س}{جتا س}$

$ق'(س) = \dfrac{جتا س\ جتا س - (-جا س)\ جا س}{جتا^٢ س} = \dfrac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س}$

$= \left(\dfrac{١}{جتا س}\right)^٢ = قا^٢ س$

١٨) $ص' = -جا س$ ، $ص'' = -جتا س$

$ص = جتا س$ ؛ $جتا س + -جتا س = ٠$ ✓

$ص = جا س$:

$ص' = جتا س$ ، $ص'' = -جا س$

$ص + ص'' = جا س + -جا س = ٠$ ✓

١٩) نفرض أن ع = هـ(س)

$\frac{دع}{دس} = هـَ(س)$

ص = $ع^{ن}$ ⟸ $\frac{دص}{دع} = ن\, ع^{ن-١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

= $ن \times ع^{ن-١} \times هـَ(س)$

= $ن\,(هـ(س))^{ن-١} \times هـَ(س)$

٢٠) $\frac{دص}{دس} = ن\,(ظاس + قاس)^{ن-١}$

$\times (قا^{٢}س + قاس\, ظاس)$

= $ن\,(ظاس + قاس)^{ن-١} \times$

$(قاس)\,(قاس + ظاس)$

= $ن\,(ظاس + قاس)^{ن-١+١} \times قاس$

= $ن\,(ظاس + قاس)^{ن} \times قاس$

= ن ص × قاس .

٢١) نفرض أن ع = هـ(س) ، ص = جتاع

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

= −جاع × هـَ(س)

= −جا(هـ(س)) × هـَ(س)

٢٢) نفرض أن ع = جا(هـ(س))

$ع^{ن} = (جا(هـ(س)))^{ن}$

$ع^{ن}$ = ص

نفرض أن م = هـ(س) ⟸ ع = جام

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دم} \times \frac{دم}{دس}$

= $ن\, ع^{ن-١} \times جتام \times هـَ(س)$

= $ن\,(جا\,هـ(س))^{ن-١} \times جتا\,هـ(س) \times هـَ(س)$

٢٣) صَ = $-جا(س + \frac{\pi}{٢})$

صً = $-جتا(س + \frac{\pi}{٢})$

ص + صً = $جتا(س + \frac{\pi}{٢}) + -جتا(س + \frac{\pi}{٢})$

= صفر

٢٤) $\frac{دص}{دس} = قا^{٢}س + \frac{١}{٣} \times ٣ \times ظا^{٢}س \times قا^{٢}س$

= $قا^{٢}س + ظا^{٢}س\, قا^{٢}س$

= $قا^{٢}س\,(١ + ظا^{٢}س)$

= $قا^{٢}س \times قا^{٢}س$

= $قا^{٤}س$.

٢٥) ص = $س^{\frac{م}{ن}}$ بالرفع إلى القوة (ن)

$ص^{ن} = (س^{\frac{م}{ن}})^{ن}$

$ص^{ن} = س^{م}$

نشتق : $ن\, ص^{ن-١} \times \frac{دص}{دس} = م\, س^{م-١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{م\, س^{م-١}}{ن\, ص^{ن-١}} = \frac{م\, س^{م-١}}{ن\,(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}}$

= $\frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{\frac{م}{ن} \times ن - \frac{م}{ن}}} = \frac{م}{ن}\, \frac{س^{م-١}}{س^{م-\frac{م}{ن}}}$

= $\frac{م}{ن}\, س^{م-١-م+\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن}\, س^{\frac{م}{ن}-١}$

٢٦) نفرض أن ع = جا(س) ⟸ ص = $ع^{ن}$

$\frac{دص}{دس} = ن\, ع^{ن-١} \times جتا(س)$

= $ن\,(جا(س))^{ن-١} \times جتا(س)$

٢٧) ص = $\sqrt{هـ(س)} = (هـ(س))^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}\,(هـ(س))^{-\frac{١}{٢}} \times هـَ(س)$

= $\frac{١}{٢} \times \frac{هـَ(س)}{(هـ(س))^{\frac{١}{٢}}}$

= $\frac{هـَ(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$

٢٨) س = ظاص ⟸ ١ = $قا^{٢}ص$. صَ

∴ صَ = $جتا^{٢}ص$

صً = $-٢\, جتاص\, جاص \times صَ = -جا٢ص\, جتا^{٢}ص$

$صً(١+س^{٢}) = -جا٢ص \times جتا^{٢}ص\,(١+س^{٢})$

= $-جا٢ص\, جتا^{٢}ص\,(١+ظا^{٢}ص)$

= $-جا٢ص\, جتا^{٢}ص \times قا^{٢}ص$

= $-جا٢ص\, \cancel{جتا^{٢}ص} \times \frac{١}{\cancel{جتا^{٢}ص}}$

= −جا٢ص

٢٩) س = جا ص

١ = جتا ص × دص/دس ⇐ دص/دس = ١/جتا ص

س = جا ص ⇐ س^{2} = جا^{2} ص

= ١ − جتا^{2} ص

⇐ جتا^{2} ص = ١ − س^{2}

√جتا^{2} ص = √(١ − س^{2})

جتا ص = √(١ − س^{2})

⇐ دص/دس = ١/√(١ − س^{2})

٣٠) س = جا ص ⇐ ١ = جتا ص . ص′

⇐ ص′ = ١/جتا ص = قا ص

ص″ = قا ص ظا ص × ص′

= قا ص ظا ص × قا ص

= قا^{2} ص ظا ص

٣١) ص س = جا س

ص′ س + ص = جتا س

ص″ س + ص′ + ص′ = − جا س

ص″ س + ٢ ص′ + جا س = ٠

ص″ س + ٢ ص′ + ص س = ٠

٣٢) م.ت = (ق(س+هـ) − ق(س))/هـ

= (ظا(س+هـ) − ظا س)/هـ

= ((ظا س + ظا هـ)/(١ − ظا س ظا هـ) − ظا س)/هـ

= (~~ظا س~~ + ظا هـ − ~~ظا س~~ + ظا^{2} س ظا هـ)/((١ − ظا س ظا هـ) هـ)

= ظا هـ (١ + ظا^{2} س)/(هـ (١ − ظا س ظا هـ))

= ظا هـ (قا^{2} س)/(هـ (١ − ظا س ظا هـ))

٣٣) ص′ = ١ × ظا س + قا^{2} س × س

= ظا س + س قا^{2} س

ص″ = قا^{2} س + ١ × قا^{2} س +

٢ قا س × قا س ظا س × س

= ٢ قا^{2} س + ٢ قا^{2} س × س ظا س

(س ظا س = ص)

ص″ = ٢ قا^{2} س + ٢ قا^{2} س × ص

ص″ − ٢ ص قا^{2} س = ٢ قا^{2} س

٣٤) جتا ص = س ⇐ − جا ص . ص′ = ١

دص/دس = −١/جا ص

لكن س = جتا ص

س^{2} = جتا^{2} ص

س^{2} = ١ − جا^{2} ص

⇐ جا^{2} ص = ١ − س^{2}

جا ص = √(١ − س^{2})

⇐ دص/دس = −١/√(١ − س^{2})

٣٥) ص = √(٤ + ٣ جا س)

ص^{2} = ٤ + ٣ جا س

٢ ص ص′ = ٠ + ٣ جتا س

٢ ص′ ص′ + ٢ ص ص″ = − ٣ جا س

٢ (ص′)^{2} + ٢ ص ص″ = − ٣ جا س

٢ (ص′)^{2} + ٢ ص ص″ + ٣ جا س = ٠

٢ (ص′)^{2} + ٢ ص ص″ + ٣ جا س + ٤ = ٤

(٣ جا س + ٤ = ص^{2})

٢ (ص′)^{2} + ٢ ص ص″ + ص^{2} = ٤