الاتصال عند نقطة

Esam shikh
0796300625

رياضيات (العلمي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (الاتصال عند نقطة) ماجستير رياضيات

تعميم :

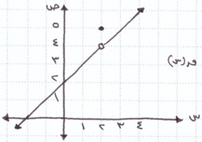
يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ إذا حقق الشروط الآتية

١) ق معرف عند س = أ
أي أن ق(أ) عدد حقيقي

٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

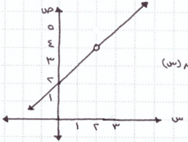
مثال



ق(س) غير متصل عند س=٢
(النهاية ≠ الصورة)

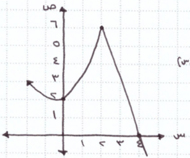
* معرفة اتصال الاقتران من الرسم .

مثال



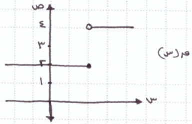
ق غير متصل عند س = ٢ (ق(س) غير معرف عند س=٢)

مثال



ع(س) متصل عند س =٢

مثال

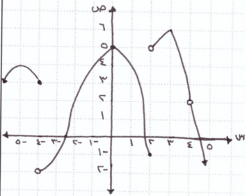


ق غير متصل عند س =٢ (النهاية غير موجودة)

رياضيات (العلمي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (الاتصال عند نقطة) ماجستير رياضيات

مثال



معتمداً الشكل ما قيم س التي يكون عندها هـ اقتراناً غير متصل مع ذكر السبب

الحل :

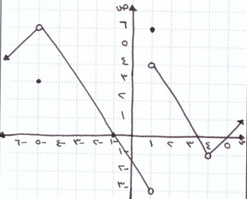
س = -٤ (النهاية غير موجودة)

س = ٢ (النهاية غير موجودة)

س = ٤ (الاقتران غير معرف عند ٤)

أي لا يوجد صورة عند س=٤

مثال



معتمداً الشكل ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب

الحل :

س = -٥ (النهاية ≠ الصورة)

س = ١ (النهاية غير موجودة)

س = ٤ (الاقتران غير معرف عند ٤)

Esam shikh
0796300625

* بحث الاتصال عند نقطة :

مثال

ابحث في اتصال الاقتران

$ق(س) = \frac{١ - س^٢}{س - ١}$ عند $س = ١$

الحل:

$ق(١) = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معرفه

⟸ ق(س) غير معرف عند س = ١

⟸ ق(س) غير متصل عند س = ١

مثال

ابحث في اتصال الاقتران

$هـ(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الحل:

$هـ(٢) = \frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معرفه

⟸ هـ(س) غير معرف عند س = ٢

⟸ هـ(س) غير متصل عند س = ٢

مثال

إذا كان
$$ك(س) = \begin{cases} س + ٦ & س \le -٢ \\ س - ٢ & -٢ < س < ٢ \\ ٢س - ١ & س \ge ٢ \end{cases}$$

ابحث اتصال الاقتران ك عند س = ٢

الحل:

$ك(٢) = ٢ \times ٢ - ١ = ٤ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ك(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} ك(س) = ٢ - ٢ =$ صفر

⟸ $\lim_{س \to ٢} ك(س)$ غير موجودة

⟸ ك(س) غير متصل عند س = ٢

مثال

إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} ٣س + ٥ & س \in ص \\ ٢س^٢ - ٤ & س \notin ص \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

الحل:

$ق(٣) = ٣ \times ٣ + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢ \times ٩ - ٤$
$= ١٨ - ٤ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$

⟸ ق متصل عند س = ٣

مثال

إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{٢ - س} & س < ٢ \\ س - ٦ & س \ge ٢ \end{cases}$$

ابحث اتصال الاقتران ق عند س = ٢

الحل:

$ق(٢) = ٢ - ٦ = -٤$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٢ - ٦ = -٤$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٤}{٢ - س}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{(\cancel{س - ٢})(س + ٢)}{(\cancel{٢ - س})} = -(٢ + ٢) = -٤$ ‏(-١)

⟸ $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٤$

Esam shikh
0796300625

نهـا $ق(س)$ = $ق(٢)$ عندما $س \leftarrow ٢$

⇐ ق متصل عند س = ٢

مثال ٢٠١٣+ شتوي

إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٥س - ١ & س = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = ١

الحل :

$ل(١) = ٥ \times ١ - ١ = ٥ - ١ = ٤$

$\lim_{س \leftarrow ١} ل(س) = \lim_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١}$

$= \lim_{س \leftarrow ١} \dfrac{(س^٢ + ٢س + ٤)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{(س - ١)}}$

$= ١ + ٢ + ٤ = ٧$

$\lim_{س \leftarrow ١} ل(س) \neq ل(١)$

⇐ ل غير متصل عند س = ١

مثال

إذا كان $ق(س) = \dfrac{|س - ٤|}{س + ٤}$ ، $س \neq -٤$

ابحث اتصال ق عند س = ٤

الحل :

$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س - ٤}{س + ٤} & س \geq ٤ \\ -\dfrac{س + ٤}{س + ٤} & س < ٤ \end{cases}$

$ق(٤) = \dfrac{٤ - ٤}{٤ + ٤} = \dfrac{٠}{٨} = صفر$

$\lim_{س \leftarrow ٤^+} ق(س) = صفر$

$\lim_{س \leftarrow ٤^-} ق(س) = \dfrac{-٤ + ٤}{٤ + ٤} = \dfrac{٠}{٨} = صفر$

⇐ $\lim_{س \leftarrow ٤} ق(س) = صفر$

$\lim_{س \leftarrow ٤} ق(س) = ق(٤)$

⇐ ق(س) متصل عند س = ٤

مثال

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س| - ٢}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٥ & س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق عند س = ٢

الحل :

$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س - ٢}{س - ٢} & س > ٠ ، س \neq ٢ \\ \dfrac{-س - ٢}{س - ٢} & س < ٠ \\ ٥ & س = ٢ \end{cases}$

$ق(٢) = ٥$

$\lim_{س \leftarrow ٢^+} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^+} \dfrac{\cancel{س - ٢}}{\cancel{س - ٢}} = ١$

$\lim_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^-} \dfrac{٢ - س}{س - ٢} = -١$

⇐ نهـا ق(س) عندما $س \leftarrow ٢$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٢

مثال

إذا كان ل(س) = { √(س − ٣) ، س > ٣ ؛ |س² − ٩| ، س ≤ ٣ }

فابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٣

الحل:

ل(س) = { √(س − ٣) ، س > ٣ ؛ ٩ − س² ، −٣ ≤ س ≤ ٣ ؛ س² − ٩ ، س < −٣ }

ل(٣) = ٩ − ٩ = صفر

نها (س ← ٣⁺) ل(س) = نها (س ← ٣⁺) √(س − ٣) = صفر

نها (س ← ٣⁻) ل(س) = نها (س ← ٣⁻) س² − ٩ = ٩ − ٩ = صفر

نها (س ← ٣) ل(س) = صفر

نها (س ← ٣) ل(س) = ل(٣)

⟸ ل متصل عند س = ٣

مثال

إذا كان هـ(س) = [٠,٥ س − ٤]

ابحث اتصال هـ عند س = ٧

الحل:

هـ(س) = { −١ ، ٦ ≤ س < ٨ }

هـ(٧) = −١

نها (س ← ٧) هـ(س) = −١

نها (س ← ٧) هـ(س) = هـ(٧)

⟸ هـ متصل عند س = ٧

مثال

إذا كان هـ(س) = [٤س − ٤]

فابحث في اتصال الاقتران هـ عند س = ١,٢٥

الحل:

ق(س) = { ٠ ، ١ ≤ س < ١,٢٥ ؛ ١ ، ١,٢٥ ≤ س < ١,٥ }

هـ(١,٢٥) = ١

نها (س ← ١,٢٥⁺) هـ(س) = ١

نها (س ← ١,٢٥⁻) هـ(س) = صفر

نها (س ← ١,٢٥) هـ(س) غير موجودة

⟸ هـ غير متصل عند س = ١,٢٥

مثال

إذا كان

ق(س) = { س² + س ، س < ٢ ؛ [س + ٤] ، س = ٢ ؛ √(س² + ٥) + ٦/س ، س > ٢ }

فابحث في اتصال الاقتران هـ عند س = ٢

الحل:

هـ(س) = { س² + س ، س < ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ ؛ √(س² + ٥) + ٦/س ، س > ٢ }

هـ(٢) = ٦

نها (س ← ٢^-) ق(س) = $٢^٢$ + ٢ = ٤ + ٢ = ٦

نها (س ← ٢^+) ق(س) = $\sqrt{٤+٥}$ + $\frac{٦}{٢}$

= $\sqrt{٩}$ + ٣ = ٣ + ٣ = ٦

نها (س ← ٢) ق(س) = ٦

نها (س ← ٢) ق(س) = ق(٢)

⇐ ق متصل عند س = ٢

مثال

إذا كان ق(س) = [س] فما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق اقتران غير متصل

الحل:

س ∈ ص حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

لأن نها (س ← ص) ق(س) غير موجودة

مثال

اقترح قاعدة لاقترانَي أكبر عدد صحيح بحيث يكون متصلاً عند س = ١ وغير متصل عند س = ٢

الحل:

ق(س) = [$\frac{س}{٢}$ + ١]

هـ(س) = [$\frac{س}{٢}$]

مثال

إذا كان ق(س) = { $\frac{|ظاس|}{س}$ ، س < ٠ ؛ ١ − جتاس ، س ≥ ٠ }

ابحث اتصال الاقتران ق عند س = ٠

الحل:

ق(س) = { $\frac{-ظاس}{س}$ ، س < ٠ ؛ ١ − جتاس ، س ≥ ٠ }

ق(٠) = ١ − جتا(٠) = ١ − ١ = صفر

نها (س ← ٠^+) ق(س) = صفر

نها (س ← ٠^-) ق(س) = نها (س ← ٠^-) $\frac{-ظاس}{س}$ = −١

⇐ نها (س ← ٠) ق(س) غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = صفر

٢٠١٣ صيفي

إذا كان ق(س) = { $س^٢$ + ١ ، س ≤ ٢ ؛ [س + ٣] ، س > ٢ }

فابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل:

ق(س) = { $س^٢$ + ١ ، س ≤ ٢ ؛ ٥ ، ٢ < س < ٣ }

ق(٢) = $٢^٢$ + ١ = ٤ + ١ = ٥

نها (س ← ٢^-) ق(س) = ٥

نها (س ← ٢^+) ق(س) = ٥

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٥

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢)

⇐ ق متصل عند س = ٢

٢٠١٤ صيفي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \left|\frac{س}{٢} - ١\right| & -١ \le س < ٣ \\ [\frac{١}{٢}س + ٣] & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٣

الحل:

ق(س) = $\begin{cases} ١ - \frac{س}{٢} & -١ \le س < ٢ \\ \frac{س}{٢} - ١ & ٢ \le س < ٣ \\ ٤ & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

ق(٣) = ٤

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٤

$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = $\frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجودة

ق غير متصل عند س = ٣

٢٠١٥ شتوي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س + ٢ & ٠ \le س < ٢ \\ ١٠ & س = ٢ \\ \frac{(٢س+١)^٢ - ٢٥}{س - ٢} & ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

فابحث في اتّصال ق عند س = ٢

الحل:

ق(٢) = ١٠

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٤ × ٢ + ٢ = ٨ + ٢ = ١٠

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س+١+٥)(٢س+١-٥)}{س-٢}$

= $\lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س+٦)(٢س-٤)}{س-٢}$

= $\lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س+٦)(٢)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}}$

= (٢ × ٢ + ٦) (٢)

= ١٠ × ٢ = ٢٠

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٢

٢٠١٦ شتوي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}} & -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & \frac{١}{٣} < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) عند س = $\frac{١}{٣}$

الحل:

ق(س) = $\begin{cases} \frac{٩س^٢ - ١}{١ - ٣س} & -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & س = \frac{١}{٣} \\ -٦س & \frac{١}{٣} < س < ١ \\ -٦س - ١ & ١ < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

$\text{ق}(\frac{1}{3}) = -2$

$\lim\limits_{\text{س}\to\frac{1}{3}^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to\frac{1}{3}^-} \frac{9\text{س}^2 - 1}{1 - 3\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\frac{1}{3}^-} \frac{(3\text{س}-1)(3\text{س}+1)}{(1-3\text{س})}$

$= -(3 \times \frac{1}{3} + 1)$

$= -(1+1) = -2$

$\lim\limits_{\text{س}\to\frac{1}{3}^+} \text{ق(س)} = -6 \times \frac{1}{3} = -2$

$\lim\limits_{\text{س}\to\frac{1}{3}} \text{ق(س)} = -2$

$\lim\limits_{\text{س}\to\frac{1}{3}} \text{ق(س)} = \text{ق}(\frac{1}{3})$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $\text{س} = \frac{1}{3}$

٢٠١٦ صيفي

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{(5-\text{س}^2) - [2\text{س}+3]}{1-\text{س}} & 0 < \text{س} < 1 \\ 2\text{س} - |1-\text{س}^2| & 1 \le \text{س} < 2 \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) عند س = ١

الحل:

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{5-\text{س}^2-3}{1-\text{س}} & 0 \le \text{س} < \frac{1}{2} \\ \frac{5-\text{س}^2-4}{1-\text{س}} & \frac{1}{2} \le \text{س} < 1 \\ 2\text{س} - (\text{س}^2-1) & 1 \le \text{س} < 2 \end{cases}$

$\text{ق}(1) = 2 - (1-1) = 2$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^+} \text{ق(س)} = 2$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to 1^-} \frac{1-\text{س}^2}{1-\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1^-} \frac{(1+\text{س})\cancel{(1-\text{س})}}{\cancel{(1-\text{س})}}$

$= 1+1 = 2$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ق(س)} = 2$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{ق(س)} = \text{ق}(1)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $\text{س} = 1$

٢٠١٧ شتوي

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} (\text{س}-3)^2 & \text{س} \ge 4 \\ \frac{|[\text{س}] - \text{س}| + [\text{س}-4]}{\text{س}-4} & \text{س} < 4 \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) عند س = ٤

الحل:

$\text{ق(س)} = \begin{cases} (\text{س}-3)^2 & \text{س} \ge 4 \\ \frac{\text{س}-4}{\text{س}-4} & 3 < \text{س} < 4 \end{cases}$

$\text{ق}(4) = (4-3)^2 = 1$

$\lim\limits_{\text{س}\to 4^+} \text{ق(س)} = 1$

$\lim\limits_{\text{س}\to 4^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to 4^-} \frac{\text{س}-4}{\text{س}-4} = 1$

$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \text{ق(س)} = 1$

$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٤)

⟸ ق متصل عند س = ٤

٢٠١٧ صيفي

إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \left|\dfrac{١}{\text{س}-٤}\right| - \dfrac{١}{٣} & ٠ < \text{س} < ١ \\ \dfrac{[\frac{١}{٢}\text{س} + ١]}{-٩\text{س}} & ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س) عند س = ١

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{١}{٤-\text{س}} - \dfrac{١}{٣} & ٠ < \text{س} < ١ \\ \dfrac{١}{-٩\text{س}} & ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

ق(١) = $\dfrac{١}{-٩}$

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\dfrac{-١}{٩}$

$\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\dfrac{١}{٣} - \dfrac{١}{٣}$ = صفر

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة

ق(س) غير متصل عند س = ١

٢٠١٨ شتوي قديم

إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\sqrt{\text{س}^٢}}{٢\text{س}} & \text{س} < \text{صفر} \\ \dfrac{[\text{س}+٣] - ١}{٢\text{س} - ٤} & \text{س} \ge \text{صفر} \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س) عند س = صفر

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(-\text{س})}{٢\text{س}} & \text{س} < \text{صفر} \\ \dfrac{٣ - ١}{٢\text{س} - ٤} & \text{س} \ge \text{صفر} \end{cases}$$

ق(٠) = $\dfrac{٢}{-٤}$ = $\dfrac{-١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\dfrac{-١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{\text{جا}-\text{س}}{٢\text{س}}$ = $\dfrac{-١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\dfrac{-١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٠)

⟸ ق متصل عند س = صفر .

٢٠١٨ صيفي جديد

ابحث في اتصال الاقتران

ق(س) = $(\text{س}-٢)^٣[\frac{١}{٢}\text{س}+٣]$

عند س = ٢

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} (\text{س}-٢)^٣ \times ٣ & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ (\text{س}-٢)^٢ \times ٤ & ٢ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

ق(٢) = $(٢-٢)^٢ \times ٤$ = صفر

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = صفر

$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $(٢-٢)^٣ \times ٣$ = صفر

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = صفر

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $\text{س} = ٢$

$\Leftarrow$ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند $\text{س} = ١$

٢٠١٨ شتوي جديد

إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢\text{س} - ١| - \frac{٣}{٢} & -١ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ \dfrac{[\text{س}] - \text{س}}{\text{ظا}(\text{س}^{٢} - ١)} & ١ < \text{س} < \frac{٣}{٢} \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س) عند $\text{س} = ١$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ - ٢\text{س} - \frac{٣}{٢} & -١ \leqslant \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٢\text{س} - ١ - \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ \dfrac{١ - \text{س}}{\text{ظا}(\text{س}^{٢} - ١)} & ١ < \text{س} < ٢ \\ \dfrac{٢ - \text{س}}{\text{ظا}(\text{س}^{٢} - ١)} & ٢ \leqslant \text{س} \leqslant \frac{٣}{٢} \end{cases}$$

$\text{ق}(١) = ٢ - ١ - \frac{١}{٢} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}\ \dfrac{(١ - \text{س})}{\text{ظا}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}\ \dfrac{-(\text{س} - ١)}{\text{ظا}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} \ \dfrac{(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}\ \dfrac{-(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{\text{ظا}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} \times \dfrac{١}{\text{س} + ١}$

$= -١ \times \frac{١}{٢} = \frac{-١}{٢}$

ملاحظة:

ق(س) متصل عند س = أ ⟸

$$ق(أ) = \underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}} ق(س) = \underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}} ق(س)$$

$$= \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} ق(س)$$

٢٠٠٩ شتوي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س=٣
وكان ٢ق(٣) = -١ فإن

$$\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}} ق(س) =$$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) -١ $\boxed{\text{ج) } \frac{-١}{٢}}$ د) ١

الحل:

ق متصل عند ٣ ⟸

$$ق(٣) = \underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}} ق(س)$$

$$\frac{-١}{٢} = \underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}} ق(س)$$

٢٠١١ صيفي

إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س = ١
وكان ق(١) = ٤ فجد

$$\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \left(\frac{|س-١|}{س-١} + \sqrt{ق(س)} \right)$$

$\boxed{\text{أ) } ٣}$ ب) ١ ج) ٥ د) غير موجودة

الحل:

ق متصل عند س = ١

$$ق(١) = ٤ = \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} ق(س)$$

⟸

$$\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \left(\frac{س-١}{س-١} + \sqrt{ق(س)} \right)$$

$$= \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{س-١}{س-١} + \sqrt{\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} ق(س)}$$

$$= ١ + \sqrt{٤}$$

$$= ١ + ٢ = ٣$$

* ايجاد الثوابت مع الاتصال

ملاحظة (تذكير)

ق(س) متصل عند س = أ

⟸

$$\text{ق}(\text{أ}) = \lim_{\text{س}\to \text{أ}^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to \text{أ}^-} \text{ق}(\text{س})$$

$$= \lim_{\text{س}\to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$$

مثال

إذا كان
$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{ب} & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ |\text{س}| - ٥ & ٢ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$$

جد قيمة ب التي تجعل ب متصل عند س = ٢

الحل:

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{ب} & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٥ & ٢ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$$

ليكون ل متصل عند س = ٢ ⟸

$$\lim_{\text{س}\to ٢^-} \text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(٢)$$

$$٤ + \text{ب} = ٢ - ٥$$

$$٤ + \text{ب} = -٣$$

$$\text{ب} = -٣ - ٤ = -٧$$

مثال ٢٠١٠ + شتوي

إذا كان
$$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^2 & ٠ < \text{س} \le ٢ \\ [\text{س}] + ٣ & ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

متصل عند س = ٢ فجد قيمة أ

الحل:

$$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^2 & ٠ < \text{س} \le ٢ \\ ٥ & ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

ع(س) متصل عند س = ٢ ⟸

$$\text{ع}(٢) = \lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{ع}(\text{س})$$

$$\frac{\text{أ}}{٢} + ٤ = ٥$$

$$\frac{\text{أ}}{٢} = ١ \Leftarrow \text{أ} = ٢$$

٢٠٠٨ صيفي

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س}] + \text{ب} & ١ \le \text{س} < ٢ \\ \frac{١٠}{\text{س}} & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

فجد قيمة الثابتة ب التي تجعل ق متصل عند س = ٢

أ) −١ ب) −٤ ج) ٣ $\boxed{\text{د) } ٤}$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ + \text{ب} & ١ \le \text{س} < ٢ \\ \frac{١٠}{\text{س}} & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

ق متصل عند ٢ ⟸

$$\lim_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{ق}(\text{س})$$

$$١ + \text{ب} = \frac{١٠}{٢}$$

$$١ + \text{ب} = ٥$$

$$\text{ب} = ٤$$

مثال

إذا كان ق(س) = { أس³ − ب س + ١ ، س < ١
  ٥ ، س = ١
  س² − (أ+ب)س + ٢ ، س > ١ }

متصلاً عند س = ١ فجد قيمة أ ، ب .

الحل :

بما أن ق متصل عند س = ١ ⟸

ق(١) = نهـا (س ← ١⁻) ق(س)

٥ = أ − ب + ١

⟸ أ − ب = ٤ ~~~ (١)

ق(١) = نهـا (س ← ١⁺) ق(س)

٥ = ١ − (أ + ب) + ٢

٢ = −أ − ب ~~~ (٢)

الآن

أ − ب = ٤

+ −أ − ب = ٢

−٢ب = ٦ ⟸ ب = −٣

أ − (−٣) = ٤

أ + ٣ = ٤ ⟸ أ = ١

---

٦ = ٩أ + ب ~~~ (١)

ق(٣) = نهـا (س ← ٣⁺) ق(س)

٦ = ٣أ − ٢ب ~~~ (٢)

⟸

٩أ + ب = ٦ ×٢

٣أ − ٢ب = ٦

١٨أ + ٢ب = ١٢

+ ٣أ − ٢ب = ٦

٢١أ = ١٨

⟸ أ = ١٨/٢١ = ٦/٧

الآن

٩ × ٦/٧ + ب = ٦ ×٧

٩ × ٦ + ٧ب = ٤٢

٥٤ + ٧ب = ٤٢

٧ب = ٤٢ − ٥٤

٧ب = −١٢

⟸ ب = −١٢/٧

مثال

إذا كان ق(س) = { أس² + ب ، س < ٣
  ٦ ، س = ٣
  أس − ٢ب ، س > ٣ }

متصلاً عند س = ٣ فجد قيمة أ ، ب

الحل :

∵ ق متصل عند س = ٣ ⟸

ق(٣) = نهـا (س ← ٣⁻) ق(س)

٢٠٠٩ صيفي

إذا كان ق اقترانًا متصلاً عند س = ٤ وكان ٣ق(٤) = ٦ وكانت نهـا (س ← ٤⁺) ق(س) = ٤ب فإن قيمة الثابت ب =

أ) ٣/٤ ب) ٢ ج) ١/٢ د) −٢

الحل :

ق(٤) = نهـا (س ← ٤⁺) ق(س)

٢ = ٤ب ⟸ ب = ١/٢

٢٠١٢ شتوي

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٢\,جتا^2 س & س \leq \frac{\pi}{٢} \\ أس^2 + \pi^2 & س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

فإن قيمة أ التي تجعل ق متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي

أ) -٢ ب) صفر $\boxed{\text{ج) -٤}}$ د) ٤

الحل:

ق متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^-} ق(س) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^+} ق(س)$$

$$٢\,جتا^2 \frac{\pi}{٢} = أ\left(\frac{\pi}{٢}\right)^2 + \pi^2$$

$$صفر = \frac{أ\pi^2}{٤} + \pi^2$$

$$-\pi^2 = \frac{أ\pi^2}{٤}$$

$$-١ = \frac{أ}{٤} \Leftarrow أ = -٤$$

٢٠١٥ صيفي

إذا كان

$$ل(س) = \begin{cases} \dfrac{جا^2(ب س) - ٩س^2}{س\,جا ٥س} & -\frac{\pi}{٢} \leq س < ٠ \\ ١١ & س = ٠ \\ \dfrac{س^2 + (٢-أ)س}{أ\,س} & ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

اقتراناً متصلاً عند س = ٠ ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل:

ق متصل عند س = ٠ ⇐

$$ق(٠) = \lim_{س \to ٠^-} ق(س)$$

$$١١ = \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا^2 ب س - ٩س^2}{س\,جا ٥س}$$

$$١١ = \lim_{س \to ٠^-} \left(\frac{جا ب س\,جا ب س}{س\,جا ٥س} - \frac{٩س \times س}{س\,جا ٥س} \right)$$

$$١١ = ب \times \frac{ب}{٥} - ٩ \times \frac{١}{٥}$$

$$١١ = \frac{ب^2 - ٩}{٥}$$

$$٥٥ = ب^2 - ٩$$

$$٦٤ = ب^2 \Leftarrow ب = \pm ٨$$

$$ق(٠) = \lim_{س \to ٠^+} ق(س)$$

$$١١ = \lim_{س \to ٠^+} \frac{\cancel{س}(س + ٢ - أ)}{أ\,\cancel{س}}$$

$$١١ = \frac{٢ - أ}{أ}$$

$$١١أ = ٢ - أ$$

$$١٢أ = ٢ \Leftarrow أ = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (النهايات والاتصال)	عصام محمد الشيخ
الفصل (١) العنوان (الاتصال عند نقطة)	ماجستير رياضيات

* نظريات الاتصال

إذا كان هـ ، ل متصلين عند س = أ فإن

١) هـ + ل متصل عند س = أ

٢) هـ − ل متصل عند س = أ

٣) هـ × ل متصل عند س = أ

٤) $\frac{\text{هـ}}{\text{ل}}$ متصل عند س = أ حيث ل(أ) ≠ ٠

نظرية :

إذا كان هـ متصل عند س = أ

هـ(س) ≥ صفر في فترة مفتوحة تحوي أ فإن الاقتران

ق(س) = $\sqrt{\text{هـ(س)}}$ متصل عند س = أ

مثال

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ & \text{س} < ٢ \\ \text{س} + ٦ & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

ع(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} - ٢ & \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال (هـ + ع) عند س = ٢

الحل:

ل(س) = هـ(س) + ع(س)

ل(س) = $\begin{cases} (\text{س}^{٢}+٤)+(\text{س}^{٣}-٢) & \text{س} < ٢ \\ (\text{س}+٦)+(٣\text{س}) & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

ل(٢) = (٢ + ٦) + (٣ × ٢) = ٨ + ٦ = ١٤

نها$_{\text{س} \to ٢^{+}}$ ل(س) = ١٤

نها$_{\text{س} \to ٢^{-}}$ ل(س) = (٢² + ٤) + (٢³ − ٢)

= (٤ + ٤) + (٨ − ٢)

= ٨ + ٦ = ١٤

⇐ نها$_{\text{س} \to ٢}$ ل(س) = ١٤

نها$_{\text{س} \to ٢}$ ل(س) = ل(٢)

⇐ ل(س) متصل عند س = ٢

مثال ٢٠١٤ + شتوي

إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ١ + ٢\text{س} & \text{س} < ١ \\ ٣\text{س}^{٢} & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

ع(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{س} < ١ \\ |\text{س}| & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

ابحث اتصال هـ × ل عند س = ١

الحل:

هـ(س) = ق(س) × ل(س)

هـ(س) = {
(١+٢س) (س^2) ، س < ١
(٣س^2) (س) ، س ≥ ١

هـ(١) = ٣ × ١ = ٣

نها هـ(س) = ٣ ، س ← ١$^+$

نها هـ(س) = (١+٢) (١) = ٣ × ١ = ٣ ، س ← ١$^-$

نها هـ(س) = ٣ ، س ← ١

نها هـ(س) = هـ(١) ، س ← ١

⇐ هـ(س) متصل عند س = ١

مثال

إذا كان ق(س) = (س − ١)^2
ل(س) = [٢ − س]
ابحث اتصال الاقتران ق×ل عند س = ٣

الحل:

ل(س) = {
−١ ، ٢ < س ≤ ٣
−٢ ، ٣ < س ≤ ٤

هـ(س) = (ق × ل) (س)

هـ(س) = {
(س − ١)^2 × −١ ، ٢ < س ≤ ٣
(س − ١)^2 × −٢ ، ٣ < س ≤ ٤

هـ(٣) = (٣ − ١)^2 × −١ = ٤ × −١ = −٤

نها هـ(س) = −٤ ، س ← ٣$^-$

نها هـ(س) = (٣ − ١)^2 × −٢ ، س ← ٣$^+$
= ٤ × −٢ = −٨

⇐ نها هـ(س) غير موجودة ، س ← ٣

⇐ هـ غير متصل عند س = ٣

مثال

إذا كان ق(س) = (س − ٥)^3
هـ(س) = [س + ٢]
فابحث في اتصال الاقتران ق×هـ
عند س = −٢ ، س = ٥

الحل:

هـ(س) = {
−١ ، −٣ ≤ س < −٢
٠ ، −٢ ≤ س < −١
٦ ، ٤ ≤ س < ٥
٧ ، ٥ ≤ س < ٦

ل(س) = (ق × هـ) (س)

= {
(س − ٥)^3 × −١ ، −٣ ≤ س < −٢
(س − ٥)^3 × ٠ ، −٢ ≤ س < −١
(س − ٥)^3 × ٦ ، ٤ ≤ س < ٥
(س − ٥)^3 × ٧ ، ٥ ≤ س < ٦

س = −٢

ل(−٢) = (−٢ − ٥)^3 × ٠ = صفر

نها ل(س) = صفر ، س ← −٢$^+$

نها ل(س) = (−٢ − ٥)^3 × −١ ، س ← −٢$^-$
= −٧^3 × −١ = ٣٤٣

⇐ نها ل(س) غير موجودة ، س ← −٢

⇐ ق غير متصل عند س = -٢

س = ٥

ق(٥) = (٥-٣)^{٣} × ٧

= ٨ × ٧ = ٥٦

نها ق(س) = ٥٦
س←٥$^{+}$

نها ق(س) = (٥-٣)^{٣} × ٦
س←٥$^{-}$

= ٨ × ٦ = ٤٨

نها ق(س) غير موجودة
س←٥

⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٥