الاتصال و الاشتقاق

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (الاتصال والاشتقاق) ماجستير رياضيات

ملاحظة

لإيجاد المشتقة أو بحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق عند س = أ يجب

أولاً : دراسة الاتصال عند أ

فإذا كان :

① ق متصل عند أ

⇓

نبحث قابلية اشتقاق ق عند س = أ

فإذا كان :

① ق$'_{+}$(أ) = ق$'_{-}$(أ)

⇓

ق$'$(أ) موجودة

② ق$'_{+}$(أ) ≠ ق$'_{-}$(أ)

⇓

ق$'$(أ) غير موجودة

② ق غير متصل عند أ

⇓

ق$'$(أ) غير موجودة

نظرية (١)

إذا كان ق اقتران قابل للاشتقاق عند أ فإن ق يكون متصل عند أ

البرهان

بما أن ق قابل للاشتقاق عند أ ⇐

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{س} - \text{أ}}$$

المطلوب اثبات أن

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$$

$$\text{ق(س)} - \text{ق(أ)} = \left(\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}\right) \times \frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}}$$

نأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}\right) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\left(\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}\right)\right) \times \frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} - \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(أ)} = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\left(\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}\right)}{\text{س} - \text{أ}} \times \lim_{\text{س} \to \text{أ}} (\text{س} - \text{أ})$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} - \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(أ)} = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(أ)}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$$

وبما أن ق(أ) معرفة

⇐ ق متصل عند س = أ .

نظرية (٢)

ق غير متصل عند أ ⇐ ق$'$(أ) غير موجودة

ملاحظة

المشتقة عند أطراف الفترة غير موجودة .

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [أ،ب] فإن

ق$'$(أ) غير موجودة

ق$'$(ب) غير موجودة

لأن ق غير معرف من يسار أ وغير معرف من يمين ب .

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - \text{س} & ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٥\text{س} - ٩ & ٣ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$

① جد $\text{قَ}(٠)$ بالتعريف

② جد $\text{قَ}(٦)$ بالتعريف

الحل :

① $\text{قَ}(٠)$ غير موجودة

② $\text{قَ}(٦)$ غير موجودة .

* مشتقة ق(م) من اليمين

$$\text{قَ}_{+}(\text{م}) = \lim_{\text{ع} \to \text{م}^{+}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{م})}{\text{ع} - \text{م}}$$

* مشتقة ق(م) من اليسار

$$\text{قَ}_{-}(\text{م}) = \lim_{\text{ع} \to \text{م}^{-}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{م})}{\text{ع} - \text{م}}$$

ملاحظة (تذكير)

$\text{قَ}_{+}(\text{م}) = \text{قَ}_{-}(\text{م}) \Leftrightarrow \text{قَ}(\text{م})$ موجودة

$\text{قَ}_{+}(\text{م}) \ne \text{قَ}_{-}(\text{م}) \Leftrightarrow \text{قَ}(\text{م})$ غير موجودة

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{س} \le ٣ \\ ٦\text{س} - ٩ & \text{س} > ٣ \end{cases}$

ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س=٣

الحل :

أولاً ندرس الاتصال عند ٣

$\text{ق}(٣) = ٩$

$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ق}(\text{س}) = ٩$

$\lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{ق}(\text{س}) = ٦ \times ٣ - ٩ = ١٨ - ٩ = ٩$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = ٩ = \text{ق}(٣)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٣

ثانياً ندرس الاشتقاق عند ٣

$$\text{قَ}_{+}(٣) = \lim_{\text{ع} \to ٣^{+}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٣} \frac{\text{ع}^2 - ٩}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٣} \frac{(\text{ع} - ٣)(\text{ع} + ٣)}{(\text{ع} - ٣)} = ٣ + ٣ = ٦$$

$$\text{قَ}_{-}(٣) = \lim_{\text{ع} \to ٣^{-}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٣^{-}} \frac{(٦\text{ع} - ٩) - (٩)}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٣^{-}} \frac{٦\text{ع} - ١٨}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٣^{-}} \frac{٦(\text{ع} - ٣)}{(\text{ع} - ٣)} = ٦$$

$\Leftarrow \text{قَ}_{+}(٣) = ٦ = \text{قَ}_{-}(٣)$

$\Leftarrow \text{قَ}(٣) = ٦$

$\Leftarrow$ ق قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

إذا كان ق(س) = { ٤س + ١ ، ‎-٣ < س < ١
                 { ٢س + ٣ ، ١ ≤ س ≤ ٥

جد قَ(١) (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

أولاً: نبحث الاتصال عند ١

ق(١) = ٢ + ٣ = ٥

نها (س ← ١⁺) ق(س) = ٥

نها (س ← ١⁻) ق(س) = ٤ + ١ = ٥

نها (س ← ١) ق(س) = ٥ = ق(١)

⇐ ق متصل عند س = ١

ثانياً: نبحث الاشتقاق عند ١

قَ₋(١) = نها (ع ← ١⁻) [ق(ع) − ق(١)] / (ع − ١)

= نها (ع ← ١⁻) [(٤ع + ١) − (٥)] / (ع − ١)

= نها (ع ← ١⁻) (٤ع − ٤) / (ع − ١)

= نها (ع ← ١⁻) ٤(ع − ١) / (ع − ١) = ٤

قَ₊(١) = نها (ع ← ١⁺) [ق(ع) − ق(١)] / (ع − ١)

= نها (ع ← ١⁺) [(٢ع + ٣) − (٥)] / (ع − ١)

= نها (ع ← ١⁺) (٢ع − ٢) / (ع − ١)

= نها (ع ← ١⁺) ٢(ع − ١) / (ع − ١) = ٢

⇐ قَ₊(١) ≠ قَ₋(١)

⇐ قَ(١) غير موجودة

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال

إذا كان ق(س) = { س² − س ، ٠ ≤ س ≤ ٣
                 { ٥س − ٩ ، ٣ < س < ٦

جد قَ(٣) (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

نبحث الاتصال عند ٣

ق(٣) = ٩ − ٣ = ٦

نها (س ← ٣⁻) ق(س) = ٦

نها (س ← ٣⁺) ق(س) = ١٥ − ٩ = ٦

⇐ نها (س ← ٣) ق(س) = ٦ = ق(٣)

⇐ ق متصل عند س = ٣

نبحث الاشتقاق عند ٣

قَ₋(٣) = نها (ع ← ٣⁻) [ق(ع) − ق(٣)] / (ع − ٣)

= نها (ع ← ٣⁻) (ع² − ع − ٦) / (ع − ٣)

= نها (ع ← ٣⁻) (ع − ٣)(ع + ٢) / (ع − ٣) = ٣ + ٢ = ٥

قَ₊(٣) = نها (ع ← ٣⁺) [ق(ع) − ق(٣)] / (ع − ٣)

= نها (ع ← ٣⁺) [(٥ع − ٩) − (٦)] / (ع − ٣)

$$= \underset{ع \to ٣^+}{\text{نها}} \frac{٥ع - ١٥}{ع - ٣}$$

$$= \underset{ع \to ٣^+}{\text{نها}} \frac{٥(ع-٣)}{ع-٣} = ٥$$

$$\Leftarrow ق'_-(٣) = ق'_+(٣)$$

$$\Leftarrow ق'(٣) = ٥$$

⇐ ق قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

$$\text{إذا كان } ق(س) = \begin{cases} س^2 - ٢س & س \le ٢ \\ ٢س - س^2 & س > ٢ \end{cases}$$

فابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س=٢

الحل :

نبحث اتصال ٢

$$ق(٢) = ٤ - ٤ = \text{صفر}$$

$$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} ق(س) = \text{صفر}$$

$$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} ق(س) = ٤ - ٤ = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) = \text{صفر} = ق(٢)$$

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث الاشتقاق عند ٢

$$ق'_-(٢) = \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{ع^2 - ٢ع - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{ع(\cancel{ع-٢})}{(\cancel{ع-٢})} = ٢$$

$$ق'_+(٢) = \underset{ع \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{٢ع - ع^2 - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{ع(٢-ع)}{(ع-٢)} = -٢$$

$$\Leftarrow ق'_-(٢) \ne ق'_+(٢)$$

⇐ ق'(٢) غير موجودة

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

مثال

$$\text{إذا كان } ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٢س & ٠ \le س < ٣ \\ ٦س - ٣ & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق ق عند

س = ٠ ، س = ٥ ، س = ٣

الحل :

ق'(٠) غير موجودة لأن ٠ طرف

ق'(٥) غير موجودة لأن ٥ طرف

س = ٣

نبحث الاتصال عند ٣

ق(٣) غير معرفة

⇐ ق غير متصل عند س = ٣

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

$$\text{إذا كان } ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & -٣ \le س < ١ \\ ٢س + ٣ & ١ \le س \le ٥ \end{cases}$$

جد ق'(-١) باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

ق(س) = ٤ س + ١ عند س = -١

ق متصل عند س = -١ لأنه كثير حدود

$$\text{ق}'(-١) = \lim_{\text{ع} \to -١} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(-١)}{\text{ع} - -١}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to -١} \frac{(٤\text{ع} + ١) - (-٣)}{\text{ع} + ١}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to -١} \frac{٤\text{ع} + ٤}{\text{ع} + ١}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to -١} \frac{٤\cancel{(\text{ع} + ١)}}{\cancel{(\text{ع} + ١)}} = ٤$$

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}+1} & 0 \leq \text{س} < 2 \\ \text{س}^2 - 1 & 2 \leq \text{س} \leq 5 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق عند س = 2 وعند س = 4 . مستخدماً تعريف المشتقة

الحل:

س = 2

نبحث الاتصال عند 2

$\text{ق}(2) = 4 - 1 = 3$

$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق(س)} = 3$

$\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق(س)} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

⇐ $\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق(س)}$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = 2

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = 2

س = 4

نبحث الاتصال عند س = 4

$\text{ق}(4) = 16 - 1 = 15$

$\lim_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)} = 15$

$\lim_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)} = 15 = \text{ق}(4)$

⇐ ق متصل عند س = 4

نبحث الاشتقاق عند س = 4

$\text{ق}'(4) = \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$

$= \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\text{ع}^2 - 1 - 15}{\text{ع} - 4}$

$= \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\text{ع}^2 - 16}{\text{ع} - 4}$

$= \lim_{\text{ع} \to 4} \frac{\cancel{(\text{ع} - 4)}(\text{ع} + 4)}{\cancel{(\text{ع} - 4)}} = 4 + 4 = 8$

⇐ $\text{ق}'(4) = 8$

⇐ ق قابل للاشتقاق عند س = 4

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} + 3 & \text{س} \geq 4 \\ 3\text{س} - 7 & \text{س} < 4 \end{cases}$

ابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س=4
مستخدماً التعريف.

الحل:

نبحث اتصال س = 4

$\text{ق}(4) = 2 + 3 = 5$

$\lim_{\text{س} \to 4^+} \text{ق(س)} = 5$

$\lim_{\text{س} \to 4^-} \text{ق(س)} = 12 - 7 = 5$

⇐ $\lim_{\text{س} \to 4} \text{ق(س)} = 5 = \text{ق}(4)$

⇐ ق متصل عند س = 4

نبحث الاشتقاق عند س = 4

$\text{ق}'_+(4) = \lim_{\text{ع} \to 4^+} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$

$= \lim_{\text{ع} \to 4^+} \frac{(\sqrt{\text{ع}} + \cancel{3}) - (2 + \cancel{3})}{\text{ع} - 4}$

$= \lim_{\text{ع} \to 4^+} \frac{\sqrt{\text{ع}} - 2}{\text{ع} - 4} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} + 2}{\sqrt{\text{ع}} + 2}$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow 4^{+}}{\text{نها}} \frac{(\cancel{\text{ع} - 4})}{(\cancel{\text{ع} - 4})(\sqrt{\text{ع}} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ق}'_{-}(4) = \underset{\text{ع} \leftarrow 4^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(4)}{\text{ع} - 4}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow 4^{-}}{\text{نها}} \frac{(3\text{ع} - 7) - (5)}{\text{ع} - 4}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow 4^{-}}{\text{نها}} \frac{3\text{ع} - 12}{\text{ع} - 4}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow 4^{-}}{\text{نها}} \frac{3(\cancel{\text{ع} - 4})}{(\cancel{\text{ع} - 4})} = 3$$

$\Leftarrow$ $\text{ق}'_{-}(4) \neq \text{ق}'_{+}(4)$

$\Leftarrow$ $\text{ق}'(4)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٤

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{٤}{\text{س}} + ١ & \text{س} \geq ٢ \\ ٥\text{س} - ١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق ق عند س = ٢ مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

نبحث الاتصال عند س = ٢

$\text{ق(٢)} = ٢ + ١ = ٣$

$\lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق(س)} = ٣$

$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق(س)} = ١٠ - ١ = ٩$

⇐ $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)}$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٢

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ ابحث قابلية اشتقاق ق عند س = ١

الحل:

نبحث الاتصال عند س = ١

$\text{ق(١)} = \frac{١}{٠}$ غير معرف

⇐ ق غير متصل عند س = ١

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} - ٣} & \text{س} \neq ٩ \\ ٦ & \text{س} = ٩ \end{cases}$

فجد ق'(٩) (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

نبحث اتصال س = ٩

$\text{ق(٩)} = ٦$

$\lim_{\text{س} \to ٩} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٩} \frac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} - ٣}$

$= \lim_{\text{س} \to ٩} \frac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + ٣}{\sqrt{\text{س}} + ٣}$

$= \lim_{\text{س} \to ٩} \frac{\cancel{(\text{س} - ٩)}\,(\sqrt{\text{س}} + ٣)}{\cancel{(\text{س} - ٩)}} = ٦$

$\lim_{\text{س} \to ٩} \text{ق(س)} = \text{ق(٩)} = ٦$

⇐ ق متصل عند س = ٩

نبحث الاشتقاق عند س = ٩

$\text{ق}'(٩) = \lim_{\text{ع} \to ٩} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٩)}}{\text{ع} - ٩}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٩} \frac{\frac{\text{ع} - ٩}{\sqrt{\text{ع}} - ٣} - \frac{٦}{١}}{\text{ع} - ٩}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٩} \frac{(\text{ع} - ٩) - ٦(\sqrt{\text{ع}} - ٣)}{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)} \times \frac{١}{\text{ع} - ٩}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٩} \frac{\text{ع} - ٩ - ٦\sqrt{\text{ع}} + ١٨}{\sqrt{\text{ع}} - ٣} \times \frac{١}{\text{ع} - ٩}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٩} \frac{\text{ع} - ٦\sqrt{\text{ع}} + ٩}{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)} \times \frac{١}{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)(\sqrt{\text{ع}} + ٣)}$

$= \lim_{\text{ع} \to ٩} \frac{\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)}\,\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)}}{\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)}\,\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ٣)}\,(\sqrt{\text{ع}} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

مثال

إذا كان ق(س) = |س − ١| فجد قَ(٣) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل:

ق(س) = س − ١ عند س = ٣

ق متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

$$\text{قَ}(٣) = \text{نها}_{ع \to ٣} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٣)}{ع - ٣}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٣} \frac{(ع - ١) - ٢}{ع - ٣}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٣} \frac{(ع - ٣)}{(ع - ٣)} = ١$$

مثال

إذا كان ق(س) = |س − ١| فجد قَ(٠) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

ق(س) = ١ − س عند س = صفر

ق متصل عند س = صفر لأنه كثير حدود

$$\text{قَ}(٠) = \text{نها}_{ع \to ٠} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٠)}{ع - ٠}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٠} \frac{١ - ع - ١}{ع}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٠} \frac{-ع}{ع} = -١$$

مثال

إذا كان ق(س) = |س² − ٤| فجد قَ(١) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

ق(س) = ٤ − س² عند س = ١

ق متصل عند س = ١ لأنه كثير حدود

$$\text{قَ}(١) = \text{نها}_{ع \to ١} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(١)}{ع - ١}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ١} \frac{٤ - ع^٢ - ٣}{ع - ١}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ١} \frac{١ - ع^٢}{ع - ١}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ١} \frac{\cancel{(١ - ع)}(١ + ع)}{\cancel{(ع - ١)}} = -(١ + ١) = -٢$$

مثال

إذا كان ق(س) = |س² − ٤| جد قَ(٢) (إن وجدت) مستخدماً تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ & س \geq ٢ \text{ ، } س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

نبحث اتصال س = ٢

ق(٢) = ٤ − ٤ = صفر

$$\text{نها}_{س \to ٢^-} \text{ق}(س) = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢^+} \text{ق}(س) = ٤ - ٤ = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س) = \text{صفر} = \text{ق}(٢)$$

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث الاشتقاق عند س = ٢

$$\text{قَ}_{+}(٢) = \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{ع^٢ - ٤ - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{\cancel{(ع - ٢)}(ع + ٢)}{\cancel{(ع - ٢)}} = ٢ + ٢ = ٤$$

ق′(٢)$^-$ = نها$_{ع \to ٢^-}$ $\frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٢)}}{ع - ٢}$

= نها$_{ع \to ٢^-}$ $\frac{(٤ - ع^٢) - ٠}{ع - ٢}$

= نها$_{ع \to ٢^-}$ $\frac{(٢ - ع)(٢ + ع)}{(ع - ٢)}$ = −(٢+٢) = −٤

⇐ ق′(٢)$^+$ ≠ ق′(٢)$^-$

⇐ ق′(٢) غير موجودة

ق′(١)$^-$ = نها$_{ع \to ١^-}$ $\frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(١)}}{ع - ١}$

= نها$_{ع \to ١^-}$ $\frac{(١ - ع) - ٠}{(ع - ١)}$

= نها$_{ع \to ١^-}$ $\frac{(١ - ع)}{(ع - ١)}$ = −١

⇐ ق′(١)$^+$ ≠ ق′(١)$^-$

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال

إذا كان ق(س) = |س−١| فابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س = ١ مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

ق(س) = { س − ١ ، س ≥ ١ ؛ ١ − س ، س < ١

نبحث الاتصال عند س = ١

ق(١) = ١ − ١ = صفر

نها$_{س \to ١^+}$ ق(س) = صفر

نها$_{س \to ١^-}$ ق(س) = ١ − ١ = صفر

نها$_{س \to ١}$ ق(س) = صفر = ق(١)

⇐ ق متصل عند س = ١

نبحث الاشتقاق عند س = ١

ق′(١)$^+$ = نها$_{ع \to ١^+}$ $\frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(١)}}{ع - ١}$

= نها$_{ع \to ١^+}$ $\frac{ع - ١ - ٠}{(ع - ١)}$

= نها$_{ع \to ١^+}$ $\frac{(ع - ١)}{(ع - ١)}$ = ١

٢٠١٠ صيفي

أي من الاقترانات الآتية يعتبر مثالاً لاقتران متصل وغير قابل للاشتقاق عند س = صفر ؟

أ) [س] $\boxed{\text{ب) |س|}}$

جـ) س|س| د) $\frac{س}{٢}$

الحل: المطلوب يكون متصل وغير قابل للاشتقاق عند (صفره) أي العدد الذي يجعله صفر

٢٠١١ شتوي

إذا كان ق(س) = س|س−٣| فابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق(س) عند س = ٣ باستعمال تعريف المشتقة.

الحل:

ق(س) = { س^٢ − ٣س ، س ≥ ٣ ؛ ٣س − س^٢ ، س < ٣

نبحث الاتصال

ق(٣) = ٩ − ٩ = صفر

نها$_{س \to ٣^-}$ ق(س) = صفر

$\text{نهـا}_{س\to 3^+} ق(س) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to 3} ق(س) = \text{صفر} = ق(3)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $س = 3$

نبحث قابلية الاشتقاق

$ق'_+(3) = \text{نهـا}_{ع\to 3^+} \frac{ق(ع) - ق(3)}{ع - 3}$

$= \text{نهـا}_{ع\to 3^+} \frac{ع^2 - 3ع - 0}{ع - 3}$

$= \text{نهـا}_{ع\to 3^+} \frac{ع\cancel{(ع-3)}}{\cancel{(ع-3)}} = 3$

$ق'_-(3) = \text{نهـا}_{ع\to 3^-} \frac{ق(ع) - ق(3)}{ع - 3}$

$= \text{نهـا}_{ع\to 3^-} \frac{3ع - ع^2 - 0}{ع - 3}$

$= \text{نهـا}_{ع\to 3^-} \frac{ع\cancel{(3-ع)}}{\cancel{(ع-3)}} = -3$ (−1)

$\Leftarrow ق'_+(3) \neq ق'_-(3)$

$\Leftarrow ق'(3)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند $س = 3$

2015 شتوي

ليكن $ق(س) = س\,|جاس|$ ، $س \in [0 ، 2\pi]$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $س = \pi$

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} س\ جاس & 0 \le س \le \pi \\ -س\ جاس & \pi < س \le 2\pi \end{cases}$$

نبحث الاتصال

$ق(\pi) = \pi\ جا\pi = \text{صفر}$

$\text{نهـا}_{س\to \pi^-} ق(س) = \text{صفر}$

$\text{نهـا}_{س\to \pi^+} ق(س) = \text{صفر}$

$\text{نهـا}_{س\to \pi} ق(س) = \text{صفر} = ق(\pi)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $س = \pi$

نبحث قابلية الاشتقاق

$ق'_-(\pi) = \text{نهـا}_{ع\to \pi^-} \frac{ق(ع) - ق(\pi)}{ع - \pi}$

$= \text{نهـا}_{ع\to \pi^-} \frac{ع\ جاع - 0}{ع - \pi}$

$= \text{نهـا}_{ع\to \pi^-} \frac{ع\ جا(\pi - ع)}{(ع - \pi)}$

$ص = \pi - ع$

$ع \to \pi \Leftarrow ص \to 0$

$= \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{(\pi - ص)\ جاص}{-ص} = \frac{\pi - 0}{-1} = -\pi$

$ق'_+(\pi) = \text{نهـا}_{ع\to \pi^+} \frac{ق(ع) - ق(\pi)}{ع - \pi}$

$= \text{نهـا}_{ع\to \pi^+} \frac{-ع\ جاع - 0}{ع - \pi}$

$= \text{نهـا}_{ع\to \pi^+} \frac{-ع\ جا(\pi - ع)}{ع - \pi}$

$= -\pi \times -1 = \pi$

$\Leftarrow$

$ق'_-(\pi) \neq ق'_+(\pi)$

$\Leftarrow ق'(\pi)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند $س = \pi$.

٢٠١٦ شتوي

ليكن ق(س) = $\sqrt{س} + |س - ٢|$ ، س ∈ (٠ ، ٤) ابحث في قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = ٢ باستخدام التعريف العام للمشتقة.

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س} - س + ٢ & ٠ < س < ٢ \\ \sqrt{س} + س - ٢ & ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$$

نبحث الاتصال

$ق(٢) = \sqrt{٢} + ٢ - ٢ = \sqrt{٢}$

$\text{نها}_{س \to ٢^+} ق(س) = \sqrt{٢}$

$\text{نها}_{س \to ٢^-} ق(س) = \sqrt{٢}$

⇐ $\text{نها}_{س \to ٢} ق(س) = \sqrt{٢} = ق(٢)$

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث قابلية الاشتقاق

$$ق'_+(٢) = \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{(\sqrt{ع} + ع - \cancel{٢}) - (\sqrt{٢} + ٢ - \cancel{٢})}{ع - ٢}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{٢}}{ع - ٢} + \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{\cancel{(ع - ٢)}}{\cancel{(ع - ٢)}}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^+} \frac{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}}{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}(\sqrt{ع} + \sqrt{٢})} + ١$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}} + ١$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + ١$$

$$ق'_-(٢) = \text{نها}_{ع \to ٢^-} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^-} \frac{(\sqrt{ع} - ع + \cancel{٢}) - (\sqrt{٢} - ٢ + \cancel{٢})}{ع - ٢}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^-} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{٢}}{ع - ٢} - \text{نها}_{ع \to ٢^-} \frac{\cancel{(ع - ٢)}}{\cancel{(ع - ٢)}}$$

$$= \text{نها}_{ع \to ٢^-} \frac{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}}{\cancel{(\sqrt{ع} - \sqrt{٢})}(\sqrt{ع} + \sqrt{٢})} - ١$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}} - ١$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}} - ١$$

⇐ $ق'_+(٢) \neq ق'_-(٢)$

⇐ ق'(٢) غير موجودة

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س=٢

مثال

إذا كان ق(س) = $[\frac{1}{2}$ س $+ 2]$ ابحث قابلية اشتقاق ق عند

① س = ١

② س = ٣

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 2 & 0 \le \text{س} < 3 \\ 3 & 3 \le \text{س} < 6 \end{cases}$$

س = ١

ق متصل عند س = ١ لأنه ثابت

$$\text{ق}'(1) = \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{2 - 2}{\text{ع} - 1} = \text{صفر}$$

س = ٣

بحث الاتصال

ق(٣) = ٣

$\lim_{\text{س} \to 3^+} \text{ق(س)} = 3$

$\lim_{\text{س} \to 3^-} \text{ق(س)} = 2$

⇐ $\lim_{\text{س} \to 3} \text{ق(س)}$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٣

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال

إذا كان ق(س) = $[3 - 2\text{س}]$ ابحث قابلية الاشتقاق عند

① س = $\frac{1}{4}$ ② س = −١

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 5 & -\frac{3}{2} < \text{س} \le -1 \\ 4 & -1 < \text{س} \le -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} < \text{س} \le 0 \\ 2 & 0 < \text{س} \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

س = $\frac{1}{4}$

ق متصل عند س = $\frac{1}{4}$ لأنه ثابت

$$\text{ق}'(\tfrac{1}{4}) = \lim_{\text{ع} \to \frac{1}{4}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(\frac{1}{4})}{\text{ع} - \frac{1}{4}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \frac{1}{4}} \frac{2 - 2}{\text{ع} - \frac{1}{4}} = \text{صفر}$$

س = −١

بحث الاتصال

ق(−١) = ٥

$\lim_{\text{س} \to -1^-} \text{ق(س)} = 5$

$\lim_{\text{س} \to -1^+} \text{ق(س)} = 4$

⇐ $\lim_{\text{س} \to -1} \text{ق(س)}$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = −١

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = −١

مثال

إذا كان ق(س) = (س − ٢) $[\text{س}]$ فابحث في قابلية اشتقاق ق عند س = ٢ مستخدما تعريف المشتقة.

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - 2 & 1 \le \text{س} < 2 \\ 2\text{س} - 4 & 2 \le \text{س} < 3 \end{cases}$$

بحث الاتصال عند ٢

ق(٢) = ٤ − ٤ = صفر

$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق(س)} = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق(س)} = 2 - 2 = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 2} \text{ق(س)} = \text{صفر} = \text{ق}(2)$

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث قابلية الاشتقاق عند ٢

$$\text{ق}'(٢^+) = \lim_{\text{ع} \to ٢^+} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٢^+} \frac{٢\text{ع} - ٤ - ٠}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٢^+} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - ٢)}}{\cancel{(\text{ع} - ٢)}} = ٢$$

$$\text{ق}'(٢^-) = \lim_{\text{ع} \to ٢^-} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٢^-} \frac{\text{ع} - ٢ - ٠}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to ٢^-} \frac{(\text{ع} - ٢)}{(\text{ع} - ٢)} = ١$$

⇐ $\text{ق}'(٢^+) \neq \text{ق}'(٢^-)$

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

بحث قابلية الاشتقاق على المجال (فترة) مستخدماً تعريف المشتقة.

مثال

إذا كان ق(س) = { $-1-2$س ، س < -1 ؛ س^2 ، $-1 \le$ س ≤ 1 ؛ س ، س > 1 }

ابحث قابلية اشتقاق ق على مجاله واكتب قاعدة ق$'$(س) مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

$(-\infty, -1)$

ق$'$(س) = نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

= نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{(\cancel{-1}-2\text{ع}) - (\cancel{-1}-2\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

= نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{-2(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع} - \text{س})} = -2$

$(-1, 1)$

ق$'$(س) = نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

= نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع} - \text{س}}$

= نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س})}{(\text{ع} - \text{س})}$ = س + س = 2س

$(1, \infty)$

ق$'$(س) = نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

= نها$_{\text{ع} \to \text{س}}$ $\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = 1$

س = -1

بحث الاتصال

ق$(-1) = 1$

نها$_{\text{س} \to -1^-}$ ق(س) $= -1 + 2 = 1$

نها$_{\text{س} \to -1^+}$ ق(س) $= 1$

$\Leftarrow$ نها ق(س) $= 1 =$ ق(-1)

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = -1

بحث الاشتقاق

ق$'_-(-1)$ = نها$_{\text{ع} \to -1^-}$ $\dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(-1)}{\text{ع} - -1}$

= نها$_{\text{ع} \to -1^-}$ $\dfrac{(-1-2\text{ع}) - (1)}{\text{ع} + 1}$

= نها$_{\text{ع} \to -1^-}$ $\dfrac{-2\text{ع} - 2}{\text{ع} + 1}$

= نها$_{\text{ع} \to -1^-}$ $\dfrac{-2(\text{ع} + 1)}{\text{ع} + 1} = -2$

ق$'_+(-1)$ = نها$_{\text{ع} \to -1^+}$ $\dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(-1)}{\text{ع} - -1}$

= نها$_{\text{ع} \to -1^+}$ $\dfrac{\text{ع}^2 - 1}{\text{ع} + 1}$

= نها$_{\text{ع} \to -1}$ $\dfrac{(\text{ع} - 1)(\cancel{\text{ع} + 1})}{(\cancel{\text{ع} + 1})} = -1 - 1 = -2$

$\Leftarrow$ ق$'_+(-1)$ = ق$'_-(-1)$

$\Leftarrow$ ق$'(-1) = -2$

س = 1

بحث الاتصال

ق$(1) = 1$

نها$_{\text{س} \to 1^+}$ ق(س) $= 1$

نها$_{\text{س} \to 1^-}$ ق(س) $= 1$

$\Leftarrow \lim\limits_{س\to 1} ق(س) = 1 = ق(1)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $س = 1$

نبحث الاشتقاق عند 1

$ق'(1)^{+} = \lim\limits_{ع\to 1^{+}} \dfrac{ق(ع) - ق(1)}{ع - 1}$

$= \lim\limits_{ع\to 1^{+}} \dfrac{\cancel{(ع-1)}}{\cancel{(ع-1)}} = 1$

$ق'(1)^{-} = \lim\limits_{ع\to 1^{-}} \dfrac{ق(ع) - ق(1)}{ع - 1}$

$= \lim\limits_{ع\to 1^{-}} \dfrac{ع^2 - 1}{ع - 1}$

$= \lim\limits_{ع\to 1^{-}} \dfrac{\cancel{(ع-1)}(ع+1)}{\cancel{(ع-1)}} = 1 + 1 = 2$

$\Leftarrow ق'(1)^{+} \neq ق'(1)^{-}$

$\Leftarrow$ ق'(1) غير موجودة

$\Leftarrow$

$ق'(س) = \begin{cases} -2 & س < -1 \\ 2س & -1 \le س < 1 \\ 1 & س > 1 \\ \text{غير موجودة} & س = 1 \end{cases}$

مثال

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 0 & س \le 0 \\ 5 - س & 0 < س < 4 \\ \dfrac{1}{5 - س} & س \ge 4 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة

الحل:

$-\infty$ ——— 0 ——— 4 ——— ∞

$0 \quad\quad 5 - س \quad\quad \dfrac{1}{5 - س}$

$(-\infty ، 0)$

ق متصل لأنه ثابت

$ق'(س) = \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{0 - 0}{ع - س} = \text{صفر}$

$(0 ، 4)$

ق متصل لأنه كثير حدود

$ق'(س) = \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{(\cancel{5} - ع) - (\cancel{5} - س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{-\cancel{(ع - س)}}{\cancel{(ع - س)}} = -1$

$(4 ، \infty)$

ق متصل على الفترة لأنه معرف عليها ما عدا $س = 5 \Leftarrow$ ق'(5) غير موجودة

$ق'(س) = \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{\dfrac{1}{5 - ع} - \dfrac{1}{5 - س}}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{\cancel{5} - س - (\cancel{5} - ع)}{(5 - س)(5 - ع)} \times \dfrac{1}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع\to س} \dfrac{\cancel{(ع - س)}}{(5 - س)(5 - ع)} \times \dfrac{1}{\cancel{(ع - س)}}$

$= \frac{1}{(٥-س)(٥-س)} = \frac{1}{(٥-س)^2}$

س = ٠

نبحث الاتصال

ق(٠) = ٠

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٠

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ٥ - ٠ = ٥

⇐ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) غير موجودة

⇐ قَ(٠) غير موجودة

س = ٤

نبحث الاتصال

$ق(٤) = \frac{1}{٥-٤} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = 1

$\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = ٥ - ٤ = 1

⇐ $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = 1 = ق(٤)

⇐ ق متصل عند س = ٤

نبحث الاشتقاق

$قَ_-(٤) = \lim_{ع \to ٤^-} \frac{ق(ع) - ق(٤)}{ع - ٤}$

$= \lim_{ع \to ٤^-} \frac{٥ - ع - 1}{ع - ٤}$

$= \lim_{ع \to ٤^-} \frac{\cancel{(٤ - ع)}}{\cancel{(ع - ٤)}} = -1$

$قَ_+(٤) = \lim_{ع \to ٤^+} \frac{ق(ع) - ق(٤)}{ع - ٤}$

$= \lim_{ع \to ٤^+} \frac{\frac{1}{٥-ع} - \frac{1}{1}}{ع - ٤}$

$= \lim_{ع \to ٤^+} \frac{1 - (٥-ع)}{(٥-ع)} \times \frac{1}{(ع-٤)}$

$= \lim_{ع \to ٤^+} \frac{\cancel{(ع-٤)}}{(٥-ع)} \times \frac{1}{\cancel{(ع-٤)}} = \frac{1}{1} = 1$

⇐ قَ₊(٤) ≠ قَ₋(٤)

⇐ قَ(٤) غير موجودة

$⇐ قَ(س) = \begin{cases} ٠ & س < ٠ \\ -1 & ٠ < س < ٤ \\ \frac{1}{(٥-س)^2} & س > ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ ، ٥ ، ٤ \end{cases}$

مثال

$إذا كان ق(س) = \begin{cases} \frac{٦}{س} - ٤ & 1 \le س \le ٢ \\ ٣س + 1 & ٢ < س \le ٥ \end{cases}$

جد قَ(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

المجال [1، ٥]

قَ(1) غير موجودة لأن 1 طرف

قَ(٥) غير موجودة لأن ٥ طرف

(١، ٢)

ق متصل على الفترة لأنه معرف على الفترة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\left(\frac{٦}{\text{ع}} - \cancel{٤}\right) - \left(\frac{٦}{\text{س}} - \cancel{٤}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{٦}{\text{ع}} - \frac{٦}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٦\text{س} - ٦\text{ع}}{(\text{ع})(\text{س})} \times \frac{١}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٦(\cancel{\text{س} - \text{ع}})}{(\text{ع})(\text{س})} \times \frac{١}{(\cancel{\text{ع} - \text{س}})}$$

−١

$$= \frac{-٦}{\text{س} \times \text{س}} = \frac{-٦}{\text{س}^٢}$$

(٢، ٥)

ق متصل على الفترة لأنه كثير حدود

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٣\text{ع} + \cancel{١} - (٣\text{س} + \cancel{١})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٣(\cancel{\text{ع} - \text{س}})}{(\cancel{\text{ع} - \text{س}})} = ٣$$

س = ٢

نبحث الاتصال

$$\text{ق}(٢) = \frac{٦}{٢} - ٤ = ٣ - ٤ = -١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to٢^-} \text{ق}(\text{س}) = -١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to٢^+} \text{ق}(\text{س}) = ٣ \times ٢ + ١ = ٦ + ١ = ٧$$

⇐ $\text{نها}_{\text{س}\to٢} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٢

⇐ ق'(٢) غير موجودة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \frac{-٦}{\text{س}^٢} & ١ < \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = ١، ٢، ٥ \end{cases}$$

مثال

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\![\text{س}]\!] & ١ \le \text{س} < ٢ \\ |\text{س} - ٣| & ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق ق(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

المجال [١، ٤]

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ - \text{س} & ٢ \le \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ٣ & ٣ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

(١، ٢)

ق متصل لأنه ثابت

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١ - ١}{\text{ع} - \text{س}} = \text{صفر}$$

(٣،٢)

ق متصل لأنه كثير حدود

ق'(س) = نها ع←س (ق(ع) - ق(س)) / (ع - س)

= نها ع←س (٣ - ع - (٣ - س)) / (ع - س)

= نها ع←س (-(ع - س)) / (ع - س) = -١

(٤،٣)

ق متصل على الفترة لأنه كثير حدود

ق'(س) = نها ع←س (ق(ع) - ق(س)) / (ع - س)

= نها ع←س (ع - ٣ - (س - ٣)) / (ع - س)

= نها ع←س (ع - س) / (ع - س) = ١

س = ٢

نبحث الاتصال

ق(٢) = ٣ - ٢ = ١

نها س←٢+ ق(س) = ١

نها س←٢- ق(س) = ١

نها س←٢ ق(س) = ١ = ق(٢)

⇐ ق متصل عند س = ٢

نبحث قابلية الاشتقاق

ق'-(٢) = نها ع←٢- (ق(ع) - ق(٢)) / (ع - ٢)

= نها ع←٢- (١ - ١) / (ع - ٢) = صفر

ق'+(٢) = نها ع←٢+ (ق(ع) - ق(٢)) / (ع - ٢)

= نها ع←٢+ (٣ - ع - ١) / (ع - ٢)

= نها ع←٢+ (٢ - ع) / (ع - ٢) = -١

⇐ ق'+(٢) ≠ ق'-(٢)

⇐ ق'(٢) غير موجودة

س = ٣

نبحث الاتصال

ق(٣) = ٣ - ٣ = صفر

نها س←٣+ ق(س) = صفر

نها س←٣- ق(س) = صفر

نها س←٣ ق(س) = صفر = ق(٣)

⇐ ق متصل عند س = ٣

نبحث الاشتقاق

ق'+(٣) = نها ع←٣+ (ق(ع) - ق(٣)) / (ع - ٣)

= نها ع←٣+ (ع - ٣ - (٠)) / (ع - ٣)

= نها ع←٣+ (ع - ٣) / (ع - ٣) = ١

ق'-(٣) = نها ع←٣- (ق(ع) - ق(٣)) / (ع - ٣)

= نها ع←٣- (٣ - ع - ٠) / (ع - ٣)

= نها ع←٣ (٣ - ع) / (ع - ٣) = -١

⇐ قَ$_{+}$(٣) ≠ قَ$_{-}$(٣)

⇐ قَ(٣) غير موجودة

الآن : الأطراف

قَ(١) غير موجودة لأنها طرف

قَ(٤) غير موجودة لأنها طرف

⇐ قَ(س) =

٠	١ < س < ٢
−١	٢ < س < ٣
١	٣ < س < ٤
غير موجودة	س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤