القيم الحرجة :

هي : ١) اطراف مغلقة

٢) اصفار المشتقة الاولى

٣) المشتقة غير موجودة

امثلة :

احسب القيم الحرجة للاقترانات التالية :

١) $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ١٢$ ، $س \in [٠، ٥]$

الحل :

$ق' = ٢س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

القيم الحرجة : $\{٠، ٥، ٣\}$

٢) $ق = \frac{س^{٣}}{٣} - ٤س - ١٢$ ، $س \in [١، ٦]$

الحل :

$ق' = س^{٢} - ٤ = ٠$

$\Leftarrow س = ٢$ ✓ ، $س = -٢ \notin$ تهمل ✗

القيم الحرجة : $\{١، ٦، ٢\}$

٣) $ق = |س - ٣| + س$

الحل :

نعيد التعريف :

$$ق = \begin{cases} ٣ & ، س < ٣ \\ ٢س - ٣ & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

$$ق' = \begin{cases} ٠ & ، س < ٣ \\ ٢ & ، س > ٣ \\ \text{غ.م} & ، س = ٣ \end{cases}$$

القيم الحرجة : $(-\infty، ٣]$

٤) $ق = [٢س + ١]$ ، $س \in [٠، ٥]$

الحل :

القيم الحرجة : $[٠، ٥]$

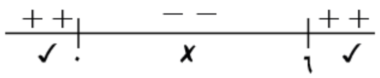
٥) $ق = \sqrt{س^{٢} - ٦س}$

الحل :

نجد المجال :

$س^{٢} - ٦س = ٠ \Leftarrow س(س - ٦) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠، ٦$



$(-\infty، ٠] \cup [٦، \infty)$

$$ق' = \frac{٢س - ٦}{٢ \times \sqrt{س^{٢} - ٦س}}$$

البسط :

$٢س - ٦ = ٠$

$\Leftarrow س = ٣ \notin$ تهمل

المقام :

$س^{٢} - ٦س = ٠$

$\Leftarrow س = ٠، ٦$

القيم الحرجة : $\{٠، ٦\}$

٦) اذا كانت $ق'(س) = \frac{س - ٢}{س + ١٣}$ ، فما قيم (س) الحرجة على $[١، ٦]$

الحل :

البسط :

$س = ٢$

المقام :

$س = -١٣ \notin$ تهمل

القيم الحرجة : $\{١، ٦، ٢\}$

واجب

٧) اذا كانت $ق = ٢س^{٣} - ٢أس^{٢} + ٦س + ٩$ ، وكان له قيمة حرجة عندما $س = ٢$ ، فما قيمة (أ)

٨) اذا كانت $ق = \sqrt{س^{٣} - ٣س}$ ، ما القيم الحرجة على $[-٢، ٢]$

الحل :

$$ق' = \frac{٣س^{٢} - ٣}{٢ \times \sqrt{س^{٣} - ٣س}}$$

البسط :

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$\Leftarrow س = ١، -١$

المقام :

$س^{٣} - ٣س = ٠$

$س(س^{٢} - ٣) = ٠$

$س = ٠، \sqrt{٣}، -\sqrt{٣}$

القيم الحرجة : $\{-٢، ٢، ١، -١، ٠، -\sqrt{٣}، \sqrt{٣}\}$

٩) اذا كانت $\text{ق} = \begin{cases} \text{س}^2 - \text{س} & ، \ 0 \le \text{س} < 1 \\ \text{س} - 1 & ، \ 1 \le \text{س} \le 3 \end{cases}$

فما القيم الحرجة

الحل :

$\text{ق}' = \begin{cases} 2\text{س} - 1 & ، \ 0 < \text{س} < 1 \\ 1 & ، \ 1 < \text{س} < 3 \end{cases}$

$\text{ق}' = 0 \Leftarrow 2\text{س} - 1 = 0 \Leftarrow \text{س} = \frac{1}{2} \in (0، 1)$

القيم الحرجة : $\{0، \frac{1}{2}، 3\}$

التزايد والتناقص :

١) نجد القيم الحرجة

٢) نعين خط الاعداد

٣) نختبر الاشارات على اقتران $\text{ق}'(\text{س})$

٤) $+ \Leftarrow$ متزايد ، $- \Leftarrow$ متناقص ، $0 \Leftarrow$ ثابت

امثلة :

اوجد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي:

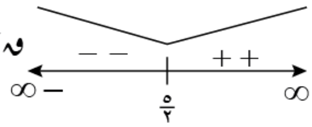
١) $\text{ق} = \text{س}^2 - 5\text{س} + 18$

الحل :

$\text{ق}' = 2\text{س} - 5 = 0 \Leftarrow \text{س} = \frac{5}{2}$

متناقص $(-\infty، \frac{5}{2}]$

متزايد $[\frac{5}{2}، \infty)$



٢) $\text{ق} = \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س}^2 - 15\text{س} - 12 ،\ \text{س} \in [-5، 7]$

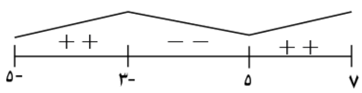
الحل :

$\text{ق}' = \text{س}^2 - 2\text{س} - 15 = 0$

$(\text{س} - 5)(\text{س} + 3) = 0 \Leftarrow \text{س} = 5، -3$

متناقص $[-3، 5]$

متزايد $[-5، -3]\ [5، 7]$

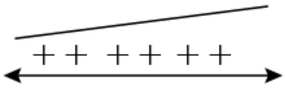


٣) $\text{ق} = \text{س}^3 + 3\text{س} + 9$

الحل :

$\text{ق}' = 3\text{س}^2 + 2 = 0 \Leftarrow \text{س}^2 = \frac{-2}{3}$ ✗

ق متزايد على (ح)



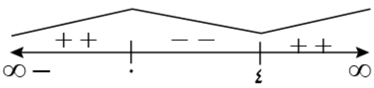
٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - 6\text{س}^2$

الحل :

$\text{ق}' = 3\text{س}^2 - 12\text{س} = 0$

$3\text{س}(\text{س} - 4) = 0 \Leftarrow \text{س} = 0، 4$

القيم الحرجة : $\{0، 4\}$



متزايد على $[4، \infty)\ (-\infty، 0]$

متناقص $[0، 4]$

واجب

٥) $\text{ق} = 2\text{س} + \frac{1}{2\text{س}}$

٦) $\text{ق} = 5\text{جاس}$ لكل $[0، 2\pi]$

الحل :

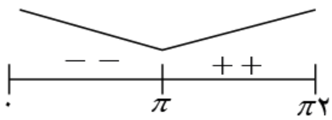
$\text{ق} = -5\text{جاس} = 0 \Leftarrow \text{جاس} = 0$

$\Leftarrow \text{س} = \pi، 2\pi$

القيم الحرجة : $\{0، \pi، 2\pi\}$

متزايد على $[\pi، 2\pi]$

متناقص $[0، \pi]$



٧) $\text{ق} = \begin{cases} \text{س} + 2 & ، \ \text{س} \le 1 \\ [\text{س} + 2] & ، \ 1 < \text{س} < 2 \\ \text{س}^3 - 5 & ، \ \text{س} \ge 2 \end{cases}$

احسب التزايد والتناقص على $[0، 4]$

الحل :

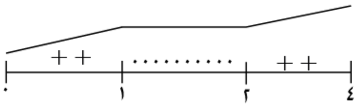
$\text{ق} = \begin{cases} \text{س} + 2 & ، \ \text{س} \le 1 \\ 3 & ، \ 1 < \text{س} < 2 \\ \text{س}^3 - 5 & ، \ \text{س} \ge 2 \end{cases}$

$\text{ق}' = \begin{cases} 1 & ، \ \text{س} < 1 \\ 0 & ، \ 1 < \text{س} < 2 \\ 3\text{س}^2 & ، \ \text{س} > 2 \end{cases}$

القيم الحرجة : {٠، ٤، ١، ٢}

متزايد على [٠، ١] [٢، ٤]

متناقص [١، ٢]



٨) اذا كان ق متزايد على (ع) ، (هـ) متناقص على (ع) وكان ل(س) = ٧ق(س) − ٢هـ^{٣}(س) ، بين ان (ل) متزايد على (ع)

الحل :

ل$'$ = ٧ق$'$ − ٦هـ^{٢}(س) × هـ$'$(س)

ق$'$ > ٠ ⟸ ٧ق$'$ > ٠

هـ^{٢} > ٠ لانه مربع

هـ$'$ < ٠ لانه متناقص

هـ^{٢} × هـ$'$ < ٠ ⟸ −٦هـ^{٢} × هـ$'$ > ٠

⟸ ل$'$ = موجب + موجب = موجب ⟸ ل متزايد

٩) اذا كانت هـ$'$ = ق ، ق$'$ = هـ وكانت ل = ق^{٢}(س) − هـ^{٢}(س) ، اثبت ان ل(س) اقتران ثابت

الحل :

ل$'$ = ٢ق ق$'$ − ٢هـهـ$'$

= ٢هـ$'$ × هـ − ٢هـهـ$'$ = ٠ ⟸ ل = ثابت

١٠) اذا كان ق = (س + ٢)^{٣} + جا^{٢}س ، اثبت ان ق متزايد على [٠، $\frac{\pi}{2}$]

الحل :

ق$'$ = ٣(س + ٢)^{٢} + ٢جاس جتاس

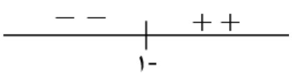
٣(س + ٢)^{٢} موجب لكل (٠، $\frac{\pi}{2}$)

جاس جتاس موجب لكل (٠، $\frac{\pi}{2}$)

⟸ ق$'$ > ٠ لكل (٠، $\frac{\pi}{2}$) ⟸ متزايد على [٠، $\frac{\pi}{2}$]

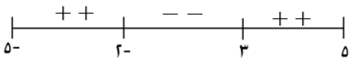
١١) ق = س^{٢} + ٢س + ٥

الحل :



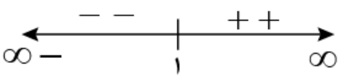
١٢) ق = $\frac{1}{3}$س^{٣} − $\frac{1}{2}$س^{٢} − ٦س على [−٥، ٥]

الحل :



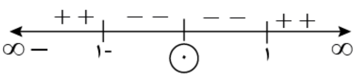
١٣) ق = |٤ − ٤س|

الحل :



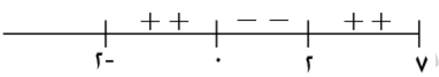
١٤) ق = س + $\frac{1}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

الحل :



١٥) ق = $\begin{cases} ٨ - \text{س}^{٢} ، & -٢ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س} + ٢ ، & ٢ < \text{س} \le ٧ \end{cases}$

الحل :

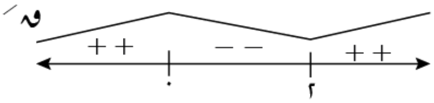


١٦) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ١

الحل :

ق′(س) = ٣س^{٢} − ٦س = ٠

٣س(س − ٢) = ٠ ⟸ س = ٠ ، ٢



متزايد على (−∞ ، ٠] [٢ ، ∞)

متناقص [٠ ، ٢]

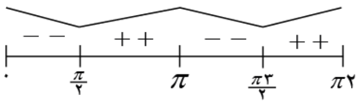
١٧) ق(س) = جتا٢س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل :

ق′(س) = −٢جا٢س = ٠ ⟸ جا٢س = ٠

٢س = π ، ٢π ، ٣π

س = $\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$



متزايد على [$\frac{\pi}{٢}$ ، π] [$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π]

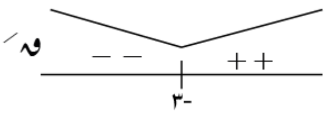
متناقص [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] [π ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

١٨) ق(س) = س^{٢} + ٦س − ٨

الحل :

ق′(س) = ٢س + ٦ = ٠

٢س = −٦ ⟸ س = −٣



متزايد على [−٣ ، ∞)

متناقص (−∞ ، −٣]

١٩) ق(س) = س − |س − ٣| ، س ∈ [−٢ ، ٦]

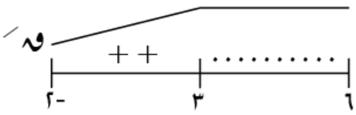
الحل :

٣ − س = ٠ ⟸ س = ٣

ق(س) = س − { ٣ − س ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ س − ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }

= { −٣ + ٢س ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }

ق′(س) = { ٢ ، −٢ < س < ٣ ؛ ٠ ، ٣ < س < ٦ }



متزايد على [−٢ ، ٣]

ثابت [٣ ، ٦]

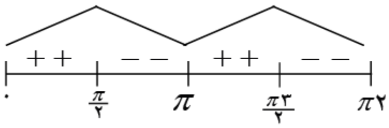
٢٠) ق(س) = جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل :

ق′(س) = ٢جاس جتاس = ٠

جاس = ٠ ⟸ س = π

جتاس = ٠ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$



متزايد على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] [π ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

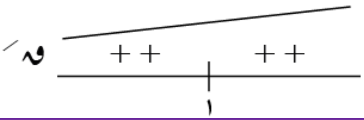
متناقص [$\frac{\pi}{٢}$ ، π] [$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π]

٢١) ق(س) = (س − ١)^{٣}

الحل :

ق′(س) = ٣(س − ١)^{٢} = ٠ ⟸ س = ١

متزايد على (ح)



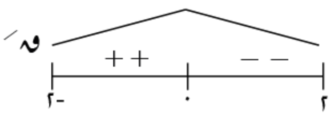
٢٢) ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٢ ، ٢]

الحل :

ق′(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}}$

ق′ = ٠ ⟸ −٢س = ٠ ⟸ س = ٠

ق′ غير موجودة عند س = ٢ ، −٢



متزايد على [−٢ ، ٠]

متناقص [٠ ، ٢]

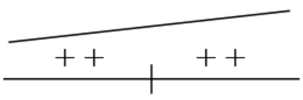
٢٣) ق(س) = س$^{\frac{٣}{٥}}$

الحل :

ق′(س) = $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{-٢}{٥}}$ = $\frac{٣}{٥س^{\frac{٢}{٥}}}$ = $\frac{٣}{٥\sqrt[٥]{س^{٢}}}$

ق′ غير موجودة عند س = ٠

ق متزايد على (ح)



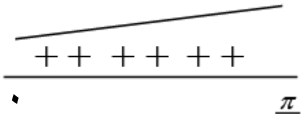
٢٤) ق(س) = س + جتاس ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{2}$]

الحل :

ق′(س) = ١ + جتاس = ٠ ⇐ جتاس = −١

⇐ س = π ∉ (٠، $\frac{\pi}{2}$)

متزايد على [٠، $\frac{\pi}{2}$]

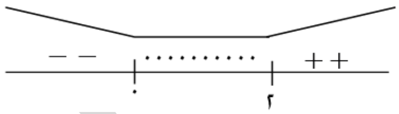


٢٥) ق(س) = { س² + ١ ، س ≤ ٠
١ ، ٠ < س < ٢
√(س − ٢) ، س ≥ ٢ }

الحل :

ق′(س) = { ٢س ، س < ٠
٠ ، ٠ < س < ٢
١ / (٢√(س − ٢)) ، س > ٢ }

ق′ = ٠ ⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = ٠



متزايد على [٢، ∞)

متناقص (−∞، ٠] ، ثابت [٠، ٢]

٢٦) ق(س) = (س − ٣) / (س² + ٩)

الحل :

ق′(س) = ((س² + ٩) × ١ − (س − ٣) × ٢س) / (س² + ٩)²

= (س² + ٩ − ٢س² + ٦س) / (س² + ٩)²

ق′ = ٠ ⇐ −س² + ٦س + ٩ = ٠

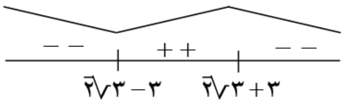
س² − ٦س − ٩ = ٠

المميز : ب² − ٤أجـ = ٣٦ − ٤ × ١ × − ٩

= ٣٦ + ٣٦ = ٧٢

س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) / ٢أ

= (٦ ± √(٣٦ × ٢)) / ٢ = (٦ ± ٦√٢) / ٢ = ٣ ± ٣√٢



واجب

٢٧) ق(س) = { ١ − ٢س ، −٢ ≤ س < ١
|٢س − ٤| ، ١ ≤ س < ٤ }

القيم القصوى :

امثلة :

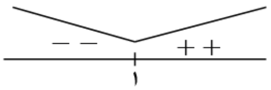
احسب القيم القصوى لكل مما يلي :

١) ق(س) = س² − ٢س + ٥

الحل :

ق′(س) = ٢س − ٢ = ٠ ⇐ س = ١

صغرى محلية عندما س = ١



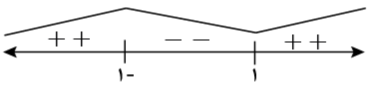
بحيث ق(١) = ١ − ٢ + ٥ = ٤

٢) ق(س) = س³ − ٣س

الحل :

ق′(س) = ٣س² − ٣ = ٠ ⇐ س² = ١

⇐ س = ١ ، −١



س = −١ عظمى محلية

ق(−١) = ٢

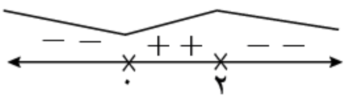
س = ١ صغرى محلية ، ق(١) = −٢

٣) ق(س) = |٢س − س²|

الحل :

٢س − س² = ٠ ⇐ س² − س = ٠

⇐ س = ٠ ، ٢

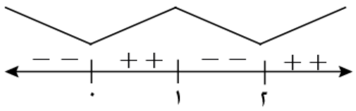


ق(س) = { س² − ٢س ، س < ٠
٢س − س² ، ٠ < س < ٢
س² − ٢س ، س > ٢ }

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س < ٠ \\ ٢ - ٢س & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س - ٢ & ، س > ٢ \\ \text{غ.م} & ، س = ٠، ٢ \end{cases}$$

$٢س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ١ \in (٠، ٢)$

القيم الحرجة : $\{٠، ١، ٢\}$



$س = ٠$ صغرى محلية $ق(٠) = ٠$

$س = ١$ عظمى محلية $ق(١) = ١$

$س = ٢$ صغرى محلية $ق(٢) = ٠$

٤) $ق(س) = \sqrt[٣]{(س^٢ - ٤س)^٢}$

الحل :

$ق(س) = (س^٢ - ٤س)^{\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣}(س^٢ - ٤س)^{\frac{-١}{٣}}(٢س - ٤)$

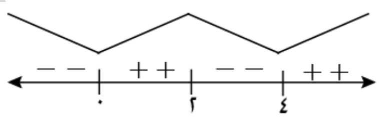
$= \frac{٢(٢س - ٤)}{٣(س^٢ - ٤س)^{\frac{١}{٣}}}$

البسط : $٢(٢س - ٤) = ٠ \Leftarrow س = ٢$

المقام : $س^٢ - ٤س = ٠$

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠، ٤$



$س = ٠$ صغرى محلية $ق(٠) = ٠$

$س = ٢$ عظمى محلية $ق(٢) = \sqrt[٣]{١٦}$

$س = ٤$ صغرى محلية $ق(٤) = ٠$

٥) $ق(س) = (س^٣ - ٩س)^{\frac{١}{٣}}$

الحل :

$ق'(س) = \frac{١}{٣}(س^٣ - ٩س)^{\frac{-٢}{٣}}(٣س^٢ - ٩)$

$= \frac{٣س^٢ - ٩}{٣(س^٣ - ٩س)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{٣س^٢ - ٩}{٣\sqrt[٣]{(س^٣ - ٩س)^٢}}$

البسط : $٣س^٢ - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \pm\sqrt{٣}$

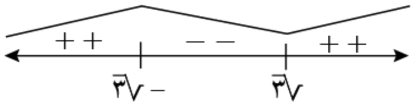
المقام : $س^٣ - ٩س = ٠$

$س(س^٢ - ٩) = ٠$

$س = ٠، ٣، -٣$

القيم الحرجة $\{\pm\sqrt{٣}، \pm٣، ٠\}$

لان المقام موجب ندرس اشارة البسط



متزايد $(-\infty، -\sqrt{٣}] ، [\sqrt{٣}، \infty)$

متناقص $[-\sqrt{٣}، \sqrt{٣}]$

$س = -\sqrt{٣}$ عظمى محلية

$س = \sqrt{٣}$ صغرى محلية

٦) $ق(س) = \frac{س^٢}{\sqrt{س - ١}}$ ، $س > ١$

الحل :

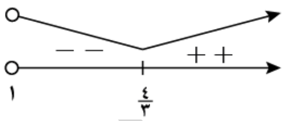
$ق' = \frac{٢س \times \sqrt{س - ١} - \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}} \times س^٢}{س - ١}$

$ق' = \frac{٣س^٢ - ٤س}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

اصفار البسط : $٣س^٢ - ٤س = ٠$

$س(٣س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ✗ ، $س = \frac{٤}{٣}$ ✓ (حرجة)



متزايد $[\frac{٤}{٣}، \infty)$

متناقص $(١، \frac{٤}{٣}]$

$س = \frac{٤}{٣}$ صغرى محلية مطلقة

٧) $ق(س) = (س - أ)^٢ + (س - ب)^٢ + (س - جـ)^٢$

اثبت انه يوجد حرجة عند $س = \frac{أ + ب + جـ}{٣}$

بحيث أ ، ب ، جـ ثوابت

الحل :

$ق' = ٢(س - أ) + ٢(س - ب) + ٢(س - جـ) = ٠$

$٢س + ٢س + ٢س = ٢أ + ٢ب + ٢جـ$

$٦س = ٢(أ + ب + جـ)$

$س = \frac{(أ + ب + جـ)}{٣}$ (حرجة)

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - |٣ - \text{س}|$ على $[-٢ ، ٦]$

الحل :

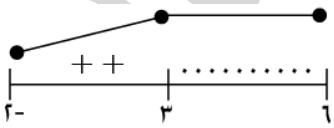
نعرف : ++ بين -٢ و ٣ ، -- بين ٣ و ٦

$$\text{ق} = \begin{cases} \text{س} - (٣ - \text{س}) & ، \ -٢ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{س} - (\text{س} - ٣) & ، \ ٣ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$$

$$\text{ق} = \begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & ، \ -٢ \le \text{س} \le ٣ \\ ٣ & ، \ ٣ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$$

$$\text{ق}' = \begin{cases} ٢ & ، \ -٢ < \text{س} < ٣ \\ ٠ & ، \ ٣ < \text{س} < ٦ \\ \text{غ.م} & ، \ \text{س} = -٢ ، ٣ ، ٦ \end{cases}$$

الحرجة :
- اطراف : $-٢ ، ٦$
- $\text{ق}' = ٠$: لكل $(٣ ، ٦)$
- تحول : $\text{س} = ٣$



متزايد $[-٢ ، ٣]$

ثابت $[٣ ، ٦]$

---

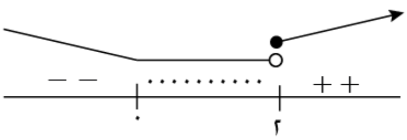
٩) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \ \text{س} \le ٠ \\ ١ & ، \ ٠ < \text{س} < ٢ \\ \sqrt{\text{س} - ٢} & ، \ \text{س} \ge ٢ \end{cases}$$

الحل :

ق غير متصل عند $\text{س} = ٢$

$$\text{ق}' = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \ \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، \ ٠ < \text{س} < ٢ \\ \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س} - ٢}} & ، \ \text{س} > ٢ \end{cases}$$

القيم الحرجة : $[٠ ، ٢) \cup \{٢\}$



متناقص $(-\infty ، ٠]$

متزايد $[٢ ، \infty)$ ، ثابت $[٠ ، ٢)$

---

١٠) احسب اصغر قيمة للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٣| - ٥$

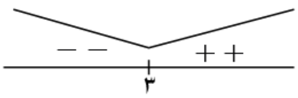
الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٨ & ، \ \text{س} \ge ٣ \\ -٢ - \text{س} & ، \ \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\text{ق}' = \begin{cases} ١ & ، \ \text{س} > ٣ \\ -١ & ، \ \text{س} < ٣ \\ \text{غ.م} & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

$\text{س} = ٣$ صغرى محلية مطلقة

بحيث $\text{ق}(٣) = -٥$



$\Leftarrow$ اصغر قيمة هي (-٥)

---

١١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٤ - ٦\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٣$

الحل :

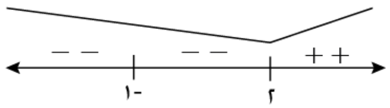
$\text{ق}' = ٤\text{س}^٣ - ١٢\text{س} - ٨ = ٠$

بالتجريب : $\text{س} = -١ \Leftarrow$ تركيبية :

$(\text{س} + ١)(\text{س}^٢ - \text{س} - ٢) = ٠$

$(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$

$\text{س} = -١ ، ٢$



متزايد $[٢ ، \infty)$

متناقص $(-\infty ، ٢]$

$\text{س} = ٢$ عظمى محلية $\text{ق}(٢) = -٢١$

---

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ |\text{س} - ٣|$

الحل :

$$\text{ق} = \begin{cases} \text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ & ، \ \text{س} \ge ٣ \\ ٣\text{س}^٢ - \text{س}^٣ & ، \ \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\text{ق}' = \begin{cases} ٣\text{س}^٢ - ٦\text{س} & ، \ \text{س} > ٣ \\ ٦\text{س} - ٣\text{س}^٢ & ، \ \text{س} < ٣ \\ \text{غ.م} & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

$٣\text{س}^٢ - ٦\text{س} = ٠$

$٣\text{س}(\text{س} - ٢) = ٠$

$\text{س} = ٠$ ✗ ، $\text{س} = ٢$ ✗

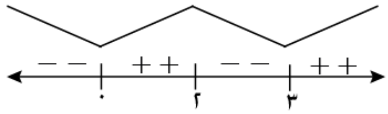
لان $\text{س} > ٣$

$٦\text{س} - ٣\text{س}^٢ = ٠$

$\text{س} = ٠$ ✓ ، $\text{س} = ٢$ ✓

لكل $\text{س} < ٣$

القيم الحرجة : {٠،٢،٣}



(٢،ق(٢)) = (٢،٤) عظمى محلية

(٠،ق(٠)) = (٠،٠) صغرى محلية مطلقة

(٣،ق(٣)) = (٣،٠) صغرى محلية مطلقة

١٣) ق(س) = س + ١٦/س ، س ∈ [−٧،٧] − {٠}

الحل :

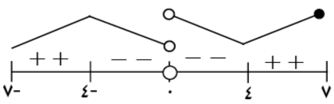
ق متصل على [−٧،٧] − {٠}

ق′ = ١ + −١٦/س² = (س² − ١٦)/س²

القيم الحرجة : {−٧،٧،٤،−٤}

متزايد على [−٧،−٤] [٤،٧]

متناقص [−٤،٠) (٠،٤]



ق(−٤) = −٨ عظمى محلية

ق(٤) = ٨ صغرى محلية

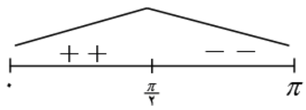
١٤) ق(س) = √جاس ، س ∈ [٠،π]

الحل :

ق′(س) = جتاس / (٢√جاس) = ٠

جتاس = ٠ ⇐ س = π/٢

٢√جاس = ٠ ⇐ س = ٠ ، π



س = π/٢ عظمى محلية ق(π/٢) = ١

س = ٠ صغرى ق(٠) = ٠

س = π صغرى ق(π) = ٠

١٥) ق(س) = س² |س − ٣| ، س ∈ [−١،٤]

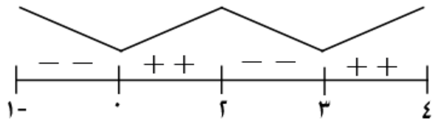
الحل :

ق = { −س³ + ٣س² ، −١ ≤ س < ٣
      س³ − ٣س² ، ٣ ≤ س ≤ ٤ }

ق′ = { ٦س − ٣س² ، −١ < س < ٣
       ٣س² − ٦س ، ٣ < س < ٤
       غ.م ، س = ٣ }

ق′ = ٣س² − ٦س = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٢

القيم الحرجة : {−١،٠،٢،٣،٤}



س = −١ عظمى ق(−١) = ٤

س = ٢ عظمى محلية ق(٢) = ٤

س = ٤ عظمى ق(٤) = ١٦ مطلقة

س = ٣ صغرى محلية ق(٣) = ٠ مطلقة

س = ٠ صغرى محلية ق(٠) = ٠ مطلقة

١٦) ق(س) = ٤س² − ب س يوجد قيمة صغرى عندما س = ١ ، فما قيمة (ب)

الحل :

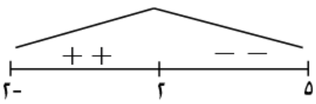
ق′(١) = ٠ ⇐ ٨س − ب = ٠

٨ − ب = ٠ ⇐ $\boxed{٨ = ب}$

١٧) ق(س) = ٤س − س² على [−٢،٥]

الحل :

ق′ = ٤ − ٢س = ٠ ⇐ س = ٢



ق(٢) = ٨ − ٤ = ٤ عظمى محلية مطلقة

ق(−٢) = −٨ − ٤ = −١٢ صغرى مطلقة

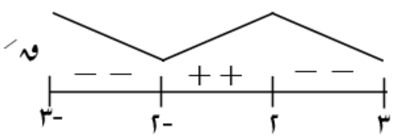
ق(٥) = ٢٠ − ٢٥ = −٥ صغرى

١٨) ق(س) = ١٢س − س³ ، س ∈ [−٣،٣]

الحل :

ق′ = ١٢ − ٣س² = ٠ ⇐ س = ±٢

القيم الحرجة : {−٣،−٢،٢،٣}



ق$(-٣) = ٩$ عظمى

ق$(٢) = ١٦$ عظمى محلية مطلقة

ق$(-٢) = -١٦$ صغرى محلية مطلقة

ق$(٣) = ٩$ صغرى

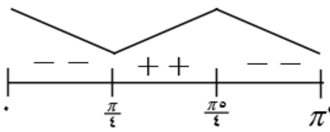
---

١٩) ق(س) = −جاس−جتاس ، س ∈ $[٠، ٢\pi]$

الحل :

ق′ = −جتاس+جاس = ٠ ⟸ جتاس = جاس

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$



ق(٠) = −١ صغرى

ق$(\frac{٥\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ عظمى مطلقة

ق$(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ صغرى مطلقة

ق$(٢\pi) = -١ + ٠ = -١$ عظمى

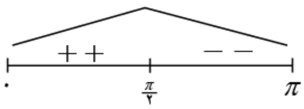
---

٢٠) ق(س) = س جاس+جتاس ، س ∈ $[٠، \pi]$

الحل :

ق(س) = س جتاس + ~~جاس~~ − ~~جاس~~ = ٠

س جتاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$



ق$(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} + ٠ = \frac{\pi}{٢}$ عظمى مطلقة

ق(٠) = ٠ + ١ = ١ صغرى

ق$(\pi) = ٠ + (-١) = -١$ صغرى مطلقة

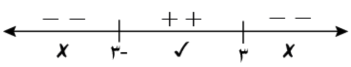
---

٢١) ق(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$

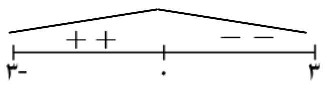
الحل :

نحدد المجال : ٩ − س^٢ = ٠ ⟸ س = ±٣

ق معرف على [−٣، ٣]



ق′ = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^٢}} = ٠$



−٢س = ٠ ⟸ س = ٠ | ٩ − س^٢ = ٠ ⟸ س = −٣ ، ٣

ق(٠) = ٣ عظمى مطلقة

ق(−٣) = ٠ صغرى مطلقة

ق(٣) = ٠ صغرى مطلقة

٢٢) جد القيم الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران

ق(س) = س^٣ − ٦س^٢ + ٩س ، س ∈ [−١، ٥]

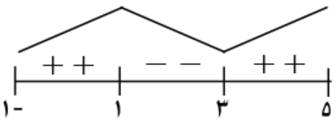
الحل :

ق′ = ٣س^٢ − ١٢س + ٩ = ٠ ÷ ٣

ق′ = س^٢ − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) = ٠

س = ٣ ، ١



القيم الحرجة : (−١، −١٦) (١، ٤)

(٣، ٠) (٥، ٢٠)

ق(−١) = −١٦ صغرى مطلقة

ق(١) = ٤ عظمى محلية

ق(٣) = ٠ صغرى محلية

ق(٥) = ٢٠ عظمى مطلقة

---

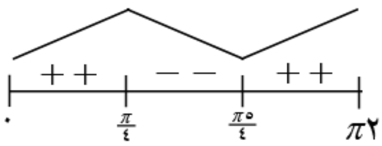
٢٣) جد القيم الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران

ق(س) = جتاس+جاس ، س ∈ $[٠، ٢\pi]$

الحل :

ق′ = −جاس+جتاس = ٠ ⟸ جتاس = جاس

س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$



ق(٠) = ١ صغرى

ق$(\frac{\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ عظمى محلية

ق$(\frac{٥\pi}{٤}) = \frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ صغرى محلية

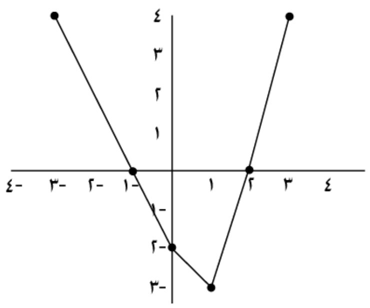
---

٢٤) الشكل التالي يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران كثير الحدود جد النقط الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران ق(س) المعرف على الفترة جد النقط الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران [−٢، ٣] ، اعتمد على ذلك في تعين :

أ) النقط الحرجة للاقتران ق

ب) القيم القصوى المحلية للاقتران ق

ج) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق



الحل :

أ) النقاط الحرجة عند

س ∈ {−٣، −١، ٢، ٣}

ب) قيمة عظمى محلية عند $س = -١$ هي $ق(-١)$

قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$ هي $ق(٢)$

ج) متزايد في $[-٣، -١]$ ، $[٢، ٣]$

متناقص $[-١، ٢]$

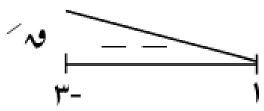
---

٢٥) جد القيم الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) وبين المطلقة منها لكل من الاقترانات الاتية :

أ) $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ٥$ ، $س \in [-٣، ١]$

الحل :

$ق'(س) = ٢س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٣ \notin$



$ق(-٣) = ٣٢$
عظمى مطلقة

$ق(١) = ٠$ صغرى مطلقة

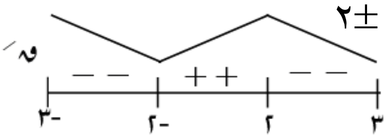
ب) $ق(س) = ١٢س - س^{٣}$ ، $س \in [-٣، ٣]$

الحل :

$ق'(س) = ١٢ - ٣س^{٢} = ٠ \Leftarrow ١٢ = ٣س^{٢}$

$\Leftarrow س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

$ق(-٣) = -٩$



$ق(٢) = ١٦$ عظمى محلية ومطلقة

$ق(-٢) = -١٦$ صغرى محلية ومطلقة

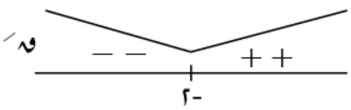
$ق(٣) = ٩$

ج) $ق(س) = س^{٢} + ٤س - ٥$ ، $س \in ح$

الحل :

$ق'(س) = ٢س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

$ق(-٢) = -٩$



صغرى محلية ومطلقة

د) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، \; -٢ \le س < ٣ \\ ١٠ - ٢س & ، \; ٣ < س < ٧ \end{cases}$

الحل :

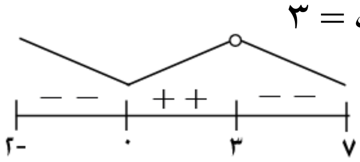
$ق(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، \; -٢ < س < ٣ \\ ٢ & ، \; ٣ < س < ٧ \end{cases}$

$ق' = ٠ \Leftarrow ٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ق'$ غير موجودة عند $س = ٣$

$ق'(-٢) = ٩$



∴ لا توجد قيمة عظمى مطلقة

$ق(٠) = ٥$ صغرى محلية

$ق(٧) = -٤$ (غير موجودة)

لا توجد صغرى مطلقة

هـ) $ق(س) = س^{٢} \, |س - ٢|$ ، $س \in ح$

الحل :

$ق(س) = س^{٢} \times \begin{cases} ٢ - س & ، \; س < ٢ \\ س - ٢ & ، \; س \ge ٢ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - س^{٣} & ، \; س < ٢ \\ س^{٣} - ٢س^{٢} & ، \; س \ge ٢ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٤س - ٣س^{٢} & ، \; س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ٤س & ، \; س > ٢ \end{cases}$

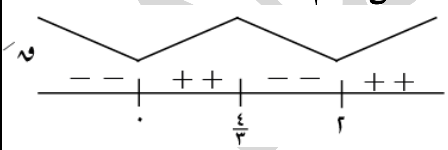
$ق' = ٠ \Leftarrow ٤س - ٣س^{٢} = ٠$

$س(٤ - ٣س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، \frac{٤}{٣}$

$٣س^{٢} - ٤س = ٠$

$\Leftarrow س(٣س - ٤) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، \frac{٤}{٣}$ ✗

$ق'$ غير موجودة عند $س = ٢$



$ق(٠) = ٠$ صغرى محلية ومطلقة

$ق(٢) = ٠$ صغرى محلية ومطلقة

$ق(\frac{٤}{٣}) = \frac{٣٢}{٢٧}$ عظمى محلية

و) ق(س) = س^{٣} − $\frac{س^{٤}}{٤}$ ، س ∈ [−١، ٤]

الحل :

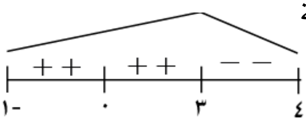
ق′(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} = ٠

س^{٢} (٣ − س) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٣

ق(−١) = $\frac{-٥}{٤}$ صغرى ومطلقة

ق(٤) = ٠

ق(٣) = $\frac{٢٧}{٤}$ عظمى محلية ومطلقة



ز) ق(س) = √جاس ، س ∈ [٠، π]

الحل :

ق(س) = $\frac{جتاس}{٢\sqrt{جاس}}$

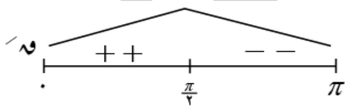
ق′(س) = ٠ ⇐ جتاس = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$

ق′ غير موجودة ⇐ جاس = ٠ ⇐ س = ٠ ، π

ق(٠) = ٠ صغرى مطلقة

ق(π) = ٠ صغرى مطلقة

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ١ عظمى محلية ومطلقة



ح) ق(س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٤س)^{٢}}$ ، س ∈ ح

الحل :

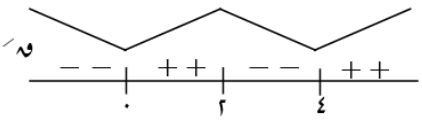
ق′(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س^{٢} − ٤س)$^{\frac{-١}{٣}}$ (٢س − ٤)

= $\frac{٢(٢س - ٤)}{٣\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤س}}$

ق′(س) = ٠ ⇐ ٢س − ٤ = ٠ ⇐ س = ٢

ق′ غير موجودة ⇐ س^{٢} − ٤س = ٠

⇐ س(س − ٤) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٤



ق(٢) = $\sqrt[٣]{١٦}$ عظمى محلية

ق(٠) = ٠ صغرى محلية ومطلقة

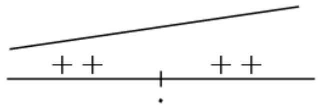
ق(٤) = ٠ صغرى محلية ومطلقة

ط) ق(س) = س^{٣} + ١ ، س ∈ ح

الحل :

ق′(س) = ٣س^{٢} = ٠

ق متزايد على (ح)



لا توجد قيم قصوى

٢٦) جد قيم كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س نقطتين حرجتين عند س = −١ ، س = ٢

الحل :

ق′(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب

ق′(−١) = ٣ − ٢أ + ب = ٠

⇐ −٢أ + ب = −٣ ......(١)

ق′(٢) = ١٢ + ٤أ + ب = ٠

⇐ ٤أ + ب = −١٢ ......(٢)

بالطرح : ٦أ = −٩ ⇐ أ = $\frac{-٩}{٦}$ = $\frac{-٣}{٢}$

بالتعويض : −٢ × $\frac{-٣}{٢}$ + ب = −٣

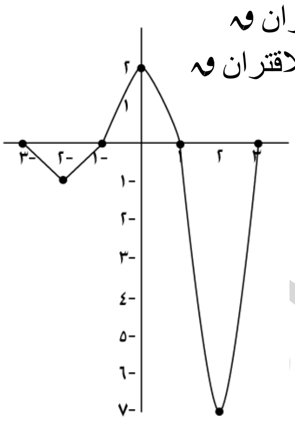
٣ + ب = −٣ ⇐ ب = −٦

٢٧) الشكل التالي يمثل منحنى كثير الحدود ق(س) المعرف على الفترة [−٣، ٣] ، اعتمد على ذلك في تعيين :

أ) القيم الحرجة للاقتران ق

ب) القيم القصوى المحلية للاقتران ق

ج) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق



الحل :

أ) القيم الحرجة :

(−٣، ٠) ، (−٢، ٢)

(٠، ٢) ، (٢، −٧)

(٣، ٠)

ب) ق(−٢) = −٢ صغرى محلية

ق(٠) = ٢ عظمى محلية ومطلقة

ق(٢) = −٧ صغرى محلية ومطلقة

ج) متزايد في [−٢، ٠] [٢، ٣]

متناقص [−٣، −٢] [٠، ٢]

التقعر ونقاط الانعطاف :

امثلة :

اوجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لكل مما يلي :

١) $ق = س^{٤} - ٦س^{٣} + ١٢س^{٢}$ على $[-٥، ٥]$

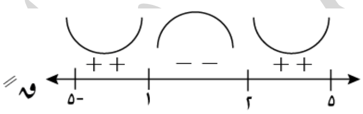
الحل :

$ق' = ٤س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٤س$

$ق'' = ١٢س^{٢} - ٣٦س + ٢٤ = ٠$

$س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٢، ١$



مقعر للأعلى $[-٥، ١][٢، ٥]$

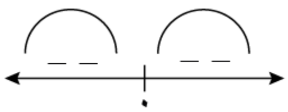
مقعر للأسفل $[١، ٢]$

٢) $ق = س^{\frac{٢}{٣}}$

الحل :

$ق' = \frac{٢}{٣}س^{\frac{-١}{٣}} \Leftarrow ق'' = \frac{-٢}{٩}س^{\frac{-٤}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^{٤}}}$

$ق''$ غير موجودة عندما س = ٠



مقعر للأسفل على (ع)

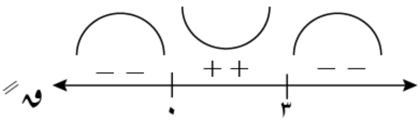
٣) $ق = ٦س^{٣} - س^{٤}$

الحل :

$ق' = ١٨س^{٢} - ٤س^{٣}$

$ق'' = ٣٦س - ١٢س^{٢} = ٠$

$١٢س(٣ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠، ٣$



نقاط الانعطاف $(٠،٠)(٣، ٨١)$

٤) $ق = ٢جتاس + \frac{١}{٢}جا٢س$ على $[٠، ٢\pi]$

الحل :

$ق' = -٢جاس + \frac{١}{٢} \times ٢جتا٢س$

$ق'' = -٢جتاس - ٢جا٢س = ٠$

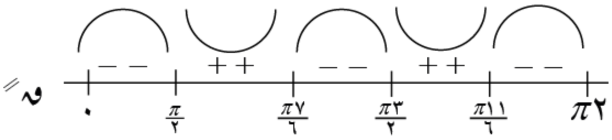
$ق'' = -٢جتاس - ٢(٢جاسجتاس) = ٠$

$-٢جتاس(١ + ٢جاس) = ٠$

$-٢جتاس = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}$

$١ + ٢جاس = ٠ \Leftarrow جاس = \frac{-١}{٢}$

$\Leftarrow س = \frac{٧\pi}{٦}، \frac{١١\pi}{٦}$



نقاط الانعطاف :

$(\frac{\pi}{٢}، ٠)(\frac{٧\pi}{٦}، \frac{-٣\sqrt{٣}}{٤})(\frac{٣\pi}{٢}، ٠)(\frac{١١\pi}{٦}، \frac{٣\sqrt{٣}}{٤})$

٥) $ق = س^{٣} - ١٢س + ٣$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$ق' = ٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$٣س^{٢} = ١٢ \Leftarrow س = \pm ٢$

$ق'' = ٦س$

$س = ٢ \Leftarrow ق''(٢) = ١٢ > ٠$

$\Leftarrow$ صغرى محلية للاقتران ق عندما س = ٢ وهي $ق(٢) = -١٣$

$س = -٢ \Leftarrow ق''(-٢) = -١٢ < ٠$

$\Leftarrow$ عظمى محلية للاقتران ق وهي $ق(-٢) = ١٩$

٦) $ق = س + \frac{٤}{س}$

الحل :

ق غير متصل عندما س = ٠

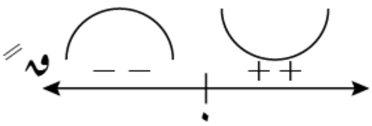
$ق' = ١ - \frac{٤}{س^{٢}}$

$ق'' = \frac{٤ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٨}{س^{٣}}$

$ق''$ غير موجودة عندما س = ٠

مقعر للأسفل $(-\infty ، 0)$

مقعر للأعلى $(0 ، \infty)$



٧) $ق = \sqrt{16 - س^2}$ ، $س \in [-4 ، 4]$

الحل :

$ق = (16 - س^2)^{\frac{1}{2}}$

$ق' = \frac{1}{2}(16 - س^2)^{-\frac{1}{2}} \times -2س$

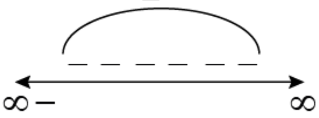
$= -س(16 - س^2)^{-\frac{1}{2}}$

$ق'' = -س \times -\frac{1}{2}(16 - س^2)^{-\frac{3}{2}} \times -2س + (16 - س^2)^{-\frac{1}{2}} \times 1$

$= \frac{-س^2}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(16 - س^2)^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{-س^2 - (16 - س^2)}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-16}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$

مقعر للأسفل $[-4 ، 4]$



٨) $ق = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س < 2 \\ 5 - س & ، س \geq 2 \end{cases}$

الحل :

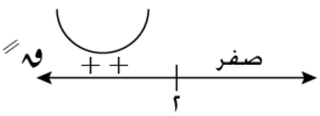
$ق' = \begin{cases} 2س & ، س < 2 \\ -1 & ، س > 2 \end{cases}$

$ق'' = \begin{cases} 2 & ، س < 2 \\ 0 & ، س > 2 \end{cases}$

ق متصل وقابل للاشتقاق

عندما $س = 2$

مقعر للأعلى $(-\infty ، 2]$



٩) $هـ(س) = \left(\frac{س - 1}{س}\right)^2$

الحل :

$هـ = \left(1 - \frac{1}{س}\right)^2 = 1 - \frac{2}{س} + \frac{1}{س^2} = 1 - 2س^{-1} + س^{-2}$

$هـ' = 2س^{-2} - 2س^{-3}$

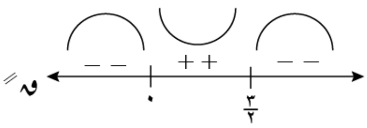
$هـ'' = -4س^{-3} + 6س^{-4}$

$= \frac{-4}{س^3} + \frac{6}{س^4} = \frac{1}{س^3}\left(-4 + \frac{6}{س}\right)$

هـ'' غير موجودة عندما $س = 0$

$هـ'' = 0 - 4 + \frac{6}{س} = 0 \Leftarrow \frac{6}{س} = 4 \Leftarrow س = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

مقعر للأعلى



$(-\infty ، 0] [0 ، \frac{3}{2}]$

مقعر للأسفل $[\frac{3}{2} ، \infty)$

١٠) $ق = جتاس - جاس + 1$ ، $س \in [0 ، \pi]$

الحل :

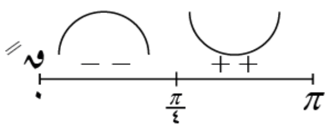
$ق' = -جاس - جتاس$

$ق'' = -جتاس + جاس = 0$

$جاس = جتاس \Leftarrow س = \frac{\pi}{4}$

مقعر للأسفل $[0 ، \frac{\pi}{4}]$

مقعر للأعلى $[\frac{\pi}{4} ، \pi]$



١١) $ق = س^3 - 6س^2 + 9س + 2$

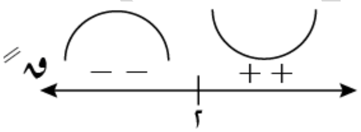
الحل :

$ق' = 3س^2 - 12س + 9$

$ق'' = 6س - 12 = 0$

$\Leftarrow س = 2$

نقطة الانعطاف : $(2 ، 4)$



١٢) $ق = س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}}$

الحل :

$ق' = \frac{2}{3}س^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}س^{-\frac{2}{3}}$

$ق'' = \frac{-2}{9}س^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9}س^{-\frac{5}{3}}$

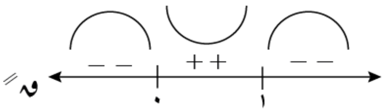
$= \frac{-2}{9س^{\frac{4}{3}}} + \frac{2}{9س^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{9س^{\frac{4}{3}}}\left(-1 + \frac{1}{س^{\frac{1}{3}}}\right)$

ق″ غير موجودة عندما $س = ٠$

$ق'' = ٠ \Leftarrow -١ + \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} = ١$

$\Leftarrow س^{\frac{١}{٣}} = ١ \Leftarrow س = ١$

نقاط الانعطاف :



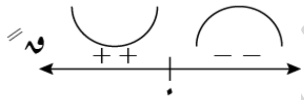
$(٠،٠)$ $(١،٠)$

١٣) $ق = س^{\frac{٣}{٥}}$

الحل :

$ق' = \frac{٣}{٥} س^{\frac{-٢}{٥}} \Leftarrow ق'' = \frac{-٦}{٢٥} س^{\frac{-٧}{٥}} = \frac{-٦}{٢٥ س^{\frac{٧}{٥}}}$

ق″ غير موجودة عندما $س = ٠$



نقطة الانعطاف : $(٠،٠)$

١٤) $ق = س - ظاس$ ، $س \in [\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

الحل :

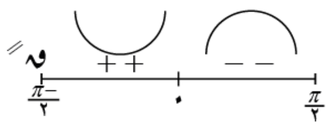
$ق' = ١ - قا^٢س$

$ق'' = -٢قاس \times قاس ظاس = ٠$

$= -٢قا^٢س ظاس = ٠$

$قا^٢س = ٠$	$ظاس = ٠$
لا يوجد	$س = ٠$

نقطة الانعطاف :



$(٠،٠)$

١٥) $ق = جاس - جتاس$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$ق' = جتاس + جاس = ٠ \Leftarrow جتاس = -جاس$

$\Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٧\pi}{٤}$

$ق'' = -جاس + جتاس$

$\Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤}$

$\Leftarrow ق''(\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} < ٠$

عظمى محلية عندما $س = \frac{٣\pi}{٤}$

$ق(\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} - (\frac{-١}{\sqrt{٢}}) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

$س = \frac{٧\pi}{٤} \Leftarrow ق''(\frac{٧\pi}{٤}) = \frac{٢}{\sqrt{٢}} > ٠$

صغرى محلية وهي $ق(\frac{٧\pi}{٤}) = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

١٦) $ق = س^٢ + \frac{١٢٨}{س}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$ق' = ٢س - \frac{١٢٨}{س^٢} = ٠$

$٢س = \frac{١٢٨}{س^٢} \Leftarrow س^٣ = ٦٤ \Leftarrow س = ٤$

$ق'' = ٢ + \frac{١٢٨ \times ٢س}{س^٤} \Leftarrow ق''(٤) = ٦ > ٠$

$\Leftarrow$ صغرى محلية عندما $س = ٤$ وهي

$ق(٤) = ١٦ + ٣٢ = ٤٨$

١٧) اذا كانت $ق = أس^٣ + بس^٢ + جـس + د$ الذي يمر بالنقطة $(١،٥)$ ومعادلة المماس عند الانعطاف $(٢،١)$ هي $ص + ٣س = ٧$ فما قيم أ ، ب ، جـ ، د

الحل :

$ق' = ٣أس^٢ + ٢بس + جـ$

$ق'' = ٣أ \times ٢س + ٢ب = ٦أس + ٢ب$

ق يمر $(١،٥) \Leftarrow ق(١) = ٥$

$\boxed{أ + ب + جـ + د = ٥ \quad ...(١)}$

ق يمر $(٢،١) \Leftarrow ق(٢) = ١$

$\boxed{٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ \quad ...(٢)}$

$(٢،١) \leftarrow$ انعطاف $\leftarrow ق''(٢) = ٠$

$\boxed{١٢أ + ٢ب = ٠ \quad ...(٣)}$

المماس :

$ص = ٧ - ٣س \Leftarrow ص' = -٣ \Leftarrow ق'(٢) = -٣$

$\boxed{١٢أ + ٤ب + جـ = -٣ \quad ...(٤)}$

بالحذف : $٢ب = -١٢أ \Leftarrow ب = -٦أ$

بالتعويض في (٣) : $١٢أ + ٤(-٦أ) + جـ = -٣$

$-١٢أ + جـ = -٣ \Leftarrow جـ = ١٢أ - ٣$

بالتعويض في (٢) :

$٨أ + ٤(-٦أ) + ٢(١٢أ - ٣) + د = ١$

$\Leftarrow د = ٧ - ٨أ$

بالتعويض في (١) :

$أ + (-٦أ) + (-٣ + ١٢أ) + (٧ - ٨أ) = ٥$

$\Leftarrow أ = -١$ ، $ب = ٦$ ، $جـ = -١٥$ ، $د = ١٥$

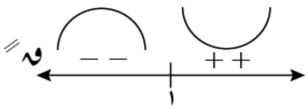
$ق = -س^٣ + ٦س^٢ - ١٥س + ١٥$

١٨) $ق = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

الحل :

$ق' = \frac{-١}{س^٢} \Leftarrow ق'' = \frac{٢س}{س^٤} = \frac{٢}{س^٣}$

$ق''$ غير موجودة عندما $س = ٠$



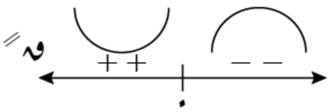
١٩) $هـ = س^{\frac{١}{٣}}$

الحل :

$هـ' = \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}}$

$هـ'' = \frac{-٢}{٩} س^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩س^{\frac{٥}{٣}}}$

$هـ''$ غير موجودة عندما $س = ٠$



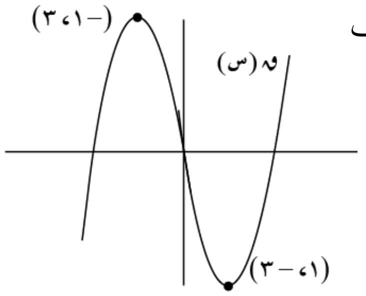
مقعر للأسفل $(-\infty، ٠)$ ، مقعر للأعلى $(٠، \infty)$

استنتاج الخواص من الرسم :

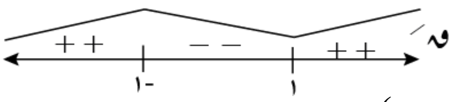
١) الرسم المجاور يمثل ق كثير حدود

أ) اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقاط الانعطاف

ب) ارسم $ق'(س)$ ، $ق''(س)$



الحل :



أ) متزايد في $(-\infty، -١] [١، \infty)$

متناقص $[-١، ١]$

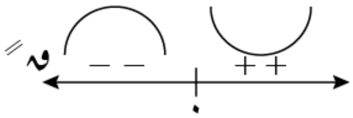
$ق(-١) = ٣$ قيمة عظمى محلية

$ق(١) = -٣$ قيمة صغرى محلية

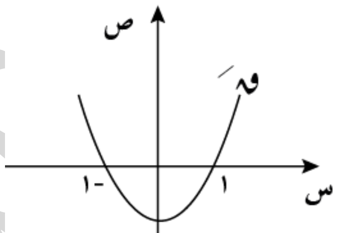
مقعر للاسفل $(\infty، ٠]$

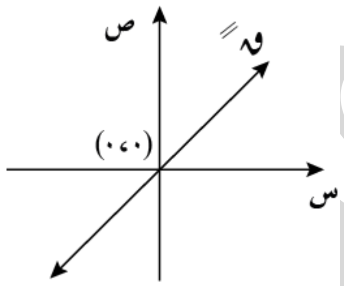
مقعر للاعلى $[٠، \infty)$

نقطة الانعطاف $(٠، ٠)$



ب)

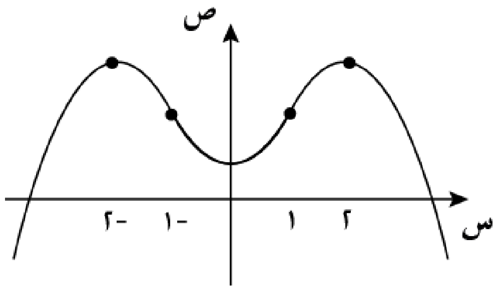




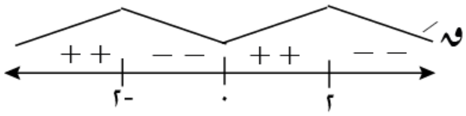
٢) من الشكل المجاور والذي يمثل $ق(س)$

أ) اوجد فترات التزايد والتناقص والتقعر ونقاط الانعطاف

ب) ارسم $ق'(س)$ ، $ق''(س)$



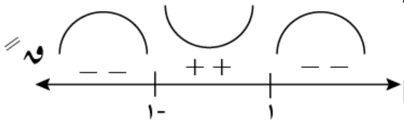
الحل :



أ) متزايد في (−∞، −٢] [٠، ٢]

متناقص [−٢، ٠] [٢، ∞)

ق(٠) قيمة صغرى محلية

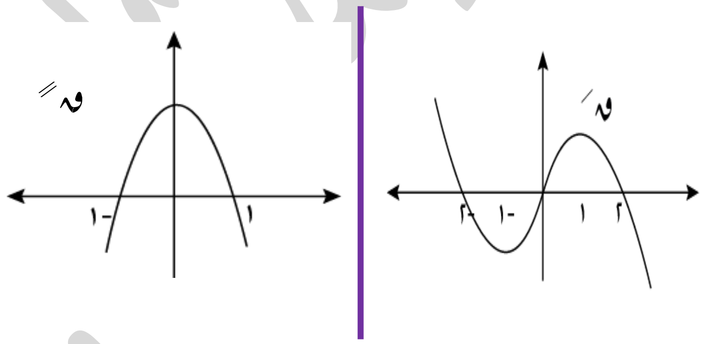


مقعر للاسفل (−∞، −١] [١، ∞)

مقعر للاعلى [−١، ١]

نقاط الانعطاف (١، ق(١)) (−١، ق(−١))

ب)



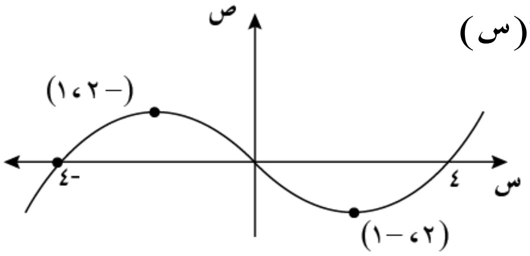
٣) الشكل المجاور يمثل ق′(س)

أ) ما القيم الحرجة

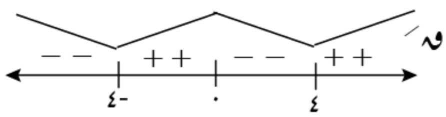
ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل

د) ارسم ق″(س)



الحل :



أ) القيم الحرجة {−٤، ٠، ٤}

ب) متزايد في [−٤، ٠] [٤، ∞)

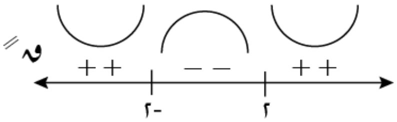
متناقص (−∞، −٤] [٠، ٤]

ق(−٤) قيمة صغرى محلية

ق(٤) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ج) مقعر للاسفل [−٢، ٢]



مقعر للأعلى (−∞، −٢] [٢، ∞)

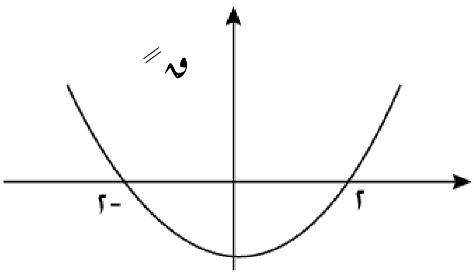
نقاط الانعطاف (٢، ق(٢)) (−٢، ق(−٢))

زوايا الانعطاف :

ظاهـ$_1$ = ق′(−٢) = ١ ⟸ هـ$_1$ = ٤٥

ظاهـ$_2$ = ق′(٢) = −١ ⟸ هـ$_2$ = ١٣٥

د)



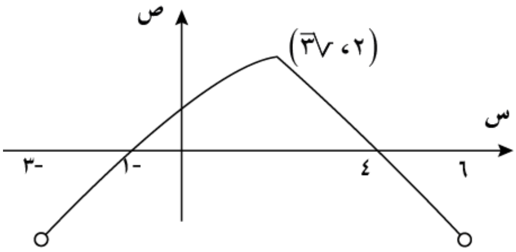
٤) الشكل المجاور يمثل ق′(س) حيث ق متصل على [−٣، ٦]

أ) ما القيم الحرجة

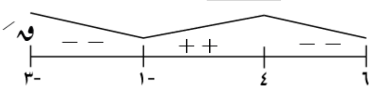
ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل

د) ارسم ق″(س)



الحل :



أ) القيم الحرجة {−٣، ٦، −١، ٤}

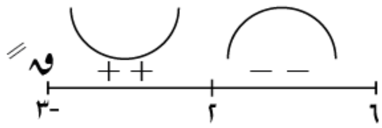
ب) متزايد في [−١، ٤]

متناقص [−٣، −١] [٤، ٦]

قيمة صغرى محلية عندما س = −١

قيمة عظمى محلية عندما س = ٤

ج) مقعر لأعلى



[−٣، ٢]

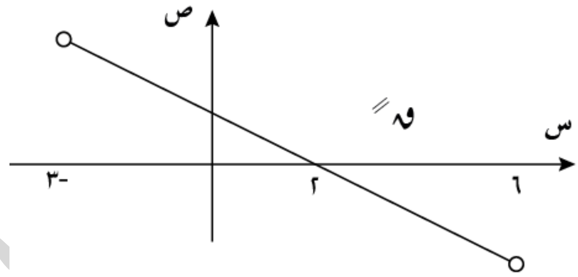
مقعر للأسفل [٢، ٦]

نقاط الانعطاف (٢، ق(٢))

زوايا الانعطاف :

ظاهـ = ق′(٢) = $\sqrt{٣}$ ⇐ هـ = ٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$

د)

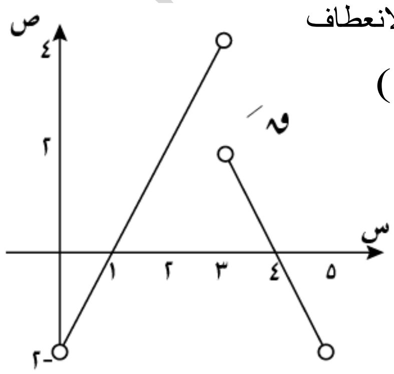


٥) الرسم المجاور يمثل منحنى ق′(س)

أ) ما القيم الحرجة

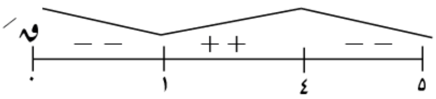
ب) فترات التقعر ونقاط الانعطاف

ج) ارسم ق ، ق″(س)



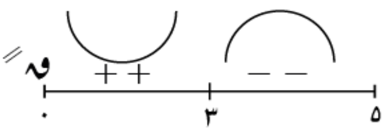
الحل :

أ) القيم الحرجة



{٠، ١، ٣، ٤، ٥}

ب) مقعر لاعلى

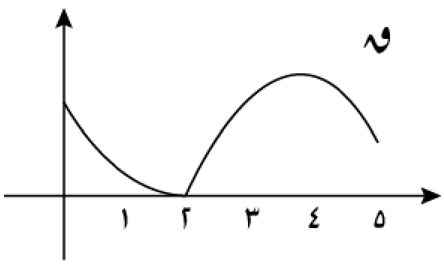


[٠، ٣]

مقعر للاسفل [٣، ٥]

نقاط الانعطاف (٣، ق(٣))

ج)



رسمة ق″(س)

بما ان ق′ خط مستقيم (خطي)

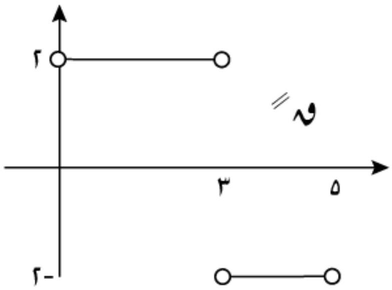
⇐ ق″ = ثابت ⇐ ميل ق′ = ق″

يمر بالنقاط (٠، −٢) (٣، ٤)

ق″ = ميل ق′ = $\frac{٤ - (-٢)}{٣ - ٠}$ = ٢

يمر (٣، ٢) (٥، −٢)

ق″ = ميل ق′ = $\frac{-٢ - ٢}{٥ - ٣}$ = −٢

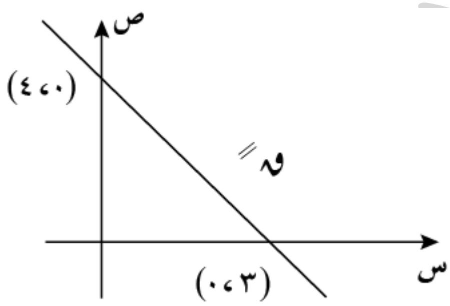


٦) الرسم المجاور يمثل منحنى ق″(س) ، جد :

أ) فترات التقعر ونقاط الانعطاف

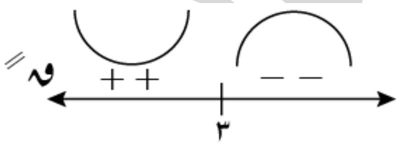
ب) اوجد ق″(٢)

ج) اذا كانت س = ١ ، س = ٥ ، فما القيم الحرجة والقيم القصوى وفترات التزايد والتناقص



الحل :

أ) مقعر لاعلى



(−∞، ٣]

مقعر للاسفل

[٣، ∞)

نقاط الانعطاف (٣، ق(٣))

ب) ق″ = ميل ق″ = $\frac{٤ - ٠}{٠ - ٣}$ = $\frac{-٤}{٣}$

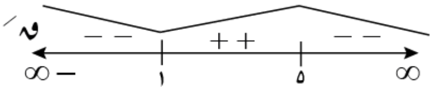
ج) ق´(١) = ٠

ق˝(١) = موجبة ⟸ صغرى محلية عندما س = ١

ق´(٥) = ٠

ق˝(٥) = سالبة ⟸ عظمى محلية عندماس = ٥

متزايد في [١،٥]

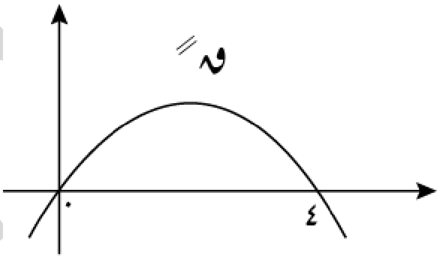


متناقص (– ∞،١] [٥،∞)

٧) الشكل المجاور يمثل ق˝(س)

أ) احسب نقاط الانعطاف

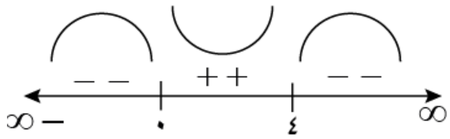
ب) اذا كانت س = ٢ ، س = ٦ ، فما القيم الحرجة وفترات التزايد والتناقص



الحل :

أ) مقعر لاعلى

[٠،٤]



مقعر للاسفل

[٤،∞)(– ∞،٠]

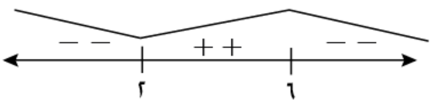
نقاط الانعطاف (٠،ق(٠)) (٤،ق(٤))

ب) ق´(٢) = ٠ ، ق˝(٢) > ٠

⟸ ق(٢) قيمة صغرى محلية

ق´(٦) = ٠ ، ق˝(٦) < ٠

⟸ ق(٦) قيمة عظمى محلية



متزايد في [٢،٦]

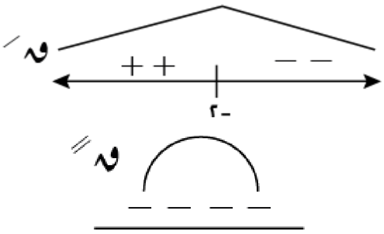
متناقص(– ∞،٢] [٦،∞)

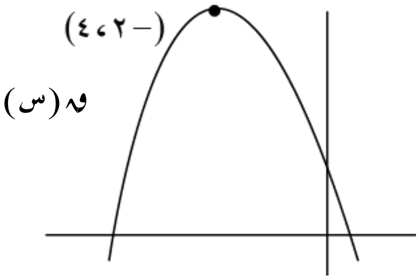
٨) ارسم ق(س) اذا كانت ق´(–٢) = ٤

ق´(س) > ٠ عندما س < –٢ و ق´(س) < ٠

عندما س > –٢، ق˝(س) < ٠

الحل :



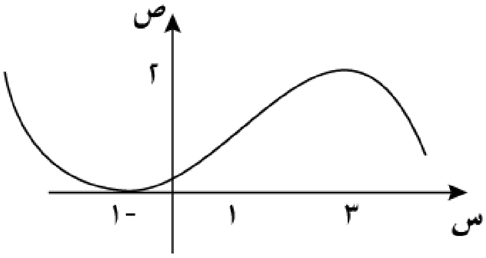


٩) معتمدا على الجدول المجاور ، ارسم منحنى ق(س) حيث ق(١) = ٢

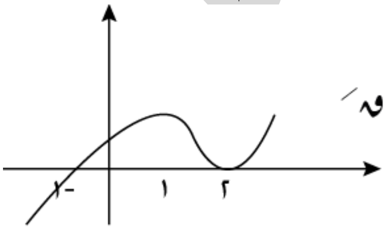
س	–١	١	٣
ق´	٠	٥	٠
ق˝	٥	٠	–٥

الحل :

س	–١	١	٣
ق´	٠	٥	٠
ق˝	٥	٠	–٥
النقطة	صغرى	انعطاف	عظمى
ق	مقعر للاعلى	متزايد	مقعر للاسفل



١٠) الشكل المجاور يمثل ق´ ، ارسم منحنى ق˝



الحل :