٢) انطلقت سفينتان في نفس الوقت فسارت الاولى باتجاه الشرق بسرعة ٦٠ كم / س وسارت الثانية باتجاه الشمال بسرعة ٨٠ كم / س ، احسب معدل تغير المسافة بينهما بعد ساعتين

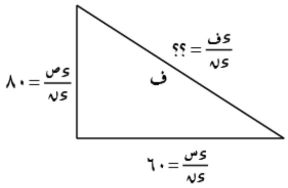
الحل :

$$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن}}{٢ \times \sqrt{س^٢ + ص^٢}}$$

$$= \frac{٢ \times ١٢٠ \times ٦٠ + ٢ \times ١٦٠ \times ٨٠}{٢ \times \sqrt{(١٢٠)^٢ + (١٦٠)^٢}}$$

$$= ١٠٠ \text{ كم / س}$$



بعد ساعتين :

$س = ٦٠ \times ٢ = ١٢٠$

$ص = ٨٠ \times ٢ = ١٦٠$

٣) صفيحة مثلثة الشكل ارتفاعها $= \frac{١}{٢}$ طول القاعدة ، تتمدد فتزداد مساحتها بمعدل (٠,٠٩) سم^٢ / ث ، احسب معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما طولها (٩) سم

الحل :

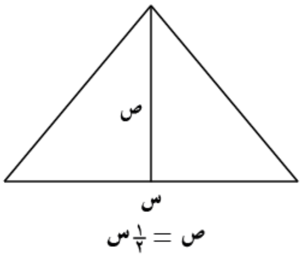
$م = \frac{١}{٢} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$= \frac{١}{٢} \times س \times ص$

$= \frac{١}{٢} \times س \times \frac{١}{٢} س = \frac{١}{٤} س^٢$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} س \frac{دس}{دن}$

$٠,٠٩ = \frac{١}{٢} \times ٩ \frac{دس}{دن} \Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{٠,٠٩}{٤,٥}$ سم / ث



٤) يرتكز سلم طوله (ل) متر على حائط ، اذا انزلق الطرف السفلي بمعدل $(\frac{١}{٥})$ م / ث ، احسب معدل هبوط الطرف المرتكز على الحائط عندما يكون السلم مائل عن الارض بزاوية (٦٠°)

الحل :

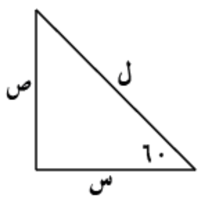
$ل^٢ = س^٢ + ص^٢$

$ص = \sqrt{ل^٢ - س^٢}$

$$\frac{دص}{دن} = \frac{٠ - ٢س \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{ل^٢ + س^٢}}$$

$$= \frac{- ٢ \times \frac{ل}{٢} \times \frac{١}{٥}}{٢ \times \sqrt{ل^٢ - \frac{ل^٢}{٤}}}$$

$$= \frac{-١}{٥\sqrt{٣}}$$



$\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٥}$

$جتا ٦٠ = \frac{س}{ل}$

$\frac{١}{٢} = \frac{س}{ل} \Leftarrow س = \frac{ل}{٢}$

٥) في المثلث المجاور اذا كان معدل تزايد (س) هو (١)سم / ث ومعدل تناقصه هو (٠,٢٥) سم / ث ، احسب سرعة تغير الزاوية (هـ) عندما يكون س = ص = ٢

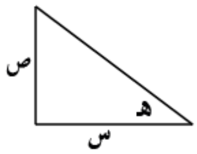
الحل :

$ظاهـ = \frac{ص}{س}$

$$قا^٢هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{\frac{دص}{دن} \times س - \frac{دس}{دن} \times ص}{س^٢}$$

$$قا^٢ \frac{\pi}{٤} \frac{دهـ}{دن} = \frac{٠,٢٥ \times ٢ - ١ \times ٢}{١٦}$$

$$= \frac{-٥}{١٦}$$



$\frac{دص}{دن} = -٠,٢٥$

$\frac{دس}{دن} = ١$

$س = ص = ٢$

$\Leftarrow هـ = \frac{\pi}{٤}$

٦) يمسك خالد بيده خيط طائرة ورقية ارتفاعها (١٢٠)م وتتحرك افقي بمعدل (٨)م / ث ، كم السرعة التي يعطي بها خالد للخيط عندا تبعد الطائرة عنه (٢٠٠)م

الحل :

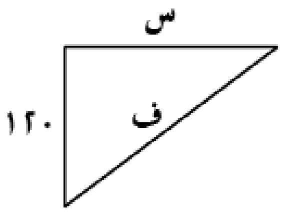
$ف^٢ = (١٢٠)^٢ + س^٢$

$ف = \sqrt{(١٢٠)^٢ + س^٢}$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٠ + ٢س \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{(١٢٠)^٢ + س^٢}}$$

$$= \frac{٢ \times ١٦٠ \times ٨}{٢ \times \sqrt{(١٢٠)^٢ + (١٦٠)^٢}}$$

$$= \frac{٣٢}{٥}$$



$س^٢ + (١٢٠)^٢ = (٢٠٠)^٢$

$س = ١٦٠$

$\frac{دس}{دن} = ٨$

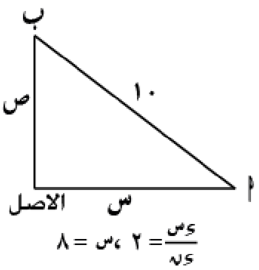
٧) سلك طوله (١٠)م يتحرك بحيث طرفاه أ ، ب على المحاور ، اذا كان (أ) يتحرك مبتعدا عن الاصل بسرعة (٢)م / ث ، احسب ما يلي :

أ) سرعة الطرف (ب) على الصادات عندما س = ٨

ب) معدل تغير المسافة بين السلك والمحاور

الحل :

أ) $ص = \sqrt{(١٠)^٢ - س^٢}$



$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٠ - ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{(١٠)^٢ - \text{س}^٢}}$$

$$= \frac{-٢ \times ٨ \times ٢}{٢ \times \sqrt{١٠٠ - ٦٤}} = \frac{-٣٢}{١٢} = \frac{-٨}{٣}$$

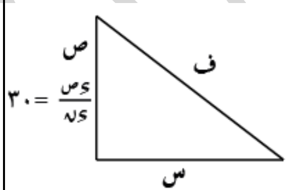
ب) $\text{م} = \frac{١}{٢}\text{س ص}$

$$\Leftarrow \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢}\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{ص} \times \frac{١}{٢}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times \frac{-٨}{٣} + ٦ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = \frac{-١٤}{٣}$$

٨) سفينتان البعد بينهم (١٠٠) ميل بحري تسير الاولى شمالا بسرعة (٣٠) ميل / س والأخرى للغرب بسرعة (٢٠) ميل / س ، احسب معدل البعد بينهم بعد ساعتين

الحل :



$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$$

$$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}}{٢ \times \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}}$$

$$= \frac{٢ \times -٤٠ \times -٢٠ + ٢ \times ٦٠ \times ٣٠}{٢ \times \sqrt{(-٤٠)^٢ + (٦٠)^٢}}$$

$$= \frac{١٢٠٠}{١٢٠\sqrt{٢}}$$

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٢٠$$

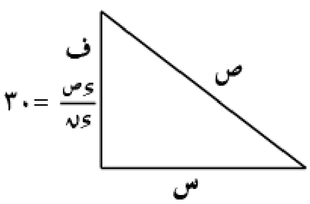
بعد ساعتين :

$\text{س} = -٢٠ \times ٢ = -٤٠$

$\text{ص} = ٣٠ \times ٢ = ٦٠$

٩) تتحرك كرتان على شارع مستقيم بسرعة (١٥) م / ث والأخرى قذفت حسب العلاقة : $\text{ف} = ٤٠\text{ن} - ٥\text{ن}^٢$ ، احسب معدل تغير المسافة بين الكرتين عندما تصل (ب) لأقصى ارتفاع

الحل :



$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ف}^٢}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ف}\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ف}^٢}}$$

عندما $\text{ن} = ٤ \Leftarrow$

$\text{س} = ١٥ \times ٤ = ٦٠$

$\text{ف} = ٤٠ \times ٤ - ٥(٤)^٢ = ٨٠$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٢ \times ٦٠ \times ١٥}{٢٠٠} = ٩$$

عند اقصى ارتفاع :

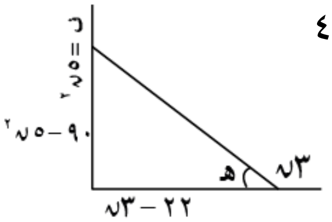
$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = ٠$

$٤٠ - ١٠\text{ن} = ٠$

$\Leftarrow \text{ن} = ٤$

١٠) سقط جسيم من برج ارتفاعه (٩٠) م ، بحيث كانت المسافة $\text{ف} = ٥\text{ن}^٢$ ، وفي نفس اللحظة تحرك رجل يبعد (٢٢) م عن قاعدة البرج نحوه بسرعة (٣) م / ث ، احسب معدل تغير زاوية ارتفاع الجسيم بالنسبة للرجل عندما $\text{ن} = ٤$

الحل :



$$\text{ظاهـ} = \frac{٩٠ - ٥\text{ن}^٢}{٢٢ - ٣\text{ن}}$$

$$\text{قا}^٢\text{هـ}\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{(٢٢ - ٣\text{ن}) \times -١٠\text{ن} - (٩٠ - ٥\text{ن}^٢) \times -٣}{(٢٢ - ٣\text{ن})^٢}$$

لكن $\text{ظاهـ} = \frac{٩٠ - ٥(٤)^٢}{٢٢ - ٣ \times ٤} = ١$

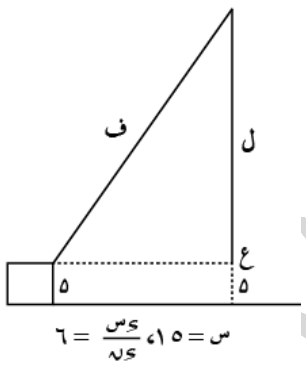
$$\text{قا}^٢\text{هـ} = ١ + \text{ظا}^٢\text{هـ} = ١ + ١ = ٢$$

$$٢ \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{(٢٢ - ٣ \times ٤) \times -١٠ \times ٤ - (٩٠ - ٥(٤)^٢) \times -٣}{(٢٢ - ٣ \times ٤)^٢}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-٣٧}{٢٠}$$

١١) حبل طوله (٤٥) م يمر حول بكرة ترتفع (٢٥) م مربوطة طرفه بثقل والطرف الاخر مربوط في سيارة على ارتفاع (٥) م ، اذا كانت تسير بسرعة (٦) م / ث ، احسب معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي تبعد فيها السيارة مسافة (١٥) م من اسفل البكرة

الحل :



$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ؟؟$

$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + (\text{ع} + \text{ل})^٢$

$\text{ف} + \text{ل} = ٤٥$

$\text{ع} + \text{ل} = ٢٠$ بالطرح

$\text{ف} - \text{ع} = ٢٥$

$\boxed{\text{ف} = ٢٥ + \text{ع}}$

$$(٢٥ + \text{ع})^٢ = \text{س}^٢ + (٢٠)^٢$$

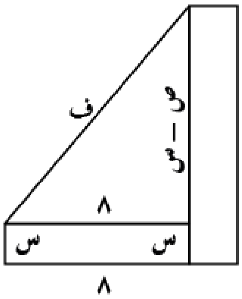
$$٢(٢٥ + \text{ع})\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \quad ......(١)$$

$$(٢٥ + \text{ع})^٢ = (١٥)^٢ + (٢٠)^٢ \Leftarrow ٢٥ + \text{ع} = ٢٥$$

بالتعويض في (١)

$$\Leftarrow ٢ \times ٢٥ \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢ \times ١٥ \times ٦ \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{١٨}{٥}$$

١٢) مصعدان واقفان في الطابق الارضي من عمارة والمسافة بينهما (٨)م ، بدأ المصعد الاول يرتفع بسرعة (٢)م / ث وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني يرتفع عموديا بسرعة (١)م / ث ، احسب معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد مرور ثانيتين من تحرك المصعد الثاني



الحل :

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ١ \quad ، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢$$

$$\text{ف}^٢ = (٨)^٢ + (\text{ص} - \text{س})^٢$$

$$\text{ف} = \sqrt{(٨)^٢ + (\text{ص} - \text{س})^٢}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢(\text{ص} - \text{س})\left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - \frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)}{٢ \times \sqrt{٦٤ + (\text{ص} - \text{س})^٢}}$$

$$= \frac{٢ \times (٨ - ٢)(٢ - ١)}{٢ \times \sqrt{٦٤ + (٨ - ٢)^٢}}$$

$$= \frac{٢ \times ٦}{٢ \times ١٠} = ٠,٦$$

$$\text{س} = ٢ \times ١ = ٢$$

$$\text{ص} = ٤ \times ٢ = ٨$$

واجب

١٣) من نقطة تبعد مسافة (٥٠)م انطلق بالون للأعلى بسرعة (٤)م / ث وكانت الرياح تأخذ البالون افقيا مبتعدا عن الرجل بسرعة (٦)م / ث ، احسب معدل التغير في زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للرجل بعد مرور (٥) ثواني من الحركة

١٤) قرص دائري يتمدد بالحرارة بحيث تزداد مساحته بمعدل $(٢١\pi)\text{م}^٢/\text{د}$ ، احسب معدل التغير في المحيط عندما يكون نصف القطر هو (٧)م

الحل :

$$\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ؟؟$$

$$\text{م} = \pi \text{نق}^٢$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi \text{نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$٢١\pi = ٢\pi \times ٧ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{ل} = ٢\pi \text{نق}$$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٢\pi \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$= ٢\pi \times \frac{٣}{٢}$$

$$= ٣\pi \text{م}/\text{د}$$

١٥) مكعب يتمدد بالحرارة فيزدد ضلعه بمعدل (٠,٠١) سم / ث ، اذا كان معدل التغير في الحجم هو (١٢)سم³ / د ، احسب ما يلي :

أ) طول المكعب

ب) معدل التغير في المساحة الكلية للمكعب

الحل :

أ) $\text{ح} = \text{س}^٣ \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣\text{س}^٢ \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$$١٢ = ٣\text{س}^٢ \times ٠,٠١$$

$$\text{س}^٢ = \frac{١٢}{٠,٠٣} = ٤٠٠ \Leftarrow \text{س} = ٢٠$$

ب) $\text{م} = ٦\text{س}^٢ \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$$١٢ \times ٢٠ \times ٠,٠١ = ٢,٤ \text{ سم}^٢ / \text{د}$$

١٦) صندوق قاعدته مربعة الشكل الارتفاع يساوي ثلاث امثال طول الضلع ، اذا كان الضلع يزداد بمعدل $(\frac{١}{٤})$ ، احسب معدل التغير في الحجم ومساحة السطح عندما طول الضلع (٨) سم

الحل :

$$\text{ع} = ٣\text{س} \quad ، \quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{١}{٤} \quad ، \quad \text{س} = ٨$$

$$\text{ح} = \text{س} \times \text{س} \times \text{ع}$$

$$\text{ح} = \text{س}^٢ \times \text{ع}$$

$$\text{ح} = \text{س}^٢ \times ٣\text{س}$$

$$\text{ح} = ٣\text{س}^٣$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٩\text{س}^٢ \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$= ٩ \times (٨)^٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ١٤٤$$

$$\text{م} = ٢\text{س}^٢ + ٤\text{سع}$$

$$\text{م} = ٢\text{س}^٢ + ٤\text{س} \times ٣\text{س}$$

$$\text{م} = ٢\text{س}^٢ + ١٢\text{س}^٢$$

$$\text{م} = ١٤\text{س}^٢$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢٨\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$= ٢٨ \times ٨ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ٥٦$$

١٧) اسطوانة نصف قطرها $(\frac{٥}{٧})$ ارتفاعها يزداد ارتفاعها بمعدل (٠,٠٠٢١) سم / د ، احسب معدل التغير في الحجم عندما الارتفاع (١٤) سم

الحل :

$$\frac{dع}{dن} = ٠,٠٠٢١ \quad ، \quad نق = \frac{٥}{٧}ع \quad ، \quad ع = ١٤$$

$$ح = \pi نق^{٢} ع = \pi(\frac{٥}{٧}ع)^{٢} \times ع = \frac{٢٥}{٤٩}\pi ع^{٢}$$

$$\frac{dح}{dن} = \pi \times \frac{٢٥}{٤٩} \times ٣ع^{٢} \times \frac{dع}{dن}$$

$$= \pi \times \frac{٢٥}{٤٩} \times ٣ \times ١٤ \times ٠,٠٠٢١ = ٠,٦٣\pi$$

١٨) يزداد حجم بالون كروي بمعدل (١٠٠٠) سم^{٣} / د ، احسب معدل الزيادة في مساحة السطح عندما يكون نصف القطر(١٠) سم

الحل :

$$\frac{dح}{dن} = ١٠٠٠ \quad ، \quad \left.\frac{dم}{dن}\right|_{نق=١٠} = ؟؟$$

$$م = ٤\pi نق^{٢} \qquad\qquad ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}$$

$$\frac{dم}{dن} = ٨\pi نق \frac{dنق}{dن} \qquad\qquad \frac{dح}{dن} = \frac{٤}{٣} \times \pi \times ٣نق^{٢} \times \frac{dنق}{dن}$$

$$= ٨\pi \times ١٠ \times \frac{١٠٠٠}{٤٠٠\pi} \qquad\qquad ١٠٠٠ = \frac{٤}{\cancel{٣}} \times \pi \times \cancel{٣}(١٠)^{٢} \times \frac{dنق}{dن}$$

$$\frac{dم}{dن} = ٢٠٠ \text{ سم}^{٢} / د \qquad\qquad \frac{dنق}{dن} = \frac{١٠٠٠}{٤٠٠\pi}$$

١٩) مخروط دائري رأسه للأسفل يخرج منه الماء بمعدل (٢) سم^{٣} / ث ، وكانت حنفية تصب الماء بمعدل (٦) سم^{٣} / ث في لحظة ما كان ارتفاع المخروط (٨) سم ، احسب ما يلي :

أ) معدل التغير في ارتفاع الماء بالمخروط

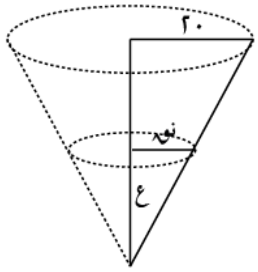
ب) معدل التغير في نصف القطر الماء العلوي للمخروط

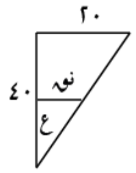
ج) معدل التغير في مساحة سطح الماء

علما بان ارتفاع المخروط (٤٠) ونصف القطر (٢٠)سم

الحل :

$$\frac{dح}{dن} = ٦ - ٢ = ٤ \quad ، \quad ع = ٨$$





$$\boxed{\frac{٢٠}{٤٠} = \frac{نق}{ع} \qquad نق = \frac{ع}{٢}}$$

أ) $ح = \frac{١}{٣}\pi نق^{٢} ع$

$$= \frac{١}{٣}\pi(\frac{ع}{٢})^{٢} \times ع$$

$$ح = \frac{\pi}{١٢} ع^{٣}$$

$$\frac{dح}{dن} = \frac{\pi}{١٢} \times ٣ع^{٢} \frac{dع}{dن}$$

$$٤ = \frac{\pi}{١٢} \times ٣(٨)^{٢} \times \frac{dع}{dن}$$

$$٤ = ١٦\pi \times \frac{dع}{dن}$$

$$\Leftarrow \frac{dع}{dن} = \frac{٤}{١٦\pi} = \frac{١}{٤\pi}$$

ب) $نق = \frac{١}{٢} ع$

$$\Leftarrow \frac{dنق}{dن} = \frac{١}{٢} \times \frac{dع}{dن} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤\pi} = \frac{١}{٨\pi}$$

ج) $م = \pi نق^{٢}$ $\qquad \boxed{نق = \frac{١}{٢} ع = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤}$

$$\Leftarrow \frac{dم}{dن} = ٢\pi نق \frac{dنق}{dن} = ٢\pi \times ٤ \times \frac{١}{٨\pi} = ١ \text{ سم}^{٢} / ث$$

واجب

٢٠) يتساقط الرمل (١) م^{٣} / د مكون كومة مخروط ارتفاعها يساوي قطرها ، احسب ما يلي :

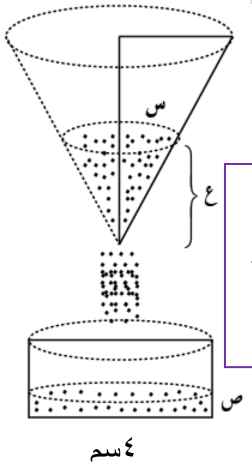
أ) معدل التغير في ارتفاع الكومة عندما ع = ٢م

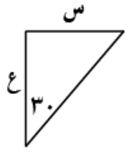
ب) معدل التغير في محيط قاعدة المخروط

٢١) خزان مخروطي رأسه للأسفل وزاوية رأسه (٦٠) يتسرب منه الماء الى حوض اسطواني دائري قائم نصف قطر قاعدته (٤)سم ، احسب معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة عندما يكون معدل هبوط سطح الماء (١) سم / ث وارتفاع الماء في المخروط (٣) سم

الحل :

فكرة السؤال : معدل نقصان حجم الماء في المخروط يساوي معدل الزيادة في حجم الماء في الاسطوانة





$$\boxed{\frac{dص}{dن} = ؟؟ \quad \text{عندما } ع = ٣ \quad \frac{dع}{dن} = -١}$$

حجم المخروط $= \frac{1}{3}\pi\,\text{س}^2\,\text{ع}$

نتخلص من س : ظا٣٠ $= \frac{\text{س}}{\text{ع}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\text{ع}}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \text{ع} = \frac{\pi}{9}\,\text{ع}^3$$

$$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = \frac{3\pi}{9}\,\text{ع}^2 \times \frac{د\text{ع}}{د\text{ن}} \Leftarrow \frac{\pi}{3} \times 9 \times -1 = -3\pi$$

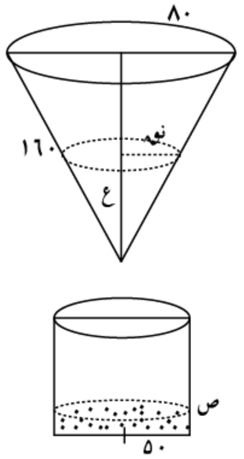
حجم الاسطوانة $= \pi\,\text{نق}^2 \times \text{ع} = (4)^2 \times \pi\,\text{ص}$

$$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = 16\pi \times \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}}$$

$$3\pi = 16\pi \times \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} \Leftarrow \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} = \frac{3}{16}$$

٢٢) مخروط نصف قطر قاعدته (٨٠) سم وارتفاعه (١٦٠) سم يتسرب الماء في اسطوانة نصف قطرها (٥٠) سم ، احسب ارتفاع الماء في المخروط في اللحظة التي يكون فيها معدل هبوط الماء في المخروط مساويا لمعدل ارتفاع الماء في الاسطوانة

الحل :



$$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2 \times \text{ع}$$

من التشابه :

$$\frac{80}{160} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}} \Leftarrow \text{نق} = \frac{1}{2}\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\,\text{ع}\right)^2 \times \text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{12}\,\text{ع}^3$$

$$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = \frac{\pi}{12} \times 3\,\text{ع}^2\,\frac{د\text{ع}}{د\text{ن}}$$

لكن $\left(\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}}\right)_{\text{المخروط}} = \left(\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}}\right)_{\text{الاسطوانة}}$

الاسطوانة :

$$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2 \times \text{ص}$$

$$\text{ح} = \pi(50)^2 \times \text{ص}$$

$$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = \pi(50)^2 \times \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}}$$

من المطلوب هو (ع) عندما

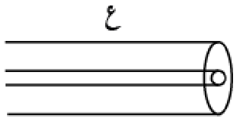
$$\frac{د\text{ع}}{د\text{ن}} = \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}}$$

$$\frac{\pi}{12} \times 4\,\text{ع}^2 \cancel{\frac{د\text{ع}}{د\text{ن}}} = \pi(50)^2 \cancel{\frac{د\text{ص}}{د\text{ن}}}$$

$$\frac{\text{ع}^2}{4} = (50)^2 \Leftarrow \boxed{\text{ع} = 100}$$

٢٣) ماسورة مجوفة طولها ثابت ونصف قطرها الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى الحجم ثابت ، اذا كان نصف قطرها الداخلي يزداد بمعدل $(\frac{1}{2})$ سم / ث ، احسب معدل التغير في نصف القطر الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي (٦) سم والخارجي (٨) سم

الحل :



ح ، ع ثوابت

$$\frac{د\text{س}}{د\text{ن}} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} = ؟؟$$

$$\text{س} = 6 \quad ، \quad \text{ص} = 8$$

حجم الماسورة $= \text{ح}_{\text{الخارجي}} - \text{ح}_{\text{الداخلي}}$

$$\text{ح} = \pi\,\text{ص}^2\,\text{ع} - \pi\,\text{س}^2\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = \pi\,\text{ع}\left(\text{ص}^2 - \text{س}^2\right)$$

$$\frac{\text{ح}}{\pi\,\text{ع}} = \text{ص}^2 - \text{س}^2$$

$$0 = 2\text{ص}\frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} - 2\text{س}\frac{د\text{س}}{د\text{ن}}$$

$$0 = 2 \times 8 \times \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} - 2 \times 6 \times \frac{د\text{س}}{د\text{ن}}$$

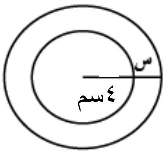
$$6 = 16\frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} \Leftarrow \frac{د\text{ص}}{د\text{ن}} = \frac{6}{16}$$

٢٤) كرة حديدية قطرها (٨) سم مغطاة بطبقة من الجليد يذوب بمعدل (١٠) سم^3 / د ، احسب ما يلي :

أ) ما سرعة نقصان سمك الجليد عندما السمك = (٢) سم

ب) ما سرعة نقصان مساحة السطح الخارجي

الحل :



$$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = -10 \quad ، \quad \text{س} = 2$$

أ) $\text{ح} = \text{ح}_{\text{الخارجي}} - \text{ح}_{\text{الداخلي}}$

$$\text{ح} = \frac{4}{3}\pi(4+\text{س})^3 - \frac{4}{3}\pi(4)^3$$

$$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = \frac{4\pi}{3} \times 3(4+\text{س})^2 \times \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} - 0$$

$$-10 = 4\pi(4+2)^2 \times \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} \Leftarrow \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} = \frac{-10}{4\pi \times 36}$$

ب) $\text{م} = 4\pi(4+\text{س})^2$

$$\frac{د\text{م}}{د\text{ن}} = 4\pi \times 2(4+\text{س})\frac{د\text{س}}{د\text{ن}}$$

$$\frac{د\text{م}}{د\text{ن}} = 4\pi \times 2 \times 6 \times \frac{-10}{4\pi \times 36} = \frac{-10}{3}$$

٢٥) مخروط ارتفاعه يساوي نصف القطر ، احسب طول نصف القطر عندما يكون معدل زيادة نصف القطر يساوي $(\frac{٣}{٤})$ ومعدل زيادة الحجم يساوي (١٢π)

الحل :

$\text{ع} = \text{نق}$ ، $\frac{د\text{نق}}{د\text{ن}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = ١٢\pi$

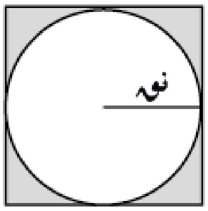
$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^٢ \times \text{ع} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^٣$

$\Leftarrow \frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = \frac{\pi}{٣} \times ٣\text{نق}^٢ \frac{د\text{نق}}{د\text{ن}}$

$\Leftarrow ١٢\pi = \pi\,\text{نق}^٢ \times \frac{٣}{٤} \Leftarrow \text{نق}^٢ = ١٦ \Leftarrow \text{نق} = ٤$

٢٦) مربع يتمدد بحي يزداد طول ضلعه بمعدل (٤) سم/د مرسوم داخله دائرة تتمدد معه ، احسب معدل التغير في المساحة بين المربع والدائرة عندما طول ضلع المربع (٢٠) سم

الحل :



$\text{س} = ٢٠ ، \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} = ٤$

$\text{م} = \text{م}_{\text{المربع}} - \text{م}_{\text{الدائرة}}$

$\text{م} = \text{س}^٢ - \pi\,\text{نق}^٢$

لكن $\text{نق} = \frac{١}{٢}\text{س}$

$\text{م} = \text{س}^٢ - \pi \times \frac{١}{٤}\text{س}^٢$

$\frac{د\text{م}}{د\text{ن}} = ٢\text{س}\frac{د\text{س}}{د\text{ن}} - \frac{\pi}{٤} \times ٢\text{س}\frac{د\text{س}}{د\text{ن}}$

$= ٢ \times ٢٠ \times ٤ - \frac{\pi}{٤} \times ٢ \times ٢٠ \times ٤ = ١٦٠ - ٤٠\pi$

٢٧) كرة نصف قطرها (١٠) سم وضع داخلها مخروط بحيث رأسه ومحيطه يلامس الكرة ، اذا كان ارتفاع المخروط يزداد بمعدل $(\frac{١}{٣٢})$ سم/د ، احسب معدل تغير حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه (٨) سم

الحل :

$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^٢\,\text{ع}$

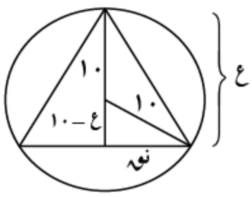
$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi(-\text{ع}^٢ + ٢٠\text{ع})\text{ع}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣}(-\text{ع}^٣ + ٢٠\text{ع}^٢)$

$\frac{د\text{ح}}{د\text{ن}} = \frac{\pi}{٣}(-٣\text{ع}^٢ + ٤٠\text{ع})\frac{د\text{ع}}{د\text{ن}}$

$= \frac{\pi}{٣}(-٣(٨)^٢ + ٤٠(٨)) \times \frac{١}{٣٢}$

$= \frac{\pi}{٣}(١٢٨) \times \frac{١}{٣٢} = \frac{٤\pi}{٣}$



$(١٠)^٢ = (\text{ع} - ١٠)^٢ + \text{نق}^٢$

$\text{نق}^٢ = -(\text{ع} - ١٠)^٢ + ١٠٠$

$\text{نق}^٢ = -\text{ع}^٢ + ٢٠\text{ع} - \cancel{١٠٠} + \cancel{١٠٠}$

$\text{نق}^٢ = -\text{ع}^٢ + ٢٠\text{ع}$

٢٨) مثلث متساوي الاضلاع يقع داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على الدائرة ، تتمدد الدائرة بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل (٢) سم/د ، احسب معدل التغير في مساحة المثلث عندما يصبح نصف القطر (١٠) سم

الحل :

مساحة المثلث

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{جا}٦٠$

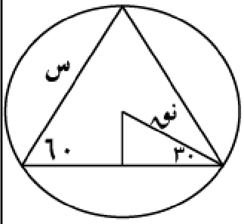
$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^٢$

$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}(\sqrt{٣}\,\text{نق})^٢$

$\text{م} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\text{نق}^٢$

$\frac{د\text{م}}{د\text{ن}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \times ٢\text{نق}\frac{د\text{نق}}{د\text{ن}}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \times ٢ \times ١٠ \times ٢ = ٣٠\sqrt{٣}$



$\text{جتا}٣٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\text{نق}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{س} = \sqrt{٣}\,\text{نق}$

٢٩) تتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل (٢) سم/د رسمت داخله دائرة ، احسب معدل تمدد المساحة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث (١٢) سم

الحل :

$\text{م} = \text{م}_{\text{المثلث}} - \text{م}_{\text{الدائرة}}$

$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^٢ - \pi\,\text{نق}^٢$

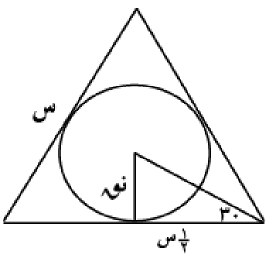
$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^٢ - \pi\left(\frac{١}{٢\sqrt{٣}}\text{س}\right)^٢$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^٢ - \frac{\pi}{١٢}\text{س}^٢$

$\frac{د\text{م}}{د\text{ن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ٢\text{س} \times \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} - \frac{\pi}{١٢}٢\text{س}\frac{د\text{س}}{د\text{ن}}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ١٢ \times ٢ \times ٢ - \frac{\pi}{١٢} \times ٢ \times ١٢ \times ٢$

$= ١٢\sqrt{٣} - ٤\pi$



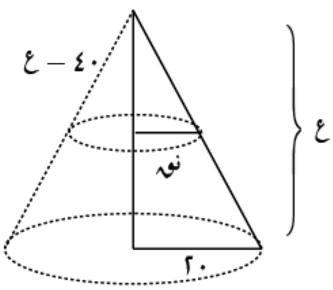
$\text{س} = ١٢ ، \frac{د\text{س}}{د\text{ن}} = ٢$

$\text{ظا}٣٠ = \frac{\text{نق}}{\frac{١}{٢}\text{س}}$

$\text{نق} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}\text{س}$

٣٠) مخروط دائري قاعدته للأسفل ونصف قطر القاعدة (٢٠) سم وارتفاعه (٤٠) سم ينزل فيه الماء بمعدل (٣٠) سم³/د ، احسب معدل التغير في ارتفاع الماء داخل المخروط عندما يكون ارتفاع الماء (١٦) سم

الحل :



تشابه المثلثات

$\frac{\text{نق}}{٤٠ - \text{ع}} = \frac{٢٠}{٤٠}$

$\text{نق} = \frac{١}{٢}(٤٠ - \text{ع})$

$\text{ع}_{\text{الماء}} = \text{ع}_{\text{المخروط الاكبر}} - \text{ع}_{\text{المخروط الاصغر}}$

$\text{ع} = \frac{\pi}{٣}(٢٠)^{٢}\times ٤٠ - \frac{\pi}{٣}\text{نو}^{٢}(٤٠-\text{ع})$

$\text{ع} = \frac{\pi}{٣}(٢٠)^{٢}\times ٤٠ - \frac{\pi}{٣}\left(\frac{١}{٢}(٤٠-\text{ع})\right)^{٢}(٤٠-\text{ع})$

$\text{ع} = \frac{\pi}{٣}(٢٠)^{٢}\times ٤٠ - \frac{\pi}{١٢}(٤٠-\text{ع})^{٣}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٠ - \frac{\pi}{١٢}(٣)(٤٠-\text{ع})^{٢}(-١)\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

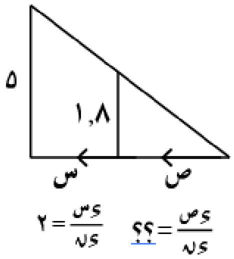
$٣٠ = \frac{\pi}{١٢}(٣)(٤٠-١٦)^{٢}\frac{\text{دع}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{١٠}{٤٨\pi}$

٣١) يمشي رجل طوله (١,٨) م على رصيف بمعدل (٢) م / ث مبتعدا عن مصباح يرتفع (٥) م عن الرصيف ، احسب ما يلي :

أ) معدل التغير في ظل الرجل على الارض

ب) سرعة رأس الظل

الحل :



أ) من تشابه المثلثات

$\frac{١,٨}{\text{ص}} = \frac{٥}{\text{س}+\text{ص}}$

$١,٨\text{س} + ١,٨\text{ص} = ٥\text{ص}$

$٥\text{ص} - ١,٨\text{ص} = ١,٨\text{س}$

$٣,٢\text{ص} = ١,٨\text{س}$

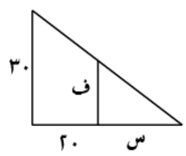
$٣,٢\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ١,٨\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$٣,٢\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ١,٨\times ٢ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٩}{٨}$

ب) $= \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢ + \frac{٩}{٨} = \frac{٢٥}{٨}$

٣٢) يقع مصباح في قمة عمود ارتفاعه (٣٠) م قذفت كرة رأسيا الى اعلى من نقطة تبعد (٢٠) م عن قاعدة العمود حسب العلاقة : ف = ٢٠ن − ٥ن^{٢} ، احسب سرعة ظل الكرة على الارض عندما تكون الكرة قطعت مسافة (١٥) م وهي صاعدة للأعلى

الحل :



من تشابه المثلثات

$\frac{\text{ف}}{\text{س}} = \frac{٣٠}{\text{س}+٢٠}$

$٣٠\text{س} = \text{ف}\text{س} + ٢٠\text{ف}$

$٣٠\text{س} - \text{ف}\text{س} = ٢٠\text{ف}$

$\text{س}(٣٠-\text{ف}) = ٢٠\text{ف}$

$\text{س} = \frac{٢٠\text{ف}}{٣٠-\text{ف}} \Leftarrow$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{(٣٠-\text{ف})\times ٢٠\frac{\text{دف}}{\text{دن}} - ٢٠\text{ف}\times -١\times\frac{\text{دف}}{\text{دن}}}{(٣٠-\text{ف})^{٢}}$

لكن $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ؟؟$

نجد قيمة ن $\Leftarrow$ ف $= ٢٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢} = ١٥$

$٥\text{ن}^{٢} - ٢٠\text{ن} + ١٥ = ٠ \Leftarrow \text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} + ٣ = ٠$

$\Leftarrow (\text{ن}-٣)(\text{ن}-١) = ٠$

ن = ٣ ✗ ، ن = ١ ✓ لان الجسم صاعد

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢٠ - ١٠\text{ن} = ٢٠ - ١٠\times ١ = ١٠$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{(٣٠-١٥)\times ٢٠\times ١٠ - ٢٠\times ١٥\times -١\times ١٠}{(٣٠-١٥)^{٢}}$

$= \frac{٤٠٠}{١٥} = \frac{٨٠}{٣}$

٣٣) مصباح معلق فوق منضدة دائرية افقية ارتفاعها عن الارض (٩٠) سم ونصف قطرها (٢٠) سم ، تحرك المصباح رأسيا للأسفل نحو المنضدة بسرعة (٦)سم / ث ، احسب معدل التغير في نصف قطر دارة ظل المنضدة عندما يكون ارتفاع المصباح عن المنضدة (٦٠) سم

الحل :

من التشابه

$\frac{٢٠}{\text{س}} = \frac{\text{نو}}{\text{س}+٩٠}$

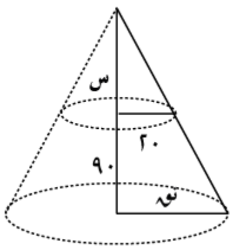
$\text{نو} = \frac{٢٠(\text{س}+٩٠)}{\text{س}}$

$\text{نو} = \frac{١٨٠٠+٢٠\text{س}}{\text{س}}$

$\text{نو} = \frac{١٨٠٠}{\text{س}} + ٢٠$

$\frac{\text{دنو}}{\text{دن}} = \frac{-١٨٠٠}{\text{س}}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٠$

$= \frac{-١٨٠٠}{(٦٠)^{٢}}\times -٦ = ٣$

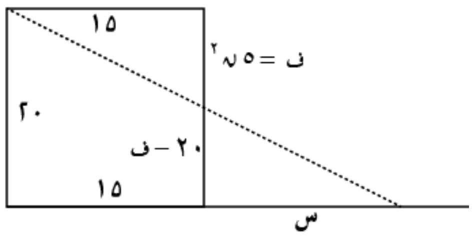


$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٦$

$\frac{\text{دنو}}{\text{دن}} = ؟؟$

٣٤) يقع مصباح في برج ارتفاعه (٢٠)م سقطت كرة من السكون تبعد (١٥)م ، احسب سرعة ظل الكرة على الارض بعد ثانية من سقوطها علما بان المسافة التي يقطعها الجسيم الساقط هي $ف = ٥ن^٢$

الحل :



من التشابه :

$ن = ١$

$\frac{دس}{دن} = ؟؟$

$$\frac{٢٠}{س + ١٥} = \frac{٢٠ - ف}{س} \Leftarrow \frac{٢٠}{س + ١٥} = \frac{٢٠ - ٥ن^٢}{س}$$

$$\Leftarrow ٢٠س = ٢٠س - ٥ن^٢ س + ٣٠٠ - ٧٥ن^٢$$

$$\Leftarrow ٥ن^٢ س = ٣٠٠ - ٧٥ن^٢$$

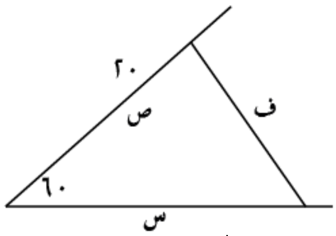
$$\Leftarrow س = \frac{٣٠٠}{٥ن^٢} - \frac{٧٥ن^٢}{٥ن^٢} \Leftarrow س = \frac{٣٠٠}{٥ن^٢} - ١٥$$

$$\Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{-٣٠٠ \times ١٠ن}{(٥ن^٢)^٢} = \frac{-٣٠٠ \times ١٠}{٢٥} = -٢٠$$

---

٣٥) طريقان متقاطعين الزاوية بينهما (٦٠) بدأ شخص الحركة على احد الطريقين بسرعة (٢)م/ث وفي نفس الوقت بدأ شخص ثاني الحركة على الطريق الاخر من نقطة تبعد (٢٠)م باتجاه التقاطع بسرعة (٣)م/ث ، احسب معدل تغير المسافة بين الشخصين بعد (٤) ثواني من الحركة

الحل :



$س = ٤ \times ٢$

$س = ٨$

$ص = ٢٠ - ٤ \times ٣$

$ص = ٨$

$$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢س ص \text{جتاهـ}$$

$$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢س ص \text{جتا} ٦٠$$

$$ف^٢ = \sqrt{س^٢ + ص^٢ - س ص}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} - \left(س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن}\right)}{٢ \times \sqrt{س^٢ + ص^٢ - س ص}}$$

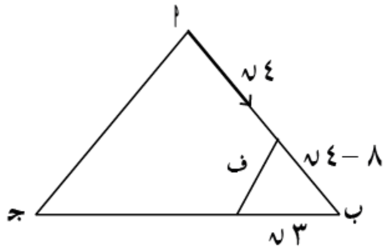
$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ٨ \times ٢ + ٢ \times ٨ \times -٣ - (٨ \times -٣ + ٨ \times ٢)}{٢ \times ٨}$$

$$\frac{دف}{دن} = -٨$$

٣٦) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، تحركت نقطة من (أ) باتجاه (ب) بسرعة (٤) سم/ث وفي نفس الوقت تحركت نقطة ثانية من (ب) باتجاه (جـ) بسرعة (٣) سم/ث ، احسب معدل التغير في المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة

الحل :

$\text{جتاب} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$



$$ف^٢ = (٨ - ٤ن)^٢ + (٣ن)^٢ - ٢(٨ - ٢ن)(٣ن)\text{جتاب}$$

$$ف^٢ = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^٢ + ٩ن^٢ - ٢ \times ٢(٤ - ٢ن)(٣ن) \times \frac{٣}{٤}$$

$$ف^٢ = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^٢ + ٩ن^٢ - ٣٦ن + ١٨ن^٢$$

$$ف^٢ = ٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^٢$$

$$ف = \sqrt{٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^٢}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{-١٠٠ + ٨٦ن}{٢\sqrt{٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^٢}}$$

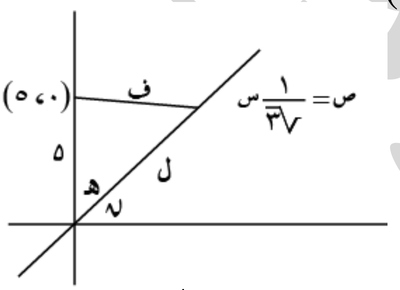
عندما $ن = ١ \Leftarrow$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{-١٠٠ + ٨٦}{٢\sqrt{٦٤ - ١٠٠ + ٤٣}} = \frac{-١٤}{٢\sqrt{٧}}$$

---

٣٧) بدأت نقطة الحركة من الاصل على المستقيم $ص = \frac{١}{\sqrt{٣}} س$ في الربع الاول بسرعة (٤) وحدات/ث ، احسب معدل التغير في المسافة بين النقطة المتحركة والنقطة الثابتة (٠،٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة

الحل :



لإيجاد

$$\text{ظاهـ} = ص' = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$ن = ٣٠ \Leftarrow هـ = ٦٠$$

$$ف^٢ = ل^٢ + (٥)^٢ - ٢ \times ل \times ٥ \times \text{جتا} ٦٠$$

$$ف^٢ = ل^٢ + ٢٥ - ٥ل \Leftarrow ف^٢ = \sqrt{ل^٢ + ٢٥ - ٥ل}$$

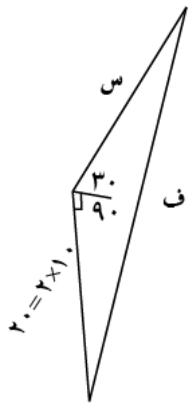
$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ل \frac{دل}{دن} - ٥ \frac{دل}{دن}}{٢\sqrt{ل^٢ + ٢٥ - ٥ل}}$$

بعد (٢) ثانية ⇐ ل = −٢×٤ = ٨

$$\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\times٨\times٤ - ٥\times٤}{٢\sqrt{٦٤+٢٥-١٠}} = \frac{٢٢}{٧}$$

٣٨) بدأ بالون بالصعود للأعلى بسرعة (٢) م / ث وبعد (١٠) ثواني انحرف مساره بزاوية تميل (٣٠°) عن الافق ، احسب معدل تغير المسافة بين البالون ونقطة البداية بعد مرور (٥) ثواني عن انحرافه

الحل :



$$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + (٢٠)^٢ - ٢\text{س}\times٢٠ \text{ جتا} ١٢٠$$

$$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + ٤٠٠ + ٢٠\text{س}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + ٢٠\text{س} + ٤٠٠}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢٠\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢+٢٠\text{س}+٤٠٠}}$$

بعد (٥) ثواني ⇐ س = ٥×٢ = ١٠

$$\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\times١٠\times٢+٢٠\times٢}{٢\sqrt{١٠٠+٢٠٠+٤٠٠}} = \frac{٨٠}{٢\sqrt{٧٠٠}}$$

٣٩) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها الاصل من النقطة (أ،٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه اثناء حركتها بمعدل (٨) سم / ث ، احسب معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن (أ،٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزها $(\frac{\pi}{٣})$

الحل :

$$\text{س}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{أ}^٢ - ٢\text{أ}\times\text{أ}\times\text{جتاهـ}$$

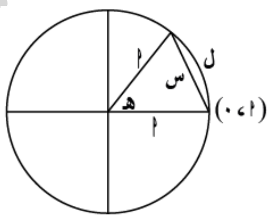
$$\text{س}^٢ = ٢\text{أ}^٢ - ٢\text{أ}^٢ \text{ جتاهـ}$$

$$\text{س} = \sqrt{٢\text{أ}^٢ - ٢\text{أ}^٢ \text{ جتاهـ}}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٠ + ٢\text{أ}^٢ \text{ جاهـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{٢\text{أ}^٢ - ٢\text{أ}^٢ \text{ جتاهـ}}}$$

$$= \frac{٢\text{أ}^٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٨}{\text{أ}}}{٢\sqrt{٢\text{أ}^٢ - ٢\text{أ}^٢ \times \frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{٨\sqrt{٣}\text{أ}}{٢\sqrt{\text{أ}^٢}} = ٤\sqrt{٣}$$



$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٨ \text{ ، هـ} = \frac{\pi}{٣}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ؟؟$$

لايجاد $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = ؟؟$

$$\text{ل} = \text{أ}\times\text{هـ}$$

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{أ}\times\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$$

$$٨ = \text{أ}\times\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{٨}{\text{أ}}$$

٤٠) تتحرك نقطة على منحنى س^٢ + ص^٢ = ١ بعكس عقارب الساعة ، اذا كان معدل التغير في الاحداثي الصادي عند (١،٠) هو (٢) ، احسب سرعة النقطة

الحل :

$$\text{جاهـ} = \frac{\text{ص}}{١}$$

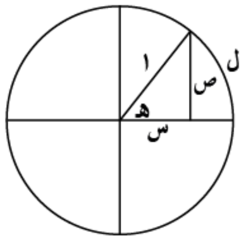
$$\text{جتاهـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

عند (١،٠)

$$\text{جتاهـ} = ١$$

$$١\times\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = ٢$$

$$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = ٢ \Leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٢$$



$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ؟؟$$

$$\text{ل} = \text{نق}\times\text{هـ}$$

لكن نق = ١

$$\text{ل} = ١\times\text{هـ}$$

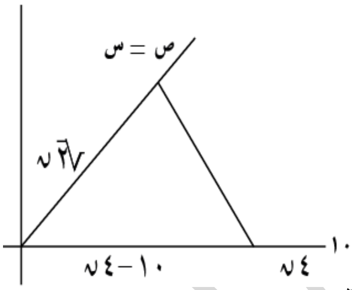
$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$$

٤١) اذا كانت أ(١٠،٠) بدأت الحركة من (أ) على محور السينات بسرعة (٤) وحدات في الثانية باتجاه الاصل وفي نفس الوقت تحركت اخرى من الاصل على منحنى ص = س في الربع الاول بسرعة $(\sqrt{٢})$ ، فما معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانيتين

الحل :

زاوية ميل المستقيم = ٤٥°

لان (ظاهـ = ص َ = ١)



$$\text{ف}^٢ = (١٠-٤\text{ن})^٢ + (\sqrt{٢}\text{ن})^٢ - ٢(١٠-٤\text{ن})(\sqrt{٢}\text{ن})\text{ جتا}٤٥$$

$$\text{ف}^٢ = (١٠٠) - ٨٠\text{ن} + ١٦\text{ن}^٢ + ٢\text{ن}^٢ - ٢٠\text{ن} + ٨\text{ن}^٢$$

$$\text{ف}^٢ = ١٠٠ - ١٠٠\text{ن} + ٢٦\text{ن}^٢$$

$$\text{ف} = \sqrt{١٠٠ - ١٠٠\text{ن} + ٢٦\text{ن}^٢}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{-١٠٠ + ٥٢\text{ن}}{٢\sqrt{١٠٠-١٠٠\text{ن}+٢٦\text{ن}^٢}}$$

$$= \frac{-١٠٠+٥٢\times٢}{٢\sqrt{١٠٠-٢٠٠+٢٦\times٤}} = \frac{٤}{٤} = ١$$

٤٢) بدأت نقطة الحركة من الاصل في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة (٣) سم / ث ، احسب معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢،٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة

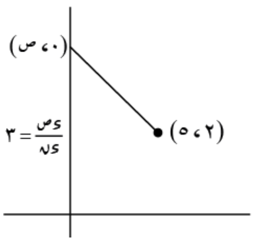
الحل :

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{٠}-\text{٢})^{\text{٢}} + (\text{ص}-\text{٥})^{\text{٢}}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{٤} + \text{ص}^{\text{٢}} - \text{١٠ص} + \text{٢٥}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{١٠ص} + \text{٢٩}}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\text{٢ص} - \text{١٠}}{\text{٢}\sqrt{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{١٠ص} + \text{٢٩}}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$



$$\text{ص} = \text{٣} \times \text{٢} = \text{٦}$$

$$= \frac{\text{٢}\times\text{٦} - \text{١٠}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣٦} - \text{١٠}\times\text{٦} + \text{٢٩}}} \times \text{٣} = \frac{\text{٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٥}}} \times \text{٣} = \frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{٥}}}$$

٤٣) تتحرك نقطة على منحنى $\text{ق} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}$ بحيث يزداد احداثي السيني بمعدل $(\text{٣}\sqrt{\text{١٠}})$ سم / ث ، احسب معدل تغير البعد عن النقطة (١،٠) عندما $\text{س} = \text{٢}$

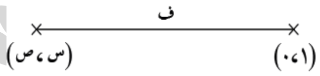
الحل :

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}-\text{١})^{\text{٢}} + (\text{ص}-\text{٠})^{\text{٢}}}$$

لكن $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}} \Leftarrow \text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{١} + \text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٦}}$$



$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\text{٤س} - \text{٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٦}}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{٤}\times\text{٢} - \text{٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}\times\text{٤} - \text{٢}\times\text{٢} + \text{٦}}} = \text{٩}$$

٤٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في (ب) ، اذا علمت ان هذا المثلث يتغير في المستوى الديكارتي بحيث يبقى الرأس (أ) عند الاصل ويتحرك الرأس (جـ) مع منحنى $\text{ق} = \text{١} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٣٦}}$ والرأس (ب) بدأ الحركة من (١،٠) بسرعة (٢) سم / ث ، احسب معدل تغير مساحة المثلث بعد (٣) ثواني من حركة (ب)

الحل :

$$\text{م} = \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س} \times \text{ص}$$

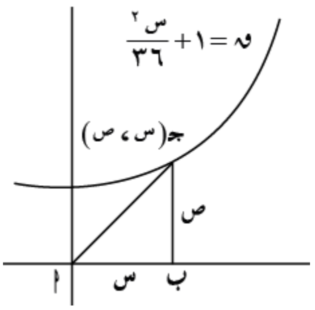
$$\text{م} = \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س} \times \left(\text{١} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٣٦}}\right)$$

$$\text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٧٢}}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٧٢}}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٢} + \frac{\text{٣}\times\text{٤٩}}{\text{٧٢}} \times \text{٢}$$

$$= \text{١} + \frac{\text{٤٩}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٦١}}{\text{١٢}}$$



$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{٢}$$

(س) بعد (٣) ثواني

$$\text{س} = \text{١} + \text{٢} \times \text{٣} = \text{٧}$$

٤٥) تتحرك نقطة على $\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{١١٧}$ ، احسب احداثيات النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل التغير في الاحداثي السيني (٣) سم / ث ومعدل التغير في الاحداثي الصادي (٢) سم / ث

الحل :

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{٣} \quad ، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{٢}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{١١٧} \Rightarrow \text{٢س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{٠}$$

$$\text{٢س} \times \text{٣} + \text{٢ص} \times \text{٢} = \text{٠} \Rightarrow \text{٤ص} = -\text{٦س}$$

$$\Rightarrow \text{ص} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{س}$$

بالتعويض في $\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{١١٧}$

$$\text{س}^{\text{٢}} + \left(\frac{-\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{س}\right)^{\text{٢}} = \text{١١٧} \Rightarrow \left(\text{س}^{\text{٢}} + \frac{\text{٩}}{\text{٤}}\,\text{س}^{\text{٢}} = \text{١١٧}\right) \times \text{٤}$$

$$\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٩س}^{\text{٢}} = \text{٤٦٨} \Rightarrow \text{١٣س}^{\text{٢}} = \text{٤٦٨}$$

$$\Rightarrow \text{س}^{\text{٢}} = \text{٣٦}$$

$\Rightarrow \text{س} = \text{٦} \Rightarrow \text{ص} = -\text{٩}$ النقطة $(\text{٦،}-\text{٩})$

$\text{س} = -\text{٦} \Rightarrow \text{ص} = \text{٩}$ النقطة $(-\text{٦،٩})$

٤٦) تتحرك نقطة على منحنى ص = $\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢}$ ، اذا كان الاحداثي السيني يزداد بمعدل (٢) سم / ث ، احسب ما يلي :

أ) معدل التغير في الاحداثي الصادي

ب) معدل التغير في ميل المماس عندما س = ٢

الحل :

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = (٣\text{س}^{٢} + ١٠\text{س}) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$= (٣\times٤ + ١٠\times٢)\times٢ = ٦٤ \text{ سم / ث}$$

ب) ميل المماس $\text{م} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} + ١٠\text{س}$

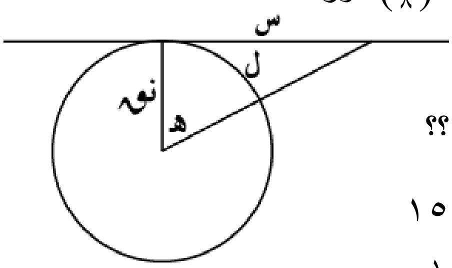
$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = (٦\text{س} + ١٠)\times\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = (٦\times٢ + ١٠)\times٢ = ٤٤$$

واجب

٤٧) تتحرك نقطة على منحنى ص = $\text{س}^{٢}$ ، اوجد موضع النقطة التي يكون عندها $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

٤٨) طريق للسباق دائري نصف قطره (نو) وفي مركزه كشاف ضوئي ويوجد جدار مستقيم يمس الطريق في احدى النقاط وتسير السيارة على الطريق بسرعة (١٥٠) كم / س وفي لحظة ما كانت السيارة عند نقطة التماس ، احسب سرعة ظل السيارة على الجدار عندما تكون السيارة قطعت $(\frac{١}{٨})$ دورة

الحل :



المطلوب $= \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ؟؟$

نو = ثابت ، $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = ١٥٠$

(هـ) في لحظة ما $= \frac{١}{٨}$ دورة

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{نو}} = \frac{١}{٨}\times٢\pi = \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ}\,\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{١}{\text{نو}}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$٢\times\frac{١٥٠}{\text{نو}} = \frac{١}{\text{نو}}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$٣٠٠ = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$\text{ل} = \text{نو}\times\text{هـ}$$

$$\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \text{نو}\times\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$$

$$١٥٠ = \text{نو}\times\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$$

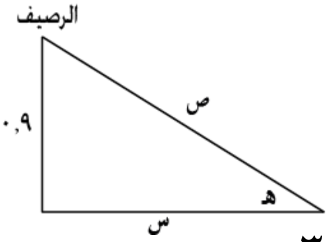
$$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{١٥٠}{\text{نو}}$$

$\text{قا}^{٢}\text{هـ}$

$$\text{هـ} = \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} = ٢$$

٤٩) يقف رجل على رصيف حوض للسفن ويسحب حبل متصل بقارب بمعدل (٠,٣) م / ث وطرفه الاخر يمر ببكرة ترتفع (٠,٩) م عن خط سير القارب ، احسب سرعة تغير الزاوية المحصورة بين الحبل وخط سير القارب في اللحظة التي يكون القارب على بعد (١,٢) عن الرصيف



الحل :

$$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = ؟؟$$

$\text{س} = ١,٢$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -٠,٣$

$$\text{جاهـ} = \frac{٠,٩}{\text{ص}}$$

$$\text{جتاهـ}\,\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = -\frac{٠,٩}{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$$

$$\frac{٤}{٥}\times\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{-٠,٩}{١,٥}\times -٠,٣$$

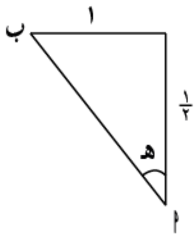
$$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢٠}$$

$$\text{ص}^{٢} = (١,٢)^{٢}\times(٠,٩)^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{ص} = ١,٥$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{١,٢}{١,٥} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$$

٥٠) كشاف ضوئي في البحر يدور دورة كاملة كل دقيقة في مقابلة شاطئ مستقيم واقرب نقطة على الشاطئ الى الكشاف هي بعد $(\frac{١}{٢})$ كم ، احسب السرعة التي يسير بها ضوء الكشاف عندما يكون الضوء على بعد (١) كم عن اقرب نقطة على الشاطئ للكشاف



الحل :

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{س}}{\frac{١}{٢}} \Leftarrow \text{ظاهـ} = ٢\text{س}$$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ}\,\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = ٢\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$٥\times٢\pi = ٢\times\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٥\pi$$

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} = ١ + \text{ظا}^{٢}\text{هـ}$$

$$= ١ + ٤$$

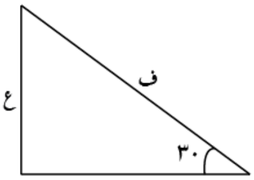
$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} = ٥$$

$$\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = ٢\pi / \text{د}$$

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ؟؟$$

٥١) تصعد طائرة للأعلى بزاوية مقدارها (٣٠°) على الافق ، احسب معدل تزايد ارتفاع الطائرة اذا علمت ان سرعة الطائرة هي (٥٠٠) كم / س

الحل :



$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = ٥٠٠$ ، المطلوب : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

$\text{جا}٣٠ = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} \Leftarrow \text{ف جا}٣٠ = \text{ع} \Leftarrow \text{ف} \times \frac{١}{٢} = \text{ع}$

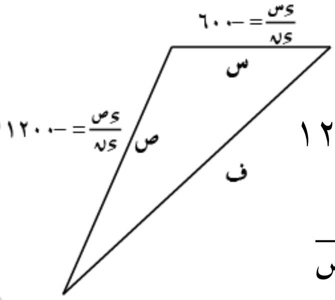
$\Leftarrow \frac{١}{٢}\text{ف} = \text{ع} \Leftarrow \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢} \times ٥٠٠ = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \Leftarrow \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢٥٠$ كم / س

---

٥٢) طائرة على ارتفاع ثابت وتسير بخط مستقيم بسرعة (٦٠٠) كم ، اطلق صاروخ بسرعة (١٢٠٠) كم / س في خط بزاوية (١٢٠) على مسار الطائرة ليصيب الطائرة وفي لحظة ما كانت الطائرة على بعد (٢) كم والصاروخ على بعد (٤) كم ، احسب معدل تغير المسافة بينهما عند تلك النقطة

الحل :



$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢\text{س ص جتا}١٢٠$

$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{س ص}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{س ص}}$

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \text{ص}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{س ص}}}$

$= \frac{٢\times٢\times-٦٠٠ + ٢\times٤\times-١٢٠٠ + ٢\times-١٢٠٠ + ٤\times-٦٠٠}{٢\sqrt{٢^٢ + ٤^٢ + ٢\times٤}}$

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{-١٦٨٠٠}{٢\sqrt{٢٨}}$

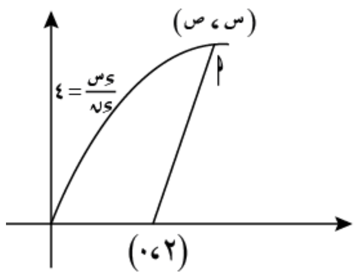
---

٥٣) تتحرك النقطة (أ) على منحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، اذا كان الاحداثي السيني يزداد بمعدل (٤) وحدات في الثانية عندما س = ٣ ، احسب :

أ) معدل تغير المسافة بين (أ) والنقطة (٢،٠)

ب) معدل تغير زاوية ميل المستقيم الواصل بين (أ) والنقطة (٢،٠)

الحل :



أ) $\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^٢}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^٢ = \text{س}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{س}}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٤}$

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س} - ٣}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٤}} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$= \frac{٢\times٣ - ٣}{٢\sqrt{٩ - ٩ + ٤}} \times ٤ = ٣$

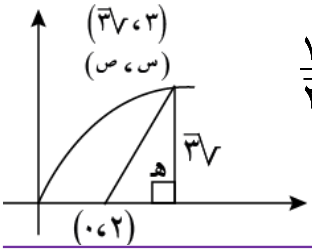
ب) $\text{م} = \text{ظاهـ} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٢} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٢}$

$\text{قا}^٢\text{هـ} \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{(\text{س} - ٢)\times\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س}}}{(\text{س} - ٢)^٢} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\text{ظاهـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٣ - ٢} = \sqrt{٣} \Leftarrow \text{قا}^٢\text{هـ} = ١ + \text{ظا}^٢\text{هـ} = ٤$

$٤ \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{(٣ - ٢)\times\frac{١}{٢\sqrt{٣}} - \sqrt{٣}}{(٣ - ٢)^٢} \times ٤$

$٤\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{١ - ٦}{٢\sqrt{٣}} \times ٤ = \frac{-١٠}{٤\sqrt{٣}}$



تدريبات :

١) طائرة عمودية على ارتفاع (٣٠٠)م فوق طريق مستقيم شاهد طيار سيارة تبعد عن مسقط الطائرة مسافة (١٥٠)م وتسير مبتعدة عن مسقط الطائرة بسرعة (٢٥)م ، اذا بدأت الطائرة بالهبوط بمعدل (٥٠)م/د ، احسب معدل تغير زاوية الانخفاض بين الطائرة والسيارة بعد مرور دقيقتين

٢) مثلث قائم الزاوية اذا كان الضلع المجاور للزاوية الحادة (هـ) هو (س) ويزداد بمعدل (٢) سم / ث والضلع المقابل هو (ص) ويتناقص بمعدل (١) سم / ث في لحظة ما كانت س = ص = ١٠ ، احسب ما يلي :

أ) سرعة تغير الزاوية (هـ) عند تلك اللحظة

ب) معدل تغير مساحة المثلث

٣) يرتفع بالون رأسيا للأعلى بمعدل (٤٠) م/د وتم رصد البالون من مشاهد على الارض ، احسب معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع $\left(٧٠\sqrt{٣}\right)$م

٤) مئذنة ارتفاعها (٢٠) م تتحرك كرة في خط مستقيم مبتعدة عن المئذنة بسرعة (٤) م / ث ، احسب ما يلي :

أ) سرعة تغير زاوية انخفاض خط المشاهد في قمة المئذنة عندما تكون الكرة على بعد (١٥) م من المئذنة

ب) معدل تغير المسافة بين الكرة وقمة المئذنة

٥) يسحب قارب بواسطة حبل يمر على بكرة اذا الحبل مثبت في القارب في نقطة تقع بمقدار (١٠) م على مستوى اسفل البكرة اذا سحب الحبل بمعدل (٥) م/د ، احسب سرعة اقتراب القارب عندما يكون طول الحبل بين الكرة والقارب (٢٦) م

٦) يحتوي وعاء على (١٠٠٠) قدم^{٣} من الغاز بضغط (٥) باوند / انش ، احسب معدل التغير في الحجم اذا كان الضغط يتناقص بمعدل (٠,٠٥) باوند / انش في الساعة علما بان الحجم × الضغط = ثابت

الحل :

$$\text{ح} \times \text{ض} = \text{ا} \ (\text{ثابت}) \Longleftarrow \text{ح} = \frac{\text{ا}}{\text{ض}}$$

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{ا}}{\text{ض}^{٢}} \times \frac{\text{ءض}}{\text{ءن}}$$

$$= \frac{-٥٠٠٠}{(٥)^{٢}} \times \frac{-٥}{١٠٠} = ١٠$$

$$\text{ح} \times \text{ض} = \text{ا}$$

$$١٠٠٠ \times ٥ = \text{ا}$$

$$٥٠٠٠ = \text{ا}$$

٧) مستطيل طوله (٢٤) سم وعرضه (١٠) سم ، اذا كان الطول يتناقص بمعدل (٢) سم / ث بينما يتزايد العرض بمعدل (١,٥) سم / ث ، اوجد متى يصبح الشكل مربعا ثم احسب الزمن الذي يتوقف فيه المساحة عن الزيادة وكم تكون المساحة عندها

الحل :

الطول : $\text{س} = ٢٤ - ٢\text{ن}$ ، العرض : $\text{ص} = ١٠ + ١,٥\text{ن}$

يصبح مربعا عندما $\text{س} = \text{ص}$

$$٢٤ - ٢\text{ن} = ١٠ + ١,٥\text{ن} \Longrightarrow \boxed{\text{ن} = ٤}$$

$$\text{م} = (٢٤ - ٢\text{ن})(١٠ + ١,٥\text{ن})$$

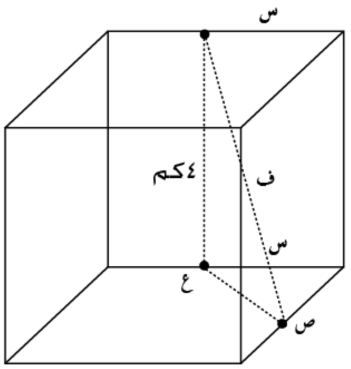
$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = (٢٤ - ٢\text{ن})(١,٥) + (١٠ + ١,٥\text{ن})(-٢)$$

$$٠ = ٣٦ - ٣\text{ن} - ٢٠ - ٣\text{ن} \Longrightarrow \text{ن} = \frac{٨}{٣} = ٢\frac{١}{٣}$$

$$\text{م} = \left(٢٤ - ٢ \times \frac{٨}{٣}\right)\left(١٠ + ١,٥ \times \frac{٨}{٣}\right) = ٢٦١\frac{١}{٣}$$

٨) في لحظة ما كانت طائرة (ا) تمر مباشرة فوق السيارة (ب) وعلى ارتفاع (٤) كم ، اذا كانت (ا) تتحرك شرقا افقيا في خط مستقيم بسرعة (٣٠٠) كم / س والسيارة تسير جنوبا افقيا بسرعة (٩٠) كم / س ، احسب معدل تغير المسافة بين الطائرة والسيارة بعد (٦) دقائق

الحل :



$$\text{ف}^{٢} = \text{ع}^{٢} + (٤)^{٢}$$

$$\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

$$\Longleftarrow \text{ف}^{٢} = \sqrt{\text{ع}^{٢} + ١٦}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ١٦}$$

$$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ١٦}}$$

$$= \frac{٢ \times ٣٠ \times ٣٠٠ + ٢ \times ٩ \times ٩٠}{٢\sqrt{٩٠٠ + ٨١ + ١٦}}$$

$$= \frac{١٩٦٢٠}{٢\sqrt{٩٩٧}}$$

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٣٠٠$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٩٠$$

المطلوب : $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$

$$\text{س} = ٣٠٠ \times \frac{٦}{٦٠}$$

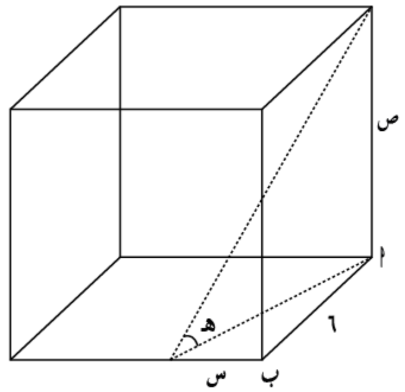
دقيقة ← ساعة

$$\text{س} = ٣٠$$

$$\text{ص} = ٩٠ \times \frac{٦}{٦٠} = ٩$$

النجاح الذي تستمتع به
اليوم هو نتيجة الثمن
الذي دفعته في الماضي .

٩) في الشكل المجاور من (أ) بدأ بالون بالارتفاع بسرعة (٥) م / ث وفي نفس اللحظة بدأت كرة بالدحرجة من (ب) على الارض وفي خط مستقيم من النقطة (أ) مسافة (٦) م وبسرعة (٤) م / ث ، احسب معدل تغير الزاوية (هـ) بعد مرور ثانيتين



الحل :

$\frac{دص}{دن} = ٥$

$\frac{دس}{دن} = ٤$

$ظاهـ = \frac{ص}{ع}$

$قا^٢هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{ع \frac{دص}{دن} - ص \frac{دع}{دن}}{(ع)^٢}$

$٢ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{١٠\times٥ - ١٠\times٣,٢}{١٠٠}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{١٨}{١٠٠\times٢} = \frac{١٨}{٢٠٠}$

$ع^٢ = س^٢ + ٣٦$

$٢ع \frac{دع}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن}$

(س) بعد (٢) ثانية

$\Leftarrow ٤ \times ٢ = ٨$

$ع^٢ = (٨)^٢ + (٦)^٢$

$\Leftarrow ع = ١٠$

$٢ \times ١٠ \times \frac{دع}{دن} = ٢ \times ٨ \times ٤$

$\frac{دع}{دن} = ٣,٢$

(ص) بعد (٢) ثانية

$\Leftarrow ٢ \times ٥ = ١٠$

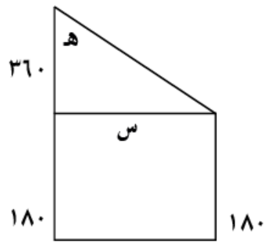
$ظاهـ = \frac{ص}{ع} = \frac{١٠}{١٠} = ١$

$قا^٢هـ = ١ + ظا^٢هـ$

$= ١ + ١ = ٢$

١٠) رجل طوله (١٨٠) سم يقف امام مصباح يرتفع عن سطح الارض (٥٤٠) سم ، اذا اخذ الرجل بالاقتراب من المصباح بمعدل (٣٠٠) سم / ث ، احسب معدل تغير الزاوية المحصورة بين المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد (١٨٠) سم من قاعدة المصباح

الحل :



$ظاهـ = \frac{س}{٣٦٠}$

$قا^٢هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٦٠} \frac{دس}{دن}$

$\left(\frac{\sqrt{٥}}{٢}\right)^٢ \times \frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٣٦٠} \times -٣٠٠$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٢}{٣}$

عندما $س = ١٨٠$

$ظاهـ = \frac{١٨٠}{٣٦٠}$

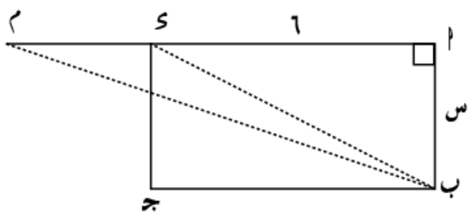
$\Leftarrow قاهـ = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

واجب

١١) يتحرك مستقيم بحيث يبقى مماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ١$ في الربع الاول ، اذا كان الاحداثي السيني لنقطة التماس يزداد بمعدل (٣) وحدات / ث ، احسب السرعة التي تتحرك بها نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات عند $س = \frac{١}{٢}$

١٢) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، أ د = ٦ سم ، د م عمودي على مستوى المستطيل د م = ١٠ سم بدأت نقطة (ع) الحركة من (أ) على أ ب بسرعة (٢)سم / ث ، احسب معدل تغير زاوية الارتفاع (ع) بالنسبة لـ (م) عند وصول (ع) الى (ب)

الحل :



$ظاهـ = \frac{١٠}{ل}$

$قا^٢هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{-١٠}{ل^٢} \frac{دل}{دن}$

$ل^٢ = س^٢ + (٦)^٢$

عندما $س = ٨$

$ل^٢ = (٨)^٢ + (٦)^٢$

$ل^٢ = ١٠٠ \Leftarrow ل = ١٠$

$\text{٢} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{\text{-١٠}}{(\text{١٠})^{\text{٢}}} \times \frac{\text{١٦}}{\text{١٠}}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{\text{-١٦}}{\text{١٠٠} \times \text{٢}}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{\text{-١٦}}{\text{٢٠٠}}$

نشتق : $\text{٢ل} \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{٢س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

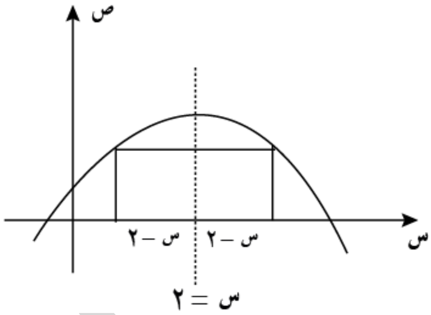
$\text{٢} \times \text{١٠} \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{٢} \times \text{٨} \times \text{٢}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \frac{\text{١٦}}{\text{١٠}}$

$\text{ظاهـ} = \frac{\text{١٠}}{\text{ل}} = \frac{\text{١٠}}{\text{١٠}} = \text{١}$

$\text{قا}^{\text{٢}}\text{هـ} = \text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\text{هـ} = \text{٢}$

١٣) رسم مستطيل تحت منحنى ص = ٤س − س $^{\text{٢}}$ بحيث يقع رأسان من رؤوسه على منحنى (ص) ويقع رأساه الاخران على محور السينات اذا كان ضلعه الذي على محور السينات يتناقص بمعدل (١) سم / ث ، ما معدل تغير مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه الموجود على محور السينات يساوي (٢) سم



الحل :

محور التماثل

$\text{ص}' = \text{٤} - \text{٢س} = \text{٠}$

$\text{س} = \text{٢}$

طول الضلع $\text{ل} = \text{٢}(\text{س} - \text{٢})$

$\text{م} = \text{٢}(\text{س} - \text{٢}) \times \text{ص}$

$\text{م} = \text{٨س}^{\text{٢}} - \text{٢س}^{\text{٣}} - \text{١٦س} + \text{٤س}^{\text{٢}}$

$\text{م} = \text{١٢س}^{\text{٢}} - \text{٢س}^{\text{٣}} - \text{١٦س}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = (\text{٢٤س} - \text{٦س}^{\text{٢}} - \text{١٦}) \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$= (\text{٢٤} \times \text{٣} - \text{٦} \times \text{٩} - \text{١٦}) \times \frac{\text{-١}}{\text{٢}}$

$= \text{٢} \times \frac{\text{-١}}{\text{٢}} = \text{-١}$

$\text{ل} = \text{٢}(\text{س} - \text{٢})$

$\text{ل} = \text{٢س} - \text{٤}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{٢} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{-١}}{\text{٢}}$

عندما $\text{ل} = \text{٢}$

$\Leftarrow \text{٢} = \text{٢س} - \text{٤}$

$\Leftarrow \text{س} = \text{٣}$