التفسير الهندسي :

١) نعوض

٢) نشتق

٣) نعوض

٤) معادلة المماس : ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

٥) معادلة العمودي : ص − ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$(س − س$_{١}$)

امثلة :

١) اذا كانت ق(س) = س^{٣} + ٢س ، احسب معادلة المماس والعمودي عندما س = ١

الحل :

ق(١) = (١)^{٣} + ٢×١ = ٣ (ص$_{١}$)

ق$'$(س) = ٣س^{٢} + ٢

ق$'$(١) = ٣(١)^{٢} + ٢ = ٥ (م)

ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

معادلة المماس : ص − ٣ = ٥(س − ١)

معادلة العمودي : ص − ٣ = $\frac{-١}{٥}$(س − ١)

٢) اذا كانت ق = $\sqrt{٢س + ١}$ ، احسب معادلة المماس والعمودي عندما س = ٤

الحل :

ق(٤) = $\sqrt{٩}$ = ٣ (ص$_{١}$)

ق$'$(س) = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢س+١}}$

ق$'$(٤) = $\frac{٢}{٦}$ (م)

ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

معادلة المماس : ص − ٣ = $\frac{٢}{٦}$(س − س$_{١}$)

معادلة العمودي : ص − ٣ = $\frac{-١}{\frac{٢}{٦}}$(س − ٤)

قاعدة (١) :

يقطع المنحنى محور السينات ⟸ ص = ٠

يقطع المنحنى محور الصادات ⟸ س = ٠

مثال :

اكتب معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س^{٣} − ١ عند تقاطع محور السينات

الحل :

يقطع السينات ⟸ ص = ٠

س^{٣} − ١ = ٠ ⟸ س^{٣} = ١ ⟸ $\boxed{\text{س} = ١}$

ق(١) = (١)^{٣} − ١ = ٠ (ص$_{١}$)

ق$'$(س) = ٣س^{٢}

ق$'$(١) = ٣(١)^{٢} = ٣ (م)

ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

معادلة المماس : ص − ٠ = ٣(س − ٤)

قاعدة (٢) :

ق يوازي هـ ⟸ ق$'$ = هـ$'$

مثال :

احسب النقاط التي على منحنى ق(س) = س^{٣} − ٥س + ٦ التي يكون المماس عندها يوازي المستقيم ص − ٧س = ١١

الحل :

ص − ٧س = ١١ ⟸ ص = ١١ + ٧س

يوازي ⟸ ق$'$ = ص$'$

٣س^{٢} − ٥ = ٧

٣س^{٢} = ١٢ ⟸ س^{٢} = ٤ ⟸ س = ٢ ، −٢

(٢ ، ق(٢)) (٢ ، ٤)

(−٢ ، ق(−٢)) (−٢ ، ٨)

قاعدة (٣) :

ق يعامد هـ ⟸ ق$'$ × هـ$'$ = −١

مثال :

اذا كان $ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٧$ ، احسب النقاط التي يكون المماس عندها عمودي على المستقيم $٥ص + س = ١٦$

الحل :

$ق' \times ص' = -١$

$(٢س + ٣) \times \frac{-١}{٥} = -١$

$س = ١$

$٥ص' + ١ = ٠$

$\Leftarrow ص' = \frac{-١}{٥}$

$ق(١) = (١)^{٢} + ٣(١) + ٧ = ١١ \Leftarrow (١،١١)$

قاعدة (٤) :

المماس افقي او يوازي السينات $\Leftarrow ق' = ٠$

مثال :

احسب معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + ٧$ ، التي يكون المماس عندها يوازي السينات (افقيا)

الحل :

$ق'(س) = س^{٢} - ٤س = ٠$

$\Leftarrow س(س - ٤) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٤$

$س = ٠$

$ق(٠) = ٧ \leftarrow ص_{١}$

$ق' = ٠$

$م = ٠$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٧ = ٠(س - ٠)$

$ص = ٧$

$س = ٤$

$ق(٤) = -٩$

$ق' = ٠$

$م = ٠$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص + ٩ = ٠(س - ٠)$

$ص = -٩$

قاعدة (٥) :

التقاطع $\Leftarrow ق = هـ$

امثلة :

١) اكتب معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٧$ ، عند تقاطع $هـ = س^{٢} + ١$

الحل :

$ق = هـ$

$س^{٣} + \cancel{س^{٢}} - ٧ = \cancel{س^{٢}} + ١$

$س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$

$ق(٢) = (٢)^{٣} + (٢)^{٢} - ٧ = ٥$

$ق' = ٣س^{٢} + ٢س$

$ق'(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢ \times ٢ = ١٦$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

معادلة المماس : $ص - ٥ = ١٦(س - ٢)$

٢) اكتب معادلة المماس لمنحنى $(س + ص)^{٣} - ٥س + ٧ص = ١٠$ ، عند تقاطع مع المستقيم $س + ص = ٢$

الحل :

$س + ص = ٢ \Leftarrow ص = ٢ - س$

$(\cancel{س} + ٢ - \cancel{س})^{٣} - ٥س + ٧(٢ - س) = ١٠$

$٨ - ٥س + ١٤ - ٧س = ١٠ \Leftarrow \boxed{س = ١.}$

$\Leftarrow ص = ٢ - ١ = ١ \Leftarrow (١،١)$

نشتق : $٣(س + ص)^{٢}(١ + ص') - ٥ + ٧ص' = ٠$

نعوض : $٣(١ + ١)^{٢}(١ + ص') - ٥ + ٧ص' = ٠$

$\Leftarrow ص' = \frac{-٧}{١٩}$

معادلة المماس : $ص - ١ = \frac{-٧}{١٩}(س - ١)$

قاعدة (٦) :

نقطة معطاة بالسؤال

تحقق المعادلة
(تماس)

لا تحقق المعادلة
خارجية
$ق' = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

امثلة :

١) اكتب معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = ٤س - س^{٢}$ المرسوم من $(٢، ٥)$

الحل :

$ق(٢) = ٤(٢) - (٤) \Leftarrow ٤ \neq ٥$ خارجية

نفرض التماس $(س، ص)$

$ق' = \frac{ص - ٥}{س - ٢}$

$٤ - ٢س = \frac{٤س - س^{٢} - ٥}{س - ٢}$

$\cancel{٤س} - س^{٢} - ٥ = \cancel{٤س} - ٨ - ٢س^{٢} + ٤س$

$٢س^{٢} - س^{٢} - ٤س - ٥ + ٨ = ٠$

$\Leftarrow س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠ \Leftarrow س = ٣، -١$

$س = ٣$
$ق(٣) = ٣$
$ق' = ٤ - ٢س$
$ق'(٣) = -٢$
$ص - ٣ = -٢(س - ٣)$

$س = -١$
$ق(-١) = ٣$
$ق' = ٤ - ٢س$
$ق'(-١) = ٢$
$ص - ٣ = ٢(س - ١)$

---

٢) بين ان لمنحنى $ق(س) = س^{٢} + ٨$ مماسين مرسومين من $(١، ٥)$ خارجية التي لا تقع عليه

الحل :

نفرض التماس $(س، ص)$

$ق' = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} \Leftarrow ق' = \frac{ص - ٥}{س - ١}$

$\Leftarrow ٢س = \frac{س^{٢} + ٨ - ٨}{س - ١}$

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٣، -١}$

$\Leftarrow$ يوجد مماسان

$\Leftarrow$ النقاط $(٣، ١٧)$ $(-١، ٩)$

---

٣) اوجد معادلة المماس لمنحنى $س^{٢} - ص^{٢} = -٨$ المرسوم من النقطة $(-٤، ٠)$

الحل :

$(-٤)^{٢} - ٠ \neq -٨$ خارجية

نفرض التماس $(س، ص)$

$ق' = \frac{ص - ٠}{س - (-٤)}$
$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{س + ٤}$
$س^{٢} + ٤س = ص^{٢}$
$س^{٢} - ص^{٢} = -٤س$

$س^{٢} - ص^{٢} = -٨$
$٢س - ٢صص' = ٠$
$\frac{\cancel{٢ص}ص'}{\cancel{٢ص}} = \frac{٢س}{٢ص}$
$ص' = \frac{س}{ص}$

$-٨ = -٤س \Leftarrow س = ٢$

$(٢)^{٢} - ص^{٢} = -٨$

$\Leftarrow ص^{٢} = ١٢ \Leftarrow \left(ص = \sqrt{١٢}، -\sqrt{١٢}\right)$

$س = ٢$
$ص = \sqrt{١٢}$
$ص' = \frac{س}{ص}$
$م = \frac{٢}{\sqrt{١٢}}$
$ص - \sqrt{١٢} = \frac{٢}{\sqrt{١٢}}(س - ٢)$

$س = ٢$
$ص = -\sqrt{١٢}$
$ص + \sqrt{١٢} = \frac{-٢}{\sqrt{١٢}}(س - ٢)$

واجب

٤) اكتب معادلة المماس لمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ المرسوم من النقطة $(٥، ٠)$

---

٥) اذا كان المماس المرسوم لمنحنى $ق = أس^{٢} - ٧س + ب$ عند $(١، ٣)$ يمر بالنقطة $(٣، ٥)$ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

الميل $= \frac{٥ - ٣}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$

$ق' = ٢أس - ٧$

$س = ١ \Leftarrow ق'(١) = ٢أ(١) - ٧ = ١ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

ق يمر $(١، ٣) \Leftarrow ق(١) = ٣$

$ق = أس^{٢} - ٧س + ب$

$٣ = أ(١)^{٢} - ٧(١) + ب$

$٣ = أ - ٧ + ب \Leftarrow ٣ = ٤ - ٧ + ب \Leftarrow \boxed{ب = ٦}$

قاعدة (٧) :

كلمة يمس ⟵ $ق' = هـ'$
⟵ $ق = هـ$

مثال :

اذا كان المستقيم $ص = ٣س + أ$ يمس منحنى $ق = \frac{س - ٢}{س + ١}$ ، فما نقاط التماس وما قيمة (أ)

الحل :

$ص' = ٣$

$ق' = \frac{(س + ١)(١) - (س - ٢)(١)}{(س + ١)^{٢}}$

$ص' = ق'$

$٣ = \frac{\cancel{س} + ١ - \cancel{س} + ٢}{(س + ١)^{٢}}$

$٣ = \frac{٣}{(س + ١)^{٢}} \Leftarrow (س + ١)^{٢} = ١$

$\Leftarrow س^{٢} + ٢س + \cancel{١} = \cancel{١}$

$\Leftarrow س(س + ٢) = ٠ \boxed{\Leftarrow س = ٠ ، -٢}$

$س = ٠$

$ق(٠) = \frac{٠ - ٢}{٠ + ١} = -٢$

$ص(٠) = ٣ \times ٠ + أ = أ$

$ق = ص$

$-٢ = أ$

$س = -٢$

$ق(-٢) = \frac{-٢ - ٢}{-٢ + ١} = ٤$

$(-٢ ، ٤)$

$ص(-٢) = -٦ + أ$

$ق = ص$

$٤ = -٦ + أ \Leftarrow ١٠ = أ$

قاعدة (٨) :

يمس السينات ⟵ $ق' = ٠$
⟵ $ق = ٠$

امثلة :

١) اذا كان $ق(س) = س^{٢} + أس + أ$ ، فما قيمة (أ) اذا كان ق(س) يمس السينات

الحل :

$ق' = ٠ \Leftarrow ٢س + أ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \frac{-أ}{٢}}$

$ق(\frac{-أ}{٢}) = ٠$

$(\frac{-أ}{٢})^{٢} + أ(\frac{-أ}{٢}) + أ = ٠$

$\frac{أ^{٢}}{٤} - \frac{أ^{٢}}{٢} + أ = ٠ \quad \times ٤$

$أ^{٢} - ٢أ^{٢} + ٤أ = ٠ \Leftarrow ٤أ - أ^{٢} = ٠$

$\Leftarrow أ(٤ - أ) = ٠ \Leftarrow أ = ٠ ، ٤$

---

٢) اذا كان المستقيم المار بالنقاط (−١، ٠) (٢، ٣) يمس المنحنى $ق(س) = أس^{٢} - ٧س + ٥$ ، فما قيمة (أ)

الحل :

نجد معادلة المستقيم : الميل $= \frac{٣ - ٠}{٠ - (-١)} = ١$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٠ = ١(س - (-١)) \Leftarrow \boxed{ص = س + ١}$

نعيد صياغة السؤال :

اذا كان المستقيم $ص = س + ١$ يمس $ق = أس^{٢} - ٧س + ٥$ ، فما قيمة (أ)

$ص' = ق'$

$١ = ٢أس - ٧ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{٤}{س}}$

$ق = ص$

$س + ١ = أس^{٢} - ٧س + ٥$

$س + ١ = \frac{٤}{س} \times س^{٢} - ٧س + ٥$

$س + ١ = ٤س - ٧س + ٥ \Leftarrow س = ١$

$\Leftarrow أ = \frac{٤}{١} = \boxed{٤}$

٣) اذا كان المستقيم ص = **٢س** يمس ق = $(س^{٢} - ٢)$(أس + ب) عند ، فما قيم أ ، ب

الحل :

ص(٢) = ق(٢)

٤ = (٤ − ٢)(٢أ + ب)

٤أ + ٢ب = ٤ ...(١)

ص´(٢) = ق´(٢)

٢ = $(س^{٢} - ٢)$(أ) + (أس + ب)(٤س)

٢ = ٢أ + ٨أ + ٤ب

١٠أ + ٤ب = ٢ ...(٢)

بالحذف : أ = −٣ ، ب = ٨

---

٤) اوجد قيم (س) التي على منحنى ق = س − **جا٢س** التي يكون العمودي على المماس موازي لمحور الصادات لكل س ∈ [٠، ٢π]

الحل :

قاعدة :

العمودي يوازي الصادات ⟸ المماس يوازي السينات

ق´ = ٠

١ − ٢جتا٢س = ٠ ⟸ جتا٢س = $\frac{١}{٢}$

$\frac{٢س}{٢} = \frac{٦٠}{٢} ، \frac{٣٠٠}{٢} ، \frac{٤٢٠}{٢} ، \frac{٦٦٠}{٢}$

س = ٣٠، ١٥٠، ٢١٠، ٣٣٠ ∈ [٠، ٢π]

قاعدة (٩) :

اذا علمت معادلة المماس معناها نفس يمس :

ق = ص

ق´ = ص´

---

٥) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق عندما س = ١ هي ص + ٢س = ٥ وكان ق = أس^{٣} + بس^{٢} فما قيم أ ، ب

الحل :

ص = ق

٥ − ٢س = أس^{٣} + بس^{٢}

س = ١

٣ = أ + ب ...(١)

ص´ = ق´

−٢ = ٣أس^{٢} + ب × ٢س

س = ١

−٢ = ٣أ + ٢ب ...(٢)

بحل المعادلات : أ = −٨ ، ب = ١١

---

٦) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق عندما س = ٢ هي ص + ٣س = ٧ وكانت ل(س) = س^{٣} × ق^{٢}(س) + $\frac{١٢}{ق(س)}$ ، احسب ل´(س)

الحل :

ل´ = س^{٣} × ٢ق(س) ق´ + ق^{٢} × ٣س^{٢} − $\frac{١٢ × ق´}{(ق)^{٢}}$

يلزم ق(٢) / ق´(٢)

ص(٢) = ق(٢)

٧ − ٣ × ٢ = ق(٢)

١ = ق(٢)

ص´(٢) = ق´(٢)

−٣ = ق´(٢)

ل´ = ٨ × ٢ × ١ × −٣ + ١ × ٣ × ٤ − $\frac{١٢ × -٣}{١}$ = ٠

---

٧) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عندما س = ٢ هي ص + ٣س = ١١ وكانت معادلة العمودي لمنحنى هـ(س) عندما س = ٢ هي ٥ص + ٢س = ٩ وكانت ل(س) = (ق × هـ)(س) ، احسب ل´(٢)

الحل :

ل´(٢) = ق(٢) × هـ´(٢) + هـ(٢) × ق´(٢)

حيث

ص = ١١ − ٣س

ص(٢) = ١١ − ٦

= ٥ = ق(٢)

ص´ = −٣

ق´(٢) = −٣

٥ص = ٩ − ٢س

ص = $\frac{٩}{٥} - \frac{٢}{٥}$س

ص´ = $\frac{-٢}{٥}$ عمودي

هـ = $\frac{٥}{٢}$

ص(٢) = ١ ⟸ هـ(٢) = ١

⟸ ل´(٢) = ٥ × $\frac{٥}{٢}$ + ١ × −٣ = $\frac{١٩}{٢}$

واجب

٨) احسب معادلة العمودي على المماس لمنحنى $ق(س) = س^٢$ اذا كان العمودي مرسوم من النقطة $(٠، \frac{٩}{٢})$

---

٩) احسب مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى $ص = \frac{١}{س}$ عند $(أ، \frac{١}{أ})$ والمحاور

الحل :

$م_١ = \frac{-١}{س^٢} = \frac{-١}{أ^٢}$

$(س، ٠)\ (أ، \frac{١}{أ})$

$م_٢ = \frac{\frac{١}{أ} - ٠}{أ - س}$

$م_١ = م_٢$

$\frac{-١}{أ^٢} = \frac{\frac{١}{أ}}{أ - س}$

$-أ + س = \frac{١}{أ} \times أ^٢$

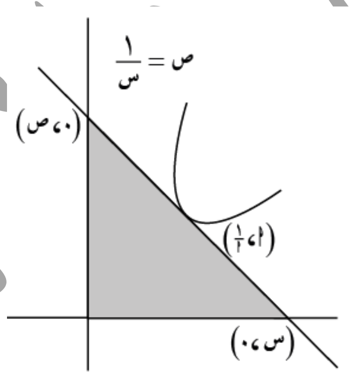
$-أ + س = أ \Rightarrow س = ٢أ$

$(أ، \frac{١}{أ})\ (٠، ص)$

$\Rightarrow م_٢ = \frac{ص - \frac{١}{أ}}{٠ - أ}$

$\frac{-١}{أ^٢} = \frac{ص - \frac{١}{أ}}{-أ} \Rightarrow ص - \frac{١}{أ} = \frac{-١}{أ^٢} \times -أ \Rightarrow \boxed{ص = \frac{٢}{أ}}$

المساحة $= \frac{١}{٢} س \times ص = \frac{١}{٢} \times ٢أ \times \frac{٢}{أ} = \boxed{٢}$



---

١٠) بين ان المماس لمنحنى $ق(س) = س^٢$ عندما $س = أ$ يقطع محور السينات عندما $س = \frac{أ}{٢}$

الحل :

$ق(أ) = أ^٢$

$م_١ = ق' = ٢س = ٢أ$

$(أ، أ^٢)\ (س، ٠)$

$م_٢ = \frac{أ^٢ - ٠}{أ - س}$

$٢أ = \frac{أ^٢}{أ - س} \Rightarrow ٢أ(أ - س) = أ^٢$

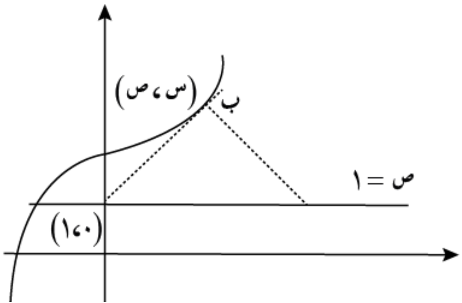
$\Rightarrow ٢أ(أ - س) - أ^٢ = ٠ \Rightarrow أ(٢أ - ٢س - أ) = ٠$

$\Rightarrow أ(أ - ٢س) = ٠$

$\Rightarrow أ = ٠ \ ، \ أ = ٢س \rightarrow \boxed{س = \frac{أ}{٢}}$

---

١١) معتمدا على الشكل المجاور ، احسب مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من $(٠، ١)$ لمنحنى $ق = س^٣ + ٣$ والعمودي على المماس والمستقيم $ص = ١$



الحل :

نجد (ب)

$م_١ = \frac{ص - ١}{س - ٠}$

$= \frac{س^٣ + ٣ - ١}{س} = \frac{س^٣ + ٢}{س}$

$م_٢ = ق' = ٣س^٢$

$\frac{س^٣ + ٣}{س} = ٣س^٢ \Rightarrow س^٣ + ٢ = ٣س^٣$

$٢س^٣ = ٢ \Rightarrow س^٣ = ١ \Rightarrow س = ١$

$ق(١) = ٤ \Rightarrow ب(١، ٤)$

$\Rightarrow$ ارتفاع المثلث $= ٤ - ١ = ٣$

لايجاد (جـ) خارجية على العمودي

الميل $ق' = ٣س^٢ \Rightarrow ق'(١) = ٣$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٣}$

$\frac{-١}{٣} = \frac{٤ - ١}{١ - س} \Rightarrow \boxed{س = ١٠}$

طول القاعدة أجـ $= ١٠ - ٠ = ١٠$

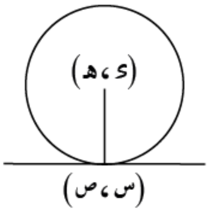
المساحة $= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٣ = ١٥$

---

١٢) اثبت ان نصف قطر الدائرة يكون عموديا على مماس الدائرة عند التماس

الحل :

معادلة الدائرة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$



$٢(س - د)^١ + ٢(ص - هـ)ص' = ٠$

$\frac{٢(ص - هـ)ص'}{٢(ص - هـ)} = \frac{\cancel{-٢}(س - د)}{\cancel{٢}(ص - هـ)}$

$ص' = \frac{(س - د)}{(ص - هـ)} ......م_١$

يمر $(س، ص)\ (د، هـ)$

ميل نصف القطر $= \frac{ص - هـ}{س - د} ......م_٢$

$\text{م}_١ \times \text{م}_٢$

$$\frac{-(\text{س}-\text{د})}{\text{ص}-\text{هـ}} \times \frac{\text{ص}-\text{هـ}}{\text{س}-\text{د}} = -١$$

المماس يعامد نصف القطر

١٣) اوجد النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة $٩\text{س}^٢ + ١٦\text{ص}^٢ = ٥٢$ موازيا للمستقيم $٩\text{س} - ٨\text{ص} = ١$

الحل :

ميل الماس = ميل المستقيم

$٩\text{س} - ٨\text{ص} = ١ \Rightarrow \text{ص} = \frac{٩}{٨}\text{س} - \frac{١}{٨} \Rightarrow \text{ص}' = \frac{٩}{٨}$

$٩\text{س}^٢ + ١٦\text{ص}^٢ = ٥٢ \Rightarrow ١٨\text{س} + ٣٢\text{ص}\text{ص}' = ٠$

$\Rightarrow \text{ص}' = \frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}}$

$\text{ص}' = \text{ص}'$

$\frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}} = \frac{٩}{٨} \Rightarrow +\text{س} = -٢\text{ص}$

لكن : $٩\text{س}^٢ + ١٦\text{ص}^٢ = ٥٢$

$٩(-٢\text{ص})^٢ + ١٦\text{ص}^٢ = ٥٢$

$٣٦\text{ص}^٢ + ١٦\text{ص}^٢ = ٥٢$

$\text{ص}^٢ = ١ \Rightarrow \text{ص} = \pm ١$

$\text{ص} = ١ \Rightarrow \text{س} = -٢$ ، $\text{ص} = -١ \Rightarrow \text{س} = ٢$

النقاط $(-٢، ١)$ $(٢، -١)$

١٤) بين انه لمنحنى $\text{ق} = \text{س}^٤$ مماسين مرسومين من $(\frac{٣}{٤}، ٠)$ التي لا تقع عليه

الحل :

$(\frac{٣}{٤}، ٠)$ خارجية ، $(\text{س}، \text{ص})$ تماس

$\text{ق}' = ٤\text{س}^٣ = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \frac{٣}{٤}}$

$٤\text{س}^٣ = \frac{\text{س}^٤}{\text{س} - \frac{٣}{٤}} \Rightarrow ٤\text{س}^٤ - ٣\text{س}^٣ = \text{س}^٤$

$٣\text{س}^٤ - ٣\text{س}^٣ = ٠ \Rightarrow \text{س} = ٠ ، \text{س} = ١$

التماس $(٠، ٠)$ $(١، ١)$ هناك مماسين

$\text{م} = ٠$	$\text{ق}' = ٤\text{س}^٣$
$\text{ص} - ٠ = ٠(\text{س} - ٠)$	$\text{م} = ٤(١)^٣ = ٤$
	$\text{ص} - ١ = ٤(\text{س} - ١)$

١٥) عين قيم (جـ) في $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}\text{س}^٢$ اذا كانت زاوية ميل الماس لمنحنى ق عندما $\text{س} = ١$ هي (٤٥°)

الحل :

الميل = ظاهـ = $\text{ق}'$

$\text{ق}'(١) = \text{ظا}٤٥ = ١$

$٢\text{جـ}\text{س} = ١ \Rightarrow ٢\text{جـ} \times ١ = ١ \Rightarrow \text{جـ} = \frac{١}{٢}$

واجب

١٦) بين انه لمنحنى $\text{ق} = \text{س}^٢ + ٨$ مماسين مرسومين من النقاط $(١، ٥)$ التي لا تقع عليه

١٧) احسب معادلة المماس لمنحنى $\text{ق} = \text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٧$ عند تقاطعه مع $\text{ص} - ٣\text{س} + ١ = ٠$

الحل :

$\text{ق} = \text{ص}$ (من التقاطع)

$\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٧ = ٣\text{س} - ١$

$\text{س}^٢ - ٩\text{س} + ٨ = ٠$

$(\text{س} - ٨)(\text{س} - ١) = ٠ \Rightarrow \boxed{\text{س} = ٨}، \boxed{\text{س} = ١}$

$\text{س} = ٨$	$\text{س} = ١$
$\text{ق}(٨) = ٢٣$	$\text{ق}(١) = ٢$
$\text{ق}' = ٢\text{س} - ٦$	$\text{ق}' = ٢\text{س} - ٦$
$\text{ق}'(٨) = ١٠$	$\text{ق}'(١) = -٤$
$\text{ص} - ٢٣ = ١٠(\text{س} - ٨)$	$\text{ص} - ٢ = -٤(\text{س} - ١)$
المماس الاول	المماس الثاني

١٨) اوجد قيم (س) التي يكون العمودي على المماس لمنحنى س−جا٢س يوازي الصادات

الحل :

يوازي الصادات $\Rightarrow \text{ق}' = ٠$

$\text{ق}' = ١ - ٢\text{جتا}٢\text{س} = ٠$

$١ = ٢\text{جتا}٢\text{س} \Rightarrow \text{جتا}٢\text{س} = \frac{١}{٢}$

$٢\text{س} = \frac{\pi}{٣} + ٢\pi\text{ن} \Rightarrow \text{س} = \frac{\pi}{٦} + \pi\text{ن}$

$٢\text{س} = \frac{٥\pi}{٣} + ٢\pi\text{ن} \Rightarrow \text{س} = \frac{٥\pi}{٦} + \pi\text{ن}$

١٩) اذا كان $ق = س^{٣}$ ، $هـ = س^{٢}$ ، اوجد قيم (س) التي يكون عندها مماس مشترك لكل من ق ، هـ

الحل :

نجد نقاط التقاطع $ق = هـ$

$س^{٣} = س^{٢} \Leftarrow س^{٣} - س^{٢} = ٠$

$س^{٢}(س - ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٠} ، \boxed{س = ١}$

$س = ٠$

$ق' = ٣س^{٢}$

$هـ' = ٢س$

$ق'(٠) = هـ'(٠) = ٠$

هناك مماس مشترك

$س = ١$

$ق'(١) = هـ'(١)$

لا يوجد مماس مشترك

عندما $س = ١$

---

٢٠) اثبت ان المماسين للمنحنيين $ص^{٢} + س^{٢} = ٨س$ ، $ص = س^{٢}$ متعامدين عند النقطة (٠،٠)

الحل :

$٢صص' + ٢س = ٨ \Leftarrow ص' = \frac{٨ - ٢س}{٢ص}$

$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{(٠،٠)} = \frac{٨}{٠}$ غير معرف $\Leftarrow$ زاوية الميل $= ٩٠$

$\Leftarrow$ معادلة المماس : $س = ٠$ (محور الصادات)

نجد معادلة المماس الثاني : $ص' = ٢س = ٠ \Leftarrow م = ٠$

عند (٠،٠) $\Leftarrow$ معادلة المماس الثاني عند (٠،٠) هي

$ص = ٠$ محور السينات

$\Leftarrow$ المماسان متعامدين (محور السينات ومحور الصادات)

---

٢١) رسم مماس لمنحنى $ق = س^{٣} + ٢$ عند (س،ص) فقطع المنحنى في نقطة ثانية هي (−٢،−٦) ، فما معادلة هذا المماس

الحل :

(−٢،−٦) خارجية ، (س،ص) تماس

$ق' = \frac{ص + ٦}{س + ٢}$

$٣س^{٢} = \frac{س^{٣} + ٢ + ٦}{س + ٢}$

$\Leftarrow ٣س^{٣} + ٦س^{٢} = س^{٣} + ٢ + ٦$

$٢س^{٣} + ٦س^{٢} - ٨ = ٠ \Leftarrow س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤ = ٠$

بالتجريب $س = ١$ تحقق

تركيبية : $(س - ١)(س^{٢} + ٤س + ٤) = ٠$

$\boxed{س = ١}$ ، $\boxed{س = -٢}$ ✗ تهمل لأنها معطاة بالسؤال

$\Leftarrow$ الميل $= ق'(١) = ٣ \Leftarrow (١،٣)$ تماس

معادلة المماس : $ص - ٣ = ٣(س - ١)$

---

٢٢) اذا كانت المعادلة $ص = ٢س - ٣$ هي معادلة المماس لمنحنى $ق = \frac{١}{أ + بس}$ عند $س = ١$ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

$ص(١) = ق(١)$

$-١ = \frac{١}{أ + ب}$

$أ + ب = -١ \ldots(١)$

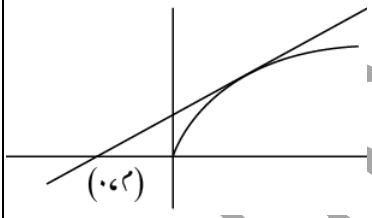
$ص'(١) = ق'(١)$

$٢ = \frac{-ب}{(أ + ب)^{٢}} \ldots(٢)$

بحل المعادلات : $\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -٢}$

---

٢٣) رسم مماس لمنحنى العلاقة $ص^{٢} = ٤س$ عند (س،ص) فقطع السينات عند (م،٠) ، اثبت ان : $م = -س$



الحل :

ميل المماس $ص' = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

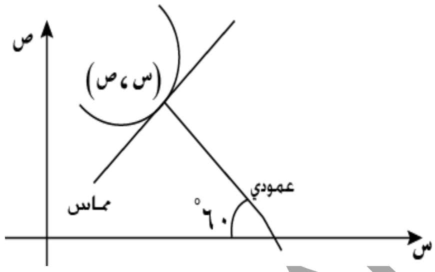
$ص' = \frac{ص - ٠}{س - م} \ldots\ldots(١)$

$٢صص' = ٤ \Leftarrow ص' = \frac{\cancel{٤}^{٢}}{\cancel{٢}ص} \ldots\ldots(٢)$

$\frac{٢}{ص} = \frac{ص}{س - م} \Leftarrow ٢س - ٢م = ص^{٢}$

$\Leftarrow ٢س - ٢م = ٤س \Leftarrow -س = م$ وهو المطلوب

٢٤) في الشكل المجاور المستقيم (ل) عمودي على المماس للاقتران ق(س) عند (س، ص) ، احسب ق$'$(س)



الحل :

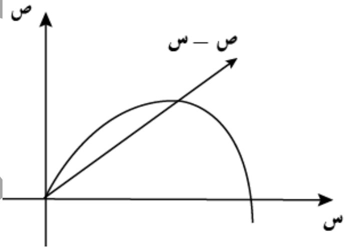
ق$'$ = ميل المماس

$$\frac{-\text{١}}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-\text{١}}{\text{ظا ١٢٠}} = \frac{-\text{١}}{-\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$$

---

٢٥) من الشكل المجاور ، احسب قياس الزاوية المحصورة بين ص = س ومماس منحنى الاقتران ق = $\sqrt{\text{٣}}$س − س$^{\text{٢}}$ عند (٠، ٠)

الحل :



نجد الزاوية التي يكونها المماس

مع الاتجاه الموجب للسينات

ق$'$ = $\sqrt{\text{٣}}$ − ٢س

ميل المماس ق$'$(٠) = $\sqrt{\text{٣}}$ ⟸ المماس يكون زاوية (٦٠)

نجد الان الزاوية التي يكونها المستقيم ص = س مع الاتجاه الموجب للسينات

ص$'$ = ١ ⟸ الزاوية التي ظلها (١) هي (٤٥)

⟸ الزاوية بين المماس والمستقيم ص = س هي ٦٠ − ٤٥ = ١٥

---

٢٦) اذا كانت س + ٢ = أص ، أ ثابت مماسا للعلاقة ص$^{\text{٢}}$ = ٨س ، فما قيمة (أ)

الحل :

س + ٢ = أص ⟸ ١ = أص$'$ ⟸ ص$'$ = $\frac{\text{١}}{\text{أ}}$

ص$^{\text{٢}}$ = ٨س ⟸ ٢صص$'$ = ٨ ⟸ ص$'$ = $\frac{\text{٤}}{\text{ص}}$

ص$'$ = ص$'$ ⟸ $\frac{\text{١}}{\text{أ}} = \frac{\text{٤}}{\text{ص}}$ ⟸ ص = ٤أ ...(١)

ص = ص ، س = س ⟸ أص − ٢ = $\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٨}}$ ...(٢)

بحل المعادلات : أ = ±١

---

٢٧) اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين ٤س$^{\text{٢}}$ + ٩ص$^{\text{٢}}$ = ٤٥ ، س$^{\text{٢}}$ − ٤ص$^{\text{٢}}$ = ٥ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الاول متعامدين

الحل :

س$^{\text{٢}}$ = ٥ + ٤ص$^{\text{٢}}$

٤(٥ + ٤ص$^{\text{٢}}$) + ٩ص$^{\text{٢}}$ = ٤٥

٢٠ + ٢٥ص$^{\text{٢}}$ = ٤٥ ⟸ ص$^{\text{٢}}$ = ١ ⟸ ص = ±١

⟸ س$^{\text{٢}}$ = ٥ + ٤ = ٩ ⟸ س = ±٣

⟸ التماس (٣، ١) بالربع الاول

الان نشتق كل منحنى لمعرفة ميل المماسين

س$^{\text{٢}}$ − ٤ص$^{\text{٢}}$ = ٥	٤ص$^{\text{٢}}$ + ٩ص$^{\text{٢}}$ = ٤٥
٢س − ٨صص$'$ = ٠	٨س + ١٨صص$'$ = ٠
ميل عند (٣، ١) =	ميل عند (٣، ١) =
ص$'$ = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$	٢٤ + ١٨ص$'$ = ٠
	ص$'$ = $\frac{-\text{٤}}{\text{٣}}$

م$_{\text{١}}$ × م$_{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}} \times \frac{-\text{٤}}{\text{٣}}$ = −١ متعامدين

---

٢٨) احسب جميع قيم (س) التي يكون عندها العمودي على المماس لمنحنى ق = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$س$^{\text{٢}}$ − $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$ مارا بالأصل

الحل :

نفرض التماس (س، ص)

ميل العمودي = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{-\text{١}}{\text{٢س}} = \frac{\text{ص} - \text{٠}}{\text{س} - \text{٠}}$ ⟸ − س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$س ($\frac{\text{١}}{\text{٤}}$س$^{\text{٢}}$ − $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$)

⟸ $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$س$^{\text{٣}}$ − $\frac{\text{٩}}{\text{٨}}$س = −س

⟸ س$^{\text{٣}}$ − ٩س + ٨س = ٠ ⟸ س$^{\text{٣}}$ − س = ٠

⟸ س(س − ١) = ٠ ⟸ س = ٠ ، ١ ، −١

---

٢٩) اذا كان ق = $\frac{\text{هـ}^{\text{٢}}(\text{س}) + \text{س}}{\text{ل}(\text{س})}$ وكان يوجد مماس مشترك افقي للاقترانين هـ ، ل عند (٣، ٤) ، احسب ق$'$(٣)

الحل :

مماس افقي مشترك عند (٣، ٤)

$$\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \text{هـ}(٣) = \text{ل}(٣) = ٤ \\ \text{هـ}'(٣) = \text{ل}'(٣) = ٠ \end{array}\right.$$

$$\text{ق}' = \frac{(٢\text{هـ}\text{هـ}' + ١)(\text{ل}) - \text{ل}' \times (\text{هـ}^{٢} + \text{س})}{(\text{ل})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(٣) = \frac{(٠ + ١)\text{ل}(٣) - ٠}{(\text{ل}(٣))^{٢}} = \frac{٤}{١٦}$$

---

٣٠) رسم مماسين من (٠، −٤) لمنحنى ق = س^{٢} − ٤س + ب وكان ص = ٢س − ٤ احد المماسين ، احسب معادلة الاخر

الحل :

لايجاد (ب) : ص يمس ق $<$ ق′ = ص′ ، ق = ص

ق′ = ص′ ⟸ ٢س − ٤ ⟸ س = ٣

ق = ص عندما ⟸ ٦ − ٤ = ٩ − ١٢ + ب

⟸ ب = ٥

نجد الان معادلة المماس الثاني : نفرض (س، ص) تماس

(٠، −٤) خارجية :

ق′ = $\frac{\text{ص} + ٤}{\text{س} - ٠}$ ⟸ ٢س − ٤ = $\frac{\text{ص} + ٤}{\text{س}}$

٢س^{٢} − ٤س = س^{٢} − ٤س + ٥ + ٤

⟸ س^{٢} = ٩ ⟸ س = ±٣

⟸ التماس الثانية (−٣، ٢٦)

ميل المماس ق′(−٣) = −١٠

معادلة المماس الثاني : ص − ٢٦ = −١٠(س + ٣)

---

٣١) اذا كان المماس لمنحنى ق = أس^{٢} + ١ يمر بالأصل ويكون زاوية ($\frac{\pi}{٤}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب قيم (أ)

الحل :

ظا٤٥ = ميل المماس = ق′ ⟸ ٢أس = ١ ⟸ س = $\frac{١}{٢\text{أ}}$

التماس ($\frac{١}{٢\text{أ}}$، $\frac{١}{٤\text{أ}}$ + ١)

⟸ الميل = ١ = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

= ١ = $\frac{\frac{١}{٤\text{أ}} + ١ - ٠}{\frac{١}{٢}\text{أ} - ٠}$ ⟸ أ = $\frac{١}{٤}$

---

٣٢) ق كثير من الدرجة الثانية يمر (١، ٤) يمس المستقيم ص = −٢س + ٣ عندما س = ٠ ، اكتب قاعدة الاقتران

الحل :

ق = أس^{٢} + ب س + جـ يمر (١، ٤) ⟸ ق(١) = ٤

أ + ب + جـ = ٤ ......(١)

ق يمس ص ⟸ ص = −٢س + ٣ عندما س = ٠

ق′(٠) = −٢

ق′(س) = أس + ب ⟸ $\boxed{\text{ب} = -٢}$

عندما س = ٠ يكون ق(٠) = ص(٠) ⟸ $\boxed{\text{جـ} = ٣}$

⟸ $\boxed{\text{أ} = ٣}$ ⟸ ق = ٣س^{٢} − ٢س + ٣

---

٣٣) احسب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢، $\frac{١}{٢}$) ويكون عموديا على منحنى ص = س^{٢}

الحل :

نفرض التماس (س، ص) $\frac{-١}{\text{ق}'\text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

⟸ $\frac{-١}{٢\text{س}} = \frac{\text{ص} - \frac{١}{٢}}{\text{س} - ٢}$ ⟸ $\frac{-١}{٢\text{س}} = \frac{\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}}{\text{س} - ٢}$

س^{٣} = ١ ⟸ س = ١ ⟸ (١، ١) تماس

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ق}'} = \frac{-١}{٢}$

معادلة المستقيم : ص − ١ = $\frac{-١}{٢}$(س − ١)

---

٣٤) اذا كان ق(س) = س^{٢} − ٤س + ١ وكان المستقيم ص = −٣ يمس الاقتران ق(س) ، اوجد نقطة التماس

الحل :

المنحنى والمستقيم مماسان ⟸ ق′(س) = ص′

⟸ ٢س − ٤ = ٠ ⟸ س = ٢

ق(٢) = ٤ − ٨ + ١ = −٣

⟸ نقطة التماس (٢، −٣)

٣٥) اكتب معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $س^{٢}$ عند نقطة تقاطع ق(س) مع هـ(س) = $\frac{١}{س}$

الحل :

عند نقطة التقاطع ق = هـ

⟸ $س^{٢}$ = $\frac{١}{س}$ ⟸ $س^{٣}$ = ١ ⟸ س = ١

ق(١) = ١ ⟸ نقطة التماس (١،١)

ق′(س) = ٢س ⟸ ق′(١) = ٢

معادلة المماس : ص − ١ = ٢(س − ١)

---

٣٦) اذا كان المستقيم ٨س − ٤ص − ٤ = ٠ مماسا لمنحنى ق(س) عند (٣،٥) وكان المستقيم ٣س − ٦ص + ١٥ = ٠ عموديا على منحنى ل(س) عند (٣،٤) ، اوجد (ق.ل)′(٣)

الحل :

ق(٣) = ٥ ، ل(٣) = ٤

لإيجاد ق′(٣) ، ل′(٣) نجد الميل

٨س − ٤ص − ٤ = ٠ ⟸ ٤ص = ٨س − ٤

⟸ ص = ٢س − ٢ ⟸ ص′ = ٢ = ق′(٣)

٣س − ٦ص + ١٥ = ٠ ⟸ ٦ص = ٣س + ١٥

⟸ ص = $\frac{١}{٢}$س + $\frac{١٥}{٦}$ ⟸ ص′ = $\frac{١}{٢}$

⟸ ل′(٣) = −٢

(ق.ل)′(٣) = ق(٣) × ل′(٣) + ل(٣) × ق′(٣)

= ٥ × −٢ + ٤ × ٢ = −٢

---

٣٧) بين ان لمنحنى ق(س) = $س^{٣}$ مماس ثاني موازي لمماسه عند نقطة (٢،٨) وأوجد معادلة لحل من المماسين

الحل :

ق′(س) = $٣س^{٢}$ ⟸ ق′(س) = ١٢

⟸ $س^{٢}$ = ٤ ⟸ س = ±٢

⟸ النقاط (٢،٨) (−٢،−٨) يوجد عند كل منهما مماس ميله يساوي (١٢)

عند (٢،٨) ⟸ ص − ٨ = ١٢(س − ٢)

عند (−٢،−٨) ⟸ ص + ٨ = ١٢(س + ٢)

---

٣٨) اوجد النقاط على منحنى ق(س) التي يكون المماس موازي لمحور السينات حيث ق(س) = $\frac{١}{٣}$$س^{٣}$ − ٩س + ٧

الحل :

بما ان المماس موازي لمحور السينات

⟸ م = ق′(س) = $س^{٢}$ − ٩ = ٠ ⟸ س = ±٣

⟸ النقاط (٣،ق(٣))، (−٣،ق(−٣))

أي (٣،−١١)، (−٣،٢٥)

---

٣٩) اوجد النقاط على منحنى ق(س) التي يكون المماس لمنحنى ق(س) = س − $\frac{١}{س}$ يوازي المستقيم ٢س − ص = ٥

الحل :

المماس موازي للمستقيم ⟸ ميل المماس = ميل المستقيم

١ + $\frac{١}{س^{٢}}$ = ٢ ⟸ $\frac{١}{س^{٢}}$ = ١ ⟸ $س^{٢}$ = ١

⟸ س = ±١

⟸ النقاط هي (١،٠)، (−١،٠)

---

٤٠) اذا كان المستقيم ص = ٨س يمس منحنى ق(س) = $٢س^{٢}$ + أ ، فما قيمة (أ)

الحل :

ص يمس ق(س) ⟸ ص′ = ق′(س)

⟸ ٨ = ٤س ⟸ س = ٢

ص يمس الاقتران ق ⟸ ص(٢) = ق(٢)

⟸ ٨ × ٢ = ٢ × ٤ + أ ⟸ ١٦ = ٨ + أ ⟸ ٨ = أ

---

٤١) اذا كان المستقيم ص = ٣س + أ يمس منحنى ق(س) = $\frac{٢س-١}{س+١}$ ، فجد نقاط التماس وقيم (أ)

الحل :

ص′ = ٣ ، ق′(س) = $\frac{(س+١)\times٢-(٢س-١)\times١}{(س+١)^{٢}}$

= $\frac{\cancel{٢س}+٢-\cancel{٢س}+١}{(س+١)^{٢}}$ = $\frac{٣}{(س+١)^{٢}}$

ص′ = ق′ ⟸ ٣ = $\frac{٣}{(س+١)^{٢}}$

⇐ ٣(س + ١)^{٢} = ٣ ⇐ (س + ١)^{٢} = ١

س^{٢} + ٢س + ١ = ١ ⇐ س^{٢} + ٢س = ٠

س(س + ٢) = ٠ ⇐ س = ٠، −٢

اولاً : عندما س = ٠، ق(٠) = $\frac{٠-١}{٠+١}$ = −١

النقطة (٠،−١) بالتعويض في المستقيم

−١ = ٠ + أ ⇐ أ = −١

ثانياً : عندما س = −٢، ق(−٢) = ٥

النقطة (−٢،٥) بالتعويض في المستقيم

٥ = ٣ × −٢ + أ ⇐ ٥ = −٦ + أ ⇐ أ = ١١

---

٤٢) اذا كان المستقيم ص = ٢س يمس ق(س) = (س^{٢} − ٢)(أس + ب) عندما س = ٢ فجد أ، ب

الحل :

عند التماس ⇐ ص = ق(س)

⇐ ٢ × ٢ = (٤ − ٢)(أس + ب)

⇐ ٤ = ٢(أس + ب) ⇐ ٢ = ٢أ + ب ......(١)

عند التماس ⇐ ص′ = ق′(س)

⇐ ٢ = (س^{٢} − ٢) × أ + (أس + ب) × ٢س

⇐ ٢ = (٤ − ٢) × أ + (٢أ + ب) × ٤

⇐ ٢ = ١٠أ + ٤ب ⇐ ١ = ٥أ + ٢ب ......(٢)

بحل المعادلتين : ٢ = ٢أ + ب ...(١)
١ = ٥أ + ٢ب ...(٢)

⇐ أ = −٣ نعوض في (١)

⇐ ٢ = ٢ × −٣ + ب ⇐ ب = ٨

---

٤٣) رسم مماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} + أ من النقطة (١،ب) الواقعة على منحنى ق(س) فقطع المماس محور السينات عند س = −١ ، فجد أ ، ب

الحل :

ق يمر بـ (١،ب) ⇐ ق(١) = ب

⇐ ١ + أ = ب ...(١)

ق′(س) = ٢س ⇐ ق′(١) = ٢ = ميل المماس

معادلة المماس : ص − ب = ٢(س − ١)

يقطع محور السينات عندما ص = ٠، س = −١

⇐ ٠ − ب = ٢(−١ − ١) ⇐ −ب = −٤ ⇐ ب = ٤

بالتعويض في المعادلة رقم (١)

⇐ ١ + أ = ٤ ⇐ أ = ٣

---

٤٤) اذا كان المستقيم ص = ١٣س − ٧ يمس منحنى ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢} عندما س = ١ ، فما قيم أ، ب

الحل :

عند التماس ⇐ ص = ق(س)

⇐ ١٣ − ٧ = أ + ب ⇐ أ + ب = ٦...(١)

عند التماس ⇐ ص′ = ق′(س)

⇐ ١٣ = ٣أس^{٢} + ٢بس

⇐ ١٣ = ٣أ + ٢ب......(٢)

بحل المعادلتين (١) و (٢) : ⇐ أ = ١، ب = ٥

---

٤٥) اذا كان المستقيم س + ٤ص + **جـ** = **٠** يمس الاقتران ص = $\frac{\text{٢س}}{\text{س}-٢}$ ، فما قيمة (**جـ**)

الحل :

المستقيم يمس الاقتران ⇐ ميل المستقيم = ميل الاقتران

المستقيم س + ٤ص + **جـ** = **٠**

⇐ ٤ص = −س + **جـ** ⇐ ص = $\frac{-١}{٤}$س − $\frac{\text{جـ}}{٤}$

⇐ ميل المستقيم ص′ = $\frac{-١}{٤}$

ميل المماس = ص′ = $\frac{(\text{س}-٢)\times٢-١\times\text{٢س}}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

= $\frac{-٤}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

ميل المستقيم = ميل المماس

$\frac{-٤}{(\text{س}-٢)^{٢}}$ = $\frac{-١}{٤}$ ⇐ −(س − ٢)^{٢} = −١٦

⇐ (س − ٢)^{٢} = ١٦ ⇐ س − ٢ = ±٤

اولاً : س − ٢ = ٤ ⇐ س = ٦ ⇐ ص = (٢×٦)/(٦−٢) = ٣

⇐ النقطة (٦،٣) تحقق المستقيم ومعادلة المنحنى

⇐ ٦ + ٤×٣ + جـ = ٠ ⇐ جـ = −١٨

ثانياً :

س − ٢ = −٤ ⇐ س = −٢ ⇐ ص = (−٢×٢)/(−٢−٢) = ١

النقطة (−٢،١) بالتعويض في المستقيم

−٢ + ٤×١ + جـ = ٠ ⇐ جـ = −٢

---

٤٦) اوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ
اذا كان ق(س) = س^٢ + أس + ب ،
هـ(س) = جـس − س^٢ اذا كان المنحنيان يمس
بعضهما البعض عند النقطة (١،٠)

الحل :

المنحنيان يمس بعضهما البعض عند النقطة (١،٠)

⇐ ق(١) = ٠ ، هـ(١) = ٠

⇐ هـ(١) = جـ − ١ = ٠ ⇐ جـ = ١

ق(١) = ٠ ⇐ ١ + أ + ب = ٠ ⇐ أ + ب = −١ ...(١)

ق′(س) = ٢س + أ

هـ′(س) = جـ − ٢س = ١ − ٢س

لكن ق′(١) = هـ′(١)

٢ + أ = ١ − ٢ ⇐ ٢ + أ = −١ ⇐ أ = −٣

بالتعويض في (١) ⇐ أ + ب = −١

−٣ + ب = −١ ⇐ ب = ٢

---

٤٧) اذا كان المماس لمنحنى
ق(س) = أس^٢ + بس + ٢ عند (١،١/٢) يوازي
العمودي على المماس لمنحنى
هـ(س) = س^٢ + ٦س + ١٠ عند (−٢،٢) ،
اوجد أ ، ب

الحل :

ق يمر بـ (١،١/٢) ⇐ ق(١) = أ + ب + ٢ = ١/٢

⇐ أ + ب = −٣/٢

ق′(س) = ٢أس + ب ⇐ ق′(١) = ٢أ + ب ...(١)

هـ′(س) = ٢س + ٦ ⇐ هـ′(−٢) = −٤ + ٦ = ٢

⇐ ميل العمودي : = −١/٢ ⇐ ٢أ + ب = −١/٢ ...(٢)

بحل المعادلتين (١) و (٢) ⇐ أ = ١ ، ب = −٥/٢

---

٤٨) اذا كان المماس لمنحنى ق(س) = أ/س يمر
بالنقطتين (−١،٢) (٠،١) ، فجد قيمة (أ)

الحل :

ميل المماس = −أ/س^٢ = (١ − ٢)/(٠ + ١) ⇐ −أ/س^٢ = −١

⇐ س^٢ = أ

لكن معادلة المماس : ص − ص١ = م(س − س١)

ص − ١ = −١(س − ٠) ⇐ ص = −س + ١

⇐ أ/س = −س + ١ ⇐ س^٢/س = −س + ١

⇐ س = −س + ١ ⇐ ٢س = ١

⇐ س = ١/٢ ⇐ أ = (١/٢)^٢ = ١/٤

---

٤٩) اذا كان ق(س) = (س + ٤)^٢ ، اوجد قيم (س)
على منحنى ق(س) التي يكون المماس عندها مارا
بنقطة الاصل

الحل :

نفرض ان نقطة التماس (س،ص)

ص = ق(س) = (س + ٤)^٢ = س^٢ + ٨س + ١٦

م = ق′(س) = ٢س + ٨

وبما انه يمر بالنقطتين (٠،٠) ، (س،ص)

⇐ م = (ص − ٠)/(س − ٠) = ص/س

⇐ ص/س = ٢س + ٨ ⇐ ص = ٢س^٢ + ٨س

بالتعويض بدل (ص) بمعادلة المنحنى

⇐ س^٢ + ٨س + ١٦ = ٢س^٢ + ٨س

⇐ ١٦ = ٢س^٢ − س^٢

⇐ ١٦ = س^٢ ⇐ س = ±٤

٥٠) اذا كانت المستقيمات المارة بالنقطة (٢،٣) تمس منحنى ق(س) = س^{٢} ، اوجد احداثيات نقطة التماس

الحل :

نفرض ان نقطة التماس (س،ص)

م = ق′(س) = ٢س ، النقطتين (٢،٣) ، (س،ص)

$$\Leftarrow م = \frac{ص - ٣}{س - ٣} \Leftarrow ٢س = \frac{ص - ٣}{س - ٣}$$

⇐ (٢س)(س − ٢) = ص − ٣

⇐ ٢س^{٢} − ٤س = ص − ٣

بالتعويض بدل (ص)

⇐ ٢س^{٢} − ٤س = س^{٢} − ٣

⇐ س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) = ٠

س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ ⇐ ص = (٣)^{٢} = ٩

⇐ النقطة (٣،٩)

س − ١ = ٠ ⇐ س = ١ ⇐ ص = (١)^{٢} = ١

⇐ النقطة (١،١)

٥١) اثبت ان المماسان لمنحنى ق(س) = س^{٢} − ٥س + ٦ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات متعامدين

الحل :

يقطع ق(س) محور السينات عندما س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

⇐ (س − ٣)(س − ٢) = ٠ ⇐ س = ٣ ، ٢

ق′(س) = ٢س − ٥

م$_{١}$ = ق′(٣) = ٢ × ٣ − ٥ = ١

م$_{٢}$ = ق′(٢) = ٢ × ٢ − ٥ = −١

⇐ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١ ⇐ المماسان متعامدان

لا أعرفُ قواعدَ النجاح،
ولكن أعرِفُ أهم قاعدة للفشَل "إرضاء الناس".
-I DONT KNOW THE RULES TO SUCCESS BUT THE MOST IMPORTANT RULE FOR FAILURE IS "TRYING TO PLEASE PEOPLE"

٥٢) اوجد نقطة على منحنى ص = ظاس ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] بحيث يكون المماس عندها موازيا للمستقيم ص = ٢س

الحل :

م = ص′ = قا^{٢}س ، ميل المستقيم ص′ = ٢

قا^{٢}س = ٢ ⇐ قاس = ±$\sqrt{٢}$

$$\Leftarrow \frac{١}{جتاس} = \pm\sqrt{٢} \Leftarrow جتاس = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\Leftarrow جتاس = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$ ، لان س ∈ (٠، $\frac{\pi}{٢}$)

⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$ او ٤٥°

٥٣) اثبت ان المماسين للمنحنين ص = قاس ، ص = جتاس عندما س = ٠ متوازيان

الحل :

ص = قاس ، $\frac{دص}{دس}$ = قاس ظاس

⇐ م$_{١}$ = قا٠ ظا٠ = ١ × ٠ = ٠

⇐ ص = جتاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = −جاس

⇐ م$_{٢}$ = −جا٠ = ٠

وبما ان م$_{١}$ = م$_{٢}$ ⇐ المماسان متوازيان

٥٤) اذا كان المماس لمنحنى ق(س) = ٤س + ٢جتاس ، س ∈ [٠، ٢π] يوازي المستقيم ص = ٢س + ٣ ، اوجد قيم (س)

الحل :

ق′(س) = ص′ ⇐ ٤ − ٢جاس = ٢

⇐ ٢ = ٢جاس ⇐ جاس = ١

⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ او ٩٠°

٥٥) اذا كان المستقيم ص = ٣س + ٤ يمس منحنى ق(س) = أ جاس + ب عند النقطة (٠،٤) ، فجد قيمة أ ، ب

الحل :

ق(٠) = ٤ ⇐ أ × ٠ + ب = ٤ ⇐ ب = ٤

ص′ = ق′(٠) ⇐ ٣ = أ جتاس

⇐ ٣ = أ × ١ ⇐ أ = ٣

٥٦) اوجد قيم (س) على المنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - \text{جا}٢\text{س}$ والتي يكون المماس عندها موازيا لمحور السينات

الحل :

$\text{م} = \text{ق}'(\text{س}) = ١ - \text{جتا}٢\text{س} \times ٢ = ١ - ٢\text{جتا}٢\text{س} = ٠$

$\Leftarrow \text{جتا}٢\text{س} = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow$ اما $٢\text{س} = ٦٠^{\circ} + ٣٦٠ \times \text{ن}$

$\Leftarrow \text{س} = ٣٠^{\circ} + ١٨٠\text{ن}$

$\Leftarrow$ او $٢\text{س} = ٣٠٠^{\circ} + ٣٦٠ \times \text{ن}$

$\Leftarrow \text{س} = ١٥٠^{\circ} + ١٨٠\text{ن}$

---

٥٧) اذا كان $\text{ك}(\text{س}) = \frac{\text{ق}^{٢}(\text{س}) + \text{س}}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، اوجد $\text{ك}'(٣)$ علما بان للمنحنين $\text{ق}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ مماسا مشتركا افقيا عند النقطة (٣،٤) الواقعة على كليهما

الحل :

$\text{ق}(٣) = \text{هـ}(٣) = ٤$

$\text{ق}'(٣) = \text{هـ}'(٣) = ٠$

$$\text{ك}'(\text{س}) = \frac{\left(٢\text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س}) + ١\right)\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}'(\text{س}) \times \left(\text{ق}^{٢}(\text{س}) + \text{س}\right)}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}$$

$$\text{ك}'(٣) = \frac{(٢ \times ٤ \times ٠ + ١) \times ٤ - ٠ \times (٣ + ١٦)}{١٦} = \frac{٤}{١٦} = \frac{١}{٤}$$

---

٥٨) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \times \text{ل}'(٢\text{س})$ وكانت $\text{ص} = \frac{٤٨ - \text{س}}{٥}$ تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق عندما س = ٣ ، اوجد $\text{ل}''(٦)$

الحل :

$\text{ق}(٣) = \frac{٤٨ - ٣}{٥} = ٩$

$\text{ص}' = \frac{-١}{٥} \Leftarrow \text{ق}'(٣) = ٥$

$\Leftarrow \text{ل}'(٢\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}}$

$\Leftarrow \text{ل}''(٢\text{س}) \times ٢ = \frac{\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) - ١ \times \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$

عندما س = ٣

$\Leftarrow ٢\text{ل}''(٦) = \frac{٣ \times ٥ - ٩ \times ١}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \text{ل}''(٦) = \frac{١}{٣}$

---

٥٩) اوجد النقاط على المنحنى $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٠$ والتي يكون ميل المماس عندها = ٢

الحل :

نشتق ضمنيا $\Leftarrow ٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\Leftarrow ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} = ٢$ ميل المماس

$\Leftarrow \text{س} = -٢\text{ص}$ بالتعويض في العلاقة من السؤال

$(-٢\text{ص})^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٠ \Leftarrow ٤\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٠$

$٥\text{ص}^{٢} = ٢٠ \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = \pm ٢$

نعوض لايجاد (س)

- $\text{ص} = ٢ \Leftarrow \text{س} = -٢ \times ٢ = -٤$

$\Leftarrow$ النقطة $(-٤،٢)$

- $\text{ص} = -٢ \Leftarrow \text{س} = -٢ \times -٢ = ٤$

$\Leftarrow$ النقطة $(٤،-٢)$

---

٦٠) اوجد معادلة المماس للمنحنى $\text{س}^{٣} + ٥\text{س}\text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ص}}$ عندما ص = ٠

الحل :

نعوض لإيجاد (س)

$\text{س}^{٣} + ٠ = \frac{١}{١ + ٠} \Leftarrow \text{س}^{٣} = ١ \Leftarrow \text{س} = ١$

$\Leftarrow$ النقطة (١،٠)

نشتق لإيجاد الميل :

$$٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٥\text{ص} = \frac{-\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{(١ + \text{ص})^{٢}}$$

نعوض بالنقطة $\Leftarrow ٣ + ٥\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٠ = \frac{-\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{(١ + ٠)^{٢}}$

$\Leftarrow ٥ \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣$

$\Leftarrow ٦\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$

$\Leftarrow$ معادلة المماس هي : $\text{ص} - ٠ = \frac{-١}{٢}(\text{س} - ١)$

٦١) اوجد معادلة المماس لمنحنى $ص^{٢} = ١٦س$ عند النقطة التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم $ص = ٣ - ٢س$

الحل :

$ص^{٢} = ١٦س \Leftarrow ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١٦$

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{١٦}{٢ص} = \frac{٨}{ص}$ ميل المماس

ميل المستقيم = $\frac{ءص}{ءس} = -٢$

ميل المماس = ميل المستقيم

$\Leftarrow \frac{٨}{ص} = -٢ \Leftarrow ٨ = -٢ص \Leftarrow ص = -٤$

نعوض لإيجاد (س)

$(-٤)^{٢} = ١٦س \Leftarrow س = \frac{١٦}{١٦} = ١$

$\Leftarrow$ النقطة $(١، -٤)$

$\Leftarrow$ معادلة المماس هي : $ص - ٤ = -٢(س - ١)$

---

٦٢) اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٨$ من النقطة $(-٢، ٠)$

الحل :

$٤(-٢)^{٢} + (٠)^{٢} = ١٦ + ٠ = ١٦ \neq ٨$

$\Leftarrow (-٢، ٠)$ لا تقع على منحنى ٯ

نفرض ان نقطة التماس هي $(س، ص) \Leftarrow م_{١} = \frac{ص - ٠}{س + ٢}$

نشتق : $٨س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{-٤س}{ص} = م_{٢}$

$م_{١} = م_{٢} \Leftarrow \frac{ص}{س + ٢} = \frac{-٤س}{ص} \Leftarrow ص^{٢} = -٤س^{٢} - ٨س$

$\Leftarrow ص^{٢} + ٤س^{٢} = -٨س \Leftarrow ٨ = -٨س \Leftarrow س = -١$

نعوض لإيجاد (ص)

$٤ + ص^{٢} = ٨ \Leftarrow ص^{٢} = ٤ \Leftarrow ص = \pm٢$

$\Leftarrow$ النقاط $(-١، ٢)$ ، $(-١، -٢)$

عندما $(-١، ٢) \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤ \times -١}{٢} = ٢$

$\Leftarrow$ معادلة المماس هي : $ص - ٢ = ٢(س + ١)$

عندما $(-١، -٢) \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤ \times -١}{-٢} = -٢$

$\Leftarrow$ معادلة المماس هي : $ص + ٢ = -٢(س + ١)$

تطبيقات فيزيائية :

ملاحظات :

١) السرعة هي المشتقة الاولى للمسافة ويرمز لها بإحدى الرموز التالية : ع ، $\frac{ءف}{ءن}$ ، $ف'$

٢) التسارع هو المشتقة الثانية للمسافة او المشتقة الاولى للسرعة ويرمز له بإحدى الرموز التالية : ت ، $\frac{ء^{٢}ف}{ءن^{٢}}$ ، $\frac{ءع}{ءن}$

٣) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

٤) التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$

٥) تنعدم السرعة أي ان $ف'(ن) = ٠$ $(ع = ٠)$

٦) ينعدم التسارع أي ان $ف''(ن) = ٠$ $(ت = ٠)$

٧) يصل الجسم لأقصى ارتفاع عندما $(ع = ٠)$

٨) في حالة ورد في السؤال كلمة تسارع نجد المسافة ثم السرعة ثم التسارع ثم المطلوب في السؤال

٩) زمن الصعود للجسم يساوي زمن الهبوط لكن بشرط ان يصل الجسم لأقصى ارتفاع

١٠) وصول الجسيم الارض $\Leftarrow ف = ٠$

١١) المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يعود الى الارض يساوي ضعفي مسافة اقصى ارتفاع

١٢) سرعة الجسم وهو صاعد يكون موجب وسرعته وهو هابط يكون سالب

١٣) السرعة لحظة وصوله الى الارض أي ان المطلوب (ع) عندما تكون معادلة الحركة + ارتفاع البرج يساوي صفر

١٤) لإيجاد السرعة الابتدائية للجسيم نجد سرعة (ع) ونعوض مكان (ن) بالصفر

١٥) اثبات ان الجسم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته أي ان المطلوب اثبات ع = ٠ عند قيمة واحدة فقط للزمن (ن)

امثلة :

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقا للمعادلة : ف(ن) = ن^{٣} + ٦ن^{٢} − ٩ن حيث (ف) بالقدم ، (ن) بالثواني ، اوجد ما يلي :

أ) اوجد موضع الجسيم عندما ن = ٣ ثواني

ب) اوجد سرعة الجسيم عندما ن = ٣ ثواني

ج) اوجد تسارع الجسيم بعد (٣) ثواني

د) اوجد التسارع المتوسط والسرعة المتوسطة عندما يتغير الزمن من (١) ثانية الى (٤) ثواني

الحل :

أ) ف(٣) = (٣)^{٣} + ٦(٣)^{٢} − ٩ × ٣

= ٢٧ + ٥٤ − ٢٧ = ٥٤ قدم

ب) السرعة ع = ف′ = ٣ن^{٢} + ١٢ن − ٩

ع(٣) = ٢ × ٣^{٢} + ١٢ × ٣ − ٩

= ٢٧ + ٣٦ − ٩ = ٥٤ قدم / ث

ج) ت = ع′(ن) = ٦ن + ١٢

ت(٣) = ٦ × ٣ + ١٢ = ٣٠ قدم / ث^{٢}

د)

---

٢) قذف جسيم للأعلى عن سطح الارض فإذا كانت المسافة المقطوعة تعطى بالعلاقة : ف = ٩٦ن − ١٦ن^{٢} حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) بالقدم ، احسب ما يلي :

أ) سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

ب) متى يصل الجسيم لأقصى ارتفاع

ج) المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يعود للأرض

الحل :

أ) ف = ٩٦ن − ١٦ن^{٢}

ع = ف′ = ٩٦ − ٣٢ن

ت = ع′ = −٣٢ن

⇐ ع(١) = ٩٦ − ٣٢ × ١ = ٩٦ − ٣٢ = ٦٤ قدم / ث

ب) يصل الجسيم لأقصى ارتفاع عندما ع = ٠

⇐ ع = ٠ ⇐ ٩٦ − ٣٢ن = ٠

⇐ ٣٢ن = ٩٦ ⇐ ن = ٣ ثواني

ج) المسافة التي يقطعها حتى يصل الارض = ٢ × مسافة اقصى ارتفاع

∴ اقصى ارتفاع

ف(٣) = ٩٦ × ٣ − ١٦ × ٣^{٢} = ١٤٤ قدم

∴ المسافة التي يقطعها حتى يعود للأرض

= ١٤٤ × ٢ = ٢٨٨ قدم

---

٣) يتحرك جسيم على خط الاعداد بحيث بعده عن نقطة الاصل بالمتر وبعده (ن) من الثواني يساوي $\sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}$ ، احسب المسافة عندما تكون السرعة (١) قدم / ث

الحل :

$$ف = \sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}$$

$$ع = \frac{دف}{دن} = \frac{٤ن}{٢\sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}}$$

نعوض ع = ١ لإيجاد قيمة (ن)

$$\Leftarrow \frac{٤ن}{٢\sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}} = ١ \Leftarrow ٤ن = ٢\sqrt{٢ن + ١٨}$$

⇐ ١٦ن^{٢} = ٤(٢ن + ١٨)

⇐ ١٦ن^{٢} − ٨ن^{٢} − ٧٢ = ٠

⇐ ٨ن^{٢} − ٧٢ = ٠ ⇐ ٨(ن^{٢} − ٩) = ٠

⇐ ٨(ن − ٣)(ن + ٣) = ٠

⇐ ن = −٣ ✗ ، ن = ٣ ⇐ ف(٣) = ٦م

٤) يتحرك جسيم في خط مستقيم $ف = \frac{١}{١٢} ن^{٣} - \frac{١}{٤} ن$ ، احسب تسارع الجسيم عندما تبلغ السرعة (٦) قدم / ث

الحل :

$$ف = \frac{١}{١٢} ن^{٣} - \frac{١}{٤} ن$$

$$ع = \frac{٣}{١٢} ن^{٢} - \frac{١}{٤} \Leftarrow ت = \frac{١}{٢} ن$$

عندما $ع = ٦ \Leftarrow \frac{١}{٤} ن^{٢} - \frac{١}{٤} = ٦$

$$\Leftarrow ن^{٢} - ١ = ٢٤ \Leftarrow ن^{٢} = ٢٥ \Leftarrow ن = ٥$$

$ت = \frac{١}{٢} ن$ عندما $ن = ٥ \Leftarrow ت = \frac{٥}{٢}$ قدم / ث^{٢}

٥) يتحرك جسيم وفقا للمعادلة : $ف = أ ن^{٢} - ن^{٣}$ حيث (ف) المسافة بالقدم ، (ن) الزمن بالثواني ، (أ) ثابت ، اوجد سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علما بان تسارعه في تلك اللحظة (١٠) قدم / ث^{٢}

الحل :

$$ف = أ ن^{٢} - ن^{٣}$$

$$ع = ٢أ ن - ٣ن^{٢} \Leftarrow ت = ٢أ - ٦ن$$

عندما $ت = ١٠ \Leftarrow ١٠ = ٢أ - ٦ن$

$$٢أ = ١٠ + ٦ن \Leftarrow أ = ٥ + ٣ن$$

عوض قيمة (أ) في (ع) $\Leftarrow ع = ٢أ ن - ٣ن^{٢}$

$$\Leftarrow ع = ٢(٥ + ٣ن) ن - ٣ن^{٢}$$

$$= ١٠ن + ٦ن^{٢} - ٣ن^{٢} = ١٠ن + ٣ن^{٢}$$

$ع|_{ن=١} = ١٠ + ٣ = ١٣$ قدم / ث

٦) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى وفقا للاقتران : $ف(ن) = ٣ن^{٢} + ٧$ ، ما سرعة الجسيم بعد (٣) ثواني

الحل :

$$ف = ٣ن^{٢} + ٧$$

$ع = ٦ن \Leftarrow ع(٣) = ٦ \times ٣ = ١٨$م / ث

٧) قذفت كرة رأسيا الى اعلى من قيمة برج ارتفاعه (١٦٠) قدما اذا كانت المسافة المقطوعة وفق المعادلة :

$ف(ن) = -١٦ن^{٢} + ٤٨ن + ١٦٠$ اوجد ما يلي :

أ) اقصى ارتفاع تصله الكرة

ب) سرعة الكرة لحظة اصطدمها بالأرض

الحل :

$$ف(ن) = -١٦ن^{٢} + ٤٨ن + ١٦٠$$

$$ع = -٣٢ن + ٤٨ \Leftarrow ت = -٣٢$$

أ) $-٣٢ن + ٤٨ = ٠ \Leftarrow ٣٢ن = ٤٨ \Leftarrow ن = \frac{٤٨}{٣٢}$

$\Leftarrow ن = \frac{٣}{٢}$ ثانية

$ف(\frac{٣}{٢}) = -١٦(\frac{٣}{٢})^{٢} + ٤٨ \times \frac{٣}{٢} + ١٦٠ = ١٩٦$ قدم

ب) $\Leftarrow ف = ٠ \Leftarrow ٠ = -١٦ن^{٢} + ٤٨ن + ١٦٠$

نقسم الطرفين على (‎-١٦)

$$\Leftarrow ن^{٢} - ٣ن - ١٠ = ٠ \Leftarrow (ن - ٥)(ن + ٢) = ٠$$

$\Leftarrow ن = ٥$ ، -٢ ✗

عندما $ن = ٥$

$\Leftarrow ع(٥) = -٣٢ \times ٥ + ٤٨ = -١١٢$ قدم / ث

٨) قذف جسيم الى اعلى حسب العلاقة : $ف(ن) = -٨ن^{٢} + ٤ن$ ، اوجد ما يلي :

أ) الزمن اللازم حتى يعود الجسيم الى الارض

ب) السرعة التي قذف بها الجسيم

الحل :

أ) $ع = -١٦ن + ٤ = ٠$

$\Leftarrow ١٦ن = ٤ \Leftarrow ن = \frac{١}{٤}$ ثانية زمن الصعود

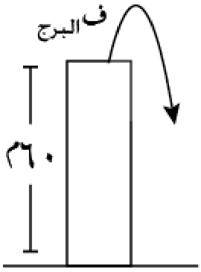
الزمن اللازم حتى يعود الى الارض $= ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ث

ب) $ع(٠) = -١٦ \times ٠ + ٤ = ٤$م / ث

كن صبوراً , الدروس التي تتعلمها اليوم
ستُفيدك غداً.

Be patient
the lessons you
learn today will
benefit you tomorrow

٩) قذف جسيم من سطح برج ارتفاعه (٦٠) متر حسب العلاقة : $ف = ١١ن - ن^{٢}$ ، احسب سرعة الجسيم وهو على ارتفاع (٩٠) متر من سطح الارض



الحل :

$ف_{\text{البرج}} = -ن^{٢} + ١١ن$

$ف_{\text{الارض}} = -ن^{٢} + ١١ن + ٦٠$

$ع = -٢ن + ١١$ ، $ت = -٢$

$ف = ٩٠م \Leftarrow -ن^{٢} + ١١ن + ٦٠ = ٩٠$

اضرب المعادلة بـ $(-١) \Leftarrow ن^{٢} - ١١ن + ٣٠ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ٦)(ن - ٥) = ٠ \Leftarrow ن = ٦ ، ن = ٥$

$ع|_{ن=٦} = -٢\times٦ + ١١ = -١م/ث$ (هابط)

$ع|_{ن=٥} = -١٠ + ١١ = ١م/ث$ (صاعد)

١٠) قذف جسيم رأسيا الى الاعلى حسب العلاقة : $ف = -٣٦ن^{٢} + أن + ٤$ بسرعة ابتدائية مقدارها $أم/ث$ ، ما مقدار السرعة (أ) اذا علمت بان الجسيم قد وصل لأقصى ارتفاع مقداره (٥٠) متر

الحل :

$ع = -٧٢ن + أ$

بما ان الجسيم وصل اقصى ارتفاع $\Leftarrow ع = ٠$

$\Leftarrow ع = -٧٢ن + أ = ٠ \Leftarrow أ = ٧٢ن$

لكن $ف = ٥٠ \Leftarrow -٣٦ن^{٢} + ٧٢ن^{٢} + ٤ = ٥٠$

$\Leftarrow ٣٦ن^{٢} - ٤٦ = ٠ \Leftarrow ٣٦ن^{٢} = ٤٦$

$\Leftarrow ن = \sqrt{\frac{٤٦}{٣٦}}$

لكن $أ = ٧٢ن \Leftarrow أ = ٧٢ \times \sqrt{\frac{٤٦}{٣٦}}م$

١١) قذف جسيم رأسيا الى الاعلى بحيث ان ارتفاعه من نقطة القذف بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى وفق الاقتران: $ف(ن) = ع_{١}ن - ٥ن^{٢}$ فإذا علمت ان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسيم هو (٢٠) متر ، ما قيمة $(ع_{١})$

الحل :

اقصى ارتفاع أي ان $ف'(ن) = ٠$

$ف'(ن) = ع_{١} + ١٠ن = ٠$

$\Leftarrow \frac{ع_{١}}{١٠} = \frac{١٠ن}{١٠} \Leftarrow ن = \frac{ع_{١}}{١٠}$ (زمن اقصى ارتفاع)

لكن $ف\left(\frac{ع_{١}}{١٠}\right) = ٢٠$

$ف\left(\frac{ع_{١}}{١٠}\right) = ع_{١} \times \frac{ع_{١}}{١٠} - ٥ \times \left(\frac{ع_{١}}{١٠}\right)^{٢} = ٢٠$

$\frac{١٠ \times ع_{١}^{٢}}{١٠ \times ١٠} - \frac{٥ع_{١}^{٢}}{١٠} = ٢٠$

$\frac{١٠ع_{١}^{٢} - ٥ع_{١}^{٢}}{١٠٠} = ٢ \Leftarrow \frac{٥ع_{١}^{٢}}{١٠٠} = ٢٠$

$\Leftarrow ع_{١}^{٢} = ٤٠٠ \Leftarrow ع_{١} = \pm ٢٠$

لكن $ع_{١} = ٢٠م/ث$ لأنها سرعة ابتدائية

١٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $ف = جا^{٤}ن$ ، احسب التسارع عندما تنعدم السرعة لأول مرة من بدء الحركة

الحل :

$ع = ٤جا^{٣}ن جتان = ٠$

$٤جا^{٣}ن = ٠$

$جان = ٠$

$ن = ٠ ، \pi ، ٢\pi$

$جتان = ٠$

$ن = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}$

$ن = \frac{\pi}{٢}$

$ت = ٤جا^{٣}ن \times -جان + جتان \times ١٢جا^{٢}ن جتان$

$= -٤جا^{٤}ن + ١٢جا^{٢}ن جتا^{٢}ن$

$ت\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -٤\times١ + ١٢\times١\times٠ = -٤$

١٣) اذا كانت $ف = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ ، اوجد ما يلي :

أ) اقصى ارتفاع

ب) سرعة الجسيم وهو على ارتفاع (١٦٠) متر

ج) قيم (ن) التي تكون السرعة موجبة عندها

الحل :

$ع = ٦٠ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ن = ٦$

أ) $ف(٦) = ٦٠\times٦ - ٥(٦)^{٢} = ١٨٠$

ب) $\text{ف} = ١٦٠ = ٦٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$

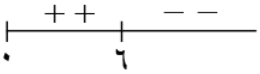
$= ٥\text{ن}^{٢} - ٦٠\text{ن} + ١٦٠ = ٠$

$= \text{ن}^{٢} - ١٢\text{ن} + ٣٢ = ٠$

$\Leftarrow (\text{ن} - ٨)(\text{ن} - ٤) = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٨ ، \text{ن} = ٤$

$\text{ع}(٨) = ٦٠ - ١٠ \times ٨ = -٢٠$

$\text{ع}(٤) = ٦٠ - ١٠ \times ٤ = ٢٠$



ج) $\text{ع} = ٦٠ - ١٠\text{ن} = ٠$

$\Leftarrow \text{ن} = ٦$ ، $\text{ع} > ٠$ لكل $[٠،٦)$

١٤) من سطح بناية اسقط جسيم حسب العلاقة : $\text{ف}_{١} = ٥\text{ن}^{٢}$ وبعد ثانية قذف جسيم اخر رأسيا للأسفل من نفس المكان $\text{ف}_{٢} = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$ فوصل الجسمان الارض ، احسب سرعة كل من الجسيمين لحظة وصول الارض وما ارتفاع البناية

الحل :

اذا احتاج الجسيم الثاني (ن) ثانية فان الاول : $(\text{ن} + ١)$

$\text{ف}_{١}(\text{ن} + ١) = \text{ف}_{٢}(\text{ن})$

$٥(\text{ن} + ١)^{٢} = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$

$٥\text{ن}^{٢} + ١٠\text{ن} + ٥ = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$

$٥\text{ن} = ٥ \Leftarrow \text{ن} = ١$

$\left.\begin{array}{l} \text{ف}_{١}(٢) = ٥ \times ٤ = ٢٠ \\ \text{ف}_{٢}(١) = ١٥ \times ١ + ٥ \times ١ = ٢٠ \end{array}\right\} \Leftarrow$ ارتفاع البناية $= ٢٠$

$\text{ع}_{١} = ١٠\text{ن} \Leftarrow \text{ع}_{١}(٢) = ٢ \times ١٠ = ٢٠$

$\text{ع}_{٢} = ١٥ + ١٠\text{ن} \Leftarrow ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$

١٥) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{\text{جـ}}$ اذا كانت سرعة الجسيم بعد (١٠) ثواني مثلي سرعة الجسيم بعد (٥) ثواني ، احسب قيمة (**جـ**)

الحل :

$\text{ع} = \text{جـ}\,\text{ن}^{\text{جـ}-١}$ ، $\text{ع}(١٠) = ٢ \times \text{ع}(٥)$

$\Leftarrow \text{جـ}(١٠)^{\text{جـ}-١} = ٢\text{جـ}(٥)^{\text{جـ}-١}$

$\Leftarrow \cancel{٥^{\text{جـ}-١}} \times ٢^{\text{جـ}-١} = ٢ \times \cancel{٥^{\text{جـ}-١}}$

$\Leftarrow ٢^{\text{جـ}-١} = ٢^{١} \Leftarrow \text{جـ} - ١ = ١ \Leftarrow \text{جـ} = ٢$

١٦) يتحرك جسمان بحيث $\text{ع}^{٢} = \text{ف}^{٣}$ ، احسب التسارع عندما السرعة تساوي ٨م / ث

الحل :

$\text{ع}^{٢} = \text{ف}^{٣} \Leftarrow ٢\text{ع}\text{ع}' = ٣\text{ف}^{٢}\text{ف}'$

$\Leftarrow ٢\cancel{\text{ع}}\text{ت} = ٣\text{ف}^{٢}\cancel{\text{ع}}$

$\text{ت} = \frac{٣\text{ف}^{٢}}{٢}$

$= \frac{٣ \times ١٦}{٢} = ٢٤$

عندما $\text{ع} = ٨$

$(٨)^{٢} = \text{ف}^{٣}$

$٦٤ = \text{ف}^{٣} \Leftarrow \text{ف} = ٤$

١٧) اذا كانت $\text{ع} = \text{أ}\sqrt{\text{ف}}$ ، $\text{أ} > ٠$ وكان تسارع الجسيم يساوي ٨م / ث^{٢} ، فما قيمة (أ)

الحل :

$\text{ع}' = \frac{\text{أ} \times \text{ف}'}{٢\sqrt{\text{ف}}}$ ، $\text{ت} = \frac{\text{أ} \times \text{ع}}{٢\sqrt{\text{ف}}}$

$٨ = \frac{\text{أ} \times \text{أ}\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}{٢\cancel{\sqrt{\text{ف}}}} \Leftarrow ١٦ = \text{أ}^{٢} \Leftarrow \text{أ} = ٤$

١٨) يتحرك جسيم بحيث بعده عن نقطة ثابتة $\text{ف} = \text{جا}\text{ن} + \text{جتا}\text{ن}$ ، $\text{ن} \in [٠، ٢\pi]$ ، احسب المسافة والتسارع لحظة السكون اللحظي

الحل :

$\text{ف} = \text{جا}\text{ن} + \text{جتا}\text{ن} \Leftarrow \text{ع} = \text{جتا}\text{ن} - \text{جا}\text{ن}$

$\text{ت} = -\text{جا}\text{ن} - \text{جتا}\text{ن}$

$\text{ع} = ٠ \Leftarrow \text{جتا}\text{ن} - \text{جا}\text{ن} = ٠ \Leftarrow \text{جتا}\text{ن} = \text{جا}\text{ن}$

$\text{ن} = ٤٥، ٢٢٥$

$\text{ف}\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ف}\left(\frac{٥\pi}{٤}\right) = \frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

$\text{ت}\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ت}\left(\frac{٥\pi}{٤}\right) = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

١٩) اذا كانت $\text{ف} = ٥\text{جتا}٢\text{ن} + ٣\text{جا}٢\text{ن}$ ، احسب (ت) عندما $\text{ف} = ٤$

الحل :

$\text{ع} = -١٠\text{جا}٢\text{ن} + ٦\text{جتا}٢\text{ن}$

$\text{ت} = -٢٠\text{جتا}٢\text{ن} - ١٢\text{جا}٢\text{ن}$

$\text{ف} = ٤ \Leftarrow ٥\text{جتا}٢\text{ن} + ٣\text{جا}٢\text{ن} = ٤$

نلاحظ : $\text{ت} = -٤(٥\text{جتا}٢\text{ن} + ٣\text{جا}٢\text{ن})$

$\text{ت} = -٤ \times \text{ف} \Leftarrow \text{ت} = -٤ \times ٤ = -١٦$

٢٠) اذا كان ف(ن) = ٣جا٤ن − ٥جتا٤ن حيث (ف) المسافة بالأمتار ، (ن) الزمن بالثواني ، احسب كلا من المسافة والسرعة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٨}$

الحل :

ف(ن) = ٣جا٤ن − ٥جتا٤ن

ع(ن) = ١٢جتا٤ن + ٢٠جا٤ن

ت(ن) = −٤٨جا٤ن + ٨٠جتا٤ن

ف($\frac{\pi}{٨}$) = ٣ × ١ − ٥ × ٠ = ٣

ع($\frac{\pi}{٨}$) = ٠ + ٢٠ × ١ = ٢٠

ت($\frac{\pi}{٨}$) = −٤٨ + ٠ = −٤٨

---

٢١) اذا كانت س = ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٥ن في المعادلة الزمنية لحركة جسيم في خط مستقيم حيث (ن) الزمن بالثواني ، المسافة (ف) بالأمتار ، احسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

الحل :

ف = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٥ن

ع = ن^{٢} − ٦ن + ٥

⟸ تنعدم السرعة ⟸ ع = ٠

⟸ ن^{٢} − ٦ن + ٥ = ٠

⟸ (ن − ٥)(ن − ١) = ٠ ⟸ ن = ٥ ، ن = ١

ت = ٢ن − ٦

⟸ ت(٥) = ١٠ − ٦ = ٤ ، ت(١) = ٢ − ٦ = −٤

---

٢٢) قذف جسيم رأسيا للاعلى من نقطة على سطح الارض حيث ف(ن) = ٢٤,٥ن − ٤,٩ن^{٢} ، اوجد ما يلي:

أ) الزمن اللازم حتى يعود الجسيم الى سطح الارض

ب) السرعة التي قذف بها (السرعة الابتدائية)

ج) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم ⟸ ع = ٠

د) اللحظة التي يكون سرعة الجسيم ١٤,٧م / ث

هـ) اللحظة التي يكون سرعة الجسيم −١٤,٧م / ث

و) تسارع الجسيم في كل لحظة

الحل :

أ) ف = ٠ ⟸ ٢٤,٥ن − ٤,٩ن^{٢} = ٠

⟸ ٤,٩ن(٥ − ن) = ٠

⟸ ن = ٠ زمن الانطلاق ، ن = ٥ يعود للأرض

ب) ع = ٢٤,٥ − ٩,٨ن

⟸ ع(٠) = ٢٤,٥ − ٩,٨ × ٠ = ٢٤,٥

ج) ٢٤,٥ − ٩,٨ن = ٠ ⟸ $\frac{٢٤,٥}{٩,٨}$ = $\frac{\cancel{٩,٨}ن}{\cancel{٩,٨}}$ ⟸ ن = ٢,٥

⟸ ع(٢,٥) = ٢٤,٥ × ٢,٥ − ٤,٩ × (٢,٥)^{٢} = ٣٠,٦م

د) ع = ٢٤,٥ − ٩,٨ن

⟸ ١٤,٧ = ٢٤,٥ − ٩,٨ن ⟸ ن = ١

هـ) −١٤,٧ = ٢٤,٥ − ٩,٨ن ⟸ ن = ٤ ثواني

و) ع − ت = −٩,٨م / ث

---

٢٣) قذف جسيم رأسيا للأعلى من سطح بناية حيث ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} اذا كانت سرعته لحظة وصل الارض تساوي ٦٠م / ث ، اوجد ارتفاع البناية

الحل :

ف$_{\text{البناية}}$ = ٣٠ن − ٥ن^{٢}

ف$_{\text{الارض}}$ = ٣٠ن − ٥ن^{٢} + أ

ع = ٣٠ − ١٠ن = −٦٠ ⟸ ٩٠ = ١٠ن ⟸ ن = ٩

ف(٩) = ٣٠ × ٩ − ٥(٩)^{٢} + أ = ٠

= ٢٧٠ − ٤٠٥ + أ = ٠ ⟸ أ = ١٣٥

---

٢٤) اسقط جسيم من ارتفاع ١٠٠م حيث ف$_{١}$ = ٥ن^{٢} وفي الوقت نفسه قذف جسيم للاعلى ف$_{٢}$ = ٥٠ن − ٥ن^{٢} ، اوجد سرعة كل من الجسيمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

الحل :

ف$_{١}$ + ف$_{٢}$ = ١٠٠

٥ن^{٢} + ٥٠ن − ٥ن^{٢} = ١٠٠ ⟸ ٥٠ن = ١٠٠ ⟸ ن = ٢

سرعة الجسيم الاول : ع$_١$ = ف$'_١$(ن) = ١٠ن

⇐ ف$'_١$(٢) = ١٠×٢ = ٢٠م/ث

سرعة الجسيم الثاني : ع$_٢$ = ف$'_٢$(ن) = ٥٠ − ١٠ن

⇐ ف$'_٢$(٢) = ٥٠ − (١٠×٢) = ٣٠م/ث

٢٥) جسيم يتحرك في خط مستقيم ، ماذا كانت سرعته بعد (ن) ثانية من حركته هي ع(ن) = ن^٢ − ٣ن + ٢ فجد :

أ) سرعته الابتدائية

ب) متى يسكن الجسيم لحظيا وما قيمة تسارعه حينئذ

الحل :

أ) ع(٠) = ٠ − ٠ + ٢ = ٢

ب) ع = ن^٢ − ن^٣ + ٢ = ٠

⇐ (ن − ٢)(ن − ١) = ٠ ⇐ ن = ٢ ، ن = ١

ت = ع$'$ = ٢ن − ٣

ت(٢) = ٤ − ٣ = ١ ، ت(١) = ٢ − ٣ = −١

٢٦) يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢م / ث حسب العلاقة : ف(ن) = أن^٢ + بن حيث أ ، ب ثوابت احسب المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثواني من الحركة ، علما بان تسارعه ٨م^٢ / ث

الحل :

ع = ف$'$ = ٢أن + ب

ع(٠) = ٠ + ب = ٢ ⇐ ب = ٢

ت = ع$'$ = ٢أ = ٨ ⇐ أ = ٤

∴ ف(ن) = ٤ن^٢ + ٢ن

ف(٣) = ٤×٩ + ٢×٣ = ٤٢

٢٧) يتحرك جسيم بحيث ان بعده عن نقطة ثابتة بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفقا للاقتران : ف(ن) = جان + جتان ، ن ∈ [٠، ٢π] ، جـــد المسافة والتسارع في حالة السكون للحظي للجسيم

الحل :

ع = ف$'$ = جتان − جان = ٠ ⇐ جتان = جان

∴ ن = ٤٥° ، ٢٢٥° ⇐ ن = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

ف($\frac{\pi}{٤}$) = جا$\frac{\pi}{٤}$ + جتا$\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

ف($\frac{٥\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ت = ع$'$ = −جان − جتان

ت($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ت($\frac{٥\pi}{٤}$) = $\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

٢٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة ثابتة بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفقا للاقتران : ف(ن) = ن^٣ ، فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، أ] تساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٢ ، جد قيمة (أ)

الحل :

ع = ف$'$ = ٣ن^٢ ⇐ ع(٢) = ١٢

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{ف(أ)} - \text{ف(٠)}}{\text{أ} - ٠} = \frac{\text{أ}^٢ - ٠}{\text{أ}} = ١٢$

أ^٣ = ١٢أ ⇐ أ^٣ − ١٢أ = ٠

⇐ أ(أ^٢ − ١٢) = ٠ ⇐ أ = ٠ ، $\sqrt{١٢}$ ، $-\sqrt{١٢}$

نأخذ أ = $\sqrt{١٢}$

٢٩) يتحرك جسيم بسرعة تعطى حسب العلاقة : ع^٢ = ١ − ف^٣ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار ، بين ان تسارع الجسيم يساوي ($\frac{-٣}{٢}$) في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته

الحل :

ع^٢ = ١ − ف^٣

٢ع × ع$'$ = −٣ف^٢ × ف$'$

$\cancel{٢ع}$ × ع$'$ = −٣ف^٢ × $\cancel{ع}$ ⇐ ت = $\frac{-٣\text{ف}^٢}{٢}$

عندما تكون ع = ٠

⇐ ٠ = ١ − ف^٣ ⇐ ف = ١

∴ ت = $\frac{-٣×١}{٢} = \frac{-٣}{٢}$

٣٠) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية : $ف(ن) = \frac{١}{٤}(ن+٢)^{٤} - ٦ن^{٢}$ حيث (ن) بالثواني ، (ف) بالأمتار ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٨٩م / ث

الحل :

$$ع = ف' = (ن+٢)^{٣} - ١٢ن = ٨٩$$

$$ن^{٣} + ٦ن^{٢} + ١٢ن + ٨ - ١٢ن = ٨٩$$

$$ن^{٣} + ٦ن^{٢} - ٨١ = ٠$$

بتجربة $ن = ٣$: $٢٧ + ٥٤ - ٨١ = ٠$

بالقسمة التركيبية على $(ن - ٣)$ ③

١	٦	٠	−٨١
	٣	٢٧	٨١
١	٩	٢٧	٠

الناتج $ن^{٢} + ٩ن + ٢٧ = ٠$

$$ب^{٢} - ٤أجـ = ٨١ - ٤ × ١ × ٢٧ = -٢٧ < ٠$$

لا يوجد اصفار ∴ فقط $ن = ٣$

$$ت = ع' = ٣(ن+٢)^{٢} - ١٢$$

$$ت(٣) = ٣(٣+٢)^{٢} - ١٢ = ٧٥ - ١٢ = ٦٣$$

---

٣١) قذف جسيم رأسيا الى اعلى من نقطة على سطح الارض ، فإذا كانت المسافة التي يقطعها بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران : $ف(ن) = ٦٤ن - ١٦ن^{٢}$ ، بين ان الجسيم يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨م

الحل :

$$ع = ف' = ٦٤ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٠) = ٦٤ - ٠ = ٦٤$$

عند $ف = ٤٨ \Rightarrow ٤٨ = ٦٤ن - ١٦ن^{٢}$ $(÷١٦)$

$$٣ = ٤ن - ن^{٢} \Rightarrow ن^{٢} - ٤ن + ٣ = ٠$$

$$(ن - ٣)(ن - ١) = ٠ \Rightarrow ن = ٣ ، ن = ١$$

$$ع(١) = ٦٤ - ٣٢ × ١ = ٣٢ = (\tfrac{١}{٢} × ٦٤)$$

لان الجسم يكون هابطا

---

٣٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالأمتار بعد (ن) ثانية معطى بالعلاقة : $ف(ن) = جا^{٤}ن$ فجد سرعة الجسيم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لأول مرة بعد تحركه

الحل :

$$ع = ف' = ٤جا^{٣}ن جتان$$

$$ت = ع' = ٤جا^{٣}ن × -جان + جتان × ١٢جا^{٢}ن × جتان$$

$$= -٤جا^{٤}ن + ١٢جا^{٢}ن جتا^{٢}ن$$

$$= ٤جا^{٢}ن\left(-جا^{٢}ن + ٣جتا^{٢}ن\right) = ٠$$

$$= ٤جا^{٢}ن = ٠ \Rightarrow جان = ٠ \Rightarrow ن = ٠ ، \pi ، ٢\pi ، \ldots$$

$$-جا^{٢}ن + ٣جتا^{٢}ن = ٠ \Rightarrow ٣جتا^{٢} = جا^{٢}ن$$

$$\Rightarrow ظا^{٢}ن = ٣ \Rightarrow ظان = \pm\sqrt{٣} \Rightarrow ن = \frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣} ، \ldots$$

ينعدم التسارع لأول مرة عندما $ن = \frac{\pi}{٣}$ وتكون السرعة

$$ع\left(\frac{\pi}{٣}\right) = ٤جا^{٣}\frac{\pi}{٣}جتا\frac{\pi}{٣} = ٤ × \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} × \frac{١}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$$

---

٣٣) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم حسب العلاقة : $ف(ن) = \sqrt{ن}(٢٧ - ن)$ ، اثبت ان هذه النقطة التي بدأت منها الحركة بعد (٩) ثواني ، ثم جد سرعتها حينئذ

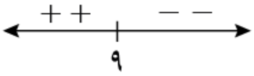
الحل :

$$ف(ن) = ن^{\frac{١}{٢}} × (٢٧ - ن) = ٢٧ن^{\frac{١}{٢}} - ن^{\frac{٣}{٢}}$$

$$ع = ف' = ٢٧ × \frac{١}{٢}ن^{\frac{-١}{٢}} - \frac{٣}{٢}ن^{\frac{١}{٢}} = ٠$$

$$\Rightarrow \frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}} - \frac{٣}{٢}\sqrt{ن} = ٠ \Rightarrow \frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{ن}$$

$$\Rightarrow ٢٧ × ٢ = ٢\sqrt{ن} × ٣\sqrt{ن} \Rightarrow ن = ٩$$



السرعة تتغير اشارتها عند $ن > ٩$

∴ الجسيم يعكس اتجاه حركته $ف(٩) = ٥٤$

---

٣٤) من نقطة على ارتفاع (٨٠) متر من سطح الارض قذف جسيم رأسيا الى اعلى وفق اقتران المسافة $ف(ن) = ٦٤ن - ١٦ن^{٢}$ ، جد :

أ) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

ب) الزمن الذي بعده يعود الى نقطة القذف

ج) الزمن الذي بعده يعود الى سطح الارض

د) متى تصبح سرعة الجسيم ٤٠م / ث

هـ) مجموعة القيم $ن \geq ٠$ التي تكون عندها $ع(ن) > ٠$

الحل :

$ف = ٦٤ن - ١٦ن^{٢}$

أ) $ع = ف' = ٦٤ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ن = ٢$

اقصى ارتفاع من نقطة القذف

$ف(٢) = ٦٤ \times ٢ - ١٦ \times ٤ = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤$

عن سطح الارض يكون اقصى ارتفاع هو

$٦٤ + ٨٠ = ١٤٤$م

ب) $ف = ٠ \Leftarrow ٦٤ن - ١٦ن^{٢} = ٠$

$\Leftarrow ١٦ن(٤ - ن) = ٠ \Leftarrow ن = ٠$ ، $ن = ٤$ ✓

ج) ف عن الارض $= ٦٤ن - ١٦ن^{٢} + ٨٠$

وعندما يصل سطح الارض تكون $ف = ٠$

$٦٤ن - ١٦ن^{٢} + ٨٠ = ٠$

$١٦ن^{٢} - ٦٤ن - ٨٠ = ٠ \quad \div ١٦$

$ن^{٢} - ٤ن - ٥ = ٠ \Leftarrow (ن - ٥)(ن + ١) = ٠$

$\Leftarrow ن = ٥$ ، $ن = -١$ ، نأخذ $ن = ٥$

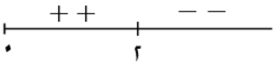
د) $ع = ٦٤ - ٣٢ن = ٤٠ \Leftarrow ٦٤ - ٤٠ = ٣٢ن$

$٢٤ = ٣٢ن \Leftarrow ن = \frac{٢٤}{٣٢} = \frac{٣}{٤}$

هـ) ندرس اشارة (ع)

$ع = ٦٤ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ن = ٢$

$ع > ٠$ في $[٠،٢)$



٣٥) من سطح بناية ، افلت شخص جسيما من السكون وفق الاقتران : $ف_{١}(ن) = ١٦ن^{٢}$ ، وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسيما عاموديا الى اسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠م / ث وفق الاقتران : $ف_{٢}(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^{٢}$ ، ماذا ارتطم الجسيم الاول بعد $(\frac{١}{٢})$ ثانية من ارتطام الجسيم الثاني عن الارض ، فجد :

أ) سرعة كل من الجسيم الاول والجسيم الثاني لحظة ارتطامها بالأرض

ب) ارتفاع البناية

الحل :

اذا احتاج الجسيم الثاني ثانية (ن) فان الجسيم الاول يحتاج $(ن + \frac{١}{٢})$ ثانية

$\therefore ف_{١}(ن + \frac{١}{٢}) = ف_{٢}(ن)$

$١٦(ن + \frac{١}{٢})^{٢} = ٢٠ن + ١٦ن^{٢} \quad \div ٤$

$٤(ن + \frac{١}{٢})^{٢} = ٥ن + ٤ن^{٢}$

$١ = ٥ن - ٤ن \Leftarrow ن = ١$

زمن الجسيم الاول $= ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

زمن الجسيم الثاني $= ١$

أ) $ع_{١} = ف_{١}' = ٣٢ن$

$ع_{١}(\frac{٣}{٢}) = ٣٢ \times \frac{٣}{٢} = ٤٨$

$ع_{٢} = ف_{٢}' = ٢٠ + ٣٢ن$

$ع_{٢}(١) = ٢٠ + ٣٢ = ٥٢$

ب) $ف_{١}(\frac{٣}{٢}) = ١٦ \times (\frac{٣}{٢})^{٢} = ١٦ \times \frac{٩}{٤} = ٣٦$

$ف_{٢}(١) = ٢٠ \times ١ + ١٦ \times ١ = ٣٦$

٣٦) قذف جسيم رأسيا للأعلى من سطح بناية ارتفاعها عن الارض ٢٠م فتحرك حسب العلاقة : $ف(ن) = ١٥ن - ٥ن^{٢}$ ، جد سرعة الجسيم لحظة وصوله الارض

الحل :

$ف(ن)_{\text{الارض}} = ١٥ن - ٥ن^{٢} + ٢٠$

لحظة وصوله سطح الارض $ف(ن) + ٢٠ = ٠$

$١٥ن - ٥ن^{٢} + ٢٠ = ٠ \Leftarrow ن^{٢} - ٣ن - ٤ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ٤)(ن + ١) = ٠ \Leftarrow ن = ٤ ، ن = -١$ ✗

$ع(ن) = ١٥ - ١٠ن$

$ع(٤) = ١٥ - ١٠ \times ٤ = -٢٥$م / ث

٣٧) قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ١٠٠م حسب العلاقة $ف(ن) = أن - ٥ن^٢$ حيث $أ > ٠$ وكانت سرعة الكرة عند ملامستها الارض هي ٦٠م/ث ، اوجد قيمة الثابت (أ)

الحل :

$ف(ن) = أن - ٥ن^٢$

عند ملامستها سطح الارض $\Leftarrow ف(ن) + ١٠٠ = ٠$

$\Leftarrow أن - ٥ن^٢ + ١٠٠ = ٠ ......(١)$

$ف'(ن) = أ - ١٠ن \Leftarrow أ - ١٠ن = -٦٠$

$\Leftarrow ن = \frac{+٦٠ + أ}{١٠}$

عوض قيمة (ن) في (١)

$أ\left(\frac{٦٠+أ}{١٠}\right) - ٥\left(\frac{٦٠+أ}{١٠}\right)^٢ + ١٠٠ = ٠$

$١٢٠أ + ٢أ^٢ - ٣٦٠٠٠ - ١٢٠أ - أ^٢ + ٢٠٠٠ = ٠$

$أ^٢ - ١٦٠٠ = ٠ \Leftarrow أ = \pm ٤٠$

لكن $أ > ٠ \Leftarrow أ = ٤٠$

---

٣٨) قذف جسيم حسب العلاقة : $ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^٢$ ، جد ما يلي :

أ) سرعة الجسيم

ب) مجموعة قيم $ن \geq ٠$ والتي تكون عندها السرعة موجبة

ج) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

د) سرعة الجسيم الابتدائية

الحل :

أ) $ع(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن$

ب) $ع(ن) \geq ٠ \Leftarrow ١٢٨ - ٣٢ن \geq ٠$

$\Leftarrow ن \leq ٤ \Leftarrow ن \in [٠،٤)$

ج) $\Leftarrow ع(ن) = ٠$

$\Leftarrow ١٢٨ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ن = ٤$ ثواني

$ف(٤) = ١٢٨ \times ٤ - ١٦ \times (٤)^٢ = ٢٥٦$ قدم

د) $\Leftarrow ع(٠) = ؟؟$

$ع(٠) = ١٢٨ - ٣٢ \times ٠ = ١٢٨$م/ث

---

٣٩) قذف جسيم رأسيا للأعلى فتحرك حسب العلاقة : $ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^٢$ ، احسب سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ١٠٠م

الحل :

$ف(ن) = ١٠٠ \Leftarrow ٦٠ن - ٥ن^٢ = ١٠٠$

$ن^٢ - ١٢ن + ٢٠ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ١٠)(ن - ٢) = ٠ \Leftarrow ن = ١٠ ، ن = ٢$

$ع(ن) = ٦٠ - ١٠ن$

عندما $ن = ١٠ \Leftarrow ع(١٠) = -٤٠$م/ث

$ن = ٢ \Leftarrow ع(٢) = ٤٠$م/ث

---

٤٠) قذف جسيم رأسيا للأعلى فتحرك حسب العلاقة : $ف(ن) = ع_١ن - ٥ن^٢$ اذا كان اقصى ارتفاع هو ٢٠م ، فما قيمة $(ع_١)$

الحل :

$ف(ن) = ع_١ن - ٥ن^٢$

اقصى ارتفاع $\Leftarrow ف'(ن) = ٠$

$ع_١ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ع_١ = ١٠ن \Leftarrow ن = \frac{ع_١}{١٠}$

$ف\left(\frac{ع_١}{١٠}\right) = ٢٠ \Leftarrow \frac{ع_١}{١٠} \times ع_١ - \frac{٥ \times ع_١^٢}{١٠٠} = ٢٠$

$\Leftarrow \frac{ع_١^٢}{١٠} - \frac{٥ع_١^٢}{١٠٠} = ٢٠ \Leftarrow ٥ع_١^٢ = ٢٠٠٠$

$ع_١^٢ = ٤٠٠ \Leftarrow ع_١ = ٢٠$م/ث

---

٤١) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن + ٤$ ، اوجد ما يلي :

أ) ازاحة الجسيم وتسارعه عندما تنعدم السرعة

ب) ازاحة الجسيم وسرعته عندما ينعدم تسارعه

الحل :

أ) $\Leftarrow ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ = ٠$

$\Leftarrow ن^٢ - ٤ن + ٣ = ٠ \Leftarrow (ن - ٣)(ن - ١) = ٠$

$\Leftarrow ن = ٣ ، ن = ١$

ف(٣) = (٣)^{٣} − ٦ × (٣)^{٢} + ٩ × ٣ + ٤ = ٤م

ف(١) = (١)^{٣} − ٦ × (١)^{٢} + ٩ × ١ + ٤ = ٨م

ت(ن) = ٦ن − ١٢

ت(٣) = ٦م / ث^{٢} ، ت(١) = −٦م / ث^{٢}

ب) ت(ن) = ٦ن − ١٢

ت(ن) = ٠ ⇐ ٦ن − ١٢ = ٠ ⇐ ن = ٢

ف(٢) = ٨ − ٢٤ + ١٨ + ٤ = ٦م

ع(٢) = ١٢ − ٢٤ + ٩ = −٣م / ث

---

٤٢) قذف جسيم رأسيا الى الاعلى فإذا كان بعد الجسيم يعطى بالعلاقة : ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، اوجد ارتفاع الجسيم في اللحظة التي يكون فيها سرعته ($\frac{١}{٣}$) السرعة التي قذف بها

الحل :

السرعة الابتدائية = $\frac{١}{٣}$ السرعة التي قذف بها

١٠ = $\frac{١}{٣}$ × ٣٠

ع(ن) = ٣٠ − ١٠ن

١٠ = ٣٠ − ١٠ن ⇐ ن = ٢ ثانية

ف(ن) = ٣٠ × ٢ − ٥ × (٢)^{٢} = ٤٠م

---

٤٣) قذف جسيم حسب العلاقة : ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن^{٢} من فوق ارتفاع ٨٠م الى الاعلى ، اوجد سرعته عندما يكون على ارتفاع ٣٥م عن سطح الارض اثناء هبوطه

الحل :

ف(ن) = ٣٥ − ٨٠ = −٤٥

لأنه يريد السرعة اثناء الهبوط

٤٠ن − ٥ن^{٢} = −٤٥ ⇐ ن^{٢} − ٨ن − ٩ = ٠

(ن − ٩)(ن + ١) = ٠ ⇐ ن = ٩ ، ن = −١ ✗

ف´(ن) = ٤٠ − ١٠ن

⇐ ف´(٩) = ٤٠ − ١٠ × ٩ = −٥٠م / ث

المعادلات المرتبطة بالزمن :

مثال توضيحي :

عند اشتقاق العلاقة التالية بالنسبة للزمن

٥ك = س^{٢} + ٢ص^{٣}

تصبح : ٥ $\frac{\text{دك}}{\text{دن}}$ = ٢س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ٦ص^{٢} $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

امثلة :

١) سلم طوله ١٠م يستند طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على الارض ، اذا انزلق السلم بحيث سرعة طرفه السفلي ٢م/د مبتعدا عن الحائط وفي لحظة ما كان الطرف السفلي على بعد ٨م من الحائط ، اوجد ما يلي :

أ) معدل نزول الطرف العلوي للسلم

ب) معدل التغير في مساحة المثلث من السلم والارض

ج) معدل تغير الزاوية المحصورة بين السلم والارض

الحل :