قواعد الاشتقاق (١)

١ قاعدة الثابت

ق(س) = جـ ⇐ قَ(س) = صفر

مثال

إذا كان ق(س) = $\sqrt{٣}$

جد قَ(س) ، قَ(١) ، قَ(-٤)

الحل:

قَ(س) = صفر

قَ(١) = صفر

قَ(-٤) = صفر

مثال

إذا كان ق(س) = ٦ ، جد قَ(س)

الحل:

قَ(س) = صفر

مثال

إذا كان ق(س) = $\sqrt{٣٠}$ جد قَ(س)

الحل:

قَ(س) = صفر

مثال

إذا كان ق(س) = ٤ $\pi^{٢}$ ، جد قَ(س)

الحل:

قَ(س) = صفر

٢

إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب فإن

قَ(س) = ن $س^{ن-١}$

البرهان:

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{(ع - س)}(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}س + ع^{ن-٣}س^{٢} + \dots + س^{ن-١})}{\cancel{(ع - س)}}$$

$$= س^{ن-١} + س^{ن-١} + \dots + س^{ن-١} \quad (ن \text{ مرة})$$

$$= ن\,(س)^{ن-١}$$

مثال

إذا كان ق(س) = $س^{٥}$ جد قَ(س)

الحل:

قَ(س) = ٥ $س^{٤}$

مثال

إذا كان ق(س) = $س^{١٢}$ جد قَ(س)

الحل:

قَ(س) = ١٢ $س^{١١}$

مثال

إذا كان ق(س) = س ، جد قَ(س)

الحل:

قَ(س) = ١

مثال

إذا كان ق(س) = $س^{٥}$ جد قَ(-١)

الحل:

قَ(س) = ٥ $س^{٤}$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ
الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق ١) ماجستير رياضيات

$ق'(-١) = ٥ \times (-١)^٤$
$= ٥ \times ١ = ٥$

مثال
إذا كان $ق(س) = س^{١٢}$ جد $ق'(-١)$
الحل :
$ق'(س) = ١٢ س^{١١}$
$ق'(-١) = ١٢ \times (-١)^{١١}$
$= ١٢ \times -١ = -١٢$

مثال
إذا كان $ق(س) = س$ ، جد $ق'(-١)$
الحل :
$ق'(س) = ١$
$ق'(-١) = ١$

$\boxed{٣}$ مشتقة عدد × اقتران
إذا كان $ق(س) = جـ \times هـ(س)$ فإن
$ق'(س) = جـ \times هـ'(س)$

البرهان :
$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$
$= \lim_{ع \to س} \frac{جـ هـ(ع) - جـ هـ(س)}{ع - س}$
$= \lim_{ع \to س} جـ \left(\frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} \right)$
$= جـ \times \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$
$= جـ \times هـ'(س)$

مثال
إذا كان $ق(س) = ٤ س^٥$ جد $ق'(س)$
الحل :
$ق'(س) = ٢٠ س^٤$

مثال
إذا كان $ق(س) = - س^٦$ جد $ق'(س)$
الحل :
$ق'(س) = -٦ س^٥$

مثال
إذا كان $ق(س) = -٤ س^٢$ جد $ق'(س)$
الحل :
$ق'(س) = -٨ س$

مثال
إذا كان $ص = ٤ س^{١٠}$ جد $\frac{دص}{دس}$
الحل :
$\frac{دص}{دس} = ٤٠ س^٩$

مثال
إذا كان $ق(س) = \frac{س^٣}{\pi}$ جد $ق'(س)$
الحل :
$ق'(س) = \frac{٣}{\pi} س^٢$

مثال
إذا كان $ق(س) = \frac{س}{\sqrt{٢}}$ جد $ق'(س)$
الحل :
$ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

مثال
إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{2}\text{س}^{4}$ جد $\text{قَ}(-1)$

الحل:
$\text{قَ}(\text{س}) = 2\text{س}^{3}$
$\text{قَ}(-1) = 2\times(-1)^{3} = 2\times -1 = -2$

مثال
إذا كان $\text{ص} = \frac{4}{3}\pi\,\text{س}^{3}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\pi\,\text{س}^{2}$

مثال
إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\frac{1}{2}\text{س})^{4}$ جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل:
$\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{16}\text{س}^{4}$
$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{4}{16}\text{س}^{3} = \frac{1}{4}\text{س}^{3}$.

٤ مشتقة الجمع والطرح

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{م}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})$
$\Leftarrow \text{قَ}(\text{س}) = \text{مَ}(\text{س}) \pm \text{هَ}(\text{س})$

برهان الجمع:
$\text{ق}(\text{س}) = \text{م}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})$

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نهـا}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{م}(\text{ع}) + \text{هـ}(\text{ع})) - (\text{م}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نهـا}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \text{نهـا}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{مَ}(\text{س}) + \text{هَ}(\text{س})$

مثال
إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{2} + 3\text{س} - 4$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 3$

مثال
إذا كان $\text{ص} = \frac{1}{4}\text{س}^{4} + \frac{1}{3}\text{س}^{3} - \text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{3} + \text{س}^{2} - 1$

مثال
إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 7\text{س}^{2} + \sqrt{3}\,\text{س}^{4}$ جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل:
$\text{قَ}(\text{س}) = 14\text{س} + 4\sqrt{3}\,\text{س}^{3}$

مثال
إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^{5} - \pi\,\text{س}^{6}$ جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل:
$\text{قَ}(\text{س}) = 20\text{س}^{4} - 6\pi\,\text{س}^{5}$

مثال
إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $\text{لَ}(-2) = 4$ ، $\text{هَ}(-2) = -3$ فجد $\text{قَ}(-2)$ حيث
$\text{ق}(\text{س}) = 6\,\text{ل}(\text{س}) - 2\,\text{هـ}(\text{س})$

الحل:
$\text{قَ}(\text{س}) = 6\,\text{لَ}(\text{س}) - 2\,\text{هَ}(\text{س})$
$\text{قَ}(-2) = 6\,\text{لَ}(-2) - 2\,\text{هَ}(-2)$
$= 6\times 4 - 2\times -3$

= ٢٤ − (−٦)
= ٢٤ + ٦ = ٣٠

مثال

إذا كان ل'(−٢) = ٤ ، هـ'(−٢) = −٣
جد ق'(−٢) حيث
ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

الحل:

ق'(س) = $\frac{١}{٢}$ ل'(س) + هـ'(س) + ٣ س^{٢}

ق'(−٢) = $\frac{١}{٢}$ ل'(−٢) + هـ'(−٢) + ٣ × (−٢)^{٢}
= $\frac{١}{٢}$ × ٤ + (−٣) + ٣ × ٤
= ٢ − ٣ + ١٢
= −١ + ١٢ = ١١

مثال

إذا كان ص = $\frac{١}{٤}$ (س^{٢} + ٨) جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٢

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٢}{٤}$ س = $\frac{١}{٢}$ س

مثال

إذا كان ق(س) = ٢س^{٣}(٤س − ٥س^{٢}) فجد ق'(س)

الحل:

ق(س) = ٨س^{٤} − ١٠س^{٥}

ق'(س) = ٣٢س^{٣} − ٥٠س^{٤}

مثال

إذا كان ق(س) = ٥س^{٤}(٢س − $\frac{٣}{س}$)
جد ق'(−١)

الحل:

ق(س) = ١٠س^{٥} − ١٥س^{٣}

ق'(س) = ٥٠س^{٤} − ٤٥س^{٢}

ق'(−١) = ٥٠ × (−١)^{٤} − ٤٥ × (−١)^{٢}
= ٥٠ × ١ − ٤٥ × ١
= ٥٠ − ٤٥ = ٥

مثال

إذا كان ق(س) = س^{٣} |س| جد قَ(٤)

الحل:

ق(س) = س^{٣} × س

= س^{٤}

قَ(س) = ٤ س^{٣}

قَ(٤) = ٤ × (٤)^{٣}

= ٤ × ٦٤ = ٢٥٦

مثال

إذا كان ق(س) = س^{٤} |س| جد قَ(-٢)

الحل:

ق(س) = س^{٤} × (-س)

= - س^{٥}

قَ(س) = -٥ س^{٤}

قَ(-٢) = -٥ × (-٢)^{٤}

= -٥ × ١٦ = -٨٠

مثال

إذا كان ق(س) = |س-٢| + ٣س^{٢} جد قَ(١)

الحل:

ق(س) = ٢ - س + ٣س^{٢}

قَ(س) = -١ + ٦س

قَ(١) = -١ + ٦×١

= -١ + ٦ = ٥

مثال

إذا كان ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|

جد قَ(٣)

الحل:

ق(س) = س^{٢} + ٣س - ٦

قَ(س) = ٢س + ٣

قَ(٣) = ٢×٣ + ٣

= ٦ + ٣ = ٩

مثال

إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} - [٢س + ١] فجد قَ(٠و٦).

الحل:

ق(س) = ٤س^{٣} - ٢

قَ(س) = ١٢ س^{٢}

قَ(٠و٦) = ١٢ × (٠و٦)^{٢}

= ١٢ × ٠و٣٦ = ٤و٣٢

مثال

إذا كان ق(س) = [½ س + ٥] - ٤س^{٢} جد قَ(٢و٤)

الحل:

ق(س) = ٦ - ٤ س^{٢}

قَ(س) = - ٨ س

قَ(٢و٤) = - ٨ × ٢و٤ = - ١٩و٢

مثال

إذا كان ق(س) = س^{٢} - [٢س+١] فجد قَ(١و٤).

الحل:

ق(س) = س^{٢} - ٣

قَ(س) = ٢س

قَ(١و٤) = ٢ × ١و٤ = ٢و٨

مثال

إذا كان ق(س) = [٣س + ١] + |س|

جد قَ(٤,٠)

الحل :

ق(س) = ٢ + س

قَ(س) = ١

قَ(٤,٠) = ١

مثال

إذا كان ق(س) = ٣س + [س + ١,٠] − |س|

جد قَ(−١) .

الحل :

ق(س) = ٣س + (−١) − (−س)

= ٣س − ١ + س

= ٤س − ١

قَ(س) = ٤

قَ(−١) = ٤

٢٠٠٩ صيفي

إذا كان ق(س) = [س] × |س| حيث

س ∈ (−٣ ، −٢) فإن قَ(−$\frac{٥}{٢}$) =

أ) $\boxed{٣}$ ب) −٣ ج) صفر د) −٢

الحل :

ق(س) = −٣ × −س

ق(س) = ٣س

قَ(س) = ٣

قَ(−$\frac{٥}{٢}$) = ٣

قواعد الاشتقاق (٢)

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٣)) ماجستير رياضيات

١ مشتقة المضروب.

إذا كان ق(س) = م(س) × هـ(س) ⇐

ق'(س) = م(س) × هـ'(س) + هـ(س) × م'(س)

= (الأول)(الثاني)' + (الثاني)(الأول)'

مثال

إذا كان ص = س^{٢} (١+س^{٣}) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (س^{٢}) (٣س^{٢}) + (١+س^{٣}) (٢س)

= ٣س^{٤} + ٢س + ٢س^{٤}

= ٥س^{٤} + ٢س

مثال

إذا كان ق(س) = (س^{٣}+٦س) (٤س^{٢}-٣)

جد ق'(س)

الحل:

ق'(س) = (س^{٣}+٦س) (٨س) + (٤س^{٢}-٣) (٣س^{٢}+٦)

مثال

إذا كان ق(س) = (٤-٢س^{٣}) ($\frac{١}{٢}$س+٣)

فجد ق'(س)

الحل:

ق'(س) = (٤-٢س^{٣}) ($\frac{١}{٢}$) + ($\frac{١}{٢}$س+٣) (-٦س^{٢})

مثال

إذا كان ص = (س^{٣}-٢س+١) (٤س-٣)

فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (س^{٣}-٢س+١) (٤) - (٤س-٣) (٣س^{٢}-٢)

مثال

إذا كان ق(س) = س (س+٢) (س^{٢}-٣س-٦)

فجد ق'(س)

الحل:

ق(س) = (س^{٢}+٢س) (س^{٣}-٣س-٦)

ق'(س) = (س^{٢}+٢س) (٢س-٣) + (س^{٢}-٣س-٦) (٢س+٢)

مثال

إذا علمت أن هـ(س) قابل للاشتقاق وأن

هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = -١ فجد ق'(٢)

حيث ق(س) = س هـ(س)

الحل:

ق'(س) = س هـ'(س) + هـ(س) × ١

ق'(٢) = ٢ هـ'(٢) + هـ(٢)

= ٢ × -١ + ٣

= -٢ + ٣ = ١

مثال

إذا علمت أن هـ(س) قابل للاشتقاق وأن

هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = -١ فجد ق'(٢) حيث

ق(س) = ٣ س^{٢} هـ(س) - ٥س

الحل:

ق'(س) = (٣س^{٢}) هـ'(س) + هـ(س) (٦س) - ٥

ق'(٢) = (٣×٤) هـ'(٢) + هـ(٢) (٦×٢) - ٥

= ١٢ × -١ + ٣ × ١٢ - ٥

= -١٢ + ٣٦ - ٥

= ٢٤ - ٥

= ١٩

مثال

إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان
ل(-٢) = ٣ ، ل'(-٢) = -١ ، هـ(-٢) = ٤
هـ'(-٢) = -٦ فجد ق'(-٢) حيث
ق(س) = ل(س) × هـ(س)

الحل:

ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل'(س)
ق'(-٢) = ل(-٢) هـ'(-٢) + هـ(-٢) ل'(-٢)
= ٣ × -٦ + ٤ × -١
= -١٨ + -٤ = -٢٢

مشتقة حاصل ضرب ٣ اقترانات.

مثال

إذا كانت ل، م، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س أثبت أن

د(ل(س) × م(س) × هـ(س)) / دس =
ل(س) م(س) هـ'(س) + ل(س) هـ(س) م'(س) + م(س) هـ(س) ل'(س)

الحل:

= ((ل(س) م(س)) هـ(س))'
ل(س) م(س) × هـ'(س) + هـ(س) (ل(س) م(س))'
= ل(س) م(س) هـ'(س) + هـ(س) (ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))
= ل(س) م(س) هـ'(س) + هـ(س) ل(س) م'(س) + هـ(س) م(س) ل'(س)

مثال

أثبت أن د(ل³(س)) / دس = ٣ ل²(س) × ل'(س)

الحل:

(ل³(س))' = (ل(س) × ل(س) × ل(س))'
= ل(س) ل(س) ل'(س) + ل(س) ل'(س) ل(س) + ل'(س) ل(س) ل(س)
= ل²(س) ل'(س) + ل²(س) ل'(س) + ل²(س) ل'(س)
= ل'(س) (ل²(س) + ل²(س) + ل²(س))
= ل'(س) × ٣ × ل²(س)
= ٣ ل²(س) × ل'(س)

٢٠١٣ صيفي

إذا كان ق(س) = س ق(س) + ١ فإن ق'(٢) تساوي

أ) -١ $\boxed{\text{ب) ١}}$ ج) صفر د) ٢

الحل:

ق'(س) = (س) ق'(س) + ق(س) × ١
ق'(٢) = ٢ ق'(٢) + ق(٢)

ق'(٢) - ٢ق'(٢) = -١
- ق'(٢) = -١
ق'(٢) = ١

نجد ق(٢)
ق(٢) = ٢ ق(٢) + ١
ق(٢) - ٢ق(٢) = ١
- ق(٢) = ١
ق(٢) = -١

٣ مشتقة قسمة اقترانين

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} \Leftarrow$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{م}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) \times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{المقام})(\text{البسط})' - (\text{البسط})(\text{المقام})'}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٥}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢}+٥)(٣\text{س}^{٢}+١) - (\text{س}^{٣}+\text{س})(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+٥)^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٣}}{١-\text{س}}$ فجد $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}$

الحل:

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{(١-\text{س})(٣\text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٣})(-١)}{(١-\text{س})^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ١}{٢\text{س}+٣}$ جد $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}$

الحل:

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{(٢\text{س}+٣)(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢}-١)(٢)}{(٢\text{س}+٣)^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} + ٤}$ فجد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢}+٤)(٢\text{س}-٢) - (\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤)(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+٤)^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \frac{٦\text{س}+١}{\text{س}^{٢}-٤}$ فجد $\left.\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}\right|_{\text{س}=١}$

الحل:

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \frac{(\text{س}^{٢}-٤)(٦) - (٦\text{س}+١)(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}-٤)^{٢}}$$

$$\left.\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}\right|_{\text{س}=١} = \frac{(١-٤)(٦) - (٦+١)(٢)}{(١-٤)^{٢}}$$

$$= \frac{-١٨ - ١٤}{٩} = \frac{-٣٢}{٩}$$

مثال

إذا كان $\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤} - ٣}{\text{س}^{٣}}$ فجد $\text{ع}'(\text{س})$

الحل:

$$\text{ع}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٣})(٤\text{س}^{٣}) - (\text{س}^{٤}-٣)(٣\text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٣})^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}^{٤}-٤}$ جد $\text{ق}'(-١)$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٤}-٤)(٢) - (٢\text{س}+١)(٤\text{س}^{٣})}{(\text{س}^{٤}-٤)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(-١) = \frac{(١-٤)(٢) - (-٢+١)(-٤)}{(-٣)^{٢}}$$

$$= \frac{-٦ - ٤}{٩}$$

$$= \frac{-١٠}{٩}$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

مثال

إذا كان هـ قابل للاشتقاق وكان $\text{هـ}(٢)=٣$ ، $\text{هـ}'(٢)=-١$ فجد $\text{ق}'(٢)$ حيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}+١}{٣\,\text{هـ}(\text{س})}$$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(٣\,\text{هـ}(\text{س}))(٢) - (٢\text{س}+١)(٣\,\text{هـ}'(\text{س}))}{(٣\,\text{هـ}(\text{س}))^٢}$$

$$\text{ق}'(٢) = \frac{(٣\,\text{هـ}(٢))(٢) - (٥)(٣\,\text{هـ}'(٢))}{(٣\,\text{هـ}(٢))^٢}$$

$$= \frac{٣\times٣\times٢ - ٥\times٣\times-١}{(٣\times٣)^٢}$$

$$= \frac{١٨+١٥}{٨١} = \frac{٣٣}{٨١}$$

مثال

إذا كان ل ، هـ قابلين للاشتقاق وكان $\text{ل}(-٢)=٣$ ، $\text{ل}'(-٢)=-١$ ، $\text{هـ}(-٢)=٤$ ، $\text{هـ}'(-٢)=-٦$ فجد $\text{ق}'(-٢)$ حيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})+١}$$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{ل}(\text{س})+١)\,\text{هـ}'(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\,\text{ل}'(\text{س})}{(\text{ل}(\text{س})+١)^٢}$$

$$\text{ق}'(-٢) = \frac{(\text{ل}(-٢)+١)\,\text{هـ}'(-٢) - \text{هـ}(-٢)\,\text{ل}'(-٢)}{(\text{ل}(-٢)+١)^٢}$$

$$= \frac{(٣+١)\times-٦ - ٤\times-١}{(٣+١)^٢}$$

$$= \frac{-٢٤+٤}{١٦} = \frac{-٢٠}{١٦} = \frac{-٥}{٤}$$

٢٠٠٨ صيفي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}^٢+١}$ وكان $\text{ق}(٢)=-١$ ، $\text{ق}'(٢)=٣$ فإن $\text{ل}'(٢)=$

أ) ١٣ ب) $\boxed{١١}$ ج) ٤ د) -٥

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢+١)\,\text{ل}'(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\,(٢\text{س})}{(\text{س}^٢+١)^٢}$$

$$\text{ق}'(٢) = \frac{٥\,\text{ل}'(٢) - \text{ل}(٢)\times٤}{٢٥}$$

$$٣ = \frac{٥\,\text{ل}'(٢) - -٥\times٤}{٢٥}$$

$$٧٥ = ٥\,\text{ل}'(٢) + ٢٠$$

$$٥٥ = ٥\,\text{ل}'(٢)$$

$$\Leftarrow \text{ل}'(٢) = ١١$$

نجد ل(٢)

$$\text{ق}(٢) = \frac{\text{ل}(٢)}{٥}$$

$$-١ = \frac{\text{ل}(٢)}{٥} \Leftarrow \text{ل}(٢) = -٥$$

٢٠١٣ صيفي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{ل}(\text{س})}$ وكان $\text{ل}(١)=-٣$ ، $\text{ل}'(١)=-٩$ فجد $\text{ق}'(١)$

أ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{-٥}{٣}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\boxed{\frac{-١}{٣}}$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})(٢\text{س}) - (\text{س}^٢)(\text{ل}'(\text{س}))}{(\text{ل}(\text{س}))^٢}$$

$$\text{ق}'(١) = \frac{\text{ل}(١)\times٢ - ١\times\text{ل}'(١)}{(\text{ل}(١))^٢}$$

$$= \frac{-٣ \times ٢ - ١ \times -٩}{(-٣)^{٢}}$$

$$= \frac{-٦ + ٩}{٩} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

٢٠١٤ شتوي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{م}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})\,(\text{س}^{٢}+١)}$ وكان

$\text{م}(١) = -٢$ ، $\text{م}'(١) = \text{ل}(١) = -١$ ، $\text{ق}'(١) = ٣$

فجد $\text{ل}'(١)$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})\,(\text{س}^{٢}+١)\,\text{م}'(\text{س}) - \text{م}(\text{س})\Big(\text{ل}(\text{س})\,(٢\text{س}) + (\text{س}^{٢}+١)\,\text{ل}'(\text{س})\Big)}{\big(\text{ل}(\text{س})\,(\text{س}^{٢}+١)\big)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(١) = \frac{\text{ل}(١)\,(٢)\,\text{م}'(١) - \text{م}(١)\Big(\text{ل}(١)\,(٢) + (٢)\,\text{ل}'(١)\Big)}{\big(\text{ل}(١) \times ٢\big)^{٢}}$$

$$٣ = \frac{-١ \times ٢ \times -١ - (-٢)\big(-١ \times ٢ + ٢\,\text{ل}'(١)\big)}{(٢ \times -١)^{٢}}$$

$$١٢ = ٢ + ٢\big(-٢ + ٢\,\text{ل}'(١)\big)$$

$$١٠ = -٤ + ٤\,\text{ل}'(١)$$

$$١٤ = ٤\,\text{ل}'(١)$$

$$\frac{١٤}{٤} = \text{ل}'(١)$$

$$\Leftarrow \text{ل}'(١) = \frac{٧}{٢}$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل)	عصام محمد الشيخ
الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢))	ماجستير رياضيات

٢٠١٤ صيفي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})}$ وكان

$\text{ق}'(٢) = \text{ل}(٢) = -٣$ ، $\text{ل}'(٢) = \text{هـ}(٢) = ١$

فجد $\text{هـ}'(٢)$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}'(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\left(\text{س}\,\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)}{\left(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})\right)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(٢) = \frac{٢\,\text{هـ}(٢)\,\text{ل}'(٢) - \text{ل}(٢)\left(٢\,\text{هـ}'(٢) + \text{هـ}(٢)\right)}{\left(٢\,\text{هـ}(٢)\right)^{٢}}$$

$$-٣ = \frac{٢ \times ١ \times ١ - (-٣)\left(٢\,\text{هـ}'(٢) + ١\right)}{(٢ \times ١)^{٢}}$$

$$-١٢ = ٢ + ٦\,\text{هـ}'(٢) + ٣$$

$$-١٧ = ٦\,\text{هـ}'(٢)$$

$$\Leftarrow \text{هـ}'(٢) = \frac{-١٧}{٦}$$

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل)	عصام محمد الشيخ
الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢))	ماجستير رياضيات

حالة خاصة من القسمة
مشتقة عدد على اقتران .

إذا كان $\text{م}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ فإن

$$\text{مَ}(\text{س}) = \frac{-\text{أ} \times \text{هـَ}(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$$

$$= \frac{-\text{العدد} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \frac{\sqrt{٣}}{\text{س}^{٢}}$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\sqrt{٣} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢})^{٢}}$$

$$= \frac{-٢\sqrt{٣}}{\text{س}^{٣}}$$

مثال

إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\pi}{\text{س}^{٢}}$ فجد $\text{لَ}(\text{س})$

الحل :

$$\text{لَ}(\text{س}) = \frac{-\pi \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{-٢\pi}{\text{س}^{٣}}$$

مثال

إذا كان هـ قابل للاشتقاق وكان $\text{هـ}(٢) = ٣$ ، $\text{هـَ}(٢) = -١$ فجد $\text{مَ}(٢)$ حيث

$$\text{م}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) - \frac{١}{\text{هـ}(\text{س})}$$

الحل :

$$\text{مَ}(\text{س}) = \text{هـَ}(\text{س}) - \frac{-١ \times \text{هـَ}(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$$

$$\text{مَ}(٢) = \text{هـَ}(٢) + \frac{\text{هـَ}(٢)}{(\text{هـ}(٢))^{٢}}$$

$$= -١ + \frac{-١}{(٣)^{٢}}$$

$$= -١ - \frac{١}{٩}$$

$$= \frac{-٩}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{-١٠}{٩}$$

نظرية

إذا كان $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح سالب فإن

$$\text{مَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$$

البرهان :

ليكن $\text{ن} = -\text{م}$ حيث م عدد صحيح موجب

$$\Leftarrow \text{م}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}}$$

$$\Leftarrow \text{م}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{\text{م}}}$$

$$\text{مَ}(\text{س}) = \frac{-١ \times \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{(\text{س}^{\text{م}})^{٢}}$$

$$= \frac{-\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{\text{س}^{٢\text{م}}}$$

$$= -\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١-٢\text{م}}$$

$$= -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-١} \qquad (-\text{م} = \text{ن})$$

$$= \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$$ وهو المطلوب .

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-٤}$ فجد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل :

$\text{قَ}(\text{س}) = -٤\,\text{س}^{-٥}$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{[\frac{١}{٢}\text{س}+٣]}{|٢\text{س}-١|}$ فجد $\text{قَ}(٢)$

الحل :

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٣}{٢\text{س}-١}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{-٣\,(٢)}{(٢\text{س}-١)^٢}$

$\text{قَ}(٢) = \dfrac{-٦}{(٤-١)^٢} = \dfrac{-٦}{٣^٢} = \dfrac{-٦}{٩} = \dfrac{-٢}{٣}$

٢٠٠٨ شتوي

إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{[٢\text{س}+١]}{\text{ل}(\text{س})}$

$\text{هـ}(\frac{١}{٢}) = ٢$ ، $\text{هـَ}(\frac{١}{٢}) = -١$ فجد $\text{لَ}(\frac{١}{٢})$

$\boxed{\text{أ) } \frac{١}{٤}}$ ب) $-\frac{١}{٤}$ جـ) $-\frac{١}{٩}$ د) $\frac{١}{٩}$

الحل :

$\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{ل}(\text{س})}$

$\text{هـَ}(\text{س}) = \dfrac{-١ \times \text{لَ}(\text{س})}{(\text{ل}(\text{س}))^٢}$

$\text{هـَ}(\frac{١}{٢}) = \dfrac{-١ \times \text{لَ}(\frac{١}{٢})}{(\text{ل}(\frac{١}{٢}))^٢}$

$-١ = \dfrac{-\text{لَ}(\frac{١}{٢})}{(\frac{١}{٢})^٢}$

$-\frac{١}{٤} = -\text{لَ}(\frac{١}{٢})$

$\frac{١}{٤} = \text{لَ}(\frac{١}{٢})$

$\text{هـ}(\frac{١}{٢}) = \dfrac{١}{\text{ل}(\frac{١}{٢})}$

$٢ = \dfrac{١}{\text{ل}(\frac{١}{٢})}$

$\Leftarrow \text{ل}(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}$

مشتقة الاقترانات المتشعبة باستخدام قواعد الاشتقاق .

الطريقة والملاحظات

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{ل(س)} & \text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب} \\ \text{و(س)} & \text{ب} \leq \text{س} \leq \text{جـ} \end{cases}$$

عند الاشتقاق نحذف اشارة =

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} \text{ل}'\text{(س)} & \text{أ} < \text{س} < \text{ب} \\ \text{هـ}'\text{(س)} & \text{ب} < \text{س} < \text{جـ} \end{cases}$$

مع مراعاة أن تكون ل ، هـ متصلة على الفترة والتذكير المشتقة عند الاطراف غير موجودة أما بالنسبة للأعداد المتشعبة ندرس اتصالها وقابلية الاشتقاق ثم نكتب ق'(س) بالصيغة النهائية والأمثلة التالية توضح ذلك

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٨\text{س}^٣ + ٤\text{س} & \text{س} \geq ١ \\ ٨\text{س}^٢ + ١٢\text{س} - ٨ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

جد ق'(س) .

الحل :

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ٢٤\text{س}^٢ + ٤ & \text{س} > ١ \\ ١٦\text{س} + ١٢ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

ندرس اتصال س = ١

ق(١) = ٨ + ٤ = ١٢

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = ١٢$

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = ٨ + ١٢ - ٨ = ١٢$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)} = ١٢ = \text{ق(١)}$

⇐ ق متصل عند س = ١

نبحث اشتقاق س = ١

$\text{ق}'_+(١) = ٢٤ + ٤ = ٢٨$

$\text{ق}'_-(١) = ١٦ + ١٢ = ٢٨$

⇐ ق'(١) = ٢٨ موجودة

⇐
$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ٢٤\text{س}^٢ + ٤ & \text{س} \geq ١ \\ ١٦\text{س} + ١٢ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

مثال

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٤\text{س}^٣ & \text{س} \leq ١ \\ ٣\text{س}^٤ + ١ & \text{س} > ١ \end{cases}$$

جد ق'(س) .

الحل :

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ١٢\text{س}^٢ & \text{س} < ١ \\ ١٢\text{س}^٣ & \text{س} > ١ \end{cases}$$

نبحث اتصال س = ١

ق(١) = ٤

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = ٤$

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = ٣ + ١ = ٤$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)} = ٤ = \text{ق(١)}$

⇐ ق متصل عند س = ١

نبحث اشتقاق س = ١

$\text{ق}'_-(١) = ١٢$ ، $\text{ق}'_+(١) = ١٢$

⇐ ق'(١) = ١٢ موجودة

⇐

ق̄(س) = { ١٢ س² ، س ≤ ١
 ١٢ س³ ، س > ١

مثال

إذا كان ق(س) = { $\frac{٤}{س+١}$ ، س ≤ ١
 س + ١ ، س > ١

ابحث قابلية ق للاشتقاق على ح .

الحل:

ق̄(س) = { $\frac{-٤}{(س+١)^{٢}}$ ، س < ١ ، س ≠ -١
 ١ ، س > ١

ق(-١) غير معرف ⇐ ق̄(-١) غير موجودة

بحث اتصال س = ١

ق(١) = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

$\lim_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ٢

$\lim_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٢

⇐ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢ = ق(١)

⇐ ق متصل عند س = ١

بحث اشتقاق س = ١

ق̄₋(١) = $\frac{-٤}{٤}$ = -١

ق̄₊(١) = ١

⇐ ق̄(١) غير موجودة

⇐

ق̄(س) = { $\frac{-٤}{(س+١)^{٢}}$ ، س < ١ ، س ≠ -١
 ١ ، س > ١
 غير موجودة ، س = ١ ، -١

٢٠٠٩ شتوي

إذا كان ق(س) = { ٣س² + ٢ ، س > ١
 ٥ ، س = ١
 ٦س + ١ ، س < ١

فجد ق̄(١)

أ) ٦ ب) ٥ $\boxed{\text{ج) غير موجودة}}$ د) صفر

الحل:

بحث الاتصال عند ١

ق(١) = ٥

$\lim_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٣ + ٢ = ٥

$\lim_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ٦ + ١ = ٧

⇐ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ١

⇐ ق̄(١) غير موجودة .

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق(س) = [س + ٧] - [س] + |٢س|

حيث س ∈ (-٥ ، -١) فجد ق̄(-٣)

أ) ٢ ب) غير موجودة ج) ١٣ $\boxed{\text{د) -٢}}$

الحل:

ق(س) = { ٣ - -٤ + -٢س ، -٤ ≤ س < -٣
 ٤ - -٣ + -٢س ، -٣ ≤ س < -٢

ق(س) = { ٧ - ٢س ، -٤ ≤ س < -٣
 ٧ - ٢س ، -٣ ≤ س < -٢

⇐ ق متصل عند س = -٣

ق̄₋(-٣) = -٢ ، ق̄₊(-٣) = -٢

⇐ ق̄(-٣) = -٢

٢٠١١ شتوي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٣ & س = ١ \end{cases}$

فإن قَ(١) هي

أ) صفر ب) ١ جـ) ٣ $\boxed{\text{د) غير موجودة}}$

الحل:

نبحث اتصال س = ١

ق(١) = ٣

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)}$ = ١ + ١ = ٢

⇐ ق غير متصل عند س = ١ ($\lim_{س \to ١}$ ق(س) ≠ ق(١))

⇐ قَ(١) غير موجودة .

٢٠١٣ شتوي

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ١ - س^٢ & س \geq ٣ \\ ٣ - ٦س & س < ٣ \end{cases}$

فإن قَ(٣) =

أ) ٦ ب) -٦ جـ) -١٥ $\boxed{\text{د) غير موجودة}}$

الحل:

نبحث اتصال س = ٣

ق(٣) = ١ - ٩ = -٨

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = -٨

$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٣ - ١٨ = -١٥

⇐ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجودة

⇐ ق غير متصل عند س = ٣

⇐ قَ(٣) غير موجودة .

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 |\text{س}-2|$ فابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على ح .

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^4 - 2\text{س}^3 & \text{س} \geq 2 \\ 2\text{س}^3 - \text{س}^4 & \text{س} < 2 \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س}^3 - 6\text{س}^2 & \text{س} > 2 \\ 6\text{س}^2 - 4\text{س}^3 & \text{س} < 2 \end{cases}$$

نبحث اتصال س = ٢

$\text{ق}(2) = 16 - 2 \times 8 = 16 - 16 = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س}) = 2 \times 8 - 16 = 16 - 16 = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to 2} \text{ق}(\text{س}) = 16 = \text{ق}(2)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٢

نبحث اشتقاق ق عند س = ٢

$\text{ق}'_{+}(2) = 4 \times 8 - 6 \times 4$
$= 32 - 24 = 8$

$\text{ق}'_{-}(2) = 6 \times 4 - 4 \times 8$
$= 24 - 32 = -8$

$\Leftarrow$ ق'(٢) غير موجودة

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س}^3 - 6\text{س}^2 & \text{س} > 2 \\ 6\text{س}^2 - 4\text{س}^3 & \text{س} < 2 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = 2 \end{cases}$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}-3|(\text{س}^2+\text{س})$ فجد ق'(س) .

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^3 - 2\text{س}^2 - 3\text{س} & \text{س} \geq 3 \\ -\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 3\text{س} & \text{س} < 3 \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س}^2 - 4\text{س} - 3 & \text{س} > 3 \\ -3\text{س}^2 + 4\text{س} + 3 & \text{س} < 3 \end{cases}$$

نبحث اتصال س = ٣

$\text{ق}(3) = 27 - 18 - 9 = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 3^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to 3^-} \text{ق}(\text{س}) = -27 + 18 + 9 = \text{صفر}$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to 3} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر} = \text{ق}(3)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند س = ٣

نبحث اشتقاق س = ٣

$\text{ق}'_{+}(3) = 27 - 12 - 3 = 8$

$\text{ق}'_{-}(3) = -27 + 12 + 3 = -8$

$\Leftarrow$ ق'(٣) غير موجودة

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س}^2 - 4\text{س} - 3 & \text{س} > 3 \\ -3\text{س}^2 + 4\text{س} + 3 & \text{س} < 3 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = 3 \end{cases}$$

مثال + ٢١٥ صيفي (٧علامات)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س}^2 - 5\text{س} + 4|}{\text{س}(\text{س}-1)}$ حيث

$\text{س} \in (1 ، 5]$ فجد ق'(س)

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(٤ - \text{س})(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} - ١)} & ١ < \text{س} < ٤ \\ \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} - ١)} & ٤ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{-\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - \text{س}} & ١ < \text{س} < ٤ \\ \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - \text{س}} & ٤ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}^٢ - \text{س})(-٢\text{س} + ٥) - (-\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٤)(٢\text{س} - ١)}{(\text{س}^٢ - \text{س})^٢} & ١ < \text{س} < ٤ \\ \dfrac{(\text{س}^٢ - \text{س})(٢\text{س} - ٥) - (\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤)(٢\text{س} - ١)}{(\text{س}^٢ - \text{س})^٢} & ٤ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$

ق'(٥) غير موجودة لأن ٥ طرف

نبحث اتصال س = ٤

$$\text{ق}(٤) = \frac{١٦ - ٢٠ + ٤}{١٦ - ٤} = \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٤^+} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٤^-} \text{ق}(\text{س}) = \frac{-١٦ + ٢٠ - ٤}{١٦ - ٤} = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٤} \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر} = \text{ق}(٤)$$

⇐ ق متصل عند س = ٤

نبحث اشتقاق س = ٤

$$\text{ق}'_-(٤) = \frac{(١٦ - ٤)(-٨ + ٥) - (-١٦ + ٢٠ - ٤)(٨ - ١)}{(١٦ - ٤)^٢}$$

$$= \frac{-١٢ \times ٣ - \text{صفر}}{(١٢)^٢}$$

$$= \frac{٣٦}{١٤٤}$$

$$\text{ق}'_+(٤) = \frac{(١٦ - ٤)(٨ - ٥) - (١٦ - ٢٠ + ٤)(٨ - ١)}{(١٦ - ٤)^٢}$$

$$= \frac{١٢ \times ٣ - \text{صفر}}{(١٢)^٢}$$

$$= \frac{٣٦}{١٤٤}$$

⇐ ق'(٤) غير موجودة

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}^٢ - \text{س})(-٢\text{س} + ٥) - (-\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٤)(٢\text{س} - ١)}{(\text{س}^٢ - \text{س})^٢} & ١ < \text{س} < ٤ \\ \dfrac{(\text{س}^٢ - \text{س})(٢\text{س} - ٥) - (\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤)(٢\text{س} - ١)}{(\text{س}^٢ - \text{س})^٢} & ٤ < \text{س} < ٥ \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = ٤ ، ٥ \end{cases}$$

مثال

إذا كان ق(س) = |س| (س² + ٦س) فابحث في قابلية الاشتقاق ثم الاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح .

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٣ + ٦\text{س}^٢ & \text{س} \geq \text{صفر} \\ -\text{س}^٣ - ٦\text{س}^٢ & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^٢ + ١٢\text{س} & \text{س} > \text{صفر} \\ -٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

نبحث اتصال س = صفر

ق(٠) = صفر

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = صفر

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = صفر

⟸ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = صفر = ق(٠)

⟸ ق متصل عند س = صفر

نبحث اشتقاق ق عند س = صفر

ق̄(٠) = صفر   ق̄(٠)$^+$ = صفر

⟸ ق̄(٠) = صفر موجودة

⟸ ق̄(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ١٢س & س \geq صفر \\ -٣س^٢ - ١٢س & س < صفر \end{cases}$

٢٠١٠ صيفي

أي من الاقترانات الآتية يعتبر مثالاً لاقتران متصل وغير قابل للاشتقاق عند س = صفر

أ) [س] $\boxed{\text{ب) } |س|}$

ج) س |س| د) $\frac{س}{٢}$

توضيح

ق(س) = $\begin{cases} س & س > ٠ \\ -س & س \leq ٠ \end{cases}$

ق̄(س) = $\begin{cases} ١ & س > ٠ \\ -١ & س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \end{cases}$

* ايجاد الثوابت والمشتقة موجودة في الاقتران المتشعب:

مثال + ٢٠١٤ صيفي (٥علامات)

إذا كان ق(س) = { أ س^{2} - ب س ، س ≤ ٢
؛ ٤ - ب س^{3} + أ س ، س > ٢ }

وكان ق قابل للاشتقاق عند س = ٢ فجد قيمة أ ، ب .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ ق متصل عند ٢

⇐ نها$_{س \to 2^-}$ ق(س) = نها$_{س \to 2^+}$ ق(س)

٤أ - ٢ب = ٤ - ٨ب + ٢أ

٢أ + ٦ب = ٤ ← (١)

ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ ق$'$(٢) موجودة

⇐ ق$'$(٢$^-$) = ق$'$(٢$^+$)

ق$'$(س) = { ٢أ س - ب ، س < ٢
؛ -٣ب س^{2} + أ ، س > ٢ }

٤أ - ب = -١٢ب + أ

٣أ + ١١ب = صفر ← (٢)

٢أ + ٦ب = ٤ ×٣

٣أ + ١١ب = صفر ×٢

~~٦أ~~ + ١٨ب = ١٢

- ~~٦أ~~ + ٢٢ب = صفر

-٤ب = ١٢

⇐ ب = -٣

٢أ + ٦×-٣ = ٤

٢أ - ١٨ = ٤

٢أ = ٢٢

⇐ أ = ١١

مثال

إذا كان ق(س) = { س^{3} - ٤س ، س > -٢
؛ ٢س + أ ، س ≤ -٢ }

وكان ق قابل للاشتقاق عند س = -٢ فجد قيمة أ .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = -٢ ⇐

ق متصل عند س = -٢ ⇐

نها$_{س \to -2^+}$ ق(س) = نها$_{س \to -2^-}$ ق(س)

-٨ + ٨ = -٤ + أ

صفر = -٤ + أ

٤ = أ

مثال

إذا كان ق(س) = { س^{2} ، س ≤ ١
؛ ٢س + أ ، س > ١ }

وكان ق قابل للاشتقاق عند س = ١ فجد قيمة أ .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ⇐

ق متصل عند س = ١ ⇐

نها$_{س \to 1^-}$ ق(س) = نها$_{س \to 1^+}$ ق(س)

١ = ٢ + أ

-١ = أ

مثال

إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≤ جـ
ل′(جـ) (س − جـ) ، س > جـ

ق متصل عند جـ ، ل قابل للاشتقاق عند جـ ، أثبت أن ق قابل للاشتقاق عند جـ ، وجد ق′(جـ)

الحل:

ق متصل عند جـ من المعطيات

ق′−(س) = ل′(س)

⇐ ق′−(جـ) = ل′(جـ)

ق′+(س) = ل′(جـ)

⇐ ق′+(جـ) = ل′(جـ)

بما أن ق′−(جـ) = ل′(جـ) = ق′+(جـ)

⇐ ق قابل للاشتقاق عند جـ

⇐ ق′(جـ) = ل′(جـ)

مثال

إذا كان ق(س) = { أس² + ب س ، س ≤ ١
٤ − ب س² + أ س ، س > ١

وكانت ق′(١) موجودة جد قيمة كل من أ ، ب .

الحل:

ق′(١) موجودة ⇐ ق متصل عند س = ١

⇐

نها ق(س) = نها ق(س)
س ← ١ −   س ← ١ +

~~أ~~ + ب = ٤ − ب + ~~أ~~

٢ب = ٤

⇐ ب = ٢

ق′(س) = { ٢أس + ٢ ، س ≤ ١
−٤س + أ ، س > ١

ق′(١) موجودة ⇐

ق′−(١) = ق′+(١)

٢أ + ٢ = −٤ + أ

٢أ − أ = −٤ − ٢

أ = −٦

٢٠١٢ صيفي

إذا كان ق(س) = { أس² + ب س − ٦ ، س < ٢
٥س + ٢ب ، س ≥ ٢

قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند س = ٢ ⇐

ق متصل عند س = ٢ ⇐

نها ق(س) = نها ق(س)
س ← ٢ −   س ← ٢ +

٤أ + ~~٢ب~~ − ٦ = ١٠ + ~~٢ب~~

٤أ − ٦ = ١٠

٤أ = ١٦

⇐ أ = ٤

ق′(س) = { ٨س + ب ، س < ٢
٥ + ٢ب ، س ≥ ٢

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

ه قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐

$$\bar{\text{ه}}_{-}(٢) = \bar{\text{ه}}_{+}(٢)$$

$$١٦ + \text{ب} = ٥ + ٢\text{ب}$$

$$١٦ - ٥ = ٢\text{ب} - \text{ب}$$

$$١١ = \text{ب}$$

٢.١٣ شتوي

إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^{٣} - ٢\text{ب}\,\text{س} & \text{س} \geq ١ \\ \text{أ}\,\text{س}^{٢} - ٦\text{ب}\,\text{س} - ٨ & \text{س} < ١ \end{cases}$

اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ١ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل:

ه قابل للاشتقاق عند س = ١ ⇐

ه متصل عند س = ١ ⇐

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ه}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ه}(\text{س})$$

$$\cancel{\text{أ}} - ٢\text{ب} = \cancel{\text{أ}} - ٦\text{ب} - ٨$$

$$٤\text{ب} = -٨$$

$$\Leftarrow \text{ب} = -٢$$

$$\bar{\text{ه}}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٤ & \text{س} \geq ١ \\ ٢\text{أ}\,\text{س} + ١٢ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

ه قابل للاشتقاق عند س = ١ ⇐

$$\bar{\text{ه}}_{+}(١) = \bar{\text{ه}}_{-}(١)$$

$$٣\text{أ} + ٤ = ٢\text{أ} + ١٢$$

$$٣\text{أ} - ٢\text{أ} = ١٢ - ٤$$

$$\text{أ} = ٨$$

٢.١٤ شتوي

إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^{٣} + \text{ب}\,\text{س} & \text{س} < ٢ \\ \text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٩\text{ب}\,\text{س} - ١٢ & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\bar{\text{ه}}(٢)$ موجودة فجد قيمة كلا من أ ، ب .

الحل:

$\bar{\text{ه}}(٢)$ موجودة ⇐ ه متصل عند ٢ ⇐

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ه}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ه}(\text{س})$$

$$٨\text{أ} + ٢\text{ب} = ٤\text{أ} + ١٨\text{ب} - ١٢$$

$$٤\text{أ} - ١٦\text{ب} = -١٢ \longleftarrow (١)$$

$$\bar{\text{ه}}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب} & \text{س} < ٢ \\ ٢\text{أ}\,\text{س} + ٩\text{ب} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$\bar{\text{ه}}(٢)$ موجودة ⇐

$$\bar{\text{ه}}_{-}(٢) = \bar{\text{ه}}_{+}(٢)$$

$$١٢\text{أ} + \text{ب} = ٤\text{أ} + ٩\text{ب}$$

$$٨\text{أ} - ٨\text{ب} = \text{صفر} \longleftarrow (٢)$$

$$٤\text{أ} - ١٦\text{ب} = -١٢$$

$$٨\text{أ} - ٨\text{ب} = \text{صفر} \quad \times ٢$$

$$٤\text{أ} - ١٦\text{ب} = -١٢$$

$$١٦\text{أ} - ١٦\text{ب} = \text{صفر} \quad -$$

$$-١٢\text{أ} = -١٢ \Leftarrow \text{أ} = ١$$

$$٨ \times ١ - ٨\text{ب} = \text{صفر}$$

$$٨ = ٨\text{ب}$$

$$\Leftarrow \text{ب} = ١$$

٢٠١٠ شتوي

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ وكان ٣ ق(٢) = ٩ وكانت نهـا (س←٢) ل ق(س) = ٤ فإن قيمة ل =

أ) ١ ب) $\boxed{\frac{٤}{٣}}$ جـ) $\frac{٤}{٩}$ د) $\frac{٢}{٣}$

الحل:

ق قابل للاشتقاق عند ٢ ⇐ ق متصل عند ٢ ⇐

ق(٢) = نهـا (س←٢) ق(س)

من المعطيات ق(٢) = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

الآن

نهـا (س←٢) ل ق(س) = ٤

ل × نهـا (س←٢) ق(س) = ٤

ل × ٣ = ٤ ⇐ ل = $\frac{٤}{٣}$

٢٠١٦ صيفي

إذا كان ق(س) = { أ س² + ٤ب س − ٨ ، س > ١
أ س³ − ب س + ٢ ، س ≤ ١

وكانت قَ(١) موجودة فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل:

بما أن قَ(١) موجودة ⇐ ق متصل عند س = ١ ⇐

نهـا (س←١+) ق(س) = نهـا (س←١−) ق(س)

~~أ~~ + ٤ب − ٨ = ~~أ~~ − ب + ٢

٥ب = ١٠

ب = ٢

قَ(س) = { ٢أ س + ٨ ، س > ١
٣أ س² − ٢ ، س ≤ ١

قَ(١) موجودة ⇐

قَ+(١) = قَ−(١)

٢أ + ٨ = ٣أ − ٢

٨ + ٢ = ٣أ − ٢أ

١٠ = أ

٢٠١٨ شتوي قديم

إذا كان ق(س) = { أ س² + ب س ، س ≥ ٢
ب س³ + أ س + ٨ ، س < ٢

وكانت قَ(٢) موجودة فجد قيمة أ ، ب

الحل:

ق(٢) موجودة ⇐ ق متصل عند ٢

⇐ نهـا (س←٢+) ق(س) = نهـا (س←٢−) ق(س)

٤أ + ٢ب = ٨ب + ٢أ + ٨

٢أ − ٦ب = ٨ ← ①

قَ(س) = { ٢أ س + ب ، س ≥ ٢
٣ب س² + أ ، س < ٢

قَ(٢) موجودة ⇐

قَ+(٢) = قَ−(٢)

٤أ + ب = ١٢ب + أ

٣أ − ١١ب = صفر ← ②

×٣ ٢أ − ٦ب = ٨

×٢ ٣أ − ١١ب = صفر

~~٦أ~~ − ١٨ب = ٢٤

− ~~٦أ~~ − ٢٢ب = صفر

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) العنوان (قواعد الاشتقاق (٢)) ماجستير رياضيات

٤ب - ٢٤

⇐ ب

٣م - ١١ × ٦ = صفر

٣م - ٦٦ = صفر

٣م = ٦٦

م = $\frac{٦٦}{٣}$ ⇐ م = ٢٢