عصام محمد الشيخ)
ماجستير رياضيات

مفهوم النهاية

رياضيات (الأدبي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (مفهوم النهاية) ماجستير رياضيات

* نها ف(س) : هي القيمة التي سيقترب منها الاقتران ف(س) كلما اقتربت س من العدد م.
س ← م

* س ← م+ : س تؤول (تقترب) إلى العدد م من جهة اليمين

* س ← م- : س تؤول (تقترب) إلى العدد م من جهة اليسار

* س ← م : س تؤول (تقترب) إلى العدد م من جهة اليمين واليسار.

توضيح مفهوم النهاية وايجادها من خلال الجدول

مثال

ليكن ف(س) = ٣ س + ١ ، ادرس سلوك الاقتران ف(س) عندما س تقترب من العدد ٢.

الحل: الأعداد الأقل من ٢ | الأعداد الأكبر من ٢

	جهة اليسار			②	جهة اليمين		
س	١٫٩	١٫٩٩	١٫٩٩٩		٢٫٠٠١	٢٫٠١	٢٫١
ف(س)	٤٫٨	٤٫٩٨	٤٫٩٩٨		٥٫٠٠٢	٥٫٠٢	٥٫٢

نلاحظ أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين كلما اقترب الاقتران ف(س) من القيمة ٥ (نها ف(س) = ٥)
س ← ٢+

نلاحظ أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليسار كلما اقترب الاقتران ف(س) من القيمة ٥ (نها ف(س) = ٥)
س ← ٢-

نقول ←

نها ف(س) = ٥
س ← ٢

أي النهاية موجودة.

ملاحظات

① نها ف(س) = نها ف(س) ⇔ نها ف(س) موجودة
س ← م+ س ← م- س ← م

② نها ف(س) ≠ نها ف(س) ⇔ نها ف(س) غير موجودة
س ← م+ س ← م- س ← م

مثال

من خلال الجدول التالي أجب عن الأسئلة

				②			
س	١٫٩ -	١٫٩٩ -	١٫٩٩٩ -		٣٫٠٠١ -	٣٫٠١ -	٣٫١ -
ف(س)	٥٫٧ -	٥٫٩٧ -	٥٫٩٩٧ -		٦٫٠٠٣ -	٦٫٠٣ -	٦٫٣ -

① جد نها ف(س)
س ← ٣+

الجواب -٦

② جد نها ف(س)
س ← ٣-

الجواب -٦

③ جد نها ف(س)
س ← ٣

الحل:

نها ف(س) = -٦ ، نها ف(س) = -٦
س ← ٣- س ← ٣+

⇐ نها ف(س) = -٦
س ← ٣

مثال

ليكن $ق(س) = \frac{س^2 - ١}{س - ١}$

١) ما مجال الاقتران ق ؟

٢) ادرس سلوك الاقتران عندما س = ١ .

الحل:

١) مجال الاقتران هو جميع قيم س الحقيقية ما عدا س = ١ $(ح - \{١\})$

٢)

جهة اليمين ← ① → جهة اليسار

س	١و١	١و٠١	١و٠٠١		٠و٩٩٩	٠و٩٩	٠و٩
ق(س)	٢و١	٢و٠١	٢و٠٠١		١و٩٩٩	١و٩٩	١و٩

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} ق(س) = ٢$ ، $\text{نهـا}_{س \to ١^-} ق(س) = ٢$

$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ١} ق(س) = ٢$

٢و٩٩ شتوي

← ٣ →

س	٣و١	٣و٠١	٣و٠٠١		٢و٩٩٩	٢و٩٨	٢و٩
ق(س)	٤و١	٤و٠١	٤و٠٠١		٥و٩٩٩	٥و٩٨	٥و٩

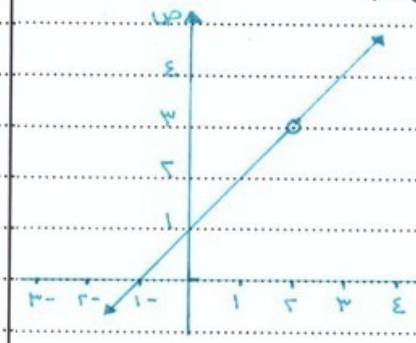
$\text{نهـا}_{س \to ٣^+} ق(س)$

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) غير موجودة

■ توضيح مفهوم النهاية وايجادها من خلال رسمة الاقتران .

مثال

$$ق(س) = \frac{س^2 - س - 2}{س - 2}$$



١) جد ق(٢) .

٢) جد $\lim_{س \to 2^+}$ ق(س) . ٣) جد $\lim_{س \to 2^-}$ ق(س)

٤) جد $\lim_{س \to 2}$ ق(س) .

الحل:

١) ق(س) غير معرف عند س = ٢ لأنه لا يجوز أن نقسم على صفر

⇐ ق(٢) غير موجودة .

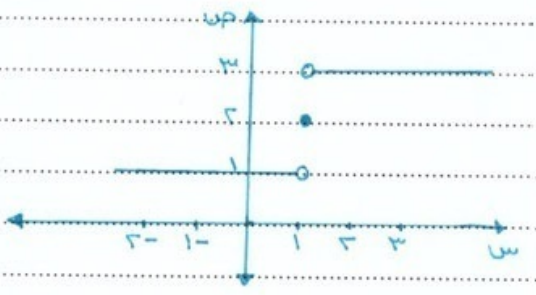
٢) $\lim_{س \to 2^+}$ ق(س) = ٣

٣) $\lim_{س \to 2^-}$ ق(س) = ٣

٤) $\lim_{س \to 2}$ ق(س) = ٣

مثال

$$ق(س) = \begin{cases} ١ & س > ١ \\ ٢ & س = ١ \\ ٣ & س < ١ \end{cases}$$



١) جد ق(١) . ٢) $\lim_{س \to 1^-}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to 1^+}$ ق(س)

٤) $\lim_{س \to 1}$ ق(س)

الحل:

١) ق(١) = ٢

٢) $\lim_{س \to 1^-}$ ق(س) = ١

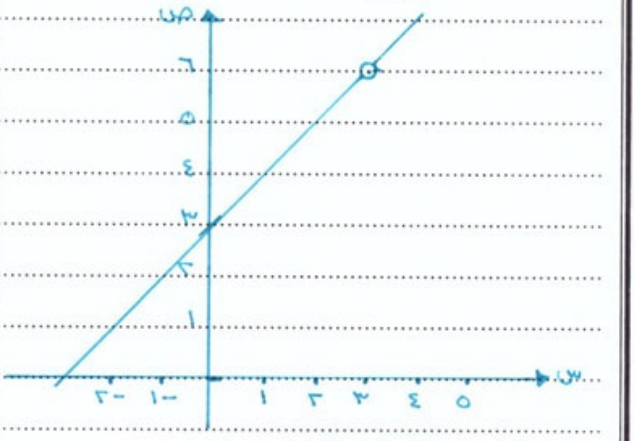
٣) $\lim_{س \to 1^+}$ ق(س) = ٣

٤) $\lim_{س \to 1}$ ق(س) غير موجودة

لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

مثال

$$\text{مر}(س) = \frac{س^2 - 9}{س - 3}$$



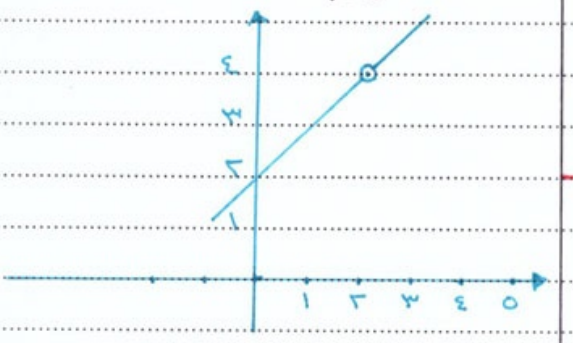
١) جد مر(٣)
٢) جد نهـا مر(س) = -٦
س ← ٣
٣) نهـا مر(س) = +٦
س ← ٣
٤) نهـا مر(س)
س ← ٣

الحل:

١) مر(٣) غير موجودة
٢) نهـا مر(س) = ٦
س ← ٣
٣) نهـا مر(س) = ٦
س ← ٣
٤) نهـا مر(س) = ٦
س ← ٣

مثال

$$\text{مر}(س) = \frac{س^2 - 4}{س - 2}$$



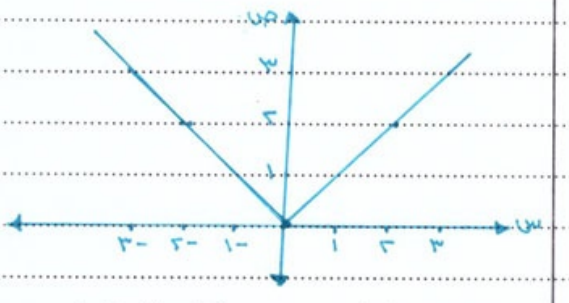
١) جد مر(٢)
٢) نهـا مر(س)
س ← ٢
٣) مر(٢)
٤) نهـا مر(س)
س ← ٣

الحل:

١) مر(٢) غير موجودة
٢) نهـا مر(س) = ٤
س ← ٢
٣) مر(٣) = ٥
٤) نهـا مر(س) = ٥
س ← ٣

مثال

$$\text{مر}(س) = \begin{cases} -س & س < \text{صفر} \\ س & س \geq \text{صفر} \end{cases}$$



١) جد مر(٠)
٢) نهـا مر(س)
س ← ٢
٣) نهـا مر(س)
س ← ٠

الحل:

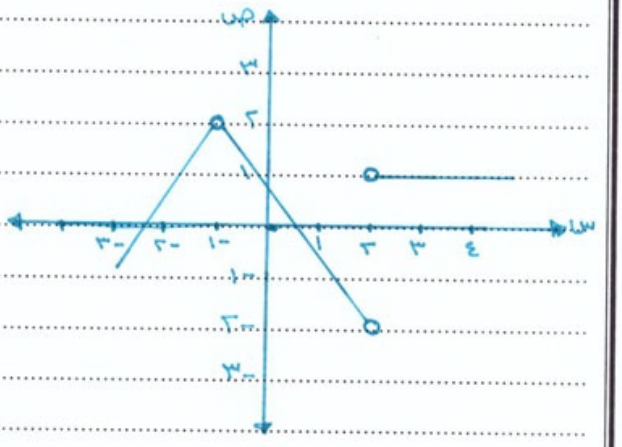
١) ق(٠) = ٠

٢) نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢

٣) نهـا ق(س) = ٠
س ← ٠

مثال

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران
ق جد قيمة ما يلي:



١) نهـا ق(س) ٢) نهـا ق(س)
س ← -١ س ← ٢

٣) نهـا ق(س)
س ← ٢

الحل:

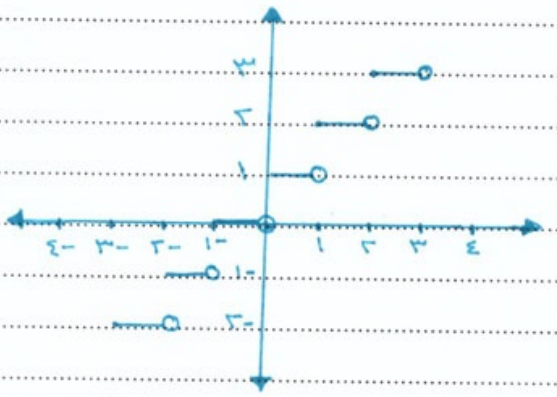
١) نهـا ق(س) = ٣
س ← -١

٢) نهـا ق(س) = غير موجودة
س ← ٢

٣) نهـا ق(س) = ١
س ← ٣

مثال

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران
ق جد قيمة ما يلي:



١) نهـا ق(س) ٢) نهـا ق(س)
س ← ٠,٥ س ← ٢+

٣) نهـا ق(س) ٤) نهـا ق(س)
س ← ٢- س ← ٢

الحل:

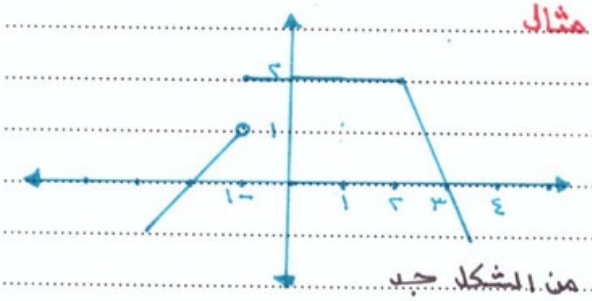
١) نهـا ق(س) = ١
س ← ٠,٥

٢) نهـا ق(س) = ٣
س ← ٢+

٣) نهـا ق(س) = ٢
س ← ٢-

٤) نهـا ق(س) = غير موجودة.
س ← ٢

مثال



من الشكل جد

رياضيات (الأدبي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (مفهوم النهاية) ماجستير رياضيات

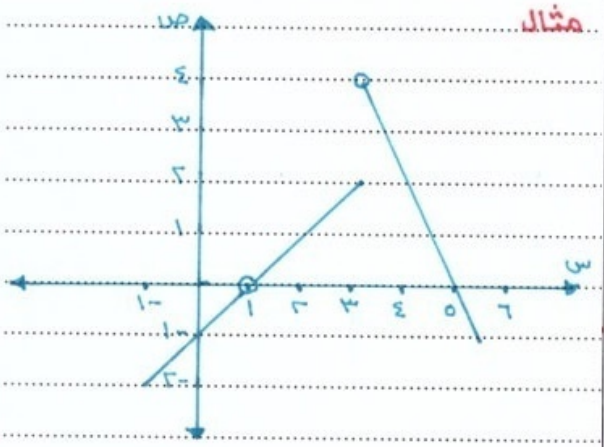
١) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ ٢) $\lim_{س \to ١} ف(س)$

الحل:

١) $\lim_{س \to ٢} ف(س) = ٣$

٢) $\lim_{س \to ١} ف(س) = ٣$

مثال



معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران

ف: ح ← ح

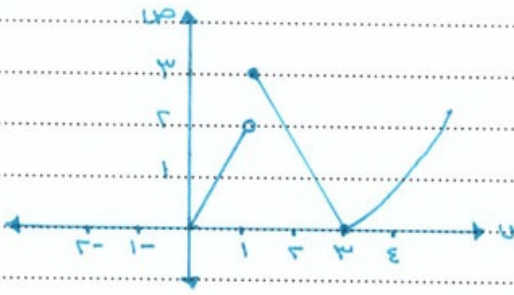
١) $\lim_{س \to ٢} ف(س)$

الحل:

١) $\lim_{س \to ٢} ف(س) = ١$

الأسئلة الوزارية :

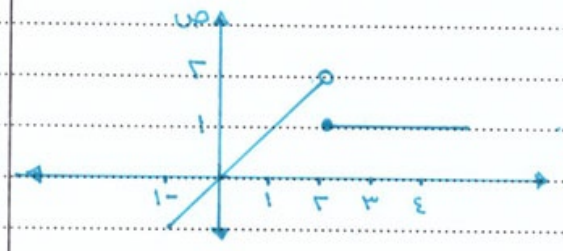
٢٠٠٨ صيفي



نهـا $_{س \to ١^+}$ ق(س)

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣

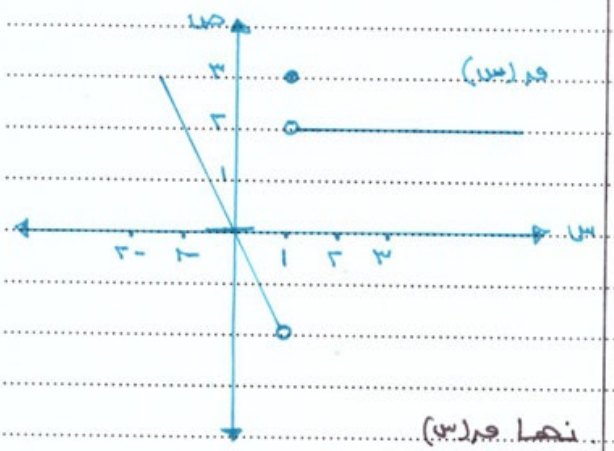
٢٠٠٩ صيفي



نهـا $_{س \to -٢}$ ق(س)

أ) -٢ ب) ٢ ج) ١ د) غير موجودة

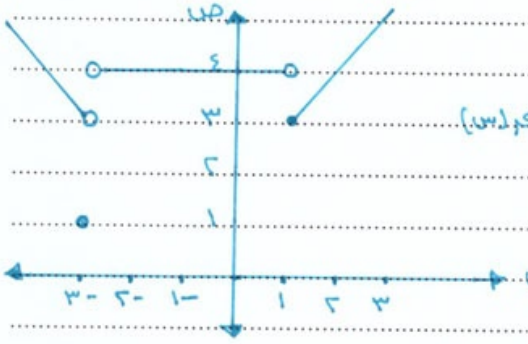
٢٠١١ شتوي



نهـا $_{س \to ١}$ ق(س)

أ) ٢ ب) -٢ ج) ٣ د) غير موجودة

٢٠١٢ شتوي



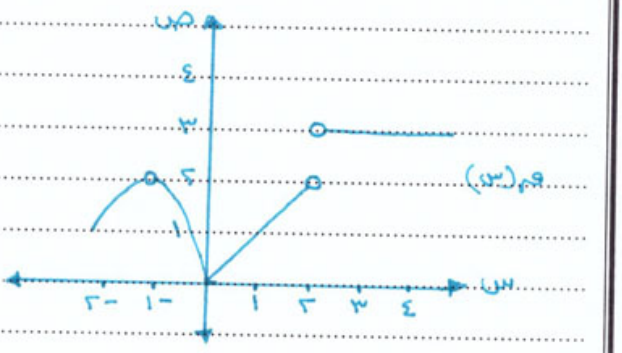
نهـا $_{س \to -٣^+}$ ق(س) =

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١ د) غير موجودة

رياضيات (الأدبي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (مفهوم النهاية) ماجستير رياضيات

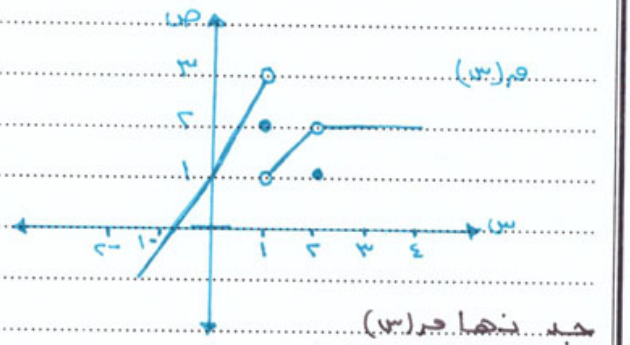
٢٠١٥ شتوي



جد نهـا ق(س)
س←٢+

الحل :

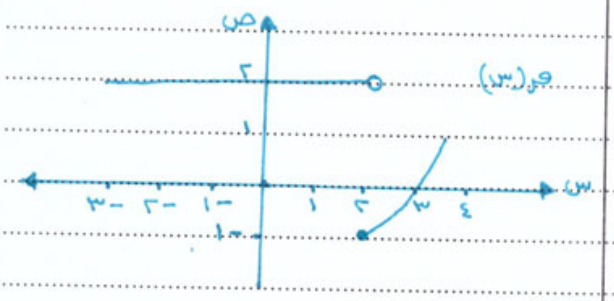
٢٠١٥ صيفي



جد نهـا ق(س)
س←١-

الحل :

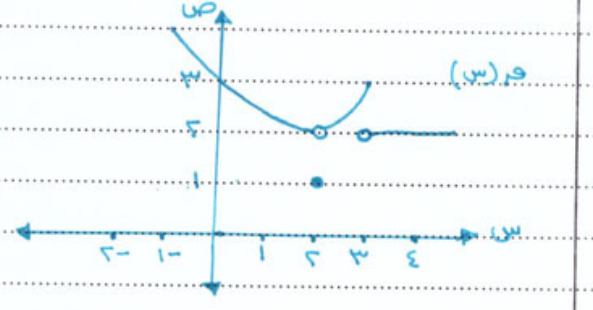
٢٠١٦ شتوي



جد نهـا ق(س)
س←٢+

الحل :

٢٠١٦ صيفي



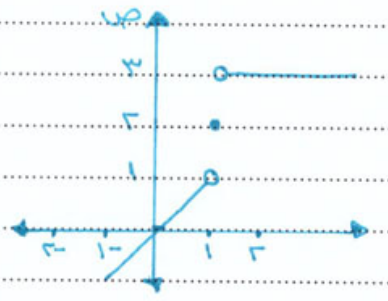
جد نهـا ق(س)
س←٢+

الحل :

رياضيات (الادبي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (مفهوم النهاية) ماجستير رياضيات

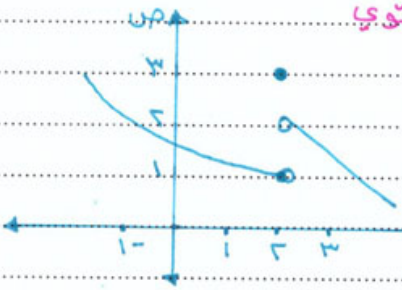
٢٠١٢ صيفي



نهـا ق(س)
س ← ١+

أ) ٢ ب) ٣ ج) ١ د) غير موجودة

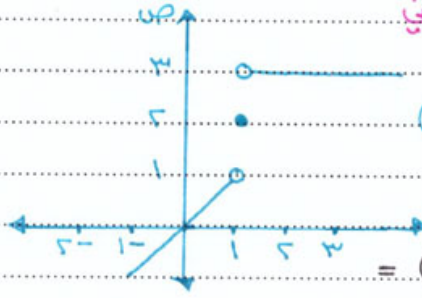
٢٠١٣ شتوي



نهـا ق(س) =
س ← ٢-

أ) ٢ ب) ١ ج) ٣ د) غير موجودة

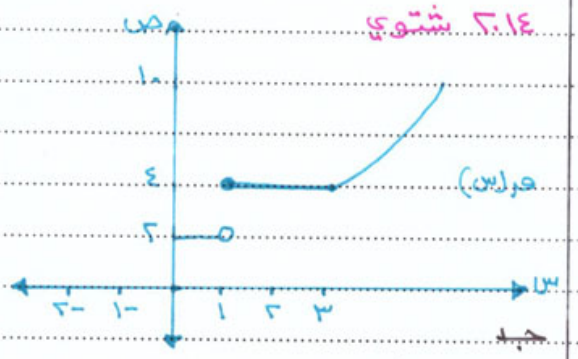
٢٠١٣ صيفي



نهـا ق(س) =
س ← ١+

■ ١ ■ ٢ ■ ٣ ■ غير موجودة

٢٠١٤ شتوي

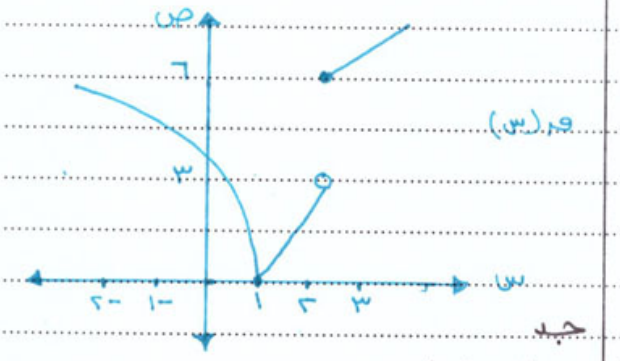


حـ

نهـا ق(س)
س ← ١-

الحل :

مثال ٢٠١٤ صيفي

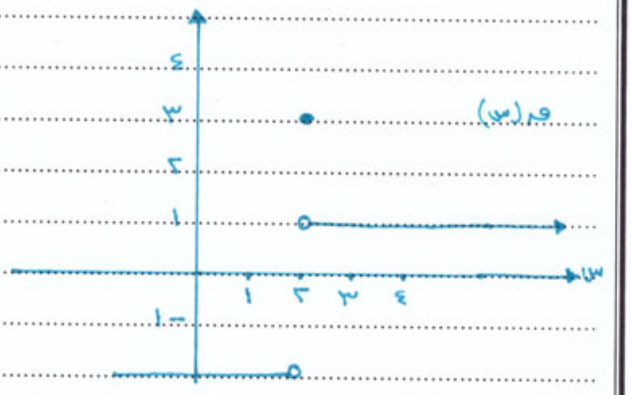


حـ

نهـا ق(س)
س ← ٢+

الحل :

٢٠١٨ شتوي جديد



معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، ما نهـا ق(س) ؟
س←٣

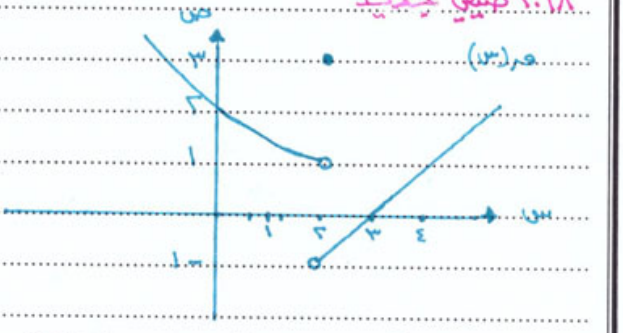
أ) ١ ب) -٢ ج) ٣ د) غير موجودة

الحل:

نهـا ق(س) = ١ ، نهـا ق(س) = -٢
س←٣+ س←٣-

∴ نهـا ق(س) غير موجودة .
س←٣

٢٠١٨ صيفي جديد



معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ما نهـا ق(س) ؟
س←٣+

أ) ١ ب) -١ ج) ٣ د) غير موجودة

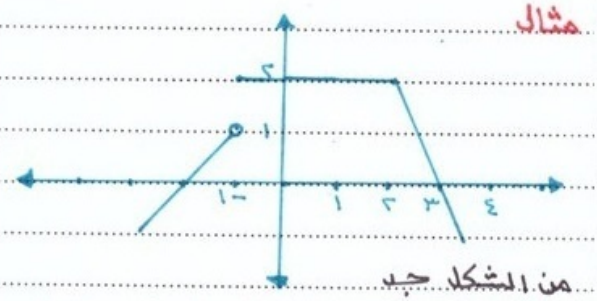
رياضيات (الأدبي) الوحدة (النهايات والاتصال) عصام محمد الشيخ

الفصل (١) العنوان (مفهوم النهاية) ماجستير رياضيات

* ايجاد قيم س عندما تكون النهاية غير موجودة

وايجاد قيم س عندما تكون النهاية تساوي عدد ما

مثال



من الشكل جـ

٣) قيم P حيث نهـا ق(س) غير موجودة
س←P

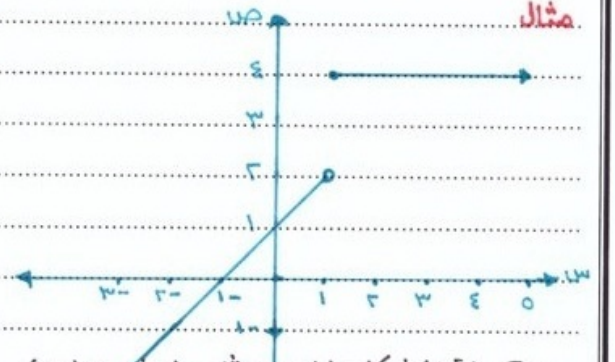
٤) قيم ب حيث نهـا ق(س) = صفر
س←ب

الحل:

٣) P = {-١}

٤) ب = {-٢ ، ٣}

مثال



معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق حيث

١) قيم الثابت P حيث نهـا ق(س) = -١
س←P

٢) قيم الثابت ب حيث نهـا ق(س) = صفر
س←ب

٣) قيم الثابت جـ حيث نهـا ق(س) غير موجودة
س←جـ

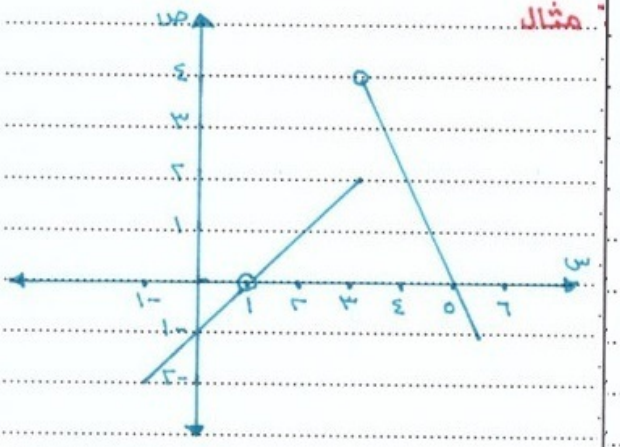
الحل:

١) P = {-٢}

٢) ب = {-١}

٣) جـ = {١}

مثال



معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق حيث

٢) قيم الثابت P حيث نهـا ق(س) = صفر
س←P

٣) قيم الثابت ب حيث نهـا ق(س) غير موجودة
س←ب

الحل:

٢) P = {١ ، ٥}

٣) ب = {٣}