معدل التغير في الاقتران :

١) مقدار التغير في السينات $= \Delta\text{س} = \text{س}_{٢} - \text{س}_{١}$

٢) مقدار التغير في الاقتران $= \Delta\text{ص} = \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}$

$= \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})$

٣) معدل التغير $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$= \dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

امثلة :

١) احسب معدل التغير اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢$ عندما تتغير (س) من (١) الى (٥)

الحل :

معدل التغير $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$= \dfrac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)}{٥ - ١} = \dfrac{(٢٥ + ٢) - (١ + ٢)}{٥ - ١} = \dfrac{٢٤}{٤}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} + ١}$ عندما تتغير (س) من (٤) الى (صفر) ، احسب معدل التغير

الحل :

معدل التغير $= \dfrac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(٤)}{٠ - ٤} = \dfrac{\sqrt{١} - \sqrt{٩}}{-٤} = \dfrac{\cancel{-}٢}{\cancel{-}٤} = \dfrac{١}{٢}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢\text{س} - ١| & ، \ \text{س} \le ٢ \\ [\text{س} + ١] & ، \ \text{س} > ٢ \end{cases}$

احسب معدل التغير عندما $\text{س}_{١} = ٠$ ، $\Delta\text{س} = ٩$

الحل :

$\text{س}_{٢} = \Delta\text{س} + \text{س}_{١}$

$\text{س}_{٢} = ٩ + ٠ \Rightarrow \text{س}_{٢} = ٩$

معدل التغير $= \dfrac{\text{ق}(٩) - \text{ق}(٠)}{٩ - ٠} = \dfrac{١٠ - ١}{٩} = \dfrac{٩}{٩} = ١$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٥}{\text{س}}$ ، احسب معدل التغير عندما تتغير (س) من $\left(\frac{١}{٢}\right)$ الى (٣)

الحل :

معدل التغير $= \dfrac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\frac{١}{٢})}{٣ - \frac{١}{٢}} = \dfrac{\frac{٥}{٣} - \frac{٥}{\frac{١}{٢}}}{٣ - \frac{١}{٢}} = \dfrac{\frac{٥}{٣} - \frac{١٠}{١}}{٢,٥}\begin{matrix}\times ٣ \\ \times ٣\end{matrix}$

$= \dfrac{\frac{٥}{٣} - \frac{٣٠}{٣}}{٢,٥} = \dfrac{\frac{-٢٥}{٣}}{٢,٥}$

٥) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [٣\text{س}]$ ، $\text{س}_{١} = ٢$ ، $\Delta\text{س} = ٢,٥$ ، احسب مقدار التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س})$

الحل :

$\text{س}_{٢} = \Delta\text{س} + \text{س}_{١} = ٢,٥ + ٢ = ٤,٥$

$\Delta\text{ص} = \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})$

$= \text{ق}(٤,٥) - \text{ق}(٢) = ١٣ - ٦ = ٧$

٦) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٤ & ، \ ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ٤ & ، \ ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$

احسب معدل التغير في $[٠ ، ٤]$

الحل :

$\dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٠)}{٤ - ٠} = \dfrac{(٤) - (-٤)}{٤ - ٠} = \dfrac{٨}{٤} = ٢$

٧) اذا زاد طول ضلع مربع (س) من (٤)سم الى (٦)سم ، احسب الزيادة في مساحة المربع

الحل : $\text{م} = \text{س}^{٢}$ (مساحة المربع)

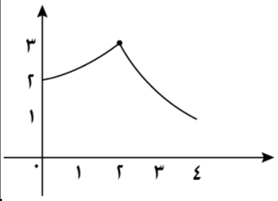
$\text{م}_{١} = \text{س}_{١}^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦$

$\text{م}_{٢} = \text{س}_{٢}^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦$

$\Delta\text{م} = \text{م}_{٢} - \text{م}_{١} = ٣٦ - ١٦ = ٢٠ \text{سم}^{٢}$

٨) من الرسم المجاور ، احسب معدل التغير في $[٠ ، ٤]$

الحل :



$= \dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٠)}{٤ - ٠} = \dfrac{١ - ٢}{٤} = \dfrac{-١}{٤}$

٩) اذا كان معدل تغير $ق(س) = ٤$ في $[٠، ٢]$ وكان $هـ(س) = س^٣ + ٣ق(س)$ ، احسب متوسط تغير $هـ(س)$ في $[٠، ٢]$

الحل :

$$\text{معدل } هـ(س) = \frac{هـ(٢) - هـ(٠)}{٢ - ٠} = \frac{(٨ + ٣ق(٢)) - (٠ + ٣ق(٠))}{٢ - ٠}$$

$$= \frac{٨ + ٣ق(٢) - ٣ق(٠)}{٢ - ٠}$$

$$= \frac{٨}{٢} + ٣\left(\frac{ق(٢) - ق(٠)}{٢ - ٠}\right)$$

$$= ٤ + ٣ \times \text{متوسط } ق(س)$$

$$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$$

واجب

١٠) اذا كان $هـ(س) = ٢ق(س) - \frac{أ}{س + ١}$ وكان معدل $هـ(س)$ في $[٠، ١]$ يساوي (١٦) ، والتغير في $ق(س) = ٥$ فما قيمة (أ)

١١) اذا كان $ق(س) = س^٢ + ٢س + ٤$ ، احسب معدل التغير في $ق(س)$ عندما $س = ١$

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$$

$$= \frac{(١ + هـ)^٢ + ٢(١ + هـ) + ٤ - (١ + ٢ + ٤)}{هـ}$$

$$= \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ + ٢هـ - ٣}{هـ} = \frac{٤هـ}{هـ} + \frac{هـ^٢}{هـ} = ٤ + هـ$$

١٢) يتحرك جسيم في مستوى بياني من النقطة $أ(س، ص)$ الى النقطة $ب(٣، ٣)$ بحيث $\Delta س = ٥$ ، $\Delta ص = ٦$ ، فما احداثيات (أ)

الحل :

$$\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣ - س$$

$$٥ = ٣ - س \leftarrow س = -٢$$

$$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = ٣ - ص$$

$$٦ = ٣ - ص \leftarrow ص = -٣$$

$$أ = (-٢، -٣)$$

١٣) يتحرك جسيم حسب الاقتران $ف(ن) = ن^٢ + ٣ن$ احسب السرعة المتوسطة $[١، ٣]$

الحل :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{١٨ - ٤}{٢} = ٧م / ث$$

١٤) اذا كان $ق(س) = \left(أهـ(س) + ب\right) + (جـس + د)$

اثبت ان معدل التغير $ق = أ \times (\text{معدل } هـ) + جـ$

الحل :

لتكن الفترة $[س_١، س_٢]$

$$\text{معدل التغير } ق = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{\left(أهـ(س_٢) + ب + جـس_٢ + د\right) - \left(أهـ(س_١) + ب + جـس_١ + د\right)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{أهـ(س_٢) - أهـ(س_١) + جـس_٢ - جـس_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{أ\left(هـ(س_٢) - هـ(س_١)\right)}{س_٢ - س_١} + \frac{جـ\cancel{(س_٢ - س_١)}}{\cancel{س_٢ - س_١}}$$

$$= أ \times (\text{معدل } هـ) + جـ$$

١٥) اذا كان $ق(س) = س^٣ + س^٢$ احسب ميل القاطع الواصل بين النقاط $\left(١، ق(١)\right)$ ، $\left(٣، ق(٣)\right)$

الحل :

$$\text{ميل القاطع} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{٣٤}{٢} = ١٧$$

١٦) اذا كان معدل تغير $ق(س)$ في $[١، ٣]$ يساوي (٨) ومعدل تغير $ق$ في $[٣، ٦]$ يساوي (١٣) ، احسب معدل تغير $ق$ في $[١، ٦]$

الحل :

$$\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٨$$

$$ق(٣) - ق(١) = ١٦ \ldots\ldots (١)$$

$$\frac{\text{ق}(٦)-\text{ق}(٣)}{٦-٣}=١٣$$

$$\text{ق}(٦)-\text{ق}(٣)=٣٩\ldots\ldots(٢)$$

$$(١)+(٢)\Leftarrow \text{ق}(٦)-\text{ق}(١)=٥٥$$

اقسم الطرفين على $٦-١$

$$\frac{\text{ق}(٦)-\text{ق}(١)}{٦-١}=\frac{٥٥}{٦-١}$$

معدل التغير في $[١،٦]=١١$

---

١٧) اذا كان $\text{ق}(\text{س})=\text{ظاس}$ اثبت ان معدل التغير عندما تتغير (س) من (س) الى $(\text{س}+\text{هـ})$ يساوي $=\frac{\text{قا}^{٢}\text{س ظاهـ}}{\text{هـ}(١-\text{ظاس ظاهـ})}$

الحل :

$$\text{معدل التغير}=\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\left(\text{ظا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ظاس}\right)$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ظاس}+\text{ظاهـ}}{١-\text{ظاس ظاهـ}}-\frac{\text{ظاس}}{١}\right)$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\times\frac{\left(\text{ظاس}+\text{ظاهـ}-\text{ظاس}+\text{ظا}^{٢}\text{س ظاهـ}\right)}{\left(١-\text{ظاس ظاهـ}\right)}$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\;\frac{\text{ظاهـ}\left(١+\text{ظا}^{٢}\text{س}\right)}{١-\text{ظاهـ ظاس}}=\frac{١}{\text{هـ}}\times\frac{\text{ظاهـ قا}^{٢}\text{س}}{١-\text{ظاهـ ظاس}}$$

تمارين وتدريبات

١) اذا كان $\text{ق}=\text{س}^{٣}-[\tfrac{١}{٢}\text{س}]$ ، احسب معدل التغير اذا كانت $\text{س}_{١}=٢,٤$ ، $\text{س}_{٢}=٢,٣$

الحل :

$$\text{معدل التغير}=\frac{\text{ق}(٢,٣)-\text{ق}(٢,٤)}{٢,٣-٢,٤}$$

$$=\frac{(١٢,١٦٧-١)-(١٣,٨٢٤-١)}{-٠,١}=١٦,٥٧$$

---

٢) اذا كان القاطع المار بالنقاط $(٢،\text{ق}(٢))$ ، $(٣،\text{ق}(٣))$ يصنع زاوية قياسها (١٢٠) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب متوسط التغير اذا تغيرت (س) من $\text{س}=٢$ الى $\text{س}=٣$

الحل :

متوسط التغير = ميل القاطع $=\text{ظا}١٢٠=-\text{ظا}٦٠=-\sqrt{٣}$

---

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $\text{ف}=٢\text{ن}^{٢}-٢\text{ن}+٢٠$ ، احسب السرعة المتوسطة في $[٢،٦]$

الحل :

$$\frac{\text{ف}(٦)-\text{ف}(٢)}{٦-٢}=\frac{(٧٢-١٢+٢٠)-(٨-٤+٢٠)}{٤}$$

$$=\frac{٥٦}{٤}=١٤$$

---

٤) اذا كان $\text{ق}=٢\text{س}^{٢}+\text{س}-١$ وكان معدل تغير ق يساوي (٤) عندما تتغير (س) من $(\text{س}_{١})$ الى $(\text{س}_{١}+١)$ ، فما قيمة $(\text{س}_{١})$

الحل :

$$\text{معدل التغير}=\frac{\text{ق}(\text{س}_{١}+١)-\text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{١}+١-\text{س}_{١}}$$

$$٤=\frac{٢(\text{س}_{١}+١)^{٢}+(\text{س}_{١}+١)-١-(٢\text{س}_{١}^{٢}+\text{س}_{١}-١)}{\cancel{\text{س}_{١}}+١-\cancel{\text{س}_{١}}}$$

$$٤=٢(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)+\text{س}_{١}+\cancel{١}-\cancel{١}-٢\text{س}_{١}^{٢}+\text{س}_{١}-١$$

$$٤=٤\text{س}_{١}+٢\Leftarrow \text{س}_{١}=\frac{١}{٤}$$

---

٥) اذا كان $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^{٢}-٢$ احسب معدل التغير في ق عندما تتغير (س) من (٣) الى $(٣+\text{هـ})$ بدلالة (هـ)

الحل :

$$\text{معدل التغير}=\frac{\text{ق}(٣+\text{هـ})-\text{ق}(٣)}{\text{هـ}}$$

$$=\frac{(٣+\text{هـ})^{٢}-٢-(٣^{٢}-٢)}{\text{هـ}}$$

$$=\frac{\cancel{٩}+٦\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}-\cancel{٢}-\cancel{٩}+\cancel{٢}}{\text{هـ}}=\frac{\cancel{\text{هـ}}(٦+\text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}}=٦+\text{هـ}$$

٦) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤$ وكان معدل التغير ق في $[١،٣]$ ، فما قيمة (أ)

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١}$$

$$\frac{٣}{١} = \frac{(٩\text{أ} - ٩ + ٤) - (\text{أ} - ٣ + ٤)}{٢}$$

$$٦ = ٨\text{أ} - ٦ \leftarrow \text{أ} = \frac{١٢}{٨}$$

---

٧) اذا كان معدل تغير ق في $[-١،٣]$ يساوي (-٤) احسب معدل تغير (هـ) حيث $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}^{٢}$ على $[-١،٣]$

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(-١)}{٣ - (-١)}$$

$$= \frac{\left(٢\text{ق}(٣) - ٣(٣)^{٢}\right) - ٢\left(\text{ق}(-١) - ٣(-١)^{٢}\right)}{٣ - (-١)}$$

$$= \frac{٢\text{ق}(٣) - ٢\text{ق}(-١)}{٤} - \frac{٢٧ - ٣}{٤}$$

$$= ٢\left(\frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(-١)}{٤}\right) - \frac{٢٤}{٤} = ٢ \times -٤ - ٦ = -١٤$$

---

٨) اذا كانت $\text{ف}(\text{ن}) = ٤٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$ ، احسب السرعة المتوسطة اذا تغيرت (ن) من (صفر) الى $(\Delta\text{ن})$ بدلالة $(\Delta\text{ن})$

الحل :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{ف}(\Delta\text{ن}) - \text{ف}(٠)}{\Delta\text{ن}}$$

$$= \frac{٤٠(\Delta\text{ن}) - ٥(\Delta\text{ن})^{٢} - ٠}{\Delta\text{ن}}$$

$$= \frac{\cancel{\Delta\text{ن}}\left(٤٠ - ٥(\Delta\text{ن})\right)}{\cancel{\Delta\text{ن}}} = ٤٠ - ٥(\Delta\text{ن})$$

---

٩) اذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = ٥ - \text{س}^{٢}$ ، احسب معدل التغير في الاقتران ق اذا تغيرت (س) من (٢) الى (٢,١)

الحل :

$$\frac{\text{ق}(٢,١) - \text{ق}(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٠,٥٩ - ١}{٠,١} = \frac{-٠,٤١}{٠,١} = \frac{-٤١}{١٠}$$

---

١٠) اذا كانت $\text{ق} = [\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١]$ ، احسب معدل التغير في الاقتران في $[٣،٥]$

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣} = \frac{١ - ٠}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$$

---

١١) اذا كان ميل القاطع المار بالنقاط $(١،\text{ق}(١))$ ، $(٣،\text{ق}(٣))$ يضع زاوية (١٣٥) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب معدل التغير في ق في $[١،٣]$

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \text{ظا}١٣٥ = -١$$

---

١٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $\text{ف}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} + ٢٠$ ، احسب السرعة المتوسطة على $[١،٤]$

الحل :

$$= \frac{\text{ف}(٤) - \text{ف}(١)}{٤ - ١} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = ١١$$

---

١٣) اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في $[١،٤]$ يساوي (٦) وكانت $\text{هـ}(\text{س}) = ٣\text{س} - \text{ق}(\text{س}) + ٢$ ، احسب معدل التغير هـ(س) في $[١،٤]$

الحل :

$$\text{معدل التغير هـ}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(٤) - \text{هـ}(١)}{٤ - ١}$$

$$= \frac{(١٢ - \text{ق}(٤) + ٢) - (٣ - \text{ق}(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{١٢ - ٣}{٣} - \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٣} = ٣ - ٦ = -٣$$

كن صبوراً , الدروس التي تتعلمها اليوم ستُفيدك غداً.

Be patient
the lessons you
learn today will
benefit you tomorrow

واجب

١٤) اذا كان معدل التغير في ق(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي (٧) وكان معدل التغير على [٥، ٩] يساوي (١٤)، احسب معدل التغير على [٢، ٩]

---

١٥) اذا كان معدل التغير في ق(س) على [١، ٤] يساوي (٣) وكان ق(١) + ق(٤) = ٢ ، احسب معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ق²(س) في [١، ٤]

الحل :

$$\text{معدل تغير هـ(س)} = \frac{\text{هـ(٤)} - \text{هـ(١)}}{٤ - ١} = \frac{\text{ق}^{٢}\text{(٤)} - \text{ق}^{٢}\text{(١)}}{٤ - ١}$$

$$= \frac{\text{ق(٤)} - \text{ق(١)}}{٣} \times (\text{ق(٤)} - \text{ق(١)}) = ٣ \times ٢ = ٦$$

---

١٦) اذا كان القاطع المار بالنقاط (١، ق(١)) ، (٢، ٤) الواقعين على المنحنى يصنع زاوية قياسها $\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب ق(١)

الحل :

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(}-١\text{)}}{٢ - ١}$$

$$\text{ظا}\frac{٣\pi}{٤} = \frac{٤ - \text{ق(١)}}{١}$$

$$-١ = ٤ - \text{ق(١)} \leftarrow \text{ق(١)} = ٥$$

---

١٧) اذا كان ق(س) = $(\text{س}^{٢} + \text{س})^{-١}$ وكان مقدار التغير عندما تتغير (س) من (١) الى ($\text{س}_{٢}$) يساوي $\left(\frac{-١}{٣}\right)$ ، فما قيمة ($\text{س}_{٢}$) علما $\text{س}_{٢} > ٠$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١}) = \frac{-١}{٣} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق(١)} = \frac{-١}{٣}$$

$$(\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢})^{-١} - (٢)^{-١} = \frac{-١}{٣}$$

$$\frac{١}{\text{س}^{٢} + \text{س}} - \frac{١}{٢} = \frac{-١}{٣} \Leftarrow \frac{١}{\text{س}^{٢} + \text{س}} = \frac{١}{٦}$$

$$\text{س}^{٢} + \text{س} = ٦ \Leftarrow \text{س}^{٢} + \text{س} - ٦ = ٠$$

$$(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢) = ٠$$

$$\text{س} = -٣ \text{ ✗} \quad ، \quad \text{س} = ٢ \text{ ✓}$$

تعريف المشتقة الاولى :

ملاحظات :

١) يرمز للمشتقة الاولى عند (س) بالرمز ق′(س) او $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ او ص′ او $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ق(س)

٢) لا يوجد مشتقة عند اطراف الفترات لأنه عند الطرف نستطيع ان نرسم اكثر من مماس

٣) اذا كانت ق′(س) موجودة يكون الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = أ

٤) دائما مجال ق′(س) عبارة عن فترة مفتوحة

٥) ق′(س) موجودة لكل س ∈ (أ، ب) اذن ق قابل للاشتقاق على (أ، ب)

المشتقة الاولى باستخدام التعريف :

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{نهاية متوسط التغير} = \text{نها}\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}}$

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

٣) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س} + \text{هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$

٤) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\triangle\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق(س} + \triangle\text{س)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$

٥) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(أ)}}{\text{ع} - \text{أ}}$

يجب أن تمتلك في عقلك ثقافة النجاح

قبل أن تحاول تحقيق النجاح في حياتك

امثلة :

١) اذا كــــان $\text{ق}(\text{س}) = \text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥}$ ، احســــب $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف للمشتقة

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{٢ع}^{\text{٢}} + \text{٢ع} + \text{٥}) - (\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢}(\text{ع}^{\text{٢}} + \text{س}^{\text{٢}})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢}\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢}\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \text{٢} = \text{٤س} + \text{٢}$$

---

٢) اذا كــــان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + \text{٣}}$ ، احســــب $\text{ق}'(\text{١})$ باستخدام التعريف

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{١}) = \underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع}) - (\text{١})}{\text{ع} - \text{١}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع} + \text{٣}} - \text{٢}}{\text{ع} - \text{١}} \times \frac{\sqrt{\text{ع} + \text{٣}} + \text{٢}}{\sqrt{\text{ع} + \text{٣}} + \text{٢}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع} + \text{٣} - \text{٤}}{(\text{ع} - \text{١})(\text{٢} + \text{٢})} = \underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{ع} - \text{١}}}{\cancel{(\text{ع} - \text{١})}\,(\text{٤})} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$$

---

٣) اذا كــــان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{١}}$ ، احســــب $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{ع} - \text{١}} - \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{١}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \text{١} - \text{١}(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع} - \text{١})(\text{س} - \text{١})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \text{١} - \text{ع} + \text{١}}{(\text{ع} - \text{١})(\text{س} - \text{١})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= -\text{١}\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{(\text{ع} - \text{١})(\text{س} - \text{١})} = \frac{-\text{١}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}}$$

واجب

٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[\text{٣}]{\text{٥س} + \text{٣}}$ ، احسب $\text{ق}'(\text{١})$ باستخدام التعريف للمشتقة

---

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} + \text{١} & ، \quad \text{س} \leq \text{١} \\ \text{٢س} & ، \quad \text{س} > \text{١} \end{cases}$

احسب $\text{ق}'(\text{١})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

لان س = ١ نقطة تحول نأخذ المشتقة من اليمين واليسار

$$\text{ق}'_{+}(\text{١}) = \underset{\text{ع}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{١})}{\text{ع} - \text{١}} = \underset{\text{ع}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ع} - \text{٢}}{\text{ع} - \text{١}} = \text{٢}$$

$$\text{ق}'_{-}(\text{١}) = \underset{\text{ع}\to\text{١}^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{١})}{\text{ع} - \text{١}} = \underset{\text{ع}\to\text{١}^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{\text{٢}} + \text{١} - \text{٢}}{\text{ع} - \text{١}} = \text{٢}$$

بما ان $\text{ق}'_{+}(\text{١}) = \text{ق}'_{-}(\text{١}) = \text{٢}$ (موجودة)

واجب

٦) اذا كــــان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٥} & ، \quad \text{س} > \text{٢} \\ \text{٩س} - \text{٢} & ، \quad \text{س} \leq \text{٢} \end{cases}$

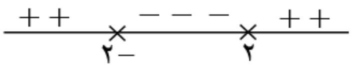
احسب $\text{ق}'(\text{٣})$ باستخدام التعريف

---

٧) اذا كــان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}|$ ، احســب $\text{ق}'(\text{٢})$ باستخدام التعريف

الحل :

نعيد التعريف $|\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}|$



$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{٢} ، -\text{٢}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} - \text{٤} & ، \quad \text{س} < -\text{٢} \\ \text{٤} - \text{س}^{\text{٢}} & ، \quad -\text{٢} \leq \text{س} \leq \text{٢} \\ \text{س}^{\text{٢}} - \text{٤} & ، \quad \text{س} > \text{٢} \end{cases}$$

$$\text{ق}'_{+}(\text{٢}) = \underset{\text{ع}\to\text{٢}^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{\text{٢}} - \text{٤} - \text{٠}}{\text{ع} - \text{٢}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{٢}^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع} - \text{٢})(\text{ع} + \text{٢})}{\text{ع} - \text{٢}} = \text{٤}$$

$$ق'_-(٢) = \lim_{ع \to ٢^-} \frac{٤ - ع^{٢} - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^-} \frac{\overset{-١}{\cancel{(٢ - ع)}}\,(٢ + ع)}{\cancel{ع - ٢}} = -٤$$

$ق'_+(٢) \neq ق'_-(٢) \Leftarrow ق'(٢)$ غير موجودة

واجب

٨) $ق(س) = |س - ١| - |س|$ ، احسب $ق'(س)$ عند النقطة $(١،٠)$ باستخدام التعريف للمشتقة

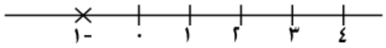
---

٩) $ق(س) = [س + ١]$ باستخدام التعريف للمشتقة ، احسب : أ) $ق'(٣,٥)$ ب) $ق'(٣)$

الحل :

نعيد التعريف اكبر عدد صحيح

$[س + ١]$ ل $= ١$ / س $= -١$



$$ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad ٢ \leq س < ٣ \\ ٤ & ، \quad ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$$

أ) $$ق'(٣,٥) = \lim_{ع \to ٣,٥} \frac{ق(ع) - ق(٣,٥)}{ع - ٣,٥}$$

$$= \lim_{ع \to ٣,٥} \frac{٤ - ٤}{ع - ٣,٥} = ٠$$

ب) $$ق'_+(٣) = \lim_{ع \to ٢^+} \frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣} = \lim_{ع \to ٣^+} \frac{٤ - ٤}{ع - ٣} = ٠$$

$$ق'_-(٣) = \lim_{ع \to ٣^-} \frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣}$$

$$= \lim_{ع \to ٣^-} \frac{٣ - ٤}{ع - ٣} = \frac{-١}{٠} = \text{غ.م}$$

$ق'(٣) =$ غير موجودة

واجب

١٠) اذا كان $ق(س) = \left[\frac{س}{٢} + ١\right]$ باستخدام تعريف المشتقة ، احسب : أ) $ق'(٥)$ ب) $ق'(٤)$

---

١١) اذا كان $ق(س) = جاس$ ، احسب $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جاع - جاس}{ع - س} \quad \text{(متطابقة)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢جتا\frac{ع + س}{٢}\, جا\frac{ع - س}{٢}}{ع - س}$$

$$= \cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} جتا\frac{س + س}{٢} = جتاس$$

واجب

١٢) اذا كان $ق(س) = جتاس$ ، احسب $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

---

١٣) اذا كان $ق(س) = جا^{٢}٢س$ باستخدام تعريف المشتقة احسب $ق'(س)$

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جا^{٢}٢ع - جا^{٢}٢س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(جا٢ع - جا٢س)(جا٢ع + جا٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\left(٢جتا\frac{٢ع + ٢س}{٢}\, جا\frac{٢ع - ٢س}{٢}\right)(جا٢ع + جا٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ٢جتا(ع + س) \times ١ \times (جا٢ع + جا٢س)$$

$$= ٤جتا٢س\,جا٢س$$

---

١٤) اذا كان $ق(س) = س^{٢} + ٣جتا٢س$ ، احسب $ق'(س)$ باستخدام التعريف

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{(ع^{٢} + ٣جتا٢ع) - (س^{٢} + ٣جتا٢س)}{ع - س}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣جتا٢ع} - \text{٣جتا٢س}}{\text{ع} - \text{س}} \quad \text{(متطابقة)}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\,(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٣ \times \left(\text{جا}\frac{\text{٢ع} + \text{٢س}}{٢}\,\text{جا}\frac{\text{٢ع} - \text{٢س}}{٢}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} (\text{ع} + \text{س}) + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} ٣ \times \left(-\,\text{٢جا}(\text{ع} + \text{س})\right)$$

$$= \text{٢س} + ٣ \times \left(-\,\text{٢جا٢س}\right)$$

واجب

١٥) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا٢س}$ ، احسب $\text{ق}^{\prime}\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ باستخدام التعريف

١٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س جا٢س}$ ، احسب $\text{ق}^{\prime}(\text{س})$ باستخدام التعريف

الحل :

$$\text{ق}^{\prime}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع جا٢ع} - \text{س جا٢س}}{\text{ع} - \text{س}} \quad \text{نضيف ونطرح س جا٢ع}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع جا٢ع} - \text{س جا٢ع}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جا٢ع} - \text{س جا٢س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٢ع}\,\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}\,\text{س} \left(\frac{\text{جا٢ع} - \text{جا٢س}}{\text{ع} - \text{س}}\right)$$

$$= \text{جا٢س} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}\,\text{س} \left(\frac{\text{٢جتا}\frac{\text{٢ع} + \text{٢س}}{٢}\,\text{جا}\frac{\text{٢ع} - \text{٢س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}}\right)$$

$$= \text{جا٢س} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}\,\text{س} \left(\text{٢جتا}(\text{س} + \text{ع})\right)$$

$$= \text{جا٢س} + \text{٢س جتا٢س}$$

١٧) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، احسب $\text{ق}^{\prime}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$$\underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جاع}}{\text{ع}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جاع} - \text{ع جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$$

نضيف ونطرح س جاس

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جاع} - \text{س جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})} + \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جاس} - \text{ع جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \text{س} \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}^{٢}} \times -١$$

$$= \text{س} \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢جا}\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})} + \frac{-\text{جاس}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٢}}$$

١٨) اذا كانت $\text{ق}(٣) = ٤$ ، $\text{ق}^{\prime}(٣) = ٥$ ، وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س})$ احسب $\text{ل}^{\prime}(٣)$ باستخدام التعريف

الحل :

$$\text{ل}^{\prime}(٣) = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(٣)}{\text{س} - ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{٩ق}(٣)}{\text{س} - ٣} \quad \text{نضيف ونطرح ٩ق(س)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{٩ق}(\text{س})}{\text{س} - ٣} + \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{٩ق}(\text{س}) - \text{٩ق}(٣)}{\text{س} - ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}\right) + ٩ \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\,\text{ق}(\text{س}) \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}\,(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}} + ٩ \times \text{ق}^{\prime}(٣)$$

$$= \text{ق}(٣)(٣ + ٣) + ٩ \times \text{ق}^{\prime}(٣)$$

$$= ٤ \times ٦ + ٩ \times ٥ = ٦٩$$

١٩) اذا كانت $\text{ق}^{\prime}(٣) = ١٨$ ، احسب

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣ - \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

الحل :

نضيف ونطرح ق(٣)

$$= \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٣ - \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}^{\prime}(٣) + \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ص} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{ص})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}^{\prime}(٣) + \text{ق}^{\prime}(٣)$$

$$= \text{٢ق}^{\prime}(٣) = ٢ \times ١٨ = ٣٦$$

٣ − هـ = ص
هـ + ص = ٣
هـ ← ٠ ، ص ← ٣

٢٠) اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق يساوي $٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$ ، احسب $ق'(٢)$

الحل :

مقدار التغير = $٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$

$ق(س + هـ) - ق(س) = ٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$

بالقسمة على (هـ) وبأخذ النهاية للطرفين

$$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}}{هـ}$$

$$ق'(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{٢}\cancel{هـ}}{\cancel{هـ}} + \frac{٨س + هـ^{\cancel{٢}}}{\cancel{هـ}}$$

$$ق'(س) = ٥س^{٢} + ٠ \Leftarrow ق'(٢) = ٥(٢)^{٢} = ٢٠$$

---

٢١) اذا كان مقدار التغير في ق(س) عندما تتغير (س) من (٣) الى (ع) هو $ع^{٣} - ٢٧$ ، احسب $ق'(٣)$

الحل :

مقدار التغير = $ع^{٣} - ٢٧$

$ق(ع) - ق(٣) = ع^{٣} - ٢٧$

بالقسمة على (ع − ٣) وبأخذ النهاية للطرفين

$$\underset{ع \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣} = \underset{ع \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ع^{٣} - ٢٧}{ع - ٣}$$

$$ق'(٣) = \underset{ع \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(ع - ٣)}(ع^{٢} + ٣ع + ٩)}{\cancel{ع - ٣}}$$

$$ق'(٣) = ٢٧$$

ملاحظة :

اذا كان السؤال مطلق او متشعب او اكبر عدد صحيح وطلب السؤال $ق'(س)$ باستخدام التعريف نتبع الخطوات التالية :

١) عندما $س > أ$ ، $ق'_{+}(أ)$

٢) عندما $س < أ$ ، $ق'_{-}(أ)$

٣) عند نقاط التحول $س = أ$

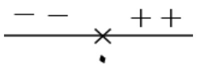
٤) النتيجة النهائية على شكل اقتران متشعب

سؤال :

اذا كان $ق(س) = ٥س - |٣س|$ ، احسب $ق'(س)$ باستخدام التعريف

الحل :

نعيد التعريف $|٣س|$



$$ق(س) = \begin{cases} ٥س + (٣س) & ، \quad س < ٠ \\ ٥س - (٣س) & ، \quad س > ٠ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٨س & ، \quad س < ٠ \\ ٢س & ، \quad س > ٠ \end{cases}$$

١) عندما $س > ٠$

$$ق'_{+}(٠) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{٢ع - ٠}{ع} = ٢$$

٢) عندما $س < ٠$

$$ق'_{-}(٠) = \underset{ع \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(٠)}{ع - ٠} = \underset{ع \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٨ع - ٠}{ع - ٠} = ٨$$

٣) التحول : $ق'_{+}(٠) ، ق'_{-}(٠) = ٨ \Leftarrow ق'(٠) = \text{غ.م}$

٤) النتيجة : $ق' = \begin{cases} ٢ & ، \quad س > ٠ \\ ٨ & ، \quad س < ٠ \\ \text{غ.م} & ، \quad س = ٠ \end{cases}$

---

٢٢) اذا كان $ق(س) = ظاس$ استخدم تعريف المشتقة لايجاد $ق'(س)$

الحل :

$$ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ظاع - ظاس}{ع - س} \quad \text{(متطابقة)}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ظا(ع - س)(١ + ظاعظاس)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ظا(ع - س)}{ع - س} \times (١ + ظاعظاس)$$

$$= ١ \times (١ + ظاسظاس)$$

$$= ١ \times (١ + ظا^{٢}س) = قا^{٢}س$$

٢٣) اذا كان ه(س) =قا٢س ، احسب ه′(س) باستخدام التعريف

الحل :

$$ه'(س) = \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{قا٢ع - قا٢س}{ع - س} = \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{جتا٢ع} - \frac{١}{جتا٢س}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{جتا٢س - جتا٢ع}{(جتا٢ع)(جتا٢س)(ع - س)}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{-٢جا\frac{٢س + ٢ع}{٢}\, جا\frac{٢س - ٢ع}{٢}}{(جتا٢ع)(جتا٢س)(ع - س)}$$

$$= \frac{+٢جا٢س}{جتا٢س جتا٢س} = ٢قا٢س ظا٢س$$

---

٢٤) اذا كان ه(س) = (س − ا)ل(س) اثبت ان ه′(ا) = ل(ا)

الحل :

$$ه'(ا) = \underset{ع\leftarrow ا}{\text{نها}} \frac{ه(ع) - ه(ا)}{ع - ا}$$

$$= \underset{ع\leftarrow ا}{\text{نها}} \frac{(ع - ا)ل(ع) - (ا - ا)ل(ا)}{ع - ا}$$

$$= \underset{ع\leftarrow ا}{\text{نها}} \frac{\cancel{(ع - ا)}ل(ع)}{\cancel{ع - ا}} = ل(ا)$$ وهو المطلوب

---

٢٥) اذا كان ه(س) = $\frac{س}{ل(س)}$ استخدم تعريف المشتقة لاثبات ان ه′(س) = $\frac{ل(س) - سل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$

الحل :

$$ه'(س) = \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{\frac{ع}{ل(ع)} - \frac{س}{ل(س)}}{ع - س} = \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{عل(س) - سل(ع)}{ل(ع)ل(س)(ع - س)}$$

نضيف ونطرح سل(س)

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{عل(س) - سل(س)}{ل(ع)ل(س)(ع - س)} + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{سل(س) - سل(ع)}{ل(ع)ل(س)(ع - س)}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ل(س)\cancel{(ع - س)}}{ل(ع)ل(س)\cancel{(ع - س)}} + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{س(ل(س) - ل(ع))}{ل(ع)ل(س)(ع - س)}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ل(س)}{ل(ع)ل(س)} + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{س\times -١ \times ل'(س)}{ل(س)ل(س)}$$

$$= \frac{ل(س) - سل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$$ وهو المطلوب

واجب

٢٦) اذا كان ه(٢) = ٥ ، ه′(٢) = ٧ ، ل(س) = س^{٢}ه(س) ، احسب ل′(٢) باستخدام التعريف

---

٢٧) اثبت ان :

$$\underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ع ه(س) - س ه(ع)}{ع - س} = ه(س) - س ه'(س)$$

الحل :

نضيف ونطرح س ه(س)

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ع ه(س) - س ه(س)}{ع - س} + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{س ه(س) - س ه(ع)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{ه(ع)\cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} س\left(\frac{ه(س) - ه(ع)}{ع - س}\right)$$

$$= ه(س) + س\times - ه'(س)$$

$$= ه(س) - س ه'(س)$$ وهو المطلوب

---

٢٨) اثبت ان :

$$\underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{٣ع ه(ع) - ٣س ه(س)}{ع - س} = ٣ه(س) + ٣س ه'(س)$$

الحل :

نضيف ونطرح ٣س ه(ع)

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{٣ع ه(ع) - ٣س ه(ع)}{ع - س} + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} \frac{٣س ه(ع) - ٣س ه(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} ٣ه(ع)\left(\frac{\cancel{ع - س}}{\cancel{ع - س}}\right) + \underset{ع\leftarrow س}{\text{نها}} ٣س\left(\frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}\right)$$

$$= ٣ه(س) + ٣س ه'(س)$$

٢٩) اثبت ان: $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}=\text{٢ق}'(\text{س})$

الحل :

نضيف ونطرح ق (س)

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}+\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(\text{س})+\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{ص}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{ص})}{\text{هـ}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{س}-\text{هـ}=\text{ص}\\ \text{س}=\text{ص}+\text{هـ}\\ \text{هـ}\to\text{٠}\end{array}}$$

٣٠) اذا كان $\text{ق}'(\text{٤})=\text{٦}$ ، احسب

$$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{٤}-\text{٢هـ})-\text{ق}(\text{٤}+\text{٥هـ})}{\text{هـ}}$$

الحل :

نضيف ونطرح ق (٤)

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{٤}-\text{٢هـ})-\text{ق}(\text{٤})}{\text{هـ}}+\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{٤})-\text{ق}(\text{٤}+\text{٥هـ})}{\text{هـ}}$$

$$=-\text{٢}\times\text{ق}'(\text{٤})+(-\text{٥})\times\text{ق}'(\text{٤})$$

$$=-\text{٢}\times\text{٦}+(-\text{٥})\times\text{٦}=-\text{١٢}+(-\text{٣٠})=-\text{٤٢}$$

٣١) اذا كانت $\text{ص}=\sqrt{\text{س}+\text{٢}}$ ، $\text{س}>-\text{٢}$ ،

احسب $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ باستخدام التعريف

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س})=\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$=\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{\text{ع}+\text{٢}}-\sqrt{\text{س}+\text{٢}}}{\text{ع}-\text{س}}\times\frac{\sqrt{\text{ع}+\text{٢}}+\sqrt{\text{س}+\text{٢}}}{\sqrt{\text{ع}+\text{٢}}+\sqrt{\text{س}+\text{٢}}}$$

$$=\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ع}\cancel{+\text{٢}}-\text{س}\cancel{-\text{٢}}}{(\text{ع}-\text{س})\left(\sqrt{\text{ع}+\text{٢}}+\sqrt{\text{س}+\text{٢}}\right)}$$

$$=\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\frac{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\left(\sqrt{\text{ع}+\text{٢}}+\sqrt{\text{س}+\text{٢}}\right)}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}+\text{٢}}}$$

٣٢) اذا كان $\text{ل}(\text{س})=\text{س}^{\text{٢}}\left|\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢}\right|$ ،

احسب $\text{ق}'\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\right)$ باستخدام التعريف

الحل :

نعيد التعريف $\left|\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢}\right|$

$$\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢}=\text{٠}\Rightarrow\text{س}^{\text{٣}}=\text{٢}\Rightarrow\text{س}=\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}$$

$-\ -\qquad\times\qquad+\ +$

$\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}$

$$\text{ل}=\text{س}^{\text{٢}}\times\left\{\begin{array}{ll}\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢} & \text{، س}\geq\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\\ -\text{س}+\text{٢} & \text{، س}<\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\end{array}\right.$$

$$\text{ل}=\left\{\begin{array}{ll}\text{س}^{\text{٥}}-\text{٢س}^{\text{٢}} & \text{، س}\geq\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\\ -\text{س}^{\text{٥}}+\text{٢س}^{\text{٢}} & \text{، س}<\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\end{array}\right.$$

$$\text{ق}'_{-}\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\right)=\underset{\text{س}\to\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}^{-}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ل}(\text{س})-\text{ل}\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\right)}{\text{س}-\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}^{-}}{\text{نهـا}}\frac{-\text{س}^{\text{٥}}+\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٠}}{\text{س}-\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}}=-\text{٦}\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}$$

$$\text{ق}'_{+}\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\right)=\underset{\text{س}\to\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}^{+}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ل}(\text{س})-\text{ل}\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\right)}{\text{س}-\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}^{+}}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{\text{٥}}-\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٠}}{\text{س}-\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}}=\text{٦}\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}$$

$\text{ل}'\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢}}\right)=$ غير موجودة

قواعد الاشتقاق :

(١) مشتقة العدد الثابت = صفر

امثلة :

١) $ق = ١٨ \leftarrow ق'(س) = ٠$

٢) $ق(س) = \sqrt{٥} \leftarrow ق'(س) = ٠$

٣) $ص = \pi \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٠$

---

(٢) مشتقة $س^{قوة} \Longleftarrow القوة \times س^{القوة - ١}$

امثلة :

١) $ق = س^{٩} \leftarrow ق'(س) = ٩س^{٨}$

٢) $ق = س^{-٢} \leftarrow ق'(س) = -٢س^{-٣}$

٣) $ق = س^{٥}\left|س^{٢}\right|$ ، احسب $ق'(٣)$

$ق = س^{٥} \times س^{٢} = س^{٧}$

$ق' = ٧س^{٦} = ٧(٣)^{٦} = ٥٠١٣$

٤) $ق(س) = ٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٩س + ١٢$

احسب $ق'(س)$

$ق'(س) = ٦س^{٢} - ٨س + ٩$

٥) $هـ(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٩$ ، احسب $هـ'(٢)$

$هـ'(س) = \frac{٦}{٣}س^{٢} - \frac{٦}{٢}س$

$هـ'(س) = ٢س^{٢} - ٣س$

$هـ'(٢) = ٢(٤) - ٣ \times ٢ = ٨ - ٦ = ٢$

النجاح الذي تستمتع به
اليوم هو نتيجة الثمن
الذي دفعته في الماضي .

(٣) قاعدة الضرب

$ق(س) = (\text{الاقتران الاول}) \times (\text{الاقتران الثاني})$

$ق'(س) = \left(\begin{matrix}\text{الاول}\\\text{نفسه}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{مشتقة}\\\text{الثاني}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{الثاني}\\\text{نفسه}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{مشتقة}\\\text{الاول}\end{matrix}\right)$

١) $ق(س) = (س^{٥} + ٣س)(٦س^{٢} + ٩)$

$ق'(س) = (س^{٥} + ٣س)(١٢س) + (٦س^{٢} + ٩)(٥س^{٤} + ٣)$

٢) $ق(س) = (س^{-٢} + ٧س^{-٣})(٣س^{-٩} + ٨)$

$ق'(س) = (س^{-٢} + ٧س^{-٣})(-٢٧س^{-١٠})$

$+ (٣س^{-٩} + ٨)(-٢س^{-٣} - ٢١س^{-٤})$

٣) اثبت ان : $\frac{ء}{ءس} = ل(س).م(س)\cdot هـ(س)$

$= ل(س)م(س)هـ'(س) + ل(س)هـ(س)م'(س) + م(س) \times هـ \times ل'$

الحل :

$= ل\cdot م\cdot هـ' + هـ \times (ل.م)'$

$= ل\cdot م\cdot هـ' + هـ(ل\cdot م' + م\cdot ل')$

$= ل\cdot م\cdot هـ' + هـ\cdot ل\cdot م' + هـ\cdot م\cdot ل'$

---

(٤) $ق(س) = \frac{\text{مقام}}{\text{بسط}}$

$= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

امثلة :

١) $ق = \frac{س^{٢} + ٢}{٣س^{٢} - ٥}$

$ق'(س) = \frac{(٣س^{٢} - ٥)(٢س) - (س^{٢} + ٢)(٦س)}{(٣س^{٢} - ٥)^{٢}}$

٢) $ق(س) = \frac{٢س}{٣ - س^{٢}}$ ، احسب $ق^{\prime}(١)$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{(٣ - س^{٢})(٢) - (٢س)(-٢س)}{(٣ - س^{٢})^{٢}}$$

$$ق^{\prime}(١) = \frac{(٣ - ١)(٢) - (٢\times١)(-٢\times١)}{(٣ - ١^{٢})^{٢}} = \frac{٤ + ٤}{٤} = ٢$$

واجب

٣) $ق(س) = \frac{س^{٢}(٢س^{٢} - ٣)}{٥ - ٣س}$ ، احسب $ق^{\prime}(١)$

---

(٥) $ق = \frac{\text{عدد}}{\text{اقتران}} \Rightarrow \frac{\text{سالب العدد} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

امثلة :

١) $ق(س) = \frac{٧}{س^{٥} + ٢}$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{-٧ \times ٥س^{٤}}{(س^{٥} + ٢)^{٢}}$$

٢) $ق(س) = \frac{-٩}{٤س^{٢} + ٨}$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{٩ \times ٨س}{(٤س^{٢} + ٨)^{٢}}$$

٣) $ق(س) = ٨س^{-٢} + \frac{٩}{س^{٣} + ٨}$

$$ق^{\prime}(س) = -١٦س^{-٣} + \frac{-٩ \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ٨)^{٢}}$$

المشتقات العليا :

امثلة :

١) $ق(س) = س^{٧} + ٣س^{٥}$ ، احسب $ق^{\prime\prime\prime}(س)$

الحل :

$ق^{\prime}(س) = ٧س^{٦} + ١٥س^{٤}$

$ق^{\prime\prime}(س) = ٤٢س^{٥} + ٦٠س^{٣}$

$ق^{\prime\prime\prime}(س) = ٢١٠س^{٤} + ١٨٠س^{٢}$

واجب

٢) اذا كان $ق(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣} + \frac{٧}{٢}س^{٢} + ١٦س$

احسب $ق^{\prime\prime}(١)$

---

٣) اذا كان $ق = ٢س^{٤} + \frac{١٦}{س}$ ، احسب $ق^{\prime\prime\prime}(٢)$

الحل :

$ق = ٢س^{٤} + ١٦س^{-١}$

$ق^{\prime} = ٨س^{٣} - ١٦س^{-٢}$

$ق^{\prime\prime} = ٢٤س^{٢} + ٣٢س^{-٣}$

$ق^{\prime\prime\prime} = ٤٨س - ٩٦س^{-٤}$

$ق^{\prime\prime\prime}(٢) = ٤٨ \times ٢ - \frac{٩٦}{١٦} = ٩٠$

---

٤) اذا كان $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{ن}$ وكانت $ق^{\prime\prime\prime}(س) = ٤٠س^{ن-٣}$ ، فما قيمة $(ن)$

الحل :

$ق^{\prime}(س) = \frac{١}{٣} \times ن \times س^{ن-١}$

$ق^{\prime\prime}(س) = \frac{١}{٣} \times ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ق^{\prime\prime\prime}(س) = \frac{١}{٣} \times ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$٤٠\cancel{س^{ن-٣}} = \frac{١}{٣} \times ن(ن-١)(ن-٢)\cancel{س^{ن-٣}}$

$١٢٠ = ن(ن-١)(ن-٢)$

$\Rightarrow ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠ \Rightarrow ن = ٦$

---

٥) اذا كانت $ص = أس^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$ ، اثبت ان :

$س^{٢} \times ص^{\prime\prime} = ن(ن-١) \times ص$

الحل :

$ص = أس^{ن} + بس^{-ن+١}$

$ص^{\prime} = نأس^{ن-١} + ب(-ن+١)س^{-ن}$

$ص^{\prime\prime} = ن(ن-١)أس^{ن-٢} + ب(-ن+١)(-ن)س^{-ن-١}$

اضرب الطرفين في $س^{٢}$

$س^{٢}ص^{\prime\prime} = ن(ن-١)أس^{ن-٢} \times س^{٢} + ب(-ن+١)(-ن)س^{-ن-١} \times س^{٢}$

$= ن(ن-١)أس^{ن} + ب(ن)(ن-١)س^{-ن+١}$

$= ن(ن-١)(أس^{ن} + بس^{-ن+١}) = ن(ن-١) \times ص$

٦) اذا كان $ل(س)$ ، $ق(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $ل'(٢) = −١$ ، $ل(٢) = ١٠$ ، $ق'(٢) = ٢$ ، $ق(٢) = −٣$ ، احسب $هـ'(٢)$ في الحالات التالية :

أ) $هـ(س) = ٢ل(س) \times ق(س)$

الحل :

$$هـ'(س) = ٢ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ٢ل'(س)$$

$$هـ'(٢) = ٢ل(٢) \times ق'(٢) + ق(٢) \times ٢ \times ل'(٢)$$

$$= ٢ \times ١٠ \times ٢ + (−٣) \times ٢ \times −١ = ٤٦$$

ب) $هـ(س) = \frac{ل(س)}{٤ + ق(س)}$

الحل :

$$هـ'(س) = \frac{(٤ + ق(س)) \times ل'(س) − (ل(س))(٠ + ق'(س))}{(٤ + ق(س))^{٢}}$$

$$هـ'(٢) = \frac{(٤ + ق(٢)) \times ل'(٢) − (ل(٢))(٠ + ق'(٢))}{(٤ + ق(٢))^{٢}}$$

$$= \frac{(٤ + (−٣))(−١) − (١٠)(٢)}{(٤ + (−٣))^{٢}} = −٢١$$

واجب

٧) اذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $هـ(٢) = ٣$ ، $هـ'(٢) = −٢$

احسب ما يلي :

أ) $(٣ق + هـ)'(٢)$

ب) $(ق \cdot هـ)'(٢)$

ج) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٢)$

د) $\left(\frac{ق(١)}{هـ}\right)'(٢)$

هـ) $\left(\frac{ق}{هـ'(١)}\right)'(٢)$

و) $(س + ٢هـ)'(٢)$

ز) مشتقة $\frac{ق}{هـ + ق}$ عندما $س = ٢$

ح) $((ق \cdot هـ)(٢))'$

٨) اذا كان $ق(٢) = ٣$ ، $ق'(٢) = ٤$ وكان $هـ(س) = س^{٣} \cdot ق(س) + \frac{١٨}{ق(س)}$ ، احسب $هـ'(٢)$

الحل :

$$هـ'(س) = س^{٣} \times ق'(س) + ق(س) \times ٣س^{٢} − \frac{١٨ \times ق'(س)}{(ق(س))^{٢}}$$

$$هـ'(٢) = ٨ \times ق'(٢) + ق(٢) \times ١٢ − \frac{١٨ \times ق'(٢)}{(ق(٢))^{٢}}$$

$$= ٨ \times ٤ + ٣ \times ١٢ − \frac{١٨ \times ٤}{٩} = ٦٠$$

٩) اذا كان $ق(س) = ل(س) \times (٣س^{٢} + ٤)$ وكان $هـ(١) = ٢$ ، $ق'(١) = ٠$ ، احسب $ل'(١)$

الحل :

$$ق'(س) = ل(س) \times (٦س) + (٣س^{٢} + ٤) \times ل'(س)$$

$$ق'(١) = ل(١) \times (٦ \times ١) + (٣ \times ١^{٢} + ٤) \times ل'(١)$$

$$٠ = \frac{ق(١)}{٣ + ٤} \times ٦ + ٧ \times ل'(١)$$

$$٠ = \frac{٢}{٧} \times ٦ + ٧ \times ل'(١)$$

$$٠ = \frac{١٢}{٧} + ٧ \times ل'(١)$$

$$\frac{−١٢}{٧} = ٧ \times ل'(١) \Rightarrow ل'(١) = \frac{−١٢}{٤٩}$$

١٠) اذا كان $ق(٤) = ٥$ ، $ق'(٤) = −١$ ، $ق''(٤) = ٢$ ، فما قيمة $\left(\frac{ق}{ق'}\right)'(٤)$

الحل :

$$\left(\frac{ق}{ق'}\right)'(٤) = \frac{ق'(٤) \times ق'(٤) − ق(٤) \times ق''(٤)}{(ق'(٤))^{٢}}$$

$$= \frac{−١ \times −١ − ٥ \times ٢}{١} = −٩$$

واجب

١١) اذا كانت $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ وكانت $ق'(س) \times هـ'(س) = جـ$ (ثابت) اثبت ان :

$$\frac{ل''}{ل} = \frac{ق''}{ق} + \frac{هـ''}{هـ}$$

النهايات الخاصة :

من الممكن ان تكون النهاية على صورة تعريف المشتقة :

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

٢) $\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

٣) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

٤) $\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

٥) $\text{ق}''(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{هـ}}$

٦) $\text{ق}''(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{ع}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

٧) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})} = \dfrac{\text{١}}{\text{ق}'(\text{س})}$

٨) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{أس}+\text{بهـ}) - \text{ق}(\text{أس})}{\text{جهـ}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{أجـ}}\,\text{ق}'(\text{س})$

امثلة :

١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س}^{\text{٤}} - \text{٥س}^{\text{٣}}$ ،

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{١٢س}^{\text{٣}} - \text{١٥س}^{\text{٢}}$ ، $\text{ق}'(\text{٢}) = \text{٣٦}$

احسب :

أ) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٢}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{هـ}} = \text{ق}'(\text{٢}) = \text{٣٦}$

ب) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٢}) - \text{ق}(\text{٢}+\text{هـ})}{\text{هـ}} = -\text{ق}'(\text{٢}) = -\text{٣٦}$

ج) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{ق}'' = \text{٣٦س}^{\text{٢}} - \text{٣٠س}$

د) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{٥هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{٦هـ}} = \dfrac{\text{٥}}{\text{٦}}\,\text{ق}'(\text{س})$

$= \dfrac{\text{٥}}{\text{٦}}\left(\text{١٢س}^{\text{٣}} - \text{١٥س}^{\text{٢}}\right)$

هـ) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٢}+\text{٧هـ}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{٩هـ}} = \dfrac{\text{٧}}{\text{٩}} \times \text{ق}'(\text{٢}) = \dfrac{\text{٧}}{\text{٩}} \times \text{٣٦}$

و) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{٣}+\text{٢هـ}) - \text{ق}'(\text{٣})}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{\text{٢}}{\text{١}}\,\text{ق}''(\text{٣}) = \dfrac{\text{٢}}{\text{١}}\left(\text{٣٦}\times(\text{٣})^{\text{٢}} - \text{٣}\times\text{٣}\right) = \text{٢}\times\text{٢٣٤} = \text{٤٦٨}$

---

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أس}^{\text{٣}} + \text{٢س} + \text{١}$ وكانت

$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{٣}+\text{هـ}) - \text{ق}'(\text{٣})}{\text{هـ}} = \text{٩}$ ، فما قيمة (أ)

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٣أس}^{\text{٢}} + \text{٢}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \text{٦أس}$

$\text{ق}'''(\text{٣}) = \text{٦أ}\times\text{٣} = \text{٩} \Rightarrow \text{١٨أ} = \text{٩} \Rightarrow \text{أ} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$

---

٣) ما قيمة $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{٢س}) - \text{ق}(\text{٦})}{\text{س} - \text{٣}}$ بحيث

$\text{ق}'(\text{٣}) = \text{٧}$ ، $\text{ق}'(\text{٦}) = \text{٩}$

الحل :

افرض $\text{ع} = \text{٢س} \leftarrow \text{س} = \dfrac{\text{ع}}{\text{٢}}$

$\text{س} \to \text{٣}$ ، $\text{ع} = \text{٦}$

$\Rightarrow \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{٦})}{\dfrac{\text{ع}}{\text{٢}} - \text{٣}} = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{٦})}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ع} - \text{٦})}$

$= \text{٢}\times\text{ق}'(\text{٦}) = \text{٢}\times\text{٩} = \text{١٨}$

---

٤) $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٩}} - \text{ع}^{\text{٩}}}{\text{ع} - \text{س}} = -\left(\text{س}^{\text{٩}}\right)' = -\text{٩س}^{\text{٨}}$

---

٥) $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+\text{هـ})^{\text{٥}} - \text{س}^{\text{٥}}}{\text{هـ}} = \left(\text{س}^{\text{٥}}\right)' = \text{٥س}^{\text{٤}}$

---

٦) احسب قيمة $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٨}(\text{٢}+\text{هـ})^{\text{٤}} - \text{٢٢}}{\text{هـ}}$ عندما $\text{س} = \text{٢}$

الحل :

$= \text{٨}\left(\text{س}^{\text{٤}}\right)' = \text{٨}\left(\text{٤س}^{\text{٣}}\Big|_{\text{س}=\text{٢}}\right) = \text{٢٥٦}$

٧) اذا كان $ق(س) = ق(س+هـ) - ٥س^{٢}هـ + ٧سهـ$
فما قيمة $ق''(٢)$

الحل :

$$ق'(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س+هـ) - \left(ق(س+هـ) - ٥س^{٢}هـ + ٧سهـ\right)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{ق(س+هـ)} - \cancel{ق(س+هـ)} + ٥س^{٢}هـ - ٧سهـ}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{٢}هـ}{هـ} - - \frac{٧سهـ}{هـ} = ٥س^{٢} - ٧س$$

$$ق'(س) = ٥س^{٢} + ٧س$$

$$ق''(س) = ١٠س - ٧$$

$$ق''(٢) = ١٠ \times ٢ - ٧ = ١٣$$

العلاقة بين المشتقة والاتصال :

نظرية :

اذا كان $ق(س)$ قابل للاشتقاق عند النقطة $س = أ$ فانه يكون متصلا عندما $س = أ$

البرهان :

نريد ان نثبت ان : $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\, ق(س) = ق(أ)$

ليكن $ق(س) - ق(أ) = ق(س) - ق(أ)$

اضرب احد الطرفين في $\frac{(س - أ)}{س - أ}$

$$ق(س) - ق(أ) = \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ} \times (س - أ)$$

بأخذ النهاية للطرفين

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\, ق(س) - ق(أ) = \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ} \times \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\, س - أ$$

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\, ق(س) - ق(أ) = ق'(أ) \times ٠$$

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\, ق(س) - ق(أ) = ٠$$

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\, ق(س) = ق(أ) \Leftarrow$ ق متصل عندما $س = أ$

ملاحظات :

١) اذا كان $ق(س)$ متصل عندما $س = أ$ ليس بالضرورة بان يكون $ق(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = أ$

٢) اذا كان $ق(س)$ غير متصل عندما $س = أ$ فانه غير قابل للاشتقاق عندما $س = أ$

٣) اذا كان $ق(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = أ$ فان :

أ) $ق(س)$ متصل عندما $س = أ$

ب) $ق'_{+}(أ) = ق'_{-}(أ)$

٤) اذا كانت $ق'_{+}(أ) \neq ق'_{-}(أ) \Leftarrow ق'(أ)$ غير موجودة

مثال :

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س^{٢} + ٥} & ، \quad س \le ٢ \\ \frac{٨}{س^{٣}} + ٧س & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

هل $ق(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = ٢$

الحل :

نبحث في الاتصال عندما $س = ٢$

$$ق(٢) = \sqrt{٤ + ٥} = \sqrt{٩} = ٣$$

$$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\, ق(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} + ٥} = ٣$$

$$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\, ق(س) = \frac{٨}{٨} + ٧ \times ٢ = ١٥$$

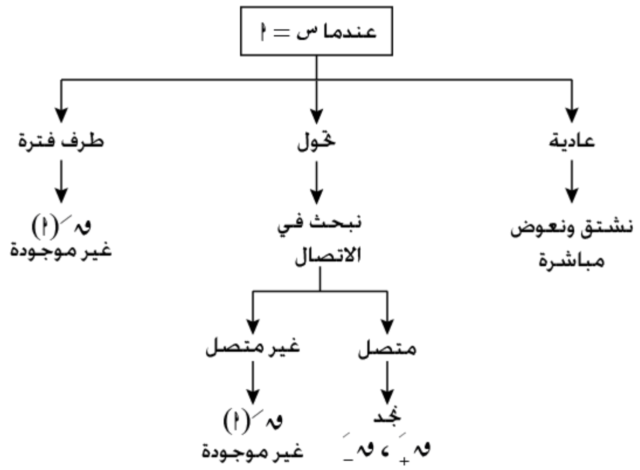
$ق(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

بما ان $ق(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

$\Leftarrow ق(س)$ غير قابل للاشتقاق عندما $س = ٢$

مشتقة الاقترانات المتشعبة :

اولاً : عندما س = أ



امثلة :

١) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^٣ + س^٢ \text{ ، } & س \le ١ \\ ٣س^٢ - س \text{ ، } & ١ < س < ٣ \\ ٨س \text{ ، } & س \ge ٣ \end{cases}$$

احسب : ق′(−٢) ، ق′(٢) ، ق′(٧)
ق′(١) ، ق′(٣)

الحل :

$$ق′(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ٢س \text{ ، } & س < ١ \\ ٦س - ١ \text{ ، } & ١ < س < ٣ \\ ٨ \text{ ، } & س > ٣ \end{cases}$$

- $ق′(-٢) = ٣(-٢)^٢ + ٢ \times -٢ = ٨$
- $ق′(٢) = ٦ \times ٢ - ١ = ١١$
- $ق′(٧) = ٨$
- ق′(١) : س = ١ ← تحول ← اتصال ق

$ق(١) = (١)^٣ + (١)^٢ = ٢$

$\underset{س \to ١^+}{\text{نها}} ٣س^٢ - س = ٢$ ، $\underset{س \to ١^-}{\text{نها}} س^٣ + س^٢ = ٢$

ق(س) متصل عندما س = ١

$ق′_+(١) = ٣(١)^٢ + ٢(١) = ٥$

$ق′_-(١) = ٦ \times ١ - ١ = ٥$

ق′(١) = ٥ موجودة

- ق′(٣) : س = ٣ ← تحول ← اتصال ق

$ق(٣) = ٨ \times ٣ = ٢٤$

$\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}} ٨س = ٢٤$ ، $\underset{س \to ٣^-}{\text{نها}} ٣س^٢ - س = ٢٤$

ق(س) متصل عندما س = ٣

$ق′_+(٣) = ٨$ ، $ق′_-(٣) = ٦ \times ٣ - ١ = ١٧$

ق′(٣) = غير موجودة

---

٢) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ١}{س - ١} \text{ ، } & س \ne ١ \\ ٣ \text{ ، } & س = ١ \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق عندما س = ١

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ١}{س - ١} \text{ ، } & س > ١ \\ \frac{س^٣ - ١}{س - ١} \text{ ، } & س < ١ \\ ٣ \text{ ، } & س = ١ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}{\cancel{س - ١}} \text{ ، } & س > ١ \\ \frac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}{\cancel{س - ١}} \text{ ، } & س < ١ \\ ٣ \text{ ، } & س = ١ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + س + ١ \text{ ، } & س > ١ \\ س^٢ + س + ١ \text{ ، } & س < ١ \\ ٣ \text{ ، } & س = ١ \end{cases}$$

$$ق′(س) = \begin{cases} ٢س + ١ \text{ ، } & س > ١ \\ ٢س + ١ \text{ ، } & س < ١ \end{cases}$$

س = ١ ← تحول ← اتصال ق

$ق(١) = ٣$

$\underset{س \to ١^+}{\text{نها}} س^٢ + س + ١ = ٣$ ، $\underset{س \to ١^-}{\text{نها}} س^٢ + س + ١ = ٣$

ق(س) متصل عندما س = ١

$ق′_+(١) = ٣$ ، $ق′_-(١) = ٣$

⇐ ق(س) قابل للاشتقاق عندما س = ١

٣) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + ٥\text{س} ، & \text{س} \geq ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} + \text{ب} ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

قابل للاشتقاق عندما س = ٢ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

ق(س) متصل $\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{أس}^{٢} + ٥\text{س} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} ٣\text{س}^{٢} + \text{ب}$

$٤\text{أ} + ١٠ = ١٢ + \text{ب}$

$\text{ب} - ٤\text{أ} = ٢ ......(١)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أس} + ٥ ، & \text{س} > ٢ \\ ٦\text{س} ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\text{ق}'_{+}(٢) = \text{ق}'_{-}(٢)$

$٤\text{أ} + ٥ = ١٢ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{٧}{٤}}$

نعوض في المعادلة (١)

$\text{ب} - ٤\text{أ} = ٢ \Leftarrow \text{ب} - \cancel{٤} \times \frac{٧}{\cancel{٤}} = ٢ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٩}$

---

٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{بس} + \text{جـ} ، & \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^{٣} ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$

فما قيم أ ، ب ، جـ اذا كانت ق″(٢) موجودة

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أس} + \text{ب} ، & \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أ} ، & \text{س} < ٢ \\ ٦\text{س} ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$

$\text{ق}''_{+}(٢) = \text{ق}''_{-}(٢)$

$٦ \times ٢ = ٢\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٦}$

وكذلك $\text{ق}'_{+}(٢) = \text{ق}'_{-}(٢)$

$٣(٢)^{٢} = \overset{٦}{\cancel{٢}} \times ٢ + \text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = -١٢}$

وكذلك ق(س) متصل

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{س}^{٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{أس}^{٢} + \text{بس} + \text{جـ}$

$٨ = ٦(٢)^{٢} + (-١٢)٢ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٨}$

ثانياً : تحول والمطلوب المشتقة من جهة واحدة

$\text{ق}'_{+}(\text{أ})$ او $\text{ق}'_{-}(\text{أ})$

مثال :

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ ، & \text{س} \geq ١ \\ \text{س}^{٢} + ١ ، & \text{س} < ١ \end{cases}$

احسب : $\text{ق}'_{+}(١)$ ، $\text{ق}'_{-}(١)$

الحل :

الاتصال = ق(١) = ٣

$\lim\limits_{\text{س}\to ١^{+}} \text{ق} = ٣$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ١^{-}} \text{ق} = ٢$

ق(س) غير متصل عندما س = ١

⟸ نلجأ الى استخدام تعريف المشتقة

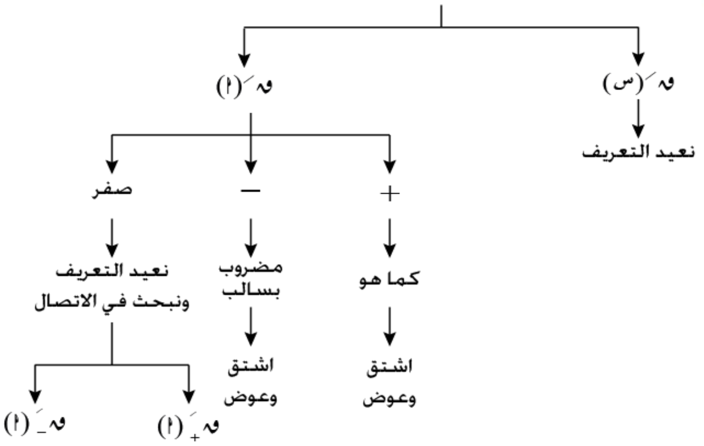
$\text{ق}'_{+}(١) = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١} = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{٢\text{ع} + ١ - ٣}{\text{ع} - ١}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - ١)}}{\cancel{\text{ع} - ١}} = ٢ \Leftarrow \text{ق}'_{+}(١) = ٢$

$\text{ق}'_{-}(١) = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{-}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١} = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{-}} \frac{\text{ع}^{٢} + ١ - ٣}{\text{ع} - ١}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{\text{ع}^{٢} - ٢}{\text{ع} - ١} = \frac{١ - ٢}{١ - ١} = \frac{-١}{٠} = \text{غ.م}$

مشتقة اقتران القيمة المطلقة :

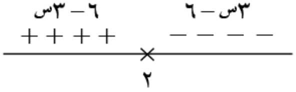


امثلة :

١) اذا كـــــان ق(س) = ٧س + |٦ − ٣س| ،

احسب ق′(٥) ، ق′(٠) ، ق′(٢)

الحل :



٦ − ٣س = ٠ ← س = ٢

$$ق(س) = \begin{cases} ٦ + ٤س & ، س < ٢ \\ ١٠س - ٦ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٤ & ، س < ٢ \\ ١٠ & ، س > ٢ \\ غ.م & ، س = ٢ \end{cases}$$

ق′(٥) = ١٠ ، ق′(٠) = ٤

س = ٢ ← تحول ← اتصال ق

ق(٢) = ٢٠ − ٦ = ١٤

$\underset{س \to ٢^+}{نها} ق = ١٤$ ، $\underset{س \to ٢^-}{نها} ق = ١٤$

ق(س) متصل عندما س = ٢

$ق'_+(٢) = ١٠ ، ق'_-(٢) = ٤ \Rightarrow ق'(٢) = غ.م$

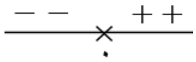
---

٢) اذا كـــــان ق(س) = ٣س|٢س| ،

احسب ق′(٠) ، ق″(٠) ، ق‴(٠)

الحل :

٢س = ٠ ← س = ٠



$$ق(س) = \begin{cases} -٦س^٢ & ، س < ٠ \\ ٦س^٢ & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} -١٢س & ، س < ٠ \\ ١٢س & ، س > ٠ \end{cases}$$

ق(س) متصل عندما س = ٠

$ق'_+(٠) = ق'_-(٠) = ٠$

$$ق''(س) = \begin{cases} -١٢ & ، س < ٠ \\ ١٢ & ، س > ٠ \end{cases}$$

ق′(س) متصل عندما س = ٠

$ق''_+(٠) \neq ق''_-(٠) \Rightarrow ق''(٠) = غ.م$

$$ق'''(س) = \begin{cases} صفر & ، س < ٠ \\ صفر & ، س > ٠ \end{cases}$$

⟸ ق‴(٠) = غ.م لان ق″(س) غير موجودة

---

٣) اذا كـــــان $ق(س) = |س^٣ - ٥س - ٢|$ ،

احسب ق′(١) ، ق′(٣)

الحل :

نعوض مباشرة س = ١ ⟸ سالب

$ق(س) = -س^٣ + ٥س + ٢$

$ق'(س) = -٣س^٢ + ٥ \Rightarrow ق'(١) = -٣ + ٥ = ٢$

عندما س = ٣ ⟸ نعوض مباشرة ⟸ موجب

$ق(س) = س^٣ - ٥س - ٢$

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٥$

⟸ ق′(٣) = ٢٧ − ٥ = ٢٢

---

٤) اذا كـــــان $ق(س) = |س^٢ - ٥| + |٣س - ٢|$،

احسب ق′(٢)

الحل :

عند س = ٢ ⟸ $|س^٢ - ٥|$ = سالب

عند س = ٢ ⟸ |٣س − ٢| = موجب

$ق(س) = -س^٢ + ٥ + ٣س - ٢$

ق′(س) = −٢س + ٣

⟸ ق′(٢) = −٤ + ٣ = −١

ملاحظات :

١) اذا علم احد المشتقات موجودة عند النقطة فكل ما قبلها يكون موجودا عند تلك النقطة

٢) اذا كانت احدى المشتقات غير موجودة عند تلك النقطة فكل ما بعدها غير موجود عند نفس النقطة

مشتقة اكبر عدد صحيح :

اذا كان اكبر عدد صحيح لوحده فان :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}[\text{ق}] = \begin{cases} \text{صفر} \text{ ، } & \text{ق}(\text{س}) \notin \text{ص} \\ \text{غ.م} \text{ ، } & \text{ق}(\text{س}) \in \text{ص} \end{cases}$$

امثلة :

١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left[\text{٥} - \frac{\text{س}}{\text{٣}}\right]$ ، احسب $\text{ق}'(\text{٢})$ ، $\text{ق}'(\text{٦})$

الحل :

$\text{ق}'(\text{٢}) = \text{٠}$ ، $\text{ق}'(\text{٦}) = \text{غ.م}$

---

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{٢س} + \text{٠,٤}]$ ، احسب $\text{ق}'(\text{٣})$ ، $\text{ق}'(\text{١,٣})$

الحل :

$\text{ق}'(\text{٣}) = \text{٠}$ ، $\text{ق}'(\text{١,٣}) = \text{غ.م}$

---

٣) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{٢س} + \text{٥}]$ ، احسب $\text{ق}'(\text{س})$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = [\text{٢س}] + \text{٥}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{٠} \text{ ، } & \text{٢س} \notin \text{ص} \\ \text{غ.م} \text{ ، } & \text{٢س} \in \text{ص} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{٠} \text{ ، } & \text{س} \notin \frac{\text{ص}}{\text{٢}} \\ \text{غ.م} \text{ ، } & \text{س} \in \frac{\text{ص}}{\text{٢}} \end{cases}$$

---

٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٤}}{\text{س}} + \left[\frac{\text{س}}{\text{٣}}\right]$ ، احسب $\text{ق}'(\text{٢})$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}} + \text{٠} = \frac{-\text{٤}}{\text{٤}} = -\text{١}$$

---

٥) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\left[\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٢}\right]}{|\text{٢س} - \text{٣}|}$ ، احسب $\text{ق}'(\text{٣})$

الحل :

$|\text{٢س} - \text{٣}|$ موجب عندما $\text{س} = \text{٣}$

$\left[\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٢}\right] = \text{٣}$ عندما $\text{س} = \text{٣}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٣}}{\text{٢س} - \text{٣}}$$

$$\Rightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{٣} \times \text{٢}}{(\text{٢س} - \text{٣})^{\text{٢}}} \Rightarrow \text{ق}'(\text{٣}) = \frac{-\text{٦}}{\text{٩}}$$

---

٦) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س}] - |\text{س}|$ ، احسب $\text{ق}'(-\text{٢,٥})$

الحل :

$[\text{س}] = -\text{٣}$ عندما $\text{س} = -\text{٢,٥}$

$|\text{س}| =$ سالب عندما $\text{س} = -\text{٢,٥}$

$$\text{ق}(\text{س}) = -\text{٣} - (-\text{س}) = -\text{٣} + \text{س}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{١} \Rightarrow \text{ق}'(-\text{٢,٥}) = \text{١}$$

---

٧) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{٢س} + \text{٢}] - [\text{٢س} - \text{٣}]$ ، احسب $\text{ق}'(\text{س})$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \cancel{[\text{٢س}]} + \text{٢} - \cancel{[\text{٢س}]} + \text{٣}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{٥} \Rightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{٠}$$

---

٨) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} . [\text{س}]$ ، احسب $\text{ق}'(\text{٠})$ ، $\text{ق}'(\text{١})$

الحل :

$$[\text{س}] \rightarrow \text{ل} = \text{١} \text{ ، } \text{س} = \text{٠}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} \times \begin{cases} -\text{١} \text{ ، } & -\text{١} \le \text{س} < \text{٠} \\ \text{٠} \text{ ، } & \text{٠} \le \text{س} < \text{١} \\ \text{١} \text{ ، } & \text{١} \le \text{س} < \text{٢} \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}^{\text{٣}} \text{ ، } & -\text{١} \le \text{س} < \text{٠} \\ \text{٠} \text{ ، } & \text{٠} \le \text{س} < \text{١} \\ \text{س}^{\text{٣}} \text{ ، } & \text{١} \le \text{س} < \text{٢} \end{cases}$$

ق′(س) = { –٣س^٢ ، –١ < س < ٠
ق′(س) = { ٠ ، ٠ < س < ١
ق′(س) = { ٣س^٢ ، ١ < س < ٢

ق(س) متصل عندما س = ٠

ق′₊(٠) = ٠ ، ق′₋(٠) = ٠ ⟸ ق′(٠) = ٠ = موجودة

ق(س) غير متصل عندما س = ١ ⟸ ق′(١) = غ.م

---

٩) اذا كان ق(س) = [٣س + ٣،٠] / |س^٢ – ١| ، احسب ق′(٢)

الجواب : (–٢٤/٩)

---

١٠) اذا كان ق(س) = [س – ٢] ، احسب ق′(٥)

الجواب : غير قابل للاشتقاق

---

١١) اذا كان ق(س) = ([س] + ٢) / (س + ٢) ، احسب ق′(١)

الجواب : غير قابل للاشتقاق

---

١٢) اذا كان ق(س) = [س،٥] / هـ(س) ، هـ(٣) = ٣ ، هـ′(٣) = –٢ ، احسب ق′(٣)

الجواب : (٢/٩)

الحالات التي يكون غير قابل للاشتقاق عندها :

١) نقاط عدم الاتصال

٢) عند ق′₊ ≠ ق′₋

٣) المقام = صفر

٤) اطراف المجال المغلق

٥) في [ ] عندما ق ∈ ص

٦) الرسم : الاطراف ، الرؤوس المدببة ، نقاط الانقطاع والفجوات

---

١٣) اذا كان ق(س) = [س – ٢] ، بين فيما اذا كان قابل للاشتقاق عندما س = ٥

الحل :

[س – ٢] ⟸ ل = ١

[س – ٢] = { ٢ ، ٤ ≤ س < ٥
[س – ٢] = { ٣ ، ٥ ≤ س < ٦

الاتصال :

ق(٥) = ٣

نهـا (س←٥⁺) ق(س) = ٣ ، نهـا (س←٥⁻) ق(س) = ٢

⟸ ق(س) متصل عندما س = ٥

⟸ ق(س) غير قابل للاشتقاق عندما س = ٥

---

١٤) اذا كان ق(س) = |س – ٣| ، ابحث في قابلية الاشتقاق عندما س = ٣

الحل :

نعيد التعريف |س – ٣|

– –   ×   + +
٣

⟸ س – ٣ = ٠ ⟸ س = ٣

ق(س) = { س – ٣ ، س ≥ ٣
ق(س) = { –(س – ٣) ، س < ٣

الاتصال :

ق(٣) = ٠

نهـا (س←٣⁺) ق(س) = ٠ ، نهـا (س←٣⁻) ق(س) = ٠

⟸ ق(س) متصل عندما س = ٣

ق′(س) = { ١ ، س > ٣
ق′(س) = { –١ ، س < ٣

ق′₊(٣) = ١ ، ق′₋(٣) = –١

⟸ ق(س) غير قابل للاشتقاق عندما س = ٣

١٥) ابحث قابلية $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{[\text{س}]+٢}{\text{س}+٢}$ الاشتقاق عندما $\text{س} = ١$

الحل :

نعيد التعريف

$$[\text{س}] = \begin{cases} ٠ & ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ ١ & ، \quad ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢}{\text{س}+٢} & ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ \dfrac{٣}{\text{س}+٢} & ، \quad ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

الاتصال :

$\text{ق}(١) = \dfrac{٣}{٣} = ١$

$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ١$ ، $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٢}{٣}$

$\Rightarrow$ ق(س) غير متصل عندما $\text{س} = ١$

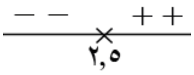
$\Rightarrow$ ق(س) غير قابل للاشتقاق عندما $\text{س} = ١$

---

١٦) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢\text{س} - ٥| & ، \quad ٠ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{س}[\frac{٢}{٣}\text{س}] & ، \quad ٣ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$

اوجد $\text{ق}'(\text{س})$ على $[٠،٤]$

الحل :



$|٢\text{س} - ٥| \Rightarrow \text{س} = ٢,٥$

$[\frac{٢}{٣}\text{س}] = \{٢ \quad ، \quad ٣ \le \text{س} \le ٤$

$$\Rightarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ - ٢\text{س} & ، \quad ٠ \le \text{س} \le ٢,٥ \\ ٢\text{س} - ٥ & ، \quad ٢,٥ \le \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} & ، \quad ٣ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

الاتصال :

- فترات مفتوحة
- التحول : عندما $\text{س} = ٢,٥$ متصل

  عندما $\text{س} = ٣$ متصل
- الاطراف $\Rightarrow$ مغلقة $\Rightarrow$ متصل عندها
- النتيجة : ق(س) متصل على $[٠،٤] - \{٣\}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -٢ & ، \quad ٠ < \text{س} < ٢,٥ \\ ٢ & ، \quad ٢,٥ < \text{س} < ٣ \\ ٢ & ، \quad ٣ < \text{س} < ٤ \\ \text{غ.م} & ، \quad \text{س} = ٠، ٤، ٣، ٢,٥ \end{cases}$$

$\text{ق}'_{+}(٢,٥) = ٢$ ، $\text{ق}'_{-}(٢,٥) = -٢$

$\Rightarrow \text{ق}'(٢,٥)$ غير موجودة

---

١٧) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{[٠,٥\text{س}]}{\text{هـ}(\text{س})}$ اذا علمت ان $\text{هـ}(٣) = ٣$ ، $\text{هـ}'(٣) = -٢$ ، اوجد $\text{ق}'(٣)$

الحل :

$[٠,٥\text{س}] = ١$ عندما $\text{س} = ٣$

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{هـ}(\text{س})}$ عندما $\text{س} = ٣$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}} \Rightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٢}{٩}$

---

١٨) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٨\text{س} - ٦| & ، \quad ٢ \le \text{س} < ٣ \\ \text{س}[٢\text{س}] & ، \quad ٣ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$

اوجد $\text{ق}'(\text{س})$ للاقتران في $[٢،٤)$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٨\text{س} - ٦ & ، \quad ٢ \le \text{س} < ٣ \\ ٦\text{س} & ، \quad ٣ \le \text{س} < ٣,٥ \\ ٧\text{س} & ، \quad ٣,٥ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

الاتصال :

ق(س) غير متصل عندما $\text{س} = ٣,٥$

$\Rightarrow$ ق(س) متصل على $[٢،٤) - \{٣,٥\}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٨ & ، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٦ & ، \quad ٣ < \text{س} < ٣,٥ \\ ٧ & ، \quad ٣,٥ < \text{س} < ٤ \\ \text{غ.م} & ، \quad \text{س} = ٢، ٣,٥، ٣ \end{cases}$$

$\text{ق}'_{-}(٣) = ٨$ ، $\text{ق}'_{+}(٣) = ٦$

$\Rightarrow \text{ق}'_{+}(٣) \ne \text{ق}'_{-}(٣) \Rightarrow \text{ق}'(٣)$ غير موجودة

١٩) اذا كـــان ق(س) = { $\frac{١}{س − ١}$ ، س ≥ ٢
أ + ب س^{٢} ، س < ٢

ق(س) قـابلا للاشتقاق عندما س = ٢ ، اوجد قيمـة الثابتين أ ، ب

الحل :

بما ان ق(س) قابل للاشتقاق عندما س = ٢

⇐ ق'$_{+}$(٢) = ق'$_{-}$(٢)

ق'(س) = { $\frac{−١}{(س − ١)^{٢}}$ ، س > ٢
٢ب س ، س < ٢

−١ = ٤ب ⇐ $\boxed{ب = \frac{−١}{٤}}$

ق(س) متصل عندما س = ٢

⇐ نهـا$_{س←٢^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س←٢^{-}}$ ق(س)

⇐ ١ = أ + $\frac{−١}{٤}$ × ٤ ⇐ $\boxed{أ = ٢}$

---

٢٠) اذا كان ق(س) = { س^{٣} − ٣س ، ٠ ≤ س < ١
أس^{٢} + ب س ، ١ ≤ س ≤ ٢

قابلا للاشتقاق على (٠، ٢) ، فجد قيم أ ، ب

الحل :

بما ان ق(س) قابل للاشتقاق على (٠، ٢)

⇐ ق'(س) قابل للاشتقاق عندما س = ١

⇐ ق'$_{+}$(١) = ق'$_{-}$(١)

ق'(س) = { ٣س^{٢} − ٣ ، ٠ < س < ١
٢أس + ب ، ١ < س < ٢

ق'$_{+}$(١) = ق'$_{-}$(١) ⇐ ٢أ + ب = صفر ......(١)

ق(س) متصل عندما س = ١

⇐ نهـا$_{س←١^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س←١^{-}}$ ق(س)

⇐ أ + ب = −٢ ....(٢)

٢أ + ب = ٠ ....(١)

−أ − ب = ٢ ....(٢)

⇐ $\boxed{أ = ٢}$ ⇐ ٢ + ب = −٢ ⇐ $\boxed{ب = −٤}$

وزاري

٢١) اذا كان ق(س) = { أس^{٢} + ٥س ، س ≥ ٢
٣س^{٣} + ب ، س < ٢

قابلا للاشتقاق عندما س = ٢ ، اوجد قيم أ ، ب

الحل :

الاتصال عندما س = ٢ ⇐

نهـا$_{س←٢^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س←٢^{-}}$ ق(س) = ق(٢)

⇐ ٣ × (٢)^{٣} + ب = أ × (٢)^{٢} + ٥ × ٢

٢٤ + ب = ٤أ + ١٠

⇐ ب − ٤أ = −١٤ ....(١)

من شروط الاشتقاق عند س = ٢

ق'$_{+}$(٢) = ق'$_{-}$(٢)

ق'(س) = { ٢أس + ٥ ، س > ٢
٩س^{٢} ، س < ٢

⇐ ٤أ + ٥ = ٣٦ ⇐ ٤أ = ٣١ ⇐ $\boxed{أ = \frac{٣١}{٤}}$...(٢)

عوض (٢) في (١) ⇐ ب − ٤ × $\frac{٣١}{٤}$ = −١٤

⇐ ب − ٣١ = −١٤ ⇐ $\boxed{ب = ١٧}$

وزاري

٢٢) اذا كـــــان ق(س) = $\frac{١}{٣ + أس}$ ، س ≠ $\frac{−٣}{أ}$

وكانت ق'(١) = ٢ ، اوجد قيم الثابت (أ)

الحل :

ق(س) = $\frac{١}{٣ + أس}$ ⇐ ق'(س) = $\frac{−أ}{(٣ + أس)^{٢}}$

⇐ ق'(١) = ٢ ⇐ ٢ = $\frac{−أ}{(٣ + أ)^{٢}}$

⇐ ٢(٣ + أ)^{٢} = −أ

٢(٩ + ٦أ + أ^{٢}) = −أ

١٨ + ١٢أ + ٢أ^{٢} = −أ

٢أ^{٢} + ١٣أ + ١٨ = ٠ ⇐ (٢أ + ٩)(أ + ٢) = ٠

⇐ اما أ = −٢ او أ = $\frac{٩}{−٢}$

وزاري

٢٣) اذا كان $ق(١) = -٣$ ، $ق'(١) = ٢$ ، فجد $\left(\sqrt{س}\cdot ق(س)\right)'(١)$

الحل :

$$\left(\sqrt{س}\cdot ق(س)\right)'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}ق(س) + ق'(س)\sqrt{س}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{س}\cdot ق(س)\right)'(١) = \frac{١}{٢}ق(١) + ق'(١)\times\sqrt{١}$$

$$\Rightarrow \frac{١}{٢}\times(-٣) + (٢)\times١ \Rightarrow \frac{-٣}{٢} + ٢ = \frac{١}{٢}$$

وزاري

٢٤) اذا كان $ق(س) = \frac{ك(س)}{هـ(س)}$ حيث $هـ(س) \neq ٠$ وكان كلا من $ك(س)$ ، $هـ(س)$ قابلا للاشتقاق عندما $س = أ$ ، $ق'(أ) = ٠$ ،

اثبت ان : $ق(أ) = \frac{ك'(أ)}{هـ'(أ)}$

الحل :

$$ق(س) = \frac{ك(س)}{هـ(س)}$$

$$ق'(س) = \frac{ك'(س)هـ(س) - هـ'(س)ك(س)}{هـ^٢(س)}$$

$$ق'(أ) = \frac{ك'(أ)هـ(أ) - هـ'(أ)ك(أ)}{هـ^٢(أ)} = ٠$$

$$هـ(أ)ك'(أ) - هـ'(أ)ك(أ) = ٠$$

$$هـ(أ)ك'(أ) = هـ'(أ)ك(أ)$$

بقسمة الطرفين على $هـ'(أ)$ ثم على $هـ(أ)$

$$\frac{ك'(أ)}{هـ'(أ)} = \frac{ك(أ)}{هـ(أ)} \quad لكن \quad ق(أ) = \frac{ك(أ)}{هـ(أ)}$$

$$\Rightarrow \frac{ك'(أ)}{هـ'(أ)} = ق(أ)$$

٢٥) اذا كان $ق(س) = ٢س^٣ - س^٢ + ٦$ حيث $س \in [٠،٢]$ ، اوجد جميع قيم (س) التي تجعل $ق'(س) = ٠$

الحل :

$$ق'(س) = ٦س^٢ - ٢س = ٠$$

$$س(٦س - ٢) = ٠ \Rightarrow س = ٠ \notin (٠،٢)$$

لاحظ ان $س = ٠$ طرف المشتقة غير موجودة

او $٦س - ٢ = ٠ \Rightarrow ٦س = ٢ \Rightarrow س = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} \in (٠،٢)$

٢٦) اذا كان $ق(س) = \frac{س^٣}{٣} - ٤س$ ، $س \in [٠،٤]$ ، اوجد جميع قيم (س) التي تجعل $ق'(س) = ٠$

الحل :

$$ق'(س) = س^٢ - ٤ = ٠$$

$$\Rightarrow س^٢ = ٤ \Rightarrow س = \pm٢$$

عندما $س = -٢ \notin (٠،٤)$

عندما $س = ٢ \in (٠،٤)$

٢٧) اذا كان $ص = س^٣ + س^٢ - س - ١$ ، اوجد جميع النقط على المنحنى بحيث ان $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ + ٢س - ١$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٠ \Rightarrow ٣س^٢ + ٢س - ١ = ٠$$

$$\Rightarrow (٣س - ١)(س + ١) = ٠$$

عندما $س = \frac{١}{٣} \Rightarrow$

$$ص = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ - \frac{١}{٣} - ١ = \frac{-٣٢}{٢٧}$$

عندما $س = -١ \Rightarrow ص = ٣\times١ - ٢ - ١ = ٠$

$\Rightarrow$ النقاط هي : $\left(\frac{١}{٣}، \frac{-٣٢}{٢٧}\right)$ ، $(-١، ٠)$

٢٨) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤ & ، \quad س \geq ٢ \\ ٣س^٢ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

اوجد $ق''(٢)$

الحل :

الاتصال :

$$ق(٢) = ٤$$

$$\underset{س\to٢^{+}}{نهـا} ق(س) = ٤ \quad ، \quad \underset{س\to٢^{-}}{نهـا} ق(س) = ١٢$$

$\Rightarrow ق(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

لان $ق(٢) \neq \underset{س\to٢^{+}}{نهـا} ق(س) \neq \underset{س\to٢^{-}}{نهـا} ق(س)$

$\Rightarrow ق'(٢)$ غير موجودة $\Rightarrow ق''(٢)$ غير موجودة

٢٩) اذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} + ٢)(س^{٣} - ٢س + ١)$

اثبت ان : $ق'(١) \times ق''(١) = ٢١٠$

الحل :

$$ق'(س) = (٦س)(س^{٣} - ٢س + ١) + (٣س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} - ٢)$$

$$ق'(١) = ٦ \times (١ - ٢ + ١) + (٣ + ٢)(٣ - ٢)$$
$$= ٥ \times ١ = ٥$$

$$ق''(س) = (٦س)(٣س^{٢} - ٢) + (٣س^{٢} + ٢)(٦س)$$
$$+ (س^{٣} - ٢س + ١) \times ٦ + ٦س(٣س^{٢} - ٢)$$

$$ق''(١) = (٦)(٣ + ٢) + (٦)(٣ - ٢)$$
$$+ (٦)(١ - ٢ + ١) + ٦(٣ - ٢)$$

$$= ٣٠ + ٦ + ٠ + ٦ = ٤٢$$

$$\Leftarrow ق'(١) \times ق''(١) = ٥ \times ٤٢ = ٢١٠$$

---

٣٠) اذا كان $ق(س) = \frac{٢}{س}$ ، اثبت ان : $\frac{ق'(١)}{ق''(٢)} = -٤$

الحل :

$$ق'(س) = \frac{-٢}{س^{٢}} \Leftarrow ق'(١) = \frac{-٢}{١} = -٢$$

$$ق''(س) = \frac{٢ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٤س}{س^{٤}} = \frac{٤}{س^{٣}}$$

$$\Leftarrow ق''(٢) = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{ق'(٢)}{ق''(٢)} = \frac{-٢}{\frac{١}{٢}} = -٤$$

---

٣١) اذا كان $ص = \frac{١}{٣}م^{٣} + \frac{١}{٢}م^{٢} - ١$ ، اثبت ان :

$$٦ص - ٢م ص' + ٣ص''' = \left(\frac{ص'' - ١}{ص'''}\right)^{٢}$$

الحل :

$$ص' = م^{٢} + م \text{ ، } ص'' = ٢م + ١ \text{ ، } ص''' = ٢$$

$$٦ص - ٢م ص' + ٣ص''' =$$
$$٦(\frac{١}{٣}م^{٣} + \frac{١}{٢}م^{٢} - ١) - ٢م(م^{٢} + م) + ٣(٢)$$
$$= ٢م^{٣} + ٣م^{٢} - ٦ - ٢م^{٣} - ٢م^{٢} + ٦ = م^{٢}$$

$$\left(\frac{ص'' - ١}{ص'''}\right)^{٢} = \left(\frac{٢م + ١ - ١}{٢}\right)^{٢} = (م)^{٢} = م^{٢}$$

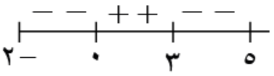
$$\therefore ٦ص - ٢م ص' + ٣ص''' = \left(\frac{ص'' - ١}{ص'''}\right)^{٢}$$

٣٢) اذا كان $ق(س) = |٣س - س^{٢}|$ لكل $س \in [-٢، ٥]$ ، احسب $ق'(س)$

الحل :

نعيد التعريف $|٣س - س^{٢}|$

$$٣س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٣ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠، ٣$$



$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س & \text{، } -٢ \le س < ٠ \\ ٣س - س^{٢} & \text{، } ٠ < س < ٣ \\ س^{٢} - ٣س & \text{، } ٣ < س \le ٥ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & \text{، } -٢ < س < ٠ \\ ٣ - ٢س & \text{، } ٠ < س < ٣ \\ ٢س - ٣ & \text{، } ٣ < س < ٥ \\ \text{غ.م} & \text{، } س = -٢، ٠، ٣، ٥ \end{cases}$$

-٢ ، ٥ : اطراف / $ق'_{+}(٣) \ne ق'_{-}(٣)$

$ق'_{+}(٠) \ne ق'_{-}(٠)$

---

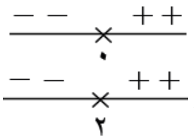
٣٣) اذا كان $ق(س) = |٣س| + |س - ٢|$ ،

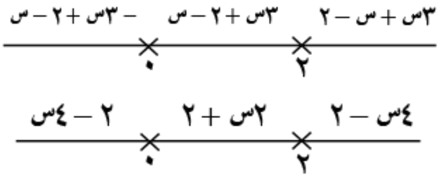
احسب $ق'(س)$

الحل :

$$|٣س| \Leftarrow ٣س = ٠ \Leftarrow س = ٠$$

$$|س - ٢| \Leftarrow س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$$





$$ق'(س) = \begin{cases} -٤ & \text{، } س < ٠ \\ ٢ & \text{، } ٠ < س < ٢ \\ ٤ & \text{، } س > ٢ \\ \text{غ.م} & \text{، } س = ٠، ٢ \end{cases}$$

السبب : $ق'_{+}(٠) \ne ق'_{-}(٠)$

$ق'_{+}(٢) \ne ق'_{-}(٢)$