## معدل التغير في الاقتران :

١) مقدار التغير في السينات $= \Delta س = س_٢ - س_١$

٢) مقدار التغير في الاقتران $= \Delta ص = ص_٢ - ص_١$

$= هـ(س_٢) - هـ(س_١)$

٣) معدل التغير $= \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

### امثلة :

١) احسب معدل التغير اذا كان $هـ(س) = س^٢ + ٢$ عندما تتغير $(س)$ من $(١)$ الى $(٥)$

الحل :

معدل التغير $= \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٥) - هـ(١)}{٥ - ١} = \frac{(٢+٢٥) - (٢+١)}{٥ - ١} = \frac{٢٤}{٤}$

٢) $هـ(س) = \sqrt{٢س + ١}$ عندما تتغير $(س)$ من $(٤)$ الى (صفر) ، احسب معدل التغير

الحل :

معدل التغير $= \frac{هـ(٠) - هـ(٤)}{٤ - ٠} = \frac{\sqrt{٩} - \sqrt{١٧}}{-٤} = \frac{٢\not}{٤\not} = \frac{١}{٢}$

٣) $هـ(س) = \begin{cases} |٢س - ١| & ، \ س \geq ٢ \\ [س + ١] & ، \ س < ٢ \end{cases}$

احسب معدل التغير عندما $س_١ = ٠$ ، $\Delta س = ٩$

الحل :

$س_٢ = \Delta س + س_١$

$س_٢ = ٩ + ٠ \Leftarrow س_٢ = ٩$

معدل التغير $= \frac{هـ(٩) - هـ(٠)}{٩ - ٠} = \frac{١٠ - ١}{٩} = \frac{٩}{٩} = ١$

٤) $هـ(س) = \frac{٥}{س}$ ، احسب معدل التغير عندما تتغير $(س)$ من $(\frac{١}{٢})$ الى $(٣)$

الحل :

معدل التغير $= \frac{هـ(٣) - هـ(\frac{١}{٢})}{٣ - \frac{١}{٢}} = \frac{\frac{٥}{٣} - \frac{٥}{\frac{١}{٢}}}{٣ - \frac{١}{٢}} \times \frac{٣}{٣} = \frac{\frac{٥}{٣} - ١٠}{٢,٥} \times ٣$

$= \frac{\frac{٥}{٣} - \frac{٣٠}{٣}}{٢,٥} = \frac{-٢٥}{٣}$

٥) اذا كان $هـ(س) = [٣س]$ ، $س_١ = ٢$ ، $\Delta س = ٢,٥$ ، احسب مقدار التغير في الاقتران $هـ(س)$

الحل :

$س_٢ = \Delta س + س_١ = ٢,٥ + ٢ = ٤,٥$

$\Delta ص = هـ(س_٢) - هـ(س_١)$

$= هـ(٤,٥) - هـ(٢) = ١٣ - ٦ = ٧$

٦) اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ ٤ & ، \ ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

احسب معدل التغير في $[٤،٠]$

الحل :

$\frac{هـ(٤) - هـ(٠)}{٤ - ٠} = \frac{(٤-) - (٤)}{٤ - ٠} = \frac{٨}{٤} = ٢$

٧) اذا زاد طول ضلع مربع $(س)$ من $(٤)$سم الى $(٦)$سم ، احسب الزيادة في مساحة المربع

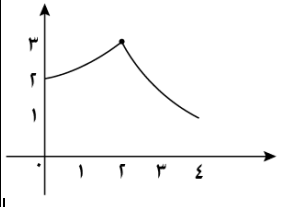
الحل : $م = س^٢$ (مساحة المربع)

$م_١ = س_١^٢ = (٤)^٢ = ١٦$

$م_٢ = س_٢^٢ = (٦)^٢ = ٣٦$

$\Delta م = م_٢ - م_١ = ٣٦ - ١٦ = ٢٠$سم$^٢$

٨) من الرسم المجاور ، احسب معدل التغير في $[٤،٠]$




الحل :

$= \frac{هـ(٤) - هـ(٠)}{٤ - ٠} = \frac{٢ - ١}{٤} = \frac{-١}{٤}$

٩) اذا كان معدل تغير $\text{ه}(س) = ٤$ في $[٢،٠]$ وكان $\text{هـ}(س) = س^{٣} + ٣\text{ه}(س)$ ، احسب متوسط تغير $\text{هـ}(س)$ في $[٢،٠]$

الحل :

$$\text{معدل } \text{هـ}(س) = \frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(٠)}{٠ - ٢} = \frac{(٨ + ٣\text{ه}(٢)) - (٠ + ٣\text{ه}(٠))}{٠ - ٢}$$

$$= \frac{٨ + ٣\text{ه}(٢) - ٣\text{ه}(٠)}{٠ - ٢}$$

$$= \left(\frac{\text{ه}(٢) - \text{ه}(٠)}{٠ - ٢}\right)٣ + \frac{٨}{٢}$$

$$= ٣ \times \text{متوسط } \text{ه}(س) + ٤$$

$$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$$

واجب

١٠) اذا كان $\text{هـ}(س) = ٢\text{ه}(س) - \frac{\text{ا}}{س + ١}$ وكان معدل $\text{هـ}(س)$ في $[١،٠]$ يساوي (١٦) ، والتغير في $\text{ه}(س) = ٥$ فما قيمة (ا)

١١) اذا كان $\text{ه}(س) = س^{٢} + ٢س + ٤$ ، احسب معدل التغير في $\text{ه}(س)$ عندما $س = ١$

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{ه}(١ + \text{هـ}) - \text{ه}(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{(١ + \text{هـ})^{٢} + ٢(١ + \text{هـ}) + ٤ - (١ + ٢ + ٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{١ + ٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ٢ + ٢\text{هـ} - ٣}{\text{هـ}} = \frac{٤\text{هـ}}{\text{هـ}} + \frac{\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = ٤ + \text{هـ}$$

١٢) يتحرك جسيم في مستوى بياني من النقطة $\text{ا}(س، ص)$ الى النقطة $\text{ب}(٣،٣)$ بحيث $\Delta س = ٥$ ، $\Delta ص = ٦$ ، فما احداثيات (ا)

الحل :

$$\Delta س = س_{٢} - س_{١} = ٣ - س$$

$$٥ = ٣ - س \leftarrow س = -٢$$

$$\Delta ص = ص_{٢} - ص_{١} = ٣ - ص$$

$$٦ = ٣ - ص \leftarrow ص = -٣$$

$$\text{ا} = (-٢،٣)$$

١٣) يتحرك جسيم حسب الاقتران $\text{ف}(ن) = ن^{٢} + ٣ن$ احسب السرعة المتوسطة $[٣،١]$

الحل :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٣ - ١} = \frac{١٨ - ٤}{٢} = ٧ \text{ م/ث}$$

١٤) اذا كان $\text{ه}(س) = (\text{اهـ}(س) + \text{ب}) + (\text{جـ}س + \text{د})$ اثبت ان معدل التغير $\text{ه} = \text{ا} \times (\text{معدل } \text{هـ}) + \text{جـ}$

الحل :

لتكن الفترة $[س_{١}، س_{٢}]$

$$\text{معدل التغير } \text{ه} = \frac{\text{ه}(س_{٢}) - \text{ه}(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$= \frac{(\text{اهـ}(س_{٢}) + \text{ب} + \text{جـ}س_{٢} + \text{د}) - (\text{اهـ}(س_{١}) + \text{ب} + \text{جـ}س_{١} + \text{د})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$= \frac{\text{اهـ}(س_{٢}) - \text{اهـ}(س_{١}) + \text{جـ}س_{٢} - \text{جـ}س_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$= \frac{\text{ا}(\text{هـ}(س_{٢}) - \text{هـ}(س_{١}))}{س_{٢} - س_{١}} + \frac{\text{جـ}(س_{٢} - س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$= \text{ا} \times (\text{معدل } \text{هـ}) + \text{جـ}$$

١٥) اذا كان $\text{ه}(س) = س^{٣} + س^{٢}$ احسب ميل القاطع الواصل بين النقاط $(\text{ا}(١)، \text{ه}(١))$ ، $(\text{ب}(٣)، \text{ه}(٣))$

الحل :

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ه}(٣) - \text{ه}(١)}{٣ - ١} = \frac{٣٤}{٢} = ١٧$$

١٦) اذا كان معدل تغير $\text{ه}(س)$ في $[٣،١]$ يساوي (٨) ومعدل تغير $\text{ه}$ في $[٦،٣]$ يساوي (١٣) ، احسب معدل تغير $\text{ه}$ في $[٦،١]$

الحل :

$$\frac{\text{ه}(٣) - \text{ه}(١)}{٣ - ١} = ٨$$

$$\text{ه}(٣) - \text{ه}(١) = ١٦ \ldots\ldots (١)$$

$$\frac{\text{ه}(٦)-\text{ه}(٣)}{٦-٣}=١٣$$

$$\text{ه}(٦)-\text{ه}(٣)=٣٩.....(٢)$$

$$(١)+(٢)\Leftarrow \text{ه}(٦)-\text{ه}(١)=٥٥$$

اقسم الطرفين على $٦-١$

$$\frac{\text{ه}(٦)-\text{ه}(١)}{٦-١}=\frac{٥٥}{٦-١}$$

معدل التغير في $[١،٦]=١١$

---

١٧) اذا كان $\text{ه}(\text{س})=\text{ظاس}$ اثبت ان معدل التغير عندما تتغير (س) من (س) الى $(\text{س}+\text{هـ})$ يساوي $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س ظاهـ}}{\text{هـ}(١-\text{ظاس ظاهـ})}$

الحل :

معدل التغير $=\frac{\text{ه}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ه}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}(\text{ظا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ظاس})$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ظاس}+\text{ظاهـ}}{١-\text{ظاس ظاهـ}}-\frac{\text{ظاس}}{١}\right)$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\times\frac{(\text{ظاس}+\text{ظاهـ}-\text{ظاس}+\text{ظا}^{٢}\text{س ظاهـ})}{(١-\text{ظاس ظاهـ})}$$

$$=\frac{١}{\text{هـ}}\frac{\text{ظاهـ}(١+\text{ظا}^{٢}\text{س})}{١-\text{ظاهـ ظاس}}=\frac{١}{\text{هـ}}\times\frac{\text{ظاهـ قا}^{٢}\text{س}}{١-\text{ظاهـ ظاس}}$$

---

## تمارين وتدريبات

١) اذا كان $\text{ه}=\text{س}^{٣}-[\frac{١}{٢}\text{س}]$ ، احسب معدل التغير اذا كانت $\text{س}_{١}=٢,٤$ ، $\text{س}_{٢}=٢,٣$

الحل :

معدل التغير $=\frac{\text{ه}(٢,٣)-\text{ه}(٢,٤)}{٢,٤-٢,٣}$

$$=\frac{(١-١٣,٨٢٤)-(١-١٢,١٦٧)}{٠,١-}=١٦,٥٧$$

٢) اذا كان القاطع المار بالنقاط $(٢،\text{ه}(٢))$ ، $(٣،\text{ه}(٣))$ يصنع زاوية قياسها $(١٢٠)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب متوسط التغير اذا تغيرت (س) من س $=٢$ الى س $=٣$

الحل :

متوسط التغير = ميل القاطع $=\text{ظا}١٢٠=-\text{ظا}٦٠=-\sqrt{٣}$

---

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $\text{ف}=٢\text{ن}^{٢}-٢٠\text{ن}+٢$ ، احسب السرعة المتوسطة في $[٢،٦]$

الحل :

$$\frac{\text{ف}(٦)-\text{ف}(٢)}{٦-٢}=\frac{(٢+١٢٠-٧٢)-(٢+٤٠-٨)}{٤}$$

$$=\frac{٥٦}{٤}=١٤$$

---

٤) اذا كان $\text{ه}=٢\text{س}^{٢}+\text{س}-١$ وكان معدل تغير ه يساوي (٤) عندما تتغير (س) من $(\text{س}_{١})$ الى $(\text{س}_{١}+١)$ ، فما قيمة $(\text{س}_{١})$

الحل :

معدل التغير $=\frac{\text{ه}(\text{س}_{١}+١)-\text{ه}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{١}+١-\text{س}_{١}}$

$$٤=\frac{٢(\text{س}_{١}+١)^{٢}+(\text{س}_{١}+١)-١-(٢\text{س}_{١}^{٢}+\text{س}_{١}-١)}{\text{س}_{١}+١-\text{س}_{١}}$$

$$٤=٢(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)+\text{س}_{١}+١-٢\text{س}_{١}^{٢}-\text{س}_{١}+١$$

$$٤=٤\text{س}_{١}+٢\Leftarrow \text{س}_{١}=\frac{١}{٤}$$

---

٥) اذا كان $\text{ه}(\text{س})=\text{س}^{٢}-٢$ احسب معدل التغير في ه عندما تتغير (س) من (٣) الى $(٣+\text{هـ})$ بدلالة (هـ)

الحل :

معدل التغير $=\frac{\text{ه}(٣+\text{هـ})-\text{ه}(٣)}{\text{هـ}}$

$$=\frac{(٣+\text{هـ})^{٢}-٢-(٣^{٢}-٢)}{\text{هـ}}$$

$$=\frac{٩+٦\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}-٢-٩+٢}{\text{هـ}}=\frac{\text{هـ}(٦+\text{هـ})}{\text{هـ}}=٦+\text{هـ}$$

٦) ليكن ق(س) = أس$^{٢}$ − ٣س + ٤ وكان معدل التغير ق في [١، ٣] ، فما قيمة (أ)

الحل :

معدل التغير = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

$\frac{٣}{١} = \frac{(٩أ - ٩ + ٤) - (أ - ٣ + ٤)}{٢}$

٦ = ٨أ − ٦ ← أ = $\frac{١٢}{٨}$

٧) اذا كان معدل تغير ق في [−١، ٣] يساوي (−٤) احسب معدل تغير (هـ) حيث هـ(س) = ٢ق(س) − ٣س$^{٢}$ على [−١، ٣]

الحل :

معدل التغير = $\frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - (-١)}$

= $\frac{(٢ق(٣) - ٣(٣)^{٢}) - ٢(ق(-١) - ٣(-١)^{٢})}{٣ - (-١)}$

= $\frac{٢ق(٣) - ٢ق(-١)}{٤} - \frac{٢٧ - ٣}{٤}$

= ٢$\left(\frac{ق(٣) - ق(-١)}{٤}\right) - \frac{٢٤}{٤}$ = ٢ × −٤ − ٦ = −١٤

٨) اذا كانت ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن$^{٢}$ ، احسب السرعة المتوسطة اذا تغيرت (ن) من (صفر) الى (△ن) بدلالة (△ن)

الحل :

السرعة المتوسطة = $\frac{ف(△ن) - ف(٠)}{△ن}$

= $\frac{٤٠(△ن) - ٥(△ن)^{٢} - ٠}{△ن}$

= $\frac{\cancel{△ن}(٤٠ - ٥(△ن))}{\cancel{△ن}}$ = ٤٠ − ٥(△ن)

٩) اذا كانت ص = ق(س) = ٥ − س$^{٢}$ ، احسب معدل التغير في الاقتران ق اذا تغيرت (س) من (٢) ال (٢,١)

الحل :

$\frac{ق(٢,١) - ق(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٠,٥٩ - ١}{٠,١} = \frac{-٠,٤١}{٠,١} = \frac{-٤١}{١٠}$

١٠) اذا كانت ق = [$\frac{١}{٢}$س − ١] ، احسب معدل التغير في الاقتران في [٣، ٥]

الحل :

معدل التغير = $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \frac{١ - ٠}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

١١) اذا كان ميل القاطع المار بالنقاط (١، ق(١)) ، (٣، ق(٣)) يضع زاوية (١٣٥) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب معدل التغير في ق في [١، ٣]

الحل :

معدل التغير = ظا١٣٥ = −١

١٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة : ف(ن) = ٣ن$^{٢}$ − ٤ن + ٢٠ ، احسب السرعة المتوسطة على [١، ٤]

الحل :

= $\frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣}$ = ١١

١٣) اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في [١، ٤] يساوي (٦) وكانت هـ(س) = ٣س − ق(س) + ٢ ، احسب معدل التغير هـ(س) في [١، ٤]

الحل :

معدل التغير هـ(س) = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١}$

= $\frac{(١٢ - ق(٤) + ٢) - (٣ - ق(١) + ٢)}{٣}$

= $\frac{١٢ - ٣}{٣} - \frac{ق(٤) - ق(١)}{٣}$ = ٣ − ٦ = −٣

كن صبوراً , الدروس التي تتعلمها اليوم ستُفيدك غداً.
Be patient the lessons you learn today will benefit you tomorrow

واجب

١٤) اذا كان معدل التغير في $\text{و}(س)$ في الفترة $[٢،٥]$ يساوي $(٧)$ وكان معدل التغير على $[٥،٩]$ يساوي $(١٤)$، احسب معدل التغير على $[٢،٩]$

---

١٥) اذا كان معدل التغير في $\text{و}(س)$ على $[١،٤]$ يساوي $(٣)$ وكان $\text{و}(١)+\text{و}(٤)=٢$ ، احسب معدل التغير في الاقتران $\text{هـ}(س)=\text{و}^{٢}(س)$ في $[١،٤]$

الحل :

$$\text{معدل تغير هـ}(س)=\frac{\text{هـ}(٤)-\text{هـ}(١)}{٤-١}=\frac{\text{و}^{٢}(٤)-\text{و}^{٢}(١)}{٤-١}$$

$$=\frac{\text{و}(٤)+\text{و}(١)}{٣}\times(\text{و}(٤)-\text{و}(١))=٢\times٣=٦$$

---

١٦) اذا كان القاطع المار بالنقاط $(١،\text{و}(١))$ ، $(٤،٢)$ الواقعين على المنحنى يصنع زاوية قياسها $(\frac{\pi٣}{٤})$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب $\text{و}(١)$

الحل :

$$\text{ميل القاطع}=\frac{\text{و}(٢)-\text{و}(-١)}{٢-١}$$

$$\text{ظا}\frac{\pi٣}{٤}=\frac{٤-\text{و}(١)}{١}$$

$$-١=٤-\text{و}(١)\leftarrow\text{و}(١)=٥$$

---

١٧) اذا كان $\text{و}(س)=(س^{٢}+س)^{-١}$ وكان مقدار التغير عندما تتغير $(س)$ من $(١)$ الى $(س_{٢})$ يساوي $(\frac{-١}{٣})$ ، فما قيمة $(س_{٢})$ علما $س_{٢}>٠$

الحل :

$$\text{و}(س_{٢})-\text{و}(س_{١})=\frac{-١}{٣}\Leftarrow\text{و}(س_{٢})-\text{و}(١)=\frac{-١}{٣}$$

$$(س_{٢}^{٢}+س_{٢})^{-١}-(٢)^{-١}=\frac{-١}{٣}$$

$$\frac{١}{س_{٢}^{٢}+س_{٢}}-\frac{١}{٢}=\frac{-١}{٣}\Leftarrow\frac{١}{س^{٢}+س}=\frac{١}{٦}$$

$$س^{٢}+س=٦\Leftarrow س^{٢}+س-٦=٠$$

$$(س+٣)(س-٢)=٠$$

$$س=-٣\ \text{✗}\quad ،\quad س=٢\ \text{✓}$$

## تعريف المشتقة الاولى :

### ملاحظات :

١) يرمز للمشتقة الاولى عند $(س)$ بالرمز $\text{و}'(س)$ او $ص'$ او $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ او $\frac{\text{د}}{\text{د}س}\text{و}(س)$

٢) لا يوجد مشتقة عند اطراف الفترات لأنه عند الطرف نستطيع ان نرسم اكثر من مماس

٣) اذا كانت $\text{و}'(س)$ موجودة يكون الاقتران $\text{و}$ قابل للاشتقاق عند $س=أ$

٤) دائما مجال $\text{و}'(س)$ عبارة عن فترة مفتوحة

٥) $\text{و}'(س)$ موجودة لكل $س\in(أ،ب)$ اذن $\text{و}$ قابل للاشتقاق على $(أ،ب)$

---

## المشتقة الاولى باستخدام التعريف :

١) $\text{و}'(س)=$ نهاية متوسط التغير $=\text{نهـا}\frac{\triangle ص}{\triangle س}$

٢) $\text{و}'(س)=\text{نهـا}_{ع\to س}\frac{\text{و}(ع)-\text{و}(س)}{ع-س}$

٣) $\text{و}'(س)=\text{نهـا}_{هـ\to٠}\frac{\text{و}(س+هـ)-\text{و}(س)}{هـ}$

٤) $\text{و}'(س)=\text{نهـا}_{\triangle س\to٠}\frac{\text{و}(س+\triangle س)-\text{و}(س)}{هـ}$

٥) $\text{و}'(س)=\text{نهـا}_{ع\to أ}\frac{\text{و}(ع)-\text{و}(أ)}{ع-أ}$

---

يجب أن تمتلك في عقلك ثقافة النجاح

قبل أن تحاول تحقيق النجاح في حياتك

**امثلة :**

١) اذا كـــان $هـ(س) = ٢س^{٢} + ٢س + ٥$ ، احســـب $هـ'(س)$ باستخدام التعريف للمشتقة

الحل :

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(٢ع^{٢} + ٢ع + ٥) - (٢س^{٢} + ٢س + ٥)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع^{٢} + س^{٢})}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + ٢ = ٤س + ٢$$

---

٢) اذا كـــان $هـ(س) = \sqrt{س + ٣}$ ، احســـب $هـ'(١)$ باستخدام التعريف

الحل :

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$هـ'(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{(ع) - (١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{ع - ٣ + \sqrt{ع + ٣}}{ع - ١} \times \frac{٢ + \sqrt{ع + ٣}}{٢ + \sqrt{ع + ٣}}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{ع + ٣ - ٤}{(ع - ١)(٢ + \sqrt{ع + ٣})} = \lim_{ع \to ١} \frac{ع - ١}{(ع - ١)(٤)} = \frac{١}{٤}$$

---

٣) اذا كـــان $هـ(س) = \frac{١}{س + ١}$ ، احســـب $هـ'(س)$ باستخدام التعريف

الحل :

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ع + ١} - \frac{١}{س + ١}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{س - ١ - ع + ١}{(ع - س)(س + ١)(ع + ١)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{(ع - س)(س + ١)(ع + ١)}$$

$$= -\lim_{ع \to س} \frac{١}{(س + ١)(ع + ١)} = \frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$$

**واجب**

٤) اذا كـان $هـ(س) = \sqrt[٣]{٥س + ٣}$ ، احسب $هـ'(١)$ باستخدام التعريف للمشتقة

---

٥) $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \quad س \geq ١ \\ ٢س & ، \quad س < ١ \end{cases}$

احسب $هـ'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

لان $س = ١$ نقطة تحول نأخذ المشتقة من اليمين واليسار

$$هـ'_{+}(١) = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{هـ(ع) - هـ(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{ع^{٢} - ١ - ٢}{ع - ١} = ٢$$

$$هـ'_{-}(١) = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{هـ(ع) - هـ(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٢ع - ٢}{ع - ١} = ٢$$

بما ان $هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١) = ٢$ (موجودة)

---

**واجب**

٦) اذا كـــــان $هـ(س) = \begin{cases} ٦س^{٢} + ٥ & ، \quad س < ٢ \\ ٩س - ٢ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$

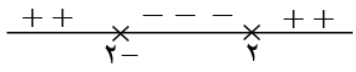
احسب $هـ'(٣)$ باستخدام التعريف

---

٧) اذا كـان $هـ(س) = |س^{٢} - ٤|$ ، احسـب $هـ'(٢)$ باستخدام التعريف

الحل :

نعيد التعريف $|س^{٢} - ٤|$




$س^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٢ ، -٢$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، \quad س < -٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، \quad -٢ \geq س \geq ٢ \\ س^{٢} - ٤ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

$$هـ'_{+}(٢) = \lim_{ع \to ٢^{+}} \frac{ع^{٢} - ٤ - ٠}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢^{+}} \frac{(ع - ٢)(ع + ٢)}{ع - ٢} = ٤$$

$$\text{ق}'_{-}(٢) = \lim_{\text{ع}\to ٢^{-}} \frac{٤ - \text{ع}^{٢} - ٠}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to ٢^{-}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(٢ - \text{ع})}}\,(٢ + \text{ع})}{\cancel{\text{ع} - ٢}} = -٤$$

$\text{ق}'_{+}(٢) \neq \text{ق}'_{-}(٢) \Leftarrow \text{ق}'(٢)$ غير موجودة

**واجب**

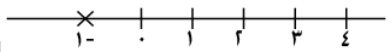
٨) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ١| - |\text{س}|$ ، احسب $\text{ق}'(\text{س})$ عند النقطة $(٠،١)$ باستخدام التعريف للمشتقة

٩) $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س} + ١]$ باستخدام التعريف للمشتقة ، احسب : أ) $\text{ق}'(٣,٥)$ ب) $\text{ق}'(٣)$

الحل :

نعيد التعريف اكبر عدد صحيح

$[\text{س} + ١]$ ل $= ١$ / $\text{س} = -١$




$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ & ، \quad ٢ \le \text{س} < ٣ \\ ٤ & ، \quad ٣ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

أ) $$\text{ق}'(٣,٥) = \lim_{\text{ع}\to ٣,٥} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣,٥)}{\text{ع} - ٣,٥}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to ٣,٥} \frac{٤ - ٤}{\text{ع} - ٣,٥} = ٠$$

ب) $$\text{ق}'_{+}(٣) = \lim_{\text{ع}\to ٢^{+}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣} = \lim_{\text{ع}\to ٣^{+}} \frac{٤ - ٤}{\text{ع} - ٣} = ٠$$

$$\text{ق}'_{-}(٣) = \lim_{\text{ع}\to ٣^{-}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to ٣^{-}} \frac{٣ - ٤}{\text{ع} - ٣} = \frac{-١}{٠} = \text{غ.م}$$

$\text{ق}'(٣) =$ غير موجودة

**واجب**

١٠) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{\text{س}}{٢} + ١\right]$ باستخدام تعريف المشتقة ، احسب : أ) $\text{ق}'(٥)$ ب) $\text{ق}'(٤)$

١١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، احسب $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}} \quad \text{(متطابقة)}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{٢\,\text{جا}\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢} - \text{جا}\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}\,\text{جتا}\frac{\text{س} + \text{س}}{٢} = \text{جتاس}$$

**واجب**

١٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ ، احسب $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

١٣) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{٢}٢\text{س}$ باستخدام تعريف المشتقة احسب $\text{ق}'(\text{س})$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{جا}^{٢}٢\text{ع} - \text{جا}^{٢}٢\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{(\text{جا}٢\text{ع} - \text{جا}٢\text{س})(\text{جا}٢\text{ع} + \text{جا}٢\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\left(٢\,\text{جتا}\frac{٢\text{ع} + ٢\text{س}}{٢}\,\text{جا}\frac{٢\text{ع} - ٢\text{س}}{٢}\right)(\text{جا}٢\text{ع} + \text{جا}٢\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to \text{س}} ٢\,\text{جتا}(\text{ع} + \text{س}) \times ١ \times (\text{جا}٢\text{ع} + \text{جا}٢\text{س})$$

$$= ٤\,\text{جتا}٢\text{س}\,\text{جا}٢\text{س}$$

١٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\,\text{جتا}٢\text{س}$ ، احسب $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{(\text{ع}^{٢} + ٣\,\text{جتا}٢\text{ع}) - (\text{س}^{٢} + ٣\,\text{جتا}٢\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٣جتا٢ع - ٣جتا٢س}{ع - س}$ (متطابقة)

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٣ \times -٢جا\frac{٢ع + ٢س}{٢} جا\frac{٢ع - ٢س}{٢}}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} (ع + س) + \text{نهـا}_{ع \to س} ٣ \times (-٢جا(ع + س))$

$= ٢س + ٣ \times (-٢جا٢س)$

**واجب**

١٥) اذا كان $و(س) = جا٢س$ ، احسب $و'(\frac{\pi}{٤})$ باستخدام التعريف

١٦) $و(س) = س جا٢س$، احسب $و'(س)$ باستخدام التعريف

الحل :

$و'(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع جا٢ع - س جا٢س}{ع - س}$ نضيف ونطرح $س جا٢ع$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع جا٢ع - س جا٢ع}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{س جا٢ع - س جا٢س}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{جا٢ع (ع - س)}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} س \left(\frac{جا٢ع - جا٢س}{ع - س}\right)$

$= جا٢س + \text{نهـا}_{ع \to س} س \left(\frac{٢جتا\frac{٢ع + ٢س}{٢} جا\frac{٢ع - ٢س}{٢}}{ع - س}\right)$

$= جا٢س + \text{نهـا}_{ع \to س} س (٢جتا(س + ع))$

$= جا٢س + ٢س جتا٢س$

١٧) اذا كان $و(س) = \frac{جاس}{س}$ ، احسب $و'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\frac{جاع}{ع} - \frac{جاس}{س}}{ع - س} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{س جاع - ع جاس}{(ع)(س)(ع - س)}$

نضيف ونطرح $س جاس$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{س جاع - س جاس}{(ع)(س)(ع - س)} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{س جاس - ع جاس}{(ع)(س)(ع - س)}$

$= س \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{جاع - جاس}{(ع)(س)(ع - س)} + \frac{جاس}{س^{٢}} \times -١$

$= س \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢جا\frac{ع - س}{٢} جتا\frac{ع + س}{٢}}{(ع)(س)(ع - س)} + \frac{-جاس}{س^{٢}}$

$= \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}}$

١٨) اذا كانت $و(٣) = ٤$ ، $و'(٣) = ٥$ ، وكان $ل(س) = س^{٢} و(س)$ احسب $ل'(٣)$ باستخدام التعريف

الحل :

$ل'(٣) = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ل(س) - ل(٣)}{س - ٣}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} و(س) - ٩و(٣)}{س - ٣}$ نضيف ونطرح $٩و(س)$

$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} و(س) - ٩و(س)}{س - ٣} + \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٩و(س) - ٩و(٣)}{س - ٣}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٣} و(س) \left(\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}\right) + ٩ \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{و(س) - و(٣)}{س - ٣}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٣} و(س) \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} + ٩ \times و'(٣)$

$= و(٣)(٣ + ٣) + ٩ \times و'(٣)$

$= ٤ \times ٦ + ٩ \times ٥ = ٦٩$

١٩) اذا كانت $و'(٣) = ١٨$ ، احسب $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{و(٣ + هـ) - و(٣ - هـ)}{هـ}$

الحل :

نضيف ونطرح $و(٣)$

$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{و(٣ + هـ) - و(٣)}{هـ} + \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{و(٣) - و(٣ - هـ)}{هـ}$

$و'(٣) + \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{و(ص + هـ) - و(ص)}{هـ}$

$و'(٣) + و'(٣)$

$= ٢و'(٣) = ٢ \times ١٨ = ٣٦$

$٣ - هـ = ص$
$هـ + ص = ٣$
$هـ \to ٠$ ، $ص \to ٣$

٢٠) اذا كان مقدار التغير في $و$ يساوي $٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$ ، احسب $و'(٢)$

الحل :

مقدار التغير $= ٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$

$و(س+هـ) - و(س) = ٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$

بالقسمة على $(هـ)$ وبأخذ النهاية للطرفين

$$\text{نهـ}_{هـ\to٠} \frac{و(س+هـ)-و(س)}{هـ} = \text{نهـ}_{هـ\to٠} \frac{٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}}{هـ}$$

$$و'(س) = \text{نهـ}_{هـ\to٠} \frac{٥س^{٢}هـ}{هـ} + \frac{٨سهـ^{٢}}{هـ}$$

$و'(س) = ٥س^{٢} + ٠ \Leftarrow و'(٢) = ٥(٢)^{٢} = ٢٠$

---

٢١) اذا كان مقدار التغير في $و(س)$ عندما تتغير $(س)$ من $(٣)$ الى $(ع)$ هو $ع^{٣} - ٢٧$ ، احسب $و'(٣)$

الحل :

مقدار التغير $= ع^{٣} - ٢٧$

$و(ع) - و(٣) = ع^{٣} - ٢٧$

بالقسمة على $(ع - ٣)$ وبأخذ النهاية للطرفين

$$\text{نهـ}_{ع\to٣} \frac{و(ع)-و(٣)}{ع-٣} = \text{نهـ}_{ع\to٣} \frac{ع^{٣}-٢٧}{ع-٣}$$

$$و'(٣) = \text{نهـ}_{ع\to٣} \frac{(ع-٣)(ع^{٢}+٣ع+٩)}{ع-٣}$$

$و'(٣) = ٢٧$

---

**ملاحظة :**

اذا كان السؤال مطلق او متشعب او اكبر عدد صحيح وطلب السؤال $و'(س)$ باستخدام التعريف نتبع الخطوات التالية :

١) عندما $س > ا$ ، $و'_{+}(ا)$

٢) عندما $س < ا$ ، $و'_{-}(ا)$

٣) عند نقاط التحول $س = ا$

٤) النتيجة النهائية على شكل اقتران متشعب

---

**سؤال :**

اذا كان $و(س) = ٥س - |٣س|$ ، احسب $و'(س)$ باستخدام التعريف

الحل :

نعيد التعريف $|٣س|$

| − | − | ٠ | + | + |
|---|---|---|---|---|

$$و(س) = \begin{cases} ٥س + (٣س) & ، \quad س < ٠ \\ ٥س - (٣س) & ، \quad س > ٠ \end{cases}$$

$$و(س) = \begin{cases} ٨س & ، \quad س > ٠ \\ ٢س & ، \quad س < ٠ \end{cases}$$

١) عندما $س < ٠$

$$و'_{+}(٠) = \text{نهـ}_{ع\to س} \frac{و(ع)-و(س)}{ع-س} = \text{نهـ}_{ع\to٠} \frac{٢ع-٠}{ع} = ٢$$

٢) عندما $س > ٠$

$$و'_{-}(٠) = \text{نهـ}_{ع\to٠^{-}} \frac{و(ع)-و(٠)}{ع-٠} = \text{نهـ}_{ع\to٠^{-}} \frac{٨ع-٠}{ع-٠} = ٨$$

٣) التحول : $و'_{+}(٠)$ ، $و'_{-}(٠)$ $\Leftarrow ٨ = و'(٠) = غ.م$

٤) النتيجة : $و' = \begin{cases} ٢ & ، \quad س < ٠ \\ ٨ & ، \quad س > ٠ \\ غ.م & ، \quad س = ٠ \end{cases}$

---

٢٢) اذا كان $و(س) = ظاس$ استخدم تعريف المشتقة لايجاد $و'(س)$

الحل :

$$و'(س) = \text{نهـ}_{ع\to س} \frac{و(ع)-و(س)}{ع-س}$$

$$= \text{نهـ}_{ع\to س} \frac{ظاع - ظاس}{ع-س} \quad \text{(متطابقة)}$$

$$= \text{نهـ}_{ع\to س} \frac{ظا(ع-س)(١+ظاعظاس)}{ع-س}$$

$$= \text{نهـ}_{ع\to س} \frac{ظا(ع-س)}{ع-س} \times (١+ظاعظاس)$$

$$= ١ \times (١+ظاسظاس)$$

$$= ١ \times (١+ظا^{٢}س) = قا^{٢}س$$

٢٣) اذا كـــان $و(س) = ق٢س$ ، احســـب $و'(س)$ باستخدام التعريف

الحل :

$$و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ق٢ع - ق٢س}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{جتا٢ع} - \frac{١}{جتا٢س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جتا٢س - جتا٢ع}{(جتا٢ع)(جتا٢س)(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢جا\frac{٢س + ٢ع}{٢} \; جا\frac{٢س - ٢ع}{٢}}{(جتا٢ع)(جتا٢س)(ع - س)}$$

$$= \frac{+٢جا٢س}{جتا٢س جتا٢س} = ٢ق٢س ظا٢س$$

---

٢٤) اذا كـــان $و(س) = (س - ١)ل(س)$ اثبـــت ان $و'(١) = ل(١)$

الحل :

$$و'(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{و(ع) - و(١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(ع - ١)ل(ع) - (١ - ١)ل(١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(ع - ١)ل(ع)}{ع - ١} = ل(١)$$ وهو المطلوب

---

٢٥) اذا كـان $و(س) = \frac{س}{ل(س)}$ استخدم تعريف المشتقة

لاثبات ان $و'(س) = \frac{ل(س) - سل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$

الحل :

$$و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{ع}{ل(ع)} - \frac{س}{ل(س)}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع ل(س) - س ل(ع)}{ل(ع) ل(س)(ع - س)}$$

نضيف ونطرح $س ل(س)$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع ل(س) - س ل(س)}{ل(ع) ل(س)(ع - س)} + \lim_{ع \to س} \frac{س ل(س) - س ل(ع)}{ل(ع) ل(س)(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ل(س)(ع - س)}{ل(ع) ل(س)(ع - س)} + \lim_{ع \to س} \frac{س(ل(س) - ل(ع))}{ل(ع) ل(س)(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ل(س)}{ل(ع) ل(س)} + \lim_{ع \to س} \frac{س \times -١ \times ل'(س)}{ل(س) ل(س)}$$

$$= \frac{ل(س) - س ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$$ وهو المطلوب

---

واجب

٢٦) اذا كـــــــــان $و(٢) = ٥$ ، $و'(٢) = ٧$ ، $ل(س) = س^{٢} و(س)$ ، احســـب $ل'(٢)$ باســـتخدام التعريف

---

٢٧) اثبـــــــــــــــــــــــــــــت ان :

$$\lim_{ع \to س} \frac{ع و(س) - س و(ع)}{ع - س} = و(س) - س و'(س)$$

الحل :

نضيف ونطرح $س و(س)$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع و(س) - س و(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س و(س) - س و(ع)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{و(س)(ع - س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} س \left(\frac{و(س) - و(ع)}{س - ع}\right)$$

$$= و(س) + س \times - و'(س)$$

$$= و(س) - س و'(س)$$ وهو المطلوب

---

٢٨) اثبـــــــــــــــــــــــــــــت ان :

$$\lim_{ع \to س} \frac{٣ع و(ع) - ٣س و(س)}{ع - س} = ٣و(س) + ٣س و'(س)$$

الحل :

نضيف ونطرح $٣س و(ع)$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع و(ع) - ٣س و(ع)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٣س و(ع) - ٣س و(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ٣و(ع)\left(\frac{ع - س}{ع - س}\right) + \lim_{ع \to س} ٣س \left(\frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}\right)$$

$$= ٣و(س) + ٣س و'(س)$$

٢٩) اثبت ان: $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(س+هـ)-و(س-هـ)}{هـ} = ٢و'(س)$

الحل :

نضيف ونطرح $و(س)$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{و(س+هـ)-و(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to 0} \frac{و(س)-و(س-هـ)}{هـ}$$

$$و'(س) + \lim_{هـ \to 0} \frac{و(ص+هـ)-و(ص)}{هـ}$$

| |
|---|
| $س - هـ = ص$ |
| $س = ص + هـ$ |
| $هـ \to 0$ |

---

٣٠) اذا كان $و'(٤) = ٦$ ، احسب $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(٤-٢هـ)-و(٤+٥هـ)}{هـ}$

الحل :

نضيف ونطرح $و(٤)$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{و(٤-٢هـ)-و(٤)}{هـ} + \lim_{هـ \to 0} \frac{و(٤)-و(٤+٥هـ)}{هـ}$$

$$= -٢ \times و'(٤) + (-٥) \times و'(٤)$$

$$= -٢ \times ٦ + (-٥) \times ٦ = -١٢ + (-٣٠) = -٤٢$$

---

٣١) اذا كانت $ص = \sqrt{س+٢}$ ، $س > -٢$ ،

احسب $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام التعريف

الحل :

$$و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع)-و(س)}{ع-س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع+٢} - \sqrt{س+٢}}{ع-س} \times \frac{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع+٢ - س-٢}{(ع-س)\left(\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}\right)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع-س}{(ع-س)\left(\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}\right)}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$$

---

٣٢) اذا كان $ل(س) = س^{٢} \left| س^{٣} - ٢ \right|$ ،

احسب $و'\left(\sqrt[٣]{٢}\right)$ باستخدام التعريف

الحل :

نعيد التعريف $\left| س^{٣} - ٢ \right|$

$$س^{٣} - ٢ = ٠ \Leftarrow س^{٣} = ٢ \Leftarrow س = \sqrt[٣]{٢}$$

| − − | × | + + |
|---|---|---|
| | $\sqrt[٣]{٢}$ | |

$$ل = س^{٢} \times \begin{cases} س^{٣} - ٢ & ، \quad س \leq \sqrt[٣]{٢} \\ -س^{٣} + ٢ & ، \quad س > \sqrt[٣]{٢} \end{cases}$$

$$ل = \begin{cases} س^{٥} - ٢س^{٢} & ، \quad س \leq \sqrt[٣]{٢} \\ -س^{٥} + ٢س^{٢} & ، \quad س > \sqrt[٣]{٢} \end{cases}$$

$$و'_{-}\left(\sqrt[٣]{٢}\right) = \lim_{س \to \sqrt[٣]{٢}^{-}} \frac{ل(س) - ل\left(\sqrt[٣]{٢}\right)}{س - \sqrt[٣]{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \sqrt[٣]{٢}^{-}} \frac{-س^{٥} + ٢س^{٢} - ٠}{س - \sqrt[٣]{٢}} = -٦\sqrt[٣]{٢}$$

$$و'_{+}\left(\sqrt[٣]{٢}\right) = \lim_{س \to \sqrt[٣]{٢}^{+}} \frac{ل(س) - ل\left(\sqrt[٣]{٢}\right)}{س - \sqrt[٣]{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \sqrt[٣]{٢}^{+}} \frac{س^{٥} - ٢س^{٢} - ٠}{س - \sqrt[٣]{٢}} = ٦\sqrt[٣]{٢}$$

$ل'\left(\sqrt[٣]{٢}\right) =$ غير موجودة

## قواعد الاشتقاق :

(١) مشتقة العدد الثابت = صفر

**امثلة :**

١) $\text{ه} = ١٨ \leftarrow \text{ه}'(\text{س}) = ٠$

٢) $\text{ه}(\text{س}) = \sqrt{٥} \leftarrow \text{ه}'(\text{س}) = ٠$

٣) $\text{ص} = \pi \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠$

---

(٢) مشتقة $\text{س}^{\text{قوة}} \Longleftarrow$ القوة $\times \text{س}^{\text{القوة}-١}$

**امثلة :**

١) $\text{ه} = \text{س}^{٩} \leftarrow \text{ه}'(\text{س}) = ٩\text{س}^{٨}$

٢) $\text{ه} = \text{س}^{-٢} \leftarrow \text{ه}'(\text{س}) = -٢\text{س}^{-٣}$

٣) $\text{ه} = \text{س}^{٥}|\text{س}^{٢}|$ ، احسب $\text{ه}'(٣)$

$\text{ه} = \text{س}^{٥} \times \text{س}^{٢} = \text{س}^{٧}$

$\text{ه}' = ٧\text{س}^{٦} = ٧(٣)^{٦} = ٥٠١٣$

٤) $\text{ه}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + ١٢$

احسب $\text{ه}'(\text{س})$

$\text{ه}'(\text{س}) = ٦\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٩$

٥) $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٩$ ، احسب $\text{هـ}'(٢)$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{٦}{٣}\text{س}^{٢} - \frac{٦}{٢}\text{س}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}$

$\text{هـ}'(٢) = ٢(٤) - ٣ \times ٢ = ٨ - ٦ = ٢$

النجاح الذي تستمتع به
اليوم هو نتيجة الثمن
الذي دفعته في الماضي .

(٣) قاعدة الضرب

$\text{ه}(\text{س}) = (\text{الاقتران الاول}) \times (\text{الاقتران الثاني})$

$\text{ه}'(\text{س}) = (\text{الاول نفسه})(\text{مشتقة الثاني}) + (\text{الثاني نفسه})(\text{مشتقة الاول})$

١) $\text{ه}(\text{س}) = (\text{س}^{٥} + ٣\text{س})(٦\text{س}^{٢} + ٩)$

$\text{ه}'(\text{س}) = (\text{س}^{٥} + ٣\text{س})(١٢\text{س}) + (٦\text{س}^{٢} + ٩)(٥\text{س}^{٤} + ٣)$

٢) $\text{ه}(\text{س}) = (\text{س}^{-٢} + ٧\text{س}^{-٣})(٣\text{س}^{-٩} + ٨)$

$\text{ه}'(\text{س}) = (\text{س}^{-٢} + ٧\text{س}^{-٣})(-٢٧\text{س}^{-١٠}) + (٣\text{س}^{-٩} + ٨)(-٢\text{س}^{-٣} - ٢١\text{س}^{-٤})$

٣) اثبت ان : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}[\text{ل}(\text{س}).\text{م}(\text{س}).\text{هـ}(\text{س})] = \text{ل}(\text{س})\text{م}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\text{هـ}(\text{س})\text{م}'(\text{س}) + \text{م}(\text{س})\text{هـ}(\text{س})\text{ل}'$

الحل :

$= \text{ل}.\text{م}.\text{هـ}' + \text{هـ} \times (\text{ل}.\text{م})'$

$= \text{ل}.\text{م}.\text{هـ}' + \text{هـ}(\text{ل}.\text{م}' + \text{م}'.\text{ل})$

$= \text{ل}.\text{م}.\text{هـ}' + \text{هـ}.\text{ل}.\text{م}' + \text{هـ}.\text{م}.\text{ل}'$

---

(٤) $\text{ه}(\text{س}) = \frac{\text{مقام}}{\text{بسط}}$

$= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

**امثلة :**

١) $\text{ه} = \frac{\text{س}^{٢} + ٢}{٣\text{س}^{٢} - ٥}$

$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{(٣\text{س}^{٢} - ٥)(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢} + ٢)(٦\text{س})}{(٣\text{س}^{٢} - ٥)^{٢}}$

٢) $هـ(س) = \frac{٢س}{٣ - س^{٢}}$ ، احسب $هـ'(١)$

$$هـ'(س) = \frac{(٣ - س^{٢})(٢) - (٢س)(-٢س)}{(٣ - س^{٢})^{٢}}$$

$$هـ'(١) = \frac{(٣ - ١)(٢) - (٢)(١ \times ٢-)}{(٣ - ١^{٢})^{٢}} = \frac{٤ + ٤}{٤} = ٢$$

واجب

٣) $هـ(س) = \frac{س^{٢}(٢س^{٢} - ٣)}{٥ - ٣س}$ ، احسب $هـ'(١)$

(٥) $هـ = \frac{\text{عدد}}{\text{اقتران}} \Leftarrow \frac{\text{سالب العدد} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

امثلة :

١) $هـ(س) = \frac{٧}{٢ + س^{٥}}$

$$هـ'(س) = \frac{-٧ \times ٥س^{٤}}{(٢ + س^{٥})^{٢}}$$

٢) $هـ(س) = \frac{-٩}{٨ + ٤س^{٢}}$

$$هـ'(س) = \frac{٩ \times ٨س}{(٨ + ٤س^{٢})^{٢}}$$

٣) $هـ(س) = ٨س^{-٢} + \frac{٩}{٨ + س^{٣}}$

$$هـ'(س) = -١٦س^{-٣} + \frac{-٩ \times ٣س^{٢}}{(٨ + س^{٣})^{٢}}$$

## المشتقات العليا :

امثلة :

١) $هـ(س) = س^{٧} + ٣س^{٥}$ ، احسب $هـ''(س)$

الحل :

$$هـ'(س) = ٧س^{٦} + ١٥س^{٤}$$
$$هـ''(س) = ٤٢س^{٥} + ٦٠س^{٣}$$
$$هـ''(س) = ٢١٠س^{٤} + ١٨٠س^{٢}$$

واجب

٢) اذا كان $هـ(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣} + \frac{٧}{٢}س^{٢} + ١٦س$

احسب $هـ''(١)$

٣) اذا كان $هـ = ٢س^{٤} + \frac{١٦}{س}$ ، احسب $هـ''(٢)$

الحل :

$$هـ = ٢س^{٤} + ١٦س^{-١}$$
$$هـ' = ٨س^{٣} - ١٦س^{-٢}$$
$$هـ'' = ٢٤س^{٢} + ٣٢س^{-٣}$$
$$هـ''' = ٤٨س - ٩٦س^{-٤}$$
$$هـ''(٢) = ٤٨ \times ٢ - \frac{٩٦}{١٦} = ٩٠$$

٤) اذا كان $هـ(س) = \frac{١}{٣}س^{ن}$ وكانت $هـ''(س) = ٤٠س^{ن-٣}$ ، فما قيمة (ن)

الحل :

$$هـ'(س) = \frac{١}{٣} \times ن \times س^{ن-١}$$
$$هـ''(س) = \frac{١}{٣} \times ن(ن-١)س^{ن-٢}$$
$$هـ'''(س) = \frac{١}{٣} \times ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$$
$$٤٠س^{ن-٣} = \frac{١}{٣} \times ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$$
$$ن(ن-١)(ن-٢) = ١٢٠$$
$$\Leftarrow ١٢٠ = ٤ \times ٥ \times ٦ \Leftarrow ن = ٦$$

٥) اذا كانت $ص = ا س^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$ ، اثبت ان :

$$س^{٢} \times ص'' = ن(ن-١) \times ص$$

الحل :

$$ص = ا س^{ن} + ب س^{-ن+١}$$
$$ص' = ن ا س^{ن-١} + ب(-ن+١)س^{-ن}$$
$$ص'' = ن(ن-١)ا س^{ن-٢} + ب(-ن+١)(-ن)س^{-ن-١}$$

اضرب الطرفين في $س^{٢}$

$$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)ا س^{ن-٢} \times س^{٢} + ب(-ن+١)(-ن)س^{-ن-١} \times س^{٢}$$
$$= ن(ن-١)ا س^{ن} + ب(ن)(ن-١)س^{-ن+١}$$
$$= ن(ن-١)(ا س^{ن} + ب س^{-ن+١}) = ن(ن-١) \times ص$$

٦) اذا كان ل(س) ، ﻫ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل´(٢) = −١ ، ل(٢) = ١٠ ، ﻫ´(٢) = ٢ ، ﻫ(٢) = −٣ ، احسب هـ´(٢) في الحالات التالية :

أ) هـ(س) = ٢ل(س) × ﻫ(س)

الحل :

هـ´(س) = ٢ل´(س) × ﻫ´(س) + ﻫ(س) × ٢ل´(س)

هـ´(٢) = ٢ل´(٢) × ﻫ´(٢) + ﻫ(٢) × ٢ × ل´(٢)

= ٢ × ١٠ × ٢ + (−٣) × ٢ × −١ = ٤٦

ب) $هـ(س) = \frac{ل(س)}{٤ + ﻫ(س)}$

الحل :

$هـ´(س) = \frac{(٤ + ﻫ(س)) \times ل´(س) - (ل(س))(٠ + ﻫ´(س))}{(٤ + ﻫ(س))^{٢}}$

$هـ´(٢) = \frac{(٤ + ﻫ(٢)) \times ل´(٢) - (ل(٢))(٠ + ﻫ´(٢))}{(٤ + ﻫ(٢))^{٢}}$

$= \frac{(٤ + (-٣))(-١) - (١٠)(٢)}{(٤ + (-٣))^{٢}} = -٢١$

واجب

٧) اذا كان ﻫ(س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ(٢) = ٣ ، هـ´(٢) = −٢ احسب ما يلي :

أ) (٣ﻫ + هـ)´(٢)

ب) (ﻫ · هـ)´(٢)

ج) $\left(\frac{ﻫ}{هـ}\right)´(٢)$

د) $\left(\frac{ﻫ(١)}{هـ}\right)´(٢)$

هـ) $\left(\frac{ﻫ}{هـ´(١)}\right)´(٢)$

و) (س + ٢هـ)´(٢)

ز) مشتقة $\frac{ﻫ}{هـ + ﻫ}$ عندما س = ٢

ح) ((ﻫ · هـ)(٢))´

٨) اذا كان ﻫ(٢) = ٣ ، ﻫ´(٢) = ٤ وكان هـ(س) = س³ · ﻫ(س) + $\frac{١٨}{ﻫ(س)}$ ، احسب هـ´(٢)

الحل :

$هـ´(س) = س^{٣} \times ﻫ´(س) + ﻫ´(س) \times ٣س^{٢} - \frac{١٨ \times ﻫ´(س)}{(ﻫ(س))^{٢}}$

$هـ´(٢) = ٨ \times ﻫ´(٢) + ﻫ´(٢) \times ١٢ - \frac{١٨ \times ﻫ´(٢)}{(ﻫ(٢))^{٢}}$

$= ٨ \times ٤ + ٣ \times ١٢ - \frac{١٨ \times ٤}{٩} = ٦٠$

٩) اذا كان ﻫ(س) = ل(س) × $(٣س^{٢} + ٤)$ وكان هـ(١) = ٢ ، ﻫ´(١) = ٠ ، احسب ل´(١)

الحل :

ﻫ´(س) = ل´(س) × (٦س) + $(٣س^{٢} + ٤)$ × ل´(س)

ﻫ´(١) = ل´(١) × (٦ × ١) + $(٣ \times ١^{٢} + ٤)$ × ل´(١)

$٠ = \frac{ﻫ(١)}{٣ + ٤} \times ٦ + ٧ \times ل´(١)$

$٠ = \frac{٢}{٧} \times ٦ + ٧ \times ل´(١)$

$٠ = \frac{١٢}{٧} + ٧ \times ل´(١)$

$\frac{-١٢}{٧} = ٧ \times ل´(١) \Leftarrow ل´(١) = \frac{-١٢}{٤٩}$

١٠) اذا كان ﻫ(٤) = ٥ ، ﻫ´(٤) = −١ ، ﻫ″(٤) = ٢ ، فما قيمة $\left(\frac{ﻫ}{ﻫ´}\right)´(٤)$

الحل :

$\left(\frac{ﻫ}{ﻫ´}\right)´(٤) = \frac{ﻫ´(٤) \times ﻫ´(٤) - ﻫ(٤) \times ﻫ″(٤)}{(ﻫ´(٤))^{٢}}$

$= \frac{-١ \times -١ - ٥ \times ٢}{١} = -٩$

واجب

١١) اذا كانت ل(س) = ﻫ(س) × هـ(س) وكانت ﻫ´(س) × هـ´(س) = جـ (ثابت) اثبت ان :

$\frac{ل″}{ل} = \frac{ﻫ″}{ﻫ} + \frac{هـ″}{هـ}$

## النهايات الخاصة :

من الممكن ان تكون النهاية على صورة تعريف المشتقة :

١) $و'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{و(س+هـ) - و(س)}{هـ}$

٢) $و'(أ) = \lim_{هـ \to 0} \frac{و(أ+هـ) - و(أ)}{هـ}$

٣) $و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$

٤) $و'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{و(ع) - و(أ)}{ع - أ}$

٥) $و''(أ) = \lim_{هـ \to 0} \frac{و'(أ+هـ) - و'(أ)}{هـ}$

٦) $و''(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{و'(ع) - و'(أ)}{ع - أ}$

٧) $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ}{و(س+هـ) - و(س)} = \frac{١}{و'(س)}$

٨) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(أس+بهـ) - و(أس)}{جهـ} = \frac{ب}{أ جـ} و'(س)$

## امثلة :

١) اذا كان $و(س) = ٣س^{٤} - ٥س^{٣}$ ،

$و'(س) = ١٢س^{٣} - ١٥س^{٢}$ ، $و'(٢) = ٣٦$

احسب :

أ) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(٢+هـ) - و(٢)}{هـ} = و'(٢) = ٣٦$

ب) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(٢) - و(٢+هـ)}{هـ} = -و'(٢) = -٣٦$

ج) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و'(س+هـ) - و'(س)}{هـ} = و''(س) = ٣٦س^{٢} - ٣٠س$

د) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(س+٥هـ) - و(س)}{٦هـ} = \frac{٥}{٦} و'(س)$

$= \frac{٥}{٦}(١٢س^{٣} - ١٥س^{٢})$

هـ) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و(٢+٧هـ) - و(٢)}{٩هـ} = \frac{٧}{٩} \times و'(٢) = \frac{٧}{٩} \times ٣٦$

و) $\lim_{هـ \to 0} \frac{و'(٣+٢هـ) - و'(٣)}{هـ}$

$= \frac{٢}{١} و''(٣) = (٣ \times ٣ - ٣٦ \times (٣)^{٢}) \frac{٢}{١} = ٢٣٤ \times ٢ = ٤٦٨$

---

٢) اذا كان $و(س) = ١س^{٣} + ٢س + ١$ وكانت

$\lim_{هـ \to 0} \frac{و'(٣+هـ) - و'(٣)}{هـ} = ٩$ ، فما قيمة $(١)$

الحل :

$و'(س) = ٣١س^{٢} + ٢$

$و''(س) = ١٦س$

$و''(٣) = ١٦ \times ٣ = ٩ \Leftarrow ١٨ = ٩ \Leftarrow ١ = \frac{١}{٩}$

---

٣) ما قيمة $\lim_{س \to ٣} \frac{و(٢س) - و(٦)}{س - ٣}$ بحيث

$و'(٣) = ٧$ ، $و'(٦) = ٩$

الحل :

افرض $ع = ٢س \leftarrow س = \frac{ع}{٢}$

$س \to ٣$ ، $ع \to ٦$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{و(ع) - و(٦)}{\frac{ع}{٢} - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{و(ع) - و(٦)}{\frac{١}{٢}(ع - ٦)}$

$= ٢ \times و'(٦) = ٢ \times ٩ = ١٨$

---

٤) $\lim_{ع \to س} \frac{س^{٩} - ع^{٩}}{ع - س} = -(س^{٩})' = -٩س^{٨}$

---

٥) $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ} = (س^{٥})' = ٥س^{٤}$

---

٦) احسب قيمة $\lim_{هـ \to 0} \frac{٨(٢+هـ)^{٤} - ٢٢}{هـ}$ عندما $س = ٢$

الحل :

$= ٨(س^{٤})' = ٨(٤س^{٣})|_{س=٢} = ٢٥٦$

٧) اذا كان $و(س) = و(س+هـ) - ٥س^{٢}هـ + ٧سهـ$
فما قيمة $و''(٢)$

الحل :

$$و'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(س+هـ) - و(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(س+هـ) - (و(س+هـ) - ٥س^{٢}هـ + ٧سهـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{و(س+هـ)} - \cancel{و(س+هـ)} + ٥س^{٢}هـ - ٧سهـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥س^{٢}هـ}{هـ} - \frac{٧سهـ}{هـ} = ٥س^{٢} - ٧س$$

$$و'(س) = ٥س^{٢} + ٧س$$

$$و''(س) = ١٠س - ٧$$

$$و''(٢) = ١٠ \times ٢ - ٧ = ١٣$$

## العلاقة بين المشتقة والاتصال :

### نظرية :

اذا كان $و(س)$ قابل للاشتقاق عند النقطة $س = ا$ فانه يكون متصلا عندما $س = ا$

البرهان :

نريد ان نثبت ان : $\lim_{س \to ا} و(س) = و(ا)$

ليكن $و(س) - و(ا) = و(س) - و(ا)$

اضرب احد الطرفين في $\frac{(س-ا)}{س-ا}$

$$و(س) - و(ا) = \frac{و(س) - و(ا)}{س-ا} \times (س-ا)$$

بأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{س \to ا} و(س) - و(ا) = \lim_{س \to ا} \frac{و(س) - و(ا)}{س-ا} \times \lim_{س \to ا} (س-ا)$$

$$\lim_{س \to ا} و(س) - و(ا) = و'(ا) \times ٠$$

$$\lim_{س \to ا} و(س) - و(ا) = ٠$$

$$\lim_{س \to ا} و(س) = و(ا) \Leftarrow و \text{ متصل عندما } س = ا$$

### ملاحظات :

١) اذا كان $و(س)$ متصل عندما $س = ا$ ليس بالضرورة بان يكون $و(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = ا$

٢) اذا كان $و(س)$ غير متصل عندما $س = ا$ فانه غير قابل للاشتقاق عندما $س = ا$

٣) اذا كان $و(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = ا$ فان :

أ) $و(س)$ متصل عندما $س = ا$

ب) $و'_{+}(ا) = و'_{-}(ا)$

٤) اذا كانت $و'_{+}(ا) \neq و'_{-}(ا) \Leftarrow و'(ا)$ غير موجودة

### مثال :

اذا كان $و(س) = \begin{cases} \sqrt{٥ + س^{٢}} & ، \quad س \geq ٢ \\ \frac{٨}{س^{٣}} + ٧س & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

هل $و(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = ٢$

الحل :

نبحث في الاتصال عندما $س = ٢$

$$و(٢) = \sqrt{٥ + ٤} = \sqrt{٩} = ٣$$

$$\lim_{س \to ٢^{-}} و(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} \sqrt{٥ + س^{٢}} = ٣$$

$$\lim_{س \to ٢^{+}} و(س) = \frac{٨}{٨} + ٧ \times ٢ = ١٥$$

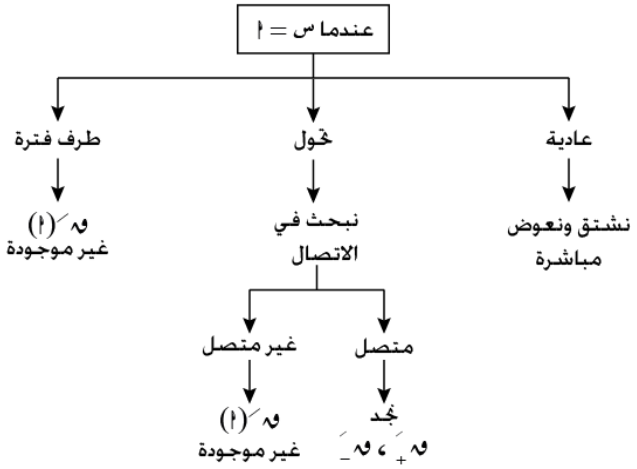
$و(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

بما ان $و(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

$\Leftarrow و(س)$ غير قابل للاشتقاق عندما $س = ٢$

## مشتقة الاقترانات المتشعبة :

اولاً : عندما س = أ




### امثلة :

١) اذا كان $و(س) = \begin{cases} س^{٣} + س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ٣س^{٢} - س & ، ١ > س > ٣ \\ ٨س & ، س \leq ٣ \end{cases}$

احسب : و´(-٢) ، و´(٢) ، و´(٧)
و´(١) ، و´(٣)

الحل :

$و´(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٢س & ، س > ١ \\ ٦س - ١ & ، ١ > س > ٣ \\ ٨ & ، س < ٣ \end{cases}$

- و´(-٢) = ٣(-٢)$^{٢}$ + ٢×-٢ = ٨
- و´(٢) = ٦×٢-١ = ١١
- و´(٧) = ٨
- و´(١) : س = ١ ← تحول ← اتصال و

و(١) = (١)$^{٣}$ + (١)$^{٢}$ = ٢

نهـــا$_{س \to ١^{+}}$ ٣س$^{٢}$ - س = ٢ ، نهـــا$_{س \to ١^{-}}$ س$^{٣}$ + س$^{٢}$ = ٢

و(س) متصل عندما س = ١

و$_{+}$´(١) = ٣(١)$^{٢}$ + ٢(١) = ٥

و$_{-}$´(١) = ٦×١-١ = ٥

و´(١) = ٥ موجودة

- و´(٣) : س = ٣ ← تحول ← اتصال و

و(٣) = ٨×٣ = ٢٤

نهـــا$_{س \to ٣^{+}}$ ٨س = ٢٤ ، نهـــا$_{س \to ٣^{-}}$ ٣س$^{٢}$ - س = ٢٤

و(س) متصل عندما س = ٣

و$_{+}$´(٣) = ٨ ، و$_{-}$´(٣) = ٦×٣-١ = ١٧

و´(٣) = غير موجودة

---

٢) اذا كان $و(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق عندما س = ١

الحل :

$و(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١} & ، س < ١ \\ \frac{س^{٣} - ١}{س - ١} & ، س > ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{(س-١)(س^{٢} + س + ١)}{س - ١} & ، س < ١ \\ \frac{(س-١)(س^{٢} + س + ١)}{س - ١} & ، س > ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$

$و(س) = \begin{cases} س^{٢} + س + ١ & ، س < ١ \\ س^{٢} + س + ١ & ، س > ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$

$و´(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ١ \\ ٢س + ١ & ، س > ١ \end{cases}$

س = ١ ← تحول ← اتصال و

و(١) = ٣

نهـــا$_{س \to ١^{+}}$ س$^{٢}$ + س + ١ = ٣ ، نهـــا$_{س \to ١^{-}}$ س$^{٢}$ + س + ١ = ٣

و(س) متصل عندما س = ١

و$_{+}$´(١) = ٣ ، و$_{-}$´(١) = ٣

⇐ و(س) قابل للاشتقاق عندما س = ١

٣) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + ٥\text{س} & ، \text{س} \le ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} + \text{ب} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

قابل للاشتقاق عندما س = ٢ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

$\text{ق}(\text{س})$ متصل $\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{أس}^{٢} + ٥\text{س} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} ٣\text{س}^{٢} + \text{ب}$

$٤\text{أ} + ١٠ = ١٢ + \text{ب}$

$\text{ب} - ٤\text{أ} = ٢ \ldots\ldots (١)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أس} + ٥ & ، \text{س} > ٢ \\ ٦\text{س} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\text{ق}'_{+}(٢) = \text{ق}'_{-}(٢)$

$٤\text{أ} + ٥ = ١٢ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{٧}{٤}}$

نعوض في المعادلة (١)

$\text{ب} - ٤\text{أ} = ٢ \Leftarrow \text{ب} - \cancel{٤} \times \frac{٧}{\cancel{٤}} = ٢ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٩}$

٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} & ، \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٣} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

فما قيم أ ، ب ، جـ اذا كانت $\text{ق}''(٢)$ موجودة

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أس} + \text{ب} & ، \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أ} & ، \text{س} < ٢ \\ ٦\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

$\text{ق}''_{+}(٢) = \text{ق}''_{-}(٢)$

$٦ \times ٢ = ٢\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٦}$

وكذلك $\text{ق}'_{+}(٢) = \text{ق}'_{-}(٢)$

$٣(٢)^{٢} = ٢\cancel{\text{أ}}^{٦} \times ٢ + \text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = -١٢}$

وكذلك $\text{ق}(\text{س})$ متصل

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{س}^{٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{أس}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

$٨ = ٦(٢)^{٢} + (-١٢)٢ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٨}$

ثانياً : تحول والمطلوب المشتقة من جهة واحدة

$\text{ق}'_{+}(\text{أ})$ او $\text{ق}'_{-}(\text{أ})$

متصل ← نشتق ونعوض مباشرة

غير متصل ← نرجع لدرس استخدام تعريف المشتقة

**مثال :**

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، \text{س} \le ١ \\ \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

احسب : $\text{ق}'_{+}(١)$ ، $\text{ق}'_{-}(١)$

الحل :

الاتصال = $\text{ق}(١) = ٣$

$\lim\limits_{\text{س}\to ١^{+}} \text{ق} = ٣$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ١^{-}} \text{ق} = ٢$

$\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عندما س = ١

$\Leftarrow$ نلجأ الى استخدام تعريف المشتقة

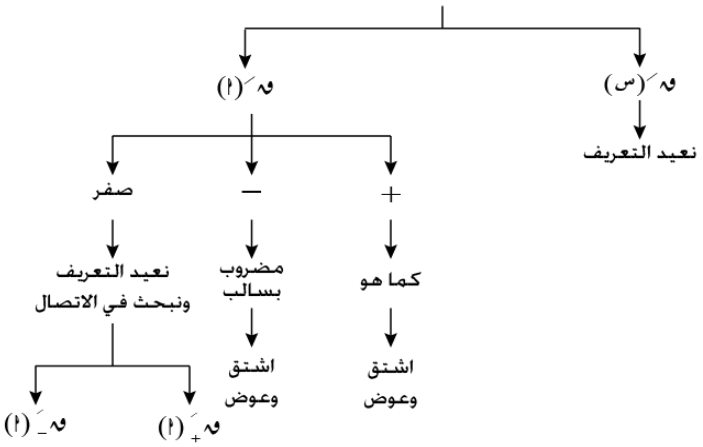
$\text{ق}'_{+}(١) = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١} = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{٢\text{ع} + ١ - ٣}{\text{ع} - ١}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - ١)}}{\cancel{\text{ع} - ١}} = ٢ \Leftarrow \text{ق}'_{+}(١) = ٢$

$\text{ق}'_{-}(١) = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{-}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١} = \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{-}} \frac{\text{ع}^{٢} + ١ - ٣}{\text{ع} - ١}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to ١^{+}} \frac{\text{ع}^{٢} - ٢}{\text{ع} - ١} = \frac{١ - ٢}{١ - ١} = \frac{-١}{٠} = \text{غ.م}$

## مشتقة اقتران القيمة المطلقة :




## امثلة :

١) اذا كان ه(س) = ٧س + |٦ − ٣س| ، احسب ه´(٥) ، ه´(٠) ، ه´(٢)

الحل :

٦ − ٣س = ٠ ← س = ٢

| ٦ − ٣س | | ٣س − ٦ |
|---|---|---|
| + + + + | ٢ | − − − − |

$$ه(س) = \begin{cases} ٦ + ٤س & ، \quad س > ٢ \\ ١٠ - ٦س & ، \quad س \leq ٢ \end{cases}$$

$$ه´(س) = \begin{cases} ٤ & ، \quad س > ٢ \\ ١٠ & ، \quad س < ٢ \\ غ.م & ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

ه´(٥) = ١٠ ، ه´(٠) = ٤

س = ٢ ← تحول ← اتصال ه

ه(٢) = ٢٠ − ٦ = ١٤

نهـا ه = ١٤ ، نهـا ه = ١٤

س←٢+ ، س←٢−

ه(س) متصل عندما س = ٢

ه´+(٢) = ١٠ ، ه´−(٢) = ٤ ⇐ ه´(٢) = غ.م

٢) اذا كان ه(س) = ٣س|٢س| ،

احسب ه´(٠) ، ه´´(٠) ، ه´´´(٠)

الحل :

٢س = ٠ ← س = ٠

| | | |
|---|---|---|
| − − | ٠ | + + |

$$ه´(س) = \begin{cases} -٦س^{٢} & ، \quad س < ٠ \\ ٦س^{٢} & ، \quad س \geq ٠ \end{cases}$$

$$ه´´(س) = \begin{cases} -١٢س & ، \quad س < ٠ \\ ١٢س & ، \quad س > ٠ \end{cases}$$

ه(س) متصل عندما س = ٠

ه´+(٠) = ه´−(٠) = ٠

$$ه´´´(س) = \begin{cases} -١٢ & ، \quad س < ٠ \\ ١٢ & ، \quad س > ٠ \end{cases}$$

ه´(س) متصل عندما س = ٠

ه´+(٠) ≠ ه´−(٠) ⇐ ه´´(٠) = غ.م

$$ه´´´(س) = \begin{cases} رفص & ، \quad س < ٠ \\ رفص & ، \quad س > ٠ \end{cases}$$

⇐ ه´´´(٠) = غ.م لان ه´´(س) غير موجودة

٣) اذا كان ه(س) = |س^٣ − ٥س − ٢| ،

احسب ه´(١) ، ه´(٣)

الحل :

نعوض مباشرة س = ١ ⇐ سالب

ه(س) = −س^٣ + ٥س + ٢

ه´(س) = −٣س^٢ + ٥ ⇐ ه´(١) = −٣ + ٥ = ٢

عندما س = ٣ ⇐ نعوض مباشرة ⇐ موجب

ه(س) = س^٣ − ٥س − ٢

ه´(س) = ٣س^٢ − ٥

⇐ ه´(٣) = ٢٧ − ٥ = ٢٢

٤) اذا كان ه(س) = |س^٢ − ٥| + |٣س − ٢| ،

احسب ه´(٢)

الحل :

عند س = ٢ ⇐ |س^٢ − ٥| = سالب

عند س = ٢ ⇐ |٣س − ٢| = موجب

ه(س) = −س^٢ + ٥ + ٣س − ٢

ه´(س) = −٢س + ٣

⇐ ه´(٢) = −٤ + ٣ = −١

## ملاحظات :

١) اذا علم احد المشتقات موجودة عند النقطة فكل ما قبلها يكون موجودا عند تلك النقطة

٢) اذا كانت احدى المشتقات غير موجودة عند تلك النقطة فكل ما بعدها غير موجود عند نفس النقطة

## مشتقة اكبر عدد صحيح :

اذا كان اكبر عدد صحيح لوحده فان :

$$\frac{د}{د س}[هـ] = \begin{cases} \text{رفص} & ، \quad هـ(س) \notin ص \\ \text{غ.م} & ، \quad هـ(س) \in ص \end{cases}$$

## امثلة :

١) اذا كان $هـ(س) = \left[\frac{س}{٣} - ٥\right]$ ، احسب $هـ'(٢)$ ، $هـ'(٦)$

الحل :

$هـ'(٢) = ٠$ ، $هـ'(٦) = \text{غ.م}$

٢) اذا كان $هـ(س) = [٢س + ٠,٤]$ ، احسب $هـ'(٣)$ ، $هـ'(١,٣)$

الحل :

$هـ'(٣) = ٠$ ، $هـ'(١,٣) = \text{غ.م}$

٣) اذا كان $هـ(س) = [٢س] + ٥$ ، احسب $هـ'(س)$

الحل :

$$هـ(س) = [٢س] + ٥$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad ٢س \notin ص \\ \text{غ.م} & ، \quad ٢س \in ص \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٠ & ، \quad س \notin \frac{ص}{٢} \\ \text{غ.م} & ، \quad س \in \frac{ص}{٢} \end{cases}$$

٤) اذا كان $هـ(س) = \frac{٤}{س} + \left[\frac{س}{٣}\right]$ ، احسب $هـ'(٢)$

الحل :

$$هـ'(س) = \frac{-٤}{س^{٢}} + ٠ = \frac{-٤}{٤} = -١$$

٥) اذا كان $هـ(س) = \frac{\left[٢ + \frac{س}{٢}\right]}{|٣ - ٢س|}$ ، احسب $هـ'(٣)$

الحل :

$|٣ - ٢س|$ موجب عندما $س = ٣$

$\left[٢ + \frac{س}{٢}\right] = ٣$ عندما $س = ٣$

$$هـ(س) = \frac{٣}{٣ - ٢س}$$

$$هـ'(س) = \frac{-٣ \times ٢}{(٣ - ٢س)^{٢}} \Leftarrow هـ'(٣) = \frac{-٦}{٩}$$

٦) اذا كان $هـ(س) = [س] - |س|$ ، احسب $هـ'(-٢,٥)$

الحل :

$[س] = -٣$ عندما $س = -٢,٥$

$|س|$ = سالب عندما $س = -٢,٥$

$هـ(س) = -٣ - (-س) = -٣ + س$

$هـ'(س) = ١ \Leftarrow هـ'(-٢,٥) = ١$

٧) اذا كان $هـ(س) = [٢س + ٢] - [٢س - ٣]$ ، احسب $هـ'(س)$

الحل :

$$هـ(س) = \cancel{[٢س]} + ٢ - \cancel{[٢س]} + ٣$$

$هـ(س) = ٥ \Leftarrow هـ'(س) = ٠$

٨) اذا كان $هـ(س) = س^{٣} \cdot [س]$ ، احسب $هـ'(٠)$ ، $هـ'(١)$

الحل :

$[س] \leftarrow ل = ١$ ، $س = ٠$

$$هـ(س) = س^{٣} \times \begin{cases} -١ & ، \quad -١ \geq س > ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ \geq س > ١ \\ ١ & ، \quad ١ \geq س > ٢ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} -س^{٣} & ، \quad -١ \geq س > ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ \geq س > ١ \\ س^{٣} & ، \quad ١ \geq س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{ه}'(\text{س}) = \begin{cases} -٣\text{س}^{٢} & ، \quad -١ < \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س}^{٢} & ، \quad ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

ه(س) متصل عندما س = ٠

$\text{ه}'_{+}(٠) = ٠$ ، $\text{ه}'_{-}(٠) = ٠ \Leftarrow$ ه$'(٠) = ٠$ = موجودة

ه(س) غير متصل عندما س = ١ $\Leftarrow$ ه$'(١)$ = غ.م

---

٩) اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{[٠,٣ + ٣\text{س}]}{|\text{س}^{٢} - ١|}$ ، احسب ه$'(٢)$

الجواب : $\left(\dfrac{-٢٤}{٩}\right)$

---

١٠) اذا كان ه(س) = [س − ٢] ، احسب ه$'(٥)$

الجواب : غير قابل للاشتقاق

---

١١) اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{[\text{س}] + ٢}{\text{س} + ٢}$ ، احسب ه$'(١)$

الجواب : غير قابل للاشتقاق

---

١٢) اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{[٠,٥\text{س}]}{\text{هـ}(\text{س})}$ ،

هـ(٣) = ٣ ، هـ$'(٣) = -٢$ ، احسب ه$'(٣)$

الجواب : $\left(\dfrac{٢}{٩}\right)$

---

## الحالات التي يكون غير قابل للاشتقاق عندها :

١) نقاط عدم الاتصال

٢) عند $\text{ه}'_{+} \neq \text{ه}'_{-}$

٣) المقام = صفر

٤) اطراف المجال المغلق

٥) في [ ] عندما ه $\ni$ ص

٦) الرسم : الاطراف ، الرؤوس المدببة ، نقاط الانقطاع والفجوات

---

١٣) اذا كان ه(س) = [س − ٢] ، بين فيما اذا كان قابل للاشتقاق عندما س = ٥

الحل :

[س − ٢] $\Leftarrow$ ل = ١

$$[\text{س} - ٢] = \begin{cases} ٢ & ، \quad ٤ \geq \text{س} > ٥ \\ ٣ & ، \quad ٥ \geq \text{س} > ٦ \end{cases}$$

الاتصال :

ه(٥) = ٣

نهـا ه(س) = ٣ ، نهـا ه(س) = ٢
س←٥⁺ ، س←٥⁻

$\Leftarrow$ ه(س) متصل عندما س = ٥

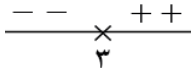
$\Leftarrow$ ه(س) غير قابل للاشتقاق عندما س = ٥

---

١٤) اذا كان ه(س) = |س − ٣| ، ابحث في قابلية الاشتقاق عندما س = ٣

الحل :

نعيد التعريف |س − ٣|




$\Leftarrow$ س − ٣ = ٠ $\Leftarrow$ س = ٣

$$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} \leq ٣ \\ -(\text{س} - ٣) & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$$

الاتصال :

ه(٣) = ٠

نهـا ه(س) = ٠ ، نهـا ه(س) = ٠
س←٣⁺ ، س←٣⁻

$\Leftarrow$ ه(س) متصل عندما س = ٣

$$\text{ه}'(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، \quad \text{س} < ٣ \\ -١ & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$$

$\text{ه}'_{+}(٣) = ١$ ، $\text{ه}'_{-}(٣) = -١$

$\Leftarrow$ ه(س) غير قابل للاشتقاق عندما س = ٣

١٥) ابحث قابلية و(س) = $\frac{[س]+٢}{س+٢}$ الاشتقاق عندما س = ١

الحل :

نعيد التعريف

$[س] = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \le س < ١ \\ ١ & ، ١ \le س < ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow$ و(س) = $\begin{cases} \frac{٢}{س+٢} & ، ٠ \le س < ١ \\ \frac{٣}{س+٢} & ، ١ \le س < ٢ \end{cases}$

الاتصال :

و(١) = $\frac{٣}{٣}$ = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ و(س) = ١ ، $\lim_{س \to ١^-}$ و(س) = $\frac{٢}{٣}$

$\Leftarrow$ و(س) غير متصل عندما س = ١

$\Leftarrow$ و(س) غير قابل للاشتقاق عندما س = ١

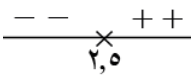
---

١٦) اذا كان و(س) = $\begin{cases} |٢س-٥| & ، ٠ \le س \le ٣ \\ س[\frac{٢}{٣}س] & ، ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$

اوجد و´(س) على [٠،٤]

الحل :

$|٢س-٥| \Leftarrow$ س = ٢,٥




$[\frac{٢}{٣}س] = \{٢ \quad ، \quad ٣ \le س \le ٤$

$\Leftarrow$ و(س) = $\begin{cases} ٥-٢س & ، ٠ \le س \le ٢,٥ \\ ٢س-٥ & ، ٢,٥ \le س < ٣ \\ ٢س & ، ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

الاتصال :

- فترات مفتوحة
- التحول : عندما س = ٢,٥ متصل

عندما س = ٣ متصل

- الاطراف $\Leftarrow$ مغلقة $\Leftarrow$ متصل عندها
- النتيجة : و(س) متصل على [٠،٤] − {٣}

و´(س) = $\begin{cases} -٢ & ، ٠ < س < ٢,٥ \\ ٢ & ، ٢,٥ < س < ٣ \\ ٢ & ، ٣ < س < ٤ \\ غ.م & ، س = ٠ ، ٤ ، ٣ ، ٢,٥ \end{cases}$

و´$_+$(٢,٥) = ٢ ، و´$_-$(٢,٥) = −٢

$\Leftarrow$ و´(٢,٥) غير موجودة

---

١٧) اذا كان و(س) = $\frac{[س،٥]}{هـ(س)}$ اذا علمت ان هـ(٣) = ٣ ، هـ´(٣) = −٢ ، اوجد و´(٣)

الحل :

[س،٥] = ١ عندما س = ٣

و(س) = $\frac{١}{هـ(س)}$ عندما س = ٣

و´(س) = $\frac{-هـ´(س)}{(هـ(س))^٢}$ $\Leftarrow$ و´(س) = $\frac{٢}{٩}$

---

١٨) اذا كان و(س) = $\begin{cases} |٨س-٦| & ، ٢ \le س < ٣ \\ س[٢س] & ، ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

اوجد و´(س) للاقتران في [٢،٤]

الحل :

و(س) = $\begin{cases} ٨س-٦ & ، ٢ \le س < ٣ \\ ٦س & ، ٣ \le س < ٣,٥ \\ ٧س & ، ٣,٥ \le س < ٤ \end{cases}$

الاتصال :

و(س) غير متصل عندما س = ٣,٥

$\Leftarrow$ و(س) متصل على [٢،٤) − {٣,٥}

و´(س) = $\begin{cases} ٨ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٦ & ، ٣ < س < ٣,٥ \\ ٧ & ، ٣,٥ < س < ٤ \\ غ.م & ، س = ٢ ، ٣,٥ ، ٣ \end{cases}$

و´$_-$(٣) = ٨ ، و´$_+$(٣) = ٦

$\Leftarrow$ و´$_+$(٣) $\neq$ و´$_-$(٣) $\Leftarrow$ و´(٣) غير موجودة

١٩) اذا كـــان $\text{ه}(س) = \begin{cases} \frac{١}{س - ١} & ، \quad س \leq ٢ \\ أ + ب س^{٢} & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

$\text{ه}(س)$ قابلا للاشتقاق عندما $س = ٢$ ، اوجد قيمة الثابتين $أ ، ب$

الحل :

بما ان $\text{ه}(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = ٢$

$\Leftarrow \text{ه}_{+}'(٢) = \text{ه}_{-}'(٢)$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} \frac{-١}{(س - ١)^{٢}} & ، \quad س < ٢ \\ ٢ب س & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

$-١ = ٤ب \Leftarrow \boxed{ب = \frac{-١}{٤}}$

$\text{ه}(س)$ متصل عندما $س = ٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^{+}} \text{ه}(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} \text{ه}(س)$

$\Leftarrow ١ = أ + \frac{-١}{٤} \times ٤ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

---

٢٠) اذا كان $\text{ه}(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٣س & ، \quad ٠ \geq س > ١ \\ أس^{٢} + ب س & ، \quad ١ \geq س \geq ٢ \end{cases}$

قابلا للاشتقاق على $(٢ ، ٠)$ ، فجد قيم $أ ، ب$

الحل :

بما ان $\text{ه}(س)$ قابل للاشتقاق على $(٢ ، ٠)$

$\Leftarrow \text{ه}'(س)$ قابل للاشتقاق عندما $س = ١$

$\Leftarrow \text{ه}_{+}'(١) = \text{ه}_{-}'(١)$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٣ & ، \quad ٠ < س < ١ \\ ٢أس + ب & ، \quad ١ < س < ٢ \end{cases}$

$\text{ه}_{+}'(١) = \text{ه}_{-}'(١) \Leftarrow ٢أ + ب = 0$ رفص.....(١)

$\text{ه}(س)$ متصل عندما $س = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١^{+}} \text{ه}(س) = \lim_{س \to ١^{-}} \text{ه}(س)$

$أ + ب = -٢ \Leftarrow .....(٢)$

$٢أ + ب = ٠ .....(١)$

$-أ - ب = ٢ .....(٢)$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٢} \Leftarrow ٢ + ب = -٢ \Leftarrow \boxed{ب = -٤}$

---

وزاري

٢١) اذا كان $\text{ه}(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ٥س & ، \quad س \leq ٢ \\ ٣س^{٣} + ب & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

قابلا للاشتقاق عندما $س = ٢$ ، اوجد قيم $أ ، ب$

الحل :

الاتصال عندما $س = ٢ \Leftarrow$

$\lim_{س \to ٢^{+}} \text{ه}(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} \text{ه}(س) = \text{ه}(٢)$

$\Leftarrow ٣ \times (٢)^{٣} + ب = أ \times (٢)^{٢} + ٥ \times ٢$

$٢٤ + ب = ١٠ + ٤أ$

$ب - ٤أ = -١٤ .....(١) \Leftarrow$

من شروط الاشتقاق عند $س = ٢$

$\text{ه}_{+}'(٢) = \text{ه}_{-}'(٢)$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ٢أس + ٥ & ، \quad س < ٢ \\ ٩س^{٢} & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow ٤أ + ٥ = ٣٦ \Leftarrow ٤أ = ٣١ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{٣١}{٤}} .....(٢)$

عوض (٢) في (١) $\Leftarrow ب - ٤ \times \frac{٣١}{٤} = -١٤$

$\Leftarrow ب - ٣١ = -١٤ \Leftarrow \boxed{ب = ١٧}$

---

وزاري

٢٢) اذا كـــــان $\text{ه}(س) = \frac{١}{أ + ٣س}$ ، $س \neq \frac{-٣}{أ}$

وكانت $\text{ه}'(١) = ٢$ ، اوجد قيم الثابت $(أ)$

الحل :

$\text{ه}(س) = \frac{١}{أ + ٣س} \Leftarrow \text{ه}'(س) = \frac{-أ}{(أ + ٣س)^{٢}}$

$\Leftarrow \text{ه}'(١) = ٢ \Leftarrow \frac{-أ}{(أ + ٣)^{٢}} = ٢$

$\Leftarrow ٢(أ + ٣)^{٢} = -أ$

$٢(٩ + ٦أ + أ^{٢}) = -أ$

$١٨ + ١٢أ + ٢أ^{٢} = -أ$

$٢أ^{٢} + ١٣أ + ١٨ = ٠ \Leftarrow (٢ + أ)(٩ + ٢أ) = ٠$

$\Leftarrow$ اما $أ = -٢$ او $أ = \frac{٩}{-٢}$

وزاري

٢٣) اذا كـــــــــان $و(١) = -٣$ ، $و'(١) = ٢$ ،
فجد $\left(\sqrt{س} \cdot و(س)\right)'(١)$

الحل :

$$\left(\sqrt{س} \cdot و(س)\right)' = \frac{١}{٢\sqrt{س}} و(س) + و'(س) \sqrt{س}$$

$$\Leftarrow \left(\sqrt{س} \cdot و(س)\right)'(١) = \frac{١}{٢} و(١) + و'(١) \times \sqrt{١}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢} \times (-٣) + (٢) \times ١ \Leftarrow \frac{-٣}{٢} + ٢ = \frac{١}{٢}$$

وزاري

٢٤) اذا كـــان $و(س) = \frac{ك(س)}{هـ(س)}$ حيث $هـ(س) \neq ٠$
وكـان كـلا مـن $ك(س)$ ، $هـ(س)$ قـابلا للاشـتقاق
عنـــــــــــــدما $س = ا$ ، $و'(ا) = ٠$ ،
اثبت ان : $و(ا) = \frac{ك'(ا)}{هـ'(ا)}$

الحل :

$$و(س) = \frac{ك(س)}{هـ(س)}$$

$$و'(س) = \frac{ك'(س) هـ(س) - هـ'(س) ك(س)}{(هـ(س))^٢}$$

$$و'(ا) = \frac{ك'(ا) هـ(ا) - هـ'(ا) ك(ا)}{(هـ(ا))^٢} = ٠$$

$$هـ(ا) ك'(ا) - هـ'(ا) ك(ا) = ٠$$

$$هـ(ا) ك'(ا) = هـ'(ا) ك(ا)$$

بقسمة الطرفين على $هـ'(ا)$ ثم على $هـ(ا)$

$$\frac{ك'(ا)}{هـ'(ا)} = \frac{ك(ا)}{هـ(ا)} \quad \text{لكن } و(ا) = \frac{ك(ا)}{هـ(ا)}$$

$$\Leftarrow و(ا) = \frac{ك'(ا)}{هـ'(ا)}$$

٢٥) اذا كـــان $و(س) = ٢س^٣ - س^٢ + ٦$ حيـــث
$س \in [٠،٢]$ ، اوجـد جميـع قـيم $(س)$ التـي تجعـل
$و'(س) = ٠$

الحل :

$$و'(س) = ٦س^٢ - ٢س = ٠$$

$$س(٦س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin (٠،٢)$$

لاحظ ان $س = ٠$ طرف المشتقة غير موجودة
او $٦س - ٢ = ٠ \Leftarrow ٦س = ٢ \Leftarrow س = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} \in (٠،٢)$

٢٦) اذا كـــان $و(س) = \frac{س^٣}{٣} - ٤س$ ، $س \in [٠،٤]$ ،
اوجد جميع قيم $(س)$ التي تجعل $و'(س) = ٠$

الحل :

$$و'(س) = س^٢ - ٤ = ٠$$

$$\Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$$

عندما $س = -٢ \notin (٠،٤)$

عندما $س = ٢ \in (٠،٤)$

٢٧) اذا كان $ص = س^٣ + س^٢ - س - ١$ ، اوجد جميع
النقط على المنحنى بحيث ان $\frac{د ص}{د س} = ٠$

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ٢س - ١$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٠ \Leftarrow ٣س^٢ + ٢س - ١ = ٠$$

$$\Leftarrow (٣س - ١)(س + ١) = ٠$$

عندما $س = \frac{١}{٣} \Leftarrow$

$$ص = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ - \frac{١}{٣} - ١ = \frac{-٣٢}{٢٧}$$

عندما $س = -١ \Leftarrow ص = ٣ \times ١ - ٢ - ١ = ٠$

$\Leftarrow$ النقاط هي : $\left(\frac{١}{٣}، \frac{-٣٢}{٢٧}\right)$ ، $(-١، ٠)$

٢٨) اذا كان $و(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤ & ، \ س \leq ٢ \\ ٣س^٢ & ، \ س > ٢ \end{cases}$

اوجد $و''(٢)$

الحل :

الاتصال :

$و(٢) = ٤$

$\lim_{س \to ٢^+} و(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢^-} و(س) = ١٢$

$\Leftarrow و(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

لان $و(٢) \neq \lim_{س \to ٢^+} و(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} و(س)$

$\Leftarrow و'(٢)$ غير موجودة $\Leftarrow و''(٢)$ غير موجودة

٢٩) اذا كان $هـ(س) = (٣س^{٢} + ٢)(س^{٣} - ٢س + ١)$

اثبت ان : $هـ'(١) \times هـ''(١) = ٢١٠$

الحل :

$هـ'(س) = (٦س)(س^{٣} - ٢س + ١) + (٣س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} - ٢)$

$هـ'(١) = ٦ \times (١ - ٢ + ١) + (٣ + ٢)(٣ - ٢)$

$= ٥ \times ١ = ٥$

$هـ''(س) = (٦س)(٣س^{٢} - ٢) + (٣س^{٢} + ٢)(٦س)$

$+ (س^{٣} - ٢س + ١) \times ٦ + ٦س(٣س^{٢} - ٢)$

$هـ''(١) = (٦)(٣ + ٢)(٦) + (٦)(٣ - ٢)$

$+ (٦)(١ - ٢ + ١) + ٦(٣ - ٢)$

$= ٣٠ + ٦ + ٠ + ٦ = ٤٢$

$\Leftarrow هـ'(١) \times هـ''(١) = ٥ \times ٤٢ = ٢١٠$

---

٣٠) اذا كان $هـ(س) = \frac{٢}{س}$ ، اثبت ان : $\frac{هـ'(١)}{هـ''(٢)} = -٤$

الحل :

$هـ'(س) = \frac{-٢}{س^{٢}} \Leftarrow هـ'(١) = \frac{-٢}{١} = -٢$

$هـ''(س) = \frac{٢ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٤س}{س^{٤}} = \frac{٤}{س^{٣}}$

$\Leftarrow هـ''(٢) = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{هـ'(٢)}{هـ''(٢)} = \frac{-٢}{\frac{١}{٢}} = -٤$

---

٣١) اذا كان $ص = \frac{١}{٣}م^{٣} + \frac{١}{٢}م^{٢} - ١$ ، اثبت ان :

$٦ص - ٢م ص' + ٣ص'' = \left(\frac{ص' - ١}{ص''}\right)^{٢}$

الحل :

$ص' = م^{٢} + م$ ، $ص'' = ٢م + ١$ ، $ص''' = ٢$

$٦ص - ٢م ص' + ٣ص'' =$

$٦\left(\frac{١}{٣}م^{٣} + \frac{١}{٢}م^{٢} - ١\right) - ٢م(م^{٢} + م) + ٣(٢)$

$= ٢م^{٣} + ٣م^{٢} - ٦ - ٢م^{٣} - ٢م^{٢} + ٦ = م^{٢}$

$\left(\frac{ص' - ١}{ص''}\right)^{٢} = \left(\frac{٢م + ١ - ١}{٢}\right)^{٢} = (م)^{٢} = م^{٢}$

$\therefore ٦ص - ٢م ص' + ٣ص'' = \left(\frac{ص' - ١}{ص''}\right)^{٢}$

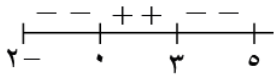
---

٣٢) اذا كان $هـ(س) = |٣س - س^{٢}|$ لكل $س \in [-٢ ، ٥]$ ، احسب $هـ'(س)$

الحل :

نعيد التعريف $|٣س - س^{٢}|$

$٣س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٣ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٣$




$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س & ، \quad -٢ \leq س > ٠ \\ ٣س - س^{٢} & ، \quad ٠ < س < ٣ \\ س^{٢} - ٣س & ، \quad ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & ، \quad -٢ < س > ٠ \\ ٣ - ٢س & ، \quad ٠ < س < ٣ \\ ٢س - ٣ & ، \quad ٣ < س < ٥ \\ غ.م & ، \quad س = -٢ ، ٠ ، ٣ ، ٥ \end{cases}$

$-٢ ، ٥$ : اطراف / $هـ'_{+}(٣) \neq هـ'_{-}(٣)$

$هـ'_{+}(٠) \neq هـ'_{-}(٠)$

---

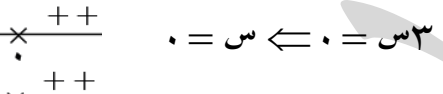
٣٣) اذا كان $هـ(س) = |٣س| + |س - ٢|$ ،

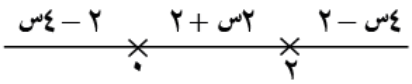
احسب $هـ'(س)$

الحل :

$|٣س| \Leftarrow ٣س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$|س - ٢| \Leftarrow س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$




$هـ'(س) = \begin{cases} -٤ & ، \quad س < ٠ \\ ٢ & ، \quad ٠ < س < ٢ \\ ٤ & ، \quad س > ٢ \\ غ.م & ، \quad س = ٠ ، ٢ \end{cases}$

السبب : $هـ'_{+}(٠) \neq هـ'_{-}(٠)$

$هـ'_{+}(٢) \neq هـ'_{-}(٢)$